

И.А.ЧЕРДАНЦЕВ

**Т Е О Р И Я
ПЕРЕМЕННЫХ ТОКОВ**

ОНТИ-НКТЛ

ЭНЕРГОИЗДАТ

1934

ДЕП

Проф. И. А. ЧЕРДАНЦЕВ

621.3

4 458

ТЕОРИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ТОКОВ

ИЗДАНИЕ ПЯТОЕ
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Допущено КВТО при ЦИК СССР
в качестве руководства для энергетических вузов

ПРОВЕДЕНО



ОНТИ НКТП

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

МОСКВА * 1934 * ЛЕНИНГРАД

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
БИБЛИОТЕКА

ИНДЕКС ЭЭ-10-52

Редактор Энергоиздата Д. А. Полянский
Технический редактор С. В. Вишневский

ТКК № 49 от 10.IV 1934 г.

1966 г.

Сдано в производство с матриц 21/VII 1934 г.

Уполномоченный Главлита № В-81326; Формат бумаги $72 \times 105/16$ см; $13\frac{3}{8}$ бум. листов
по 146944 знаков; Авт. листов 48. Энергоиздат № 523: Заказ № 3074. Тираж 15000 экз.

2-я типография. ОНТИ имени Евг. Соколовой. Ленинград, просп. Красных Командиров, 19.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЯТОМУ ИЗДАНИЮ

Когда осенью 1933 г. я готовил пятую редакцию моей „Теории переменных токов“, исполнилось десять лет со дня выхода в свет ее первого издания.

Объем книги в пятом издании в два с половиной раза больше, чем в первом. Это произошло не от моего стремления увеличить ее, нет, причиной были запросы читателя. За десять лет планы и программы вузов выросли, выросла и эта книга.

На всякое увеличение материала я шел с осторожностью, дабы не лишить книгу характера легко проходимого курса. Например, лишь после настойчивых заявлений со стороны ряда преподавателей вузов внес я в это, пятое, издание элементарную теорию работы синхронной машины.

Соображения, которые заставили меня сделать эту и другие подобные вставки, были следующие:

В середине курса, „Теории переменных токов“, не только моего, но и всякого другого, излагается всегда теория вращающегося магнитного поля и эквивалентная схема всеобщего трансформатора. То и другое имеет отвлеченный характер и не возбуждает большого интереса у студента, если не будет связано с идеей асинхронного двигателя; чтобы последнюю конкретизировать, необходимо ввести в кое-какие детали работы и устройства этого двигателя.

Этим студенты готовятся к курсу „Электрических машин“. При этом самый главный источник переменного тока, с которого мы начинаем курс „Теории переменных токов“, — синхронная машина — остается в тени, ее работа остается совершенно невыясненной для студента; в параграфах об улучшении косинуса фи нельзя говорить о перевозбужденном синхронном двигателе и т. д.

Далее, работа синхронной машины является еще и чрезвычайно простым и удобным примером для выяснения важности и практической идеи геометрических мест в электротехнике.

Все эти соображения заставили меня ввести в курс элементы теории работы синхронной машины.

Само собой разумеется, что в случае недостатка времени они могут быть выпущены при прохождении курса „Переменных токов“.

В пятом издании увеличено число примеров, иначе изложены векторные уравнения и произведен целый ряд мелких дополнений и улучшений.

При этой работе моим незаменимым помощником был инж. А. И. Даревский, которому принадлежит упрощение доказательств нескольких теорем в круговых диаграммах и теории длинных линий и который подготовил книгу к печати и вел все корректуры. От души благодарю его за его помощь.

15 марта 1934 г

Проф. И. Черданцев

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к пятому изданию	3

ВВЕДЕНИЕ

Технические способы получения периодической э. д. с.

Основные понятия

§ 1. Принцип устройства генератора переменного тока	10
§ 2. Графическое изображение хода изменений э. д. с.	12
§ 3. Период, частота, число оборотов и число полюсов	14
§ 4. Индукционная и безиндукционная нагрузки генератора	15

ГЛАВА ПЕРВАЯ

Способы исследования явлений переменного тока

§ 5. Средства экспериментального исследования. Электромагнитный осциллограф. Осциллограммы силы тока, напряжения и э. д. с.	17
§ 6. Кривые поля и э. д. с.	20

ГЛАВА ВТОРАЯ

Цепь синусоидального переменного тока, содержащая индуктивное и активное сопротивления

§ 7. Синусоидальный ток. Электродвижущая сила самоиндукции	24
§ 8. Закон Ома для всей цепи и для части ее	27
§ 9. Сопротивления ваттное, или активное, безваттное, или реактивное, и полное	31

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

Геометрическое представление соотношений в цепи переменного тока посредством векторов

§ 10. Введение понятия вектора	32
§ 11. Сложение векторов	34
§ 12. Векторная диаграмма напряжений в цепи переменного тока	38
§ 13. Диаграмма синхронного генератора	42
§ 14. Векторная диаграмма напряжений для последовательно соединенных участков цепи	44
§ 15. Вектор э. д. с. индукции в контуре при синусоидальном изменении магнитного потока	45
§ 16. Цепь, содержащая индуктивность и взаимную индуктивность	47

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

Действующие значения силы тока и напряжения. Мощность переменного тока

§ 17. Показания приборов. Действующие, или эффективные, значения силы тока и напряжения	48
§ 18. Длина вектора и масштаб	51
§ 19. Средние значения синусоидальных величин	52
§ 20. Средняя за период мощность в цепи переменного тока	54
§ 21. Кривые мгновенных мощностей	57

§ 22. Зависимость средней мощности от других величин в цепи	61
§ 23. Диаграмма Бедея и Крехора	64
§ 24. „Падение“ напряжения и „потеря“ напряжения в проводах линии передачи энергии	66
§ 25. Диаграмма синхронного двигателя	67

ГЛАВА ПЯТАЯ

Емкость в цепи переменного тока

§ 26. Закон Ома для цепи, содержащей активное сопротивление и емкость	68
§ 27. Мощность в цепи с емкостью	73
§ 28. Закон Ома для цепи, содержащей активное сопротивление, индуктивность и емкость	74
§ 29. Резонанс напряжений	78
§ 30. Разложение силы тока на активную и реактивную составляющие. Проводимости	88

ГЛАВА ШЕСТАЯ

Метод комплексных величин или символический

§ 31. Основные понятия	91
§ 32. Простейшие примеры приложений метода	98
§ 33. Графический метод умножения и деления комплексных чисел	102
§ 34. О выражении мощности и $\cos \varphi$	103
§ 35. Дифференцирование векторов. О символических обозначениях вращающихся векторов	104
§ 36. Соотношения в синхронном генераторе	106

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

Сложные цепи переменного тока

§ 37. Разветвляющиеся цепи	107
§ 38. Значение компенсации сдвига фаз	109
§ 39. Потери в диэлектрике емкости	111
§ 40. Резонанс токов	112
§ 41. Точное решение вопроса о компенсации сдвига фаз	113
§ 42. Общий вид задачи о параллельных ветвях	117
§ 43. Продолжение исследования резонанса токов	118
§ 44. Решение одной задачи	120
§ 45. Приближенная векторная диаграмма длинной линии передачи энергии	122
§ 46. Измерение мощности тремя вольтметрами или тремя амперметрами	123
§ 47. Получение токов или напряжений, сдвинутых в фазе на четверть периода	125
§ 48. Первый и второй законы Кирхгофа	127
§ 49. Принцип наложения или суперпозиции	128
§ 50. Мостик переменного тока	129
§ 51. Топографический метод	—

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

Геометрические места в электротехнике на примере работы синхронной машины

§ 52. Понятие о геометрическом месте конца переменного вектора	131
§ 53. Векторные уравнения прямой линии и окружности	132
§ 54. Пуск в ход синхронной машины	136
§ 55. Работа синхронной машины генератором на бесконечно сильную сеть	137
§ 56. Работа синхронной машины при переменном возбуждении на бесконечно сильную сеть	141

§ 57. Работа синхронной машины двигателем. Синхронный компенсатор	142
§ 58. Круговая диаграмма Blondеля для синхронной машины	143
§ 59. Линии мощностей Гёргеса	145

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

Многофазные токи

§ 60. Двухфазный ток	146
§ 61. Трехфазный ток	147
§ 62. Соединение звездой	149
§ 63. Соединение треугольником	151
§ 64. Мощность трехфазного тока и измерение ее	152
§ 65. Общий случай многофазной системы	156
§ 66. Подключение на параллельную работу трехфазной синхронной машины	158
§ 67. Применение топографического метода — включение нагрузки треугольником	159
§ 68. Применение топографического метода — включение нагрузки звездой	161
§ 69. Применение символического метода к трехфазному току	164
§ 70. Определение сил токов и напряжений при включении фаз генератора и нагрузки звездой	165
§ 71. Определение сил токов и напряжений при нагрузке треугольником	167
§ 72. Эквивалентные звезда и треугольник	171
§ 73. Графический способ перехода от треугольника к звезде, и наоборот	173
§ 74. Определение напряжений и сил токов при включении нагрузки звездой	174
§ 75. Графический способ решения той же задачи	176
§ 76. Наиболее общий случай расчета трехфазной цепи	179
§ 77. Графический способ решения задачи, когда даны три линейных напряжения	180
§ 78. Пример аналитического и графического расчета трехфазной системы	182
§ 79. Нулевая точка нагрузки и ее потенциал	185
§ 80. Вращающееся магнитное поле. Случай I: симметричные составляющие	190
§ 81. Вращающееся магнитное поле. Случай II: несимметричные составляющие	192
§ 82. Многополюсное вращающееся поле	196
§ 83. Принцип асинхронного двигателя	200

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

Разложение несимметричной многофазной системы на симметричные составляющие системы

§ 84. Разложение несимметричной трехфазной системы на симметричные составляющие	204
§ 85. Примеры применения метода разложения на симметричные составляющие	210
§ 86. Общий случай разложения многофазной несимметричной системы на симметричные составляющие	212

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

Сложная форма кривых э. д. с. и силы тока

§ 87. Основные понятия	215
§ 88. Разложение в ряд Фурье	220
§ 89. Разложение кривых трапециoidalной, прямоугольной и треугольной форм	225
§ 90. Разложение коммутированного синусоидального тока	227
§ 91. Графический метод анализа кривых	229
§ 92. Сложная форма кривых э. д. с. и силы тока	233
§ 93. Эквивалентный синусоидальный ток	238
§ 94. Резонанс для составляющих различных порядков	241
§ 95. Влияние индуктивности и емкости на форму кривой тока	—
§ 96. Разветвление тока	242

§ 97. Очищение тока	243
§ 98. Составляющие высших порядков в трехфазном токе	—
§ 99. Составляющие высших порядков во вращающемся поле	245

ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ

Влияние железа на явления в цепи переменного тока

§ 100. Переменный ток, намагничивающий железо. Потери в железе	247
§ 101. Векторная диаграмма катушки с железным сердечником	251
§ 102. Самоиндукция четырех катушек с общими или отдельными сердечниками	256
§ 103. Аналитические выражения соотношений в катушке	258
§ 104. Феррорезонанс. Опрокидывание фаз	261

ГЛАВА ТРИНАДЦАТАЯ

Трансформатор

§ 105. Векторная диаграмма трансформатора	262
§ 106. Баланс мощностей	267
§ 107. Изображение соотношений в цепи переменного магнитного потока посредством векторов	269
§ 108. Приближенное построение векторной диаграммы трансформатора	272
§ 109. Аналитические выражения для соотношений в трансформаторе	274
§ 110. Изменения магнитного потока и вторичного напряжения при нагрузке	277
§ 111. Аналитический вывод круговой диаграммы тока	278
§ 112. Эквивалентная схема, первый вид ее	280
§ 113. Другие виды эквивалентной схемы	281
§ 114. Многообмоточные трансформаторы	283
§ 115. Трансформаторы трехфазного тока	—
§ 116. Автотрансформатор	287

ГЛАВА ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ

Метод обращений, приложения его к выводу диаграмм тока и напряжения

§ 117. Взаимнообратные кривые	288
§ 118. Основная теорема	—
§ 119. Координаты центра и радиус обращенной окружности	292
§ 120. Обобщение предыдущего на случай пространства трех измерений	—
§ 121. Примеры приложения метода обращения	293
§ 122. Круговая диаграмма трансформатора и асинхронного двигателя. Первая эквивалентная схема	298
§ 123. Пример построения круговой диаграммы тока для первой эквивалентной схемы	303
§ 124. Круговая диаграмма второй эквивалентной схемы	305

ГЛАВА ПЯТНАДЦАТАЯ

Векторные уравнения и круговые диаграммы

§ 125. Выражение окружности векторными уравнениями	307
§ 126. Простые примеры на векторные уравнения	313
§ 127. Применение метода векторных уравнений к первой эквивалентной схеме	—
§ 128. Экспериментальное построение окружности тока	315
§ 129. Векторные соотношения между разными величинами в круговой диаграмме	318
§ 130. Окружности падения напряжения, первичной э. д. с., вторичного напряжения и др.	320

§ 131. Вычитание одной окружности из другой	321
§ 132. Нахождение окружностей различных переменных величин первой эквивалентной схемы	323

ГЛАВА ШЕСТНАДЦАТАЯ

Линии мощностей на круговых диаграммах

§ 133. Линии потерь мощности на круговой диаграмме	325
§ 134. Линии первичной мощности, потерь ~~на~~ полезной мощности на круговой диаграмме первой эквивалентной схемы	329
§ 135. Масштабы для линий мощностей и к. п. д.	333
§ 136. Линии мощности на круговой диаграмме второй эквивалентной схемы	336

ГЛАВА СЕМНАДЦАТАЯ

Теория длинных линий передачи энергии

§ 137. Дифференциальные уравнения цепи с равномерно распределенными емкостью, индуктивностью, активным сопротивлением и утечкой	339
§ 138. Определение индуктивности трехфазной линии	341
§ 139. Определение емкости трехфазной линии	344
§ 140. Исследование уравнений линий передачи энергии	346
§ 141. Волны в линии	349
§ 142. Телеграфные и телефонные кабели	353
§ 143. Замечание об электрическом расчете линий	355
§ 144. Гиперболические функции	—
§ 145. Уравнения линии передачи в гиперболических функциях	359
§ 146. Формулы для приближенного расчета линий. Замечания о расчете трехфазной линии. Примеры	360
§ 147. Определение постоянных линий	365
§ 148. Эквивалентные схемы линии передачи	368
§ 149. Замечания о влиянии трансформаторов	370

ГЛАВА ВОСЕМНАДЦАТАЯ

Неустановившийся режим в цепи тока

§ 150. Теория разряда конденсатора	371
§ 151. Наиболее общая форма уравнения цепи переменного тока	379
§ 152. Неустановившийся режим тока. Включение постоянного тока	380
§ 153. Включение переменного тока в цепь с активным сопротивлением и индуктивностью	383
§ 154. Включение переменного тока в цепь, содержащую активное сопротивление, индуктивность и емкость	384
§ 155. Включение переменного тока, намагничивающего железо	388
§ 156. Собственный период колебаний линии без потерь	390

ГЛАВА ДЕВЯТНАДЦАТАЯ

Наиболее общая форма уравнений электрического тока

§ 157. Общие уравнения и исследование их	393
§ 158. Случай постоянного тока	400
§ 159. Стоячие волны	402
§ 160. Упрощенное решение основных дифференциальных уравнений	403
§ 161. Отражение волн в точках соединения двух проводов с различными волновыми сопротивлениями	405

ГЛАВА ДВАДЦАТАЯ

Теория поверхностного эффекта при переменном токе и переменном магнитном потоке

§ 162. Дифференциальное уравнение плотности тока в проводнике	405
§ 163. Интегрирование уравнения плотности тока	408
§ 164. Интегрирование уравнения плотности тока — другой способ	411
§ 165. Уравнение плотности магнитного потока	414
§ 166. Вывод формулы Стефана для сопротивления проводника при переменном токе . .	415
Ответы к примерам	420
Алфавитный указатель	422

ВВЕДЕНИЕ

ТЕХНИЧЕСКИЕ СПОСОБЫ ПОЛУЧЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ Э. Д. С. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

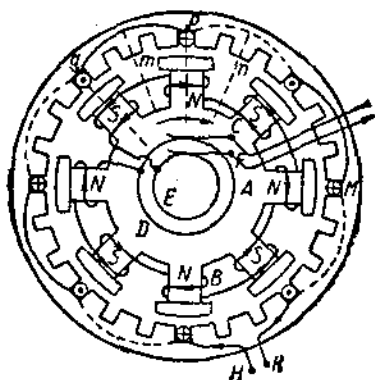
§ 1. Принцип устройства генератора переменного тока

Всякий меняющийся с течением времени по величине или по направлению ток есть ток переменный; для электрического освещения и электрических двигателей употребляется такой переменный ток, при котором все значения величины электродвижущей силы (э. д. с.) и силы тока периодически повторяются через одни и те же промежутки времени, называемые периодом тока; при этом в течение периода ток имеет в цепи сначала одно, потом другое направление.

В дальнейшем мы ознакомимся и с другими видами переменных токов, например, с токами при разряде конденсаторов и др., а теперь сосредоточимся на изучении только что указанных периодических токов, получивших исключительное значение при передаче электрической энергии на расстояние.

Источниками такого переменного тока являются особые машины — генераторы переменного тока.

Существенные части такого генератора (фиг. 1) следующие: во-первых, вращающаяся часть *A*, называемая ротором, которая делается из стали и несет на себе сердечники электромагнитов *B* с их катушками; в катушках электромагнитов, соединенных так, чтобы полюса северные и южные чередовались, течет постоянный ток, подходящий к ним от источника постоянного тока, т. е. особой машины постоянного тока или батареи аккумуляторов, через щетку *C*, нажимающую на медное кольцо *D* на валу ротора, соединенное проводом с началом пер-



Фиг. 1.

вой катушки, — и уходящий из последней катушки через другое такое же кольцо *E* и щетку *F*; во-вторых, неподвижная часть *M*, называемая статором, изготовляемая из листового железа и имеющая на внутренней цилиндрической поверхности углубления — „пазы“, в которых заложены проводники (по одному или несколько в пазе); проводники, лежащие в разных пазах, соединяются друг с другом последовательно, составляя обмотку генератора переменного тока. При вращении ротора магнитные поля его электромагнитов проходят сквозь витки обмотки, вызывая в них своим изменением э. д. с.

Расстояние *pd* между осями двух соседних электромагнитов или *тл* — между двумя соседними нейтральными линиями, измеренное по окружности, проходящей через центры пазов статора, назовем полюсным делением.

Вследствие того что конструкция электромагнитов совершенно одинакова, поля их тоже все совершенно одинаковы: магнитные индукционные линии под одним полюсом имеют ту же конфигурацию и густоту в различных местах поля, что и под другим полюсом, только направление их под южным полюсом прямо противоположно направлению под северным.

Представим теперь себе, что мы обмотку на статоре выполним так: наметим те из пазов, которые отстоят друг от друга на расстояние, как раз равное одному полюсному делению, заложим в эти пазы по проводнику и соединим эти проводники все последовательно соединительными проводниками попеременно на передней и задней сторонах статора, но при этом не будем соединять последнего проводника с первым, с которого начали обмотку; таким образом получится незамкнутая обмотка, схематично изображенная на фиг. 1. Остальные пазы статора все оставим пока пустыми.

Обозначим через B_r радиальную, т. е. перпендикулярную к направлению относительно движения проводника в магнитном поле, слагающую магнитной индукции в том месте поля, которое сейчас проходит через проводник, пересекая его; через l — длину проводника в сантиметрах; через D — диаметр вышеупомянутой окружности, проходящей через центры пазов или, в данном случае, через центры поперечных сечений проводников; через n_m — число оборотов ротора в минуту и через $\frac{\pi D n_m}{60}$ — скорость движения поля относительно обмотки, иначе равную $\frac{ds}{dt}$, где s есть длина соответствующей дуги.

При вращении ротора магнитный поток Φ , проходящий сквозь контур каждого витка из двух проводников, указанного на фиг. 1, будет меняться, причем его изменение за бесконечно малый промежуток времени dt , т. е. при бесконечно малом продвижении ds поля, выразится так:

$$d\Phi = 2B_r \cdot l \cdot ds,$$

так что э. д. с. в витке равна (отбросим знак минус как ненужный в данном случае), если B измерено в гауссах,

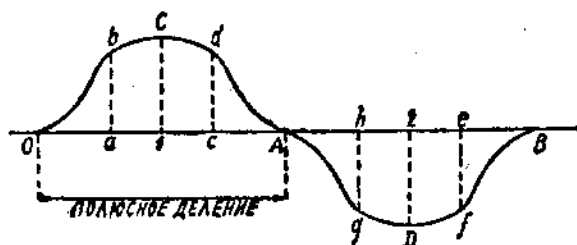
$$\frac{d\Phi}{dt} \cdot 10^{-8} = 2B_r \cdot l \cdot \frac{ds}{dt} \cdot 10^{-8} = 2B_r \cdot l \cdot \frac{\pi D n_m}{60} \cdot 10^{-8} \text{ вольт.}$$

Явление индукции э. д. с. описывают еще и иначе, говоря, что при относительном перемещении магнитного поля и проводников происходит пересечение магнитных линий проводниками и что в каждом отдельном проводнике индуцируется э. д. с.,

$$e' = B_r \cdot l \cdot \frac{\pi D n_m}{60} \cdot 10^{-8}.$$

Проводники разделены расстоянием в одно или несколько полюсных делений; поэтому они все находятся во всякий момент вследствие упомянутой выше полной одинаковости полей всех электромагнитов в полях, или, точнее, в местах полей с равным для всех их B_r , так что и все э. д. с. в отдельных проводниках во всякий момент равны. Применив правило правой руки сначала к одному проводнику, находящемуся под северным полюсом, потом к другому, соединенному с первым, проводнику, находящемуся под южным полюсом, мы найдем, что э. д. с. отдельных проводников будут суммироваться, как при последовательном включении источников тока. Слагаясь, эти э. д. с. дадут результирующую э. д. с. всей обмотки

$$e = \Sigma e' = Ne',$$



Фиг. 2.

где N — число всех проводников, или

$$e = N \cdot B_r \cdot \tau \cdot \frac{\pi D n_m}{60} \cdot 10^{-8} \text{ вольт,} \quad (1,1)$$

которая и создаст на концах H и K нашей обмотки разность потенциалов, равную в отсутствие тока, т. е. при незамкнутой обмотке, этой э. д. с. e .

Теперь заметим, что B_r есть величина переменная вдоль по дуге окружности под полюсом: под серединой полюса она имеет наибольшую величину — индукционные линии здесь густы и перпендикулярны к цилиндрической поверхности статора, — по середине между полюсами, на нейтральной линии, она равна нулю, так как индукционные линии здесь направлены по касательной к поверхности статора.

Так как B_r есть величина переменная, то и e является величиной переменной. В зависимости от того, какой своей частью поле электромагнита пересекает проводник и, следовательно, какова B_r , будет получаться и величина e . Из формулы (1,1) видно, что если число оборотов машины n_m будет постоянно, — а это мы отныне и будем предполагать всегда имеющим место, — то все множители при B_r дадут постоянную величину, и следовательно, э. д. с. e будет пропорциональна радиальной составляющей индукции, величине B_r , в тех точках окружности статора, в которых находятся в данный момент проводники обмотки.

Так как для появления э. д. с. индукции определенной величины и направления необходимо лишь то или другое относительное движение проводника и магнитного поля, то мы можем с одинаковым правом говорить и о прохождении поля через проводник при движении электромагнита и о прохождении проводника в противоположном направлении через поле, как будто бы двигалась обмотка со статором, а электромагниты оставались неподвижными.

В этом смысле мы будем говорить, что в некоторый момент времени проводники находятся, например, все на нейтральных линиях $m, n, \dots$; в другие моменты проводники будут занимать другие положения в полях полюсов, однако же так, что B_r для всех проводников будет иметь одну и ту же величину, меняющуюся для всех проводников одинаково по мере продвижения обмотки в магнитном поле полюсов.

Для того чтобы изобразить наглядно ход изменения B_r и, следовательно, э. д. с. e по мере продвижения проводников в поле, прибегают к графическому способу представления магнитного поля посредством кривой.

§ 2. Графическое изображение хода изменений э. д. с.

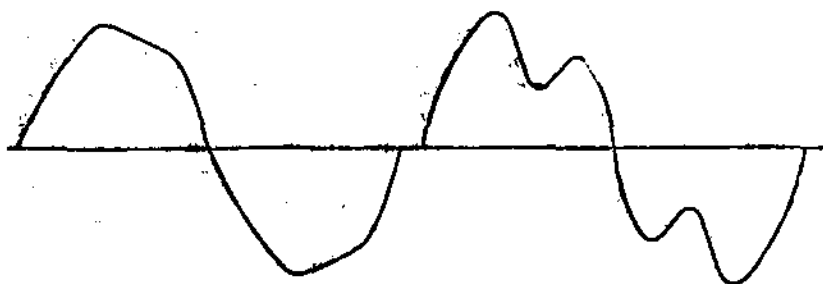
Возьмем прямоугольную систему координат. Будем откладывать по оси абсцисс расстояния, измеренные по известной нам уже окружности, проходящей через центры пазов, — от точки нахождения проводника до какой-нибудь нейтральной линии, например до той соседней, от которой проводник удаляется, — а по оси ординат будем откладывать значения B_r в точках нахождения проводника, причем под северным полюсом будем считать B_r положительным и откладывать вверх, а под южным — отрицательным и откладывать вниз. Проведя затем через концы ординат одну непрерывную линию, мы получим так называемую кривую поля k , изображенная на фиг. 2, дает нам пример такой кривой поля. Эту кривую можно толковать двумя образом.

Во-первых, нетрудно видеть из построения, что в какой-нибудь определенный момент времени эта кривая представляет нам величины индукции B_r вдоль по окружности статора в этот момент. Если один из проводников обмотки в этот момент находится, например, под серединой северного полюса в точке 1 фиг. 2, то с ним непосредственно соединенный проводник находится под серединой южного полюса в точке 2. Часть кривой OC представит тогда распре-

ление индукции B , ее величины влево от проводника I , вдоль по окружности статора, часть же CA — вправо.

Еще раз заметим, что насколько при вращении ротора переместится в поле одного полюса за какой-нибудь промежуток времени один какой-нибудь проводник, настолько же передвинутся и остальные проводники под своими полюсами, так что можно говорить о поле с индукцией определенной величины B , в котором находится вся вообще обмотка. (Это является следствием отсутствия в такой обмотке, как принята нами в этой главе, сдвига в магнитном поле при каждом шаге по обмотке, как это есть в обмотках постоянного тока.)

Второе толкование кривой B , фиг. 2 таково: так как вращение ротора равномерно, то абсциссы на этой фигуре — длины дуг окружности — пропорциональны времени, протекшему с того момента, когда проводник, расстояния которого до некоторой нейтральной линии нами приняты за абсциссы, находился на этой нейтральной линии; поэтому ординаты кривой представят нам значения B для определенного места, именно места нахождения этого проводника, в различное время.



Фиг. 3а.

Фиг. 3б.

Иначе, если кривая фиг. 2 дает нам значения B , в различных точках окружности, то ясно, что при вращении ротора и движении полюсов относительно проводников всякий проводник с течением времени побывает в магнитном поле со всяким значением величины индукции B , даваемым этой кривой, и таким образом та же кривая фиг. 2 представит все значения индукции B , в каком-нибудь любом месте статора, например, в месте нахождения любого проводника, принимаемые индукцией с течением времени.

Для всякого проводника эти значения начинают снова повторяться в точности каждый раз по прошествии того промежутка времени, в течение которого мимо проводника проходит двойное полюсное деление. Этот промежуток времени называется периодом: Пока мимо проводника, например, p (фиг. 1), идет северный полюс, т. е. в течение половины периода э. д. с. в нем одного направления; э. д. с. всей обмотки направлена при этом в обмотке от одного ее конца к другому, например, от H к K ; когда же мимо этого проводника пойдет южный полюс, т. е. в течение всей следующей половины периода э. д. с. в этом проводнике переменит свое направление, то и все остальные проводники в это время будут под другими полюсами, чем были раньше; все э. д. с. будут противоположного направления, чем раньше, и э. д. с. всей обмотки будет направлена в самой обмотке в сторону, обратную прежнему ее направлению, т. е. от K к H . Таким образом первые полпериода K имеет высший потенциал, чем H , т. е. K есть плюс-зажим обмотки нашего источника тока, а H есть минус-зажим, и вторые полпериода, наоборот, H имеет высший потенциал, чем K , и следовательно H есть плюс, а K — минус.

Так как формула (1,1) показывает, что e пропорционально B , при постоянной скорости, то та же самая кривая фиг. 2 в ином масштабе для абсцисс и ординат

дает нам э. д. с. e в зависимости от времени; масштаб для ординат при этом будет в

$$N \cdot I \cdot \frac{\pi D n_m}{60} \cdot 10^{-8}$$

раз меньше, чем раньше, так как численно e во столько раз больше, чем B ; масштаб для абсцисс будет в

$$\frac{\pi D n_m}{60}$$

раз больше, так как длины дуг численно в

$$v = \frac{\pi D n_m}{60}$$

раз больше протекшего времени.

Положим в основу дальнейших рассуждений кривую фиг. 2 как кривую э. д. с. во всей обмотке в зависимости от времени. При этом OA будет выражать промежуток времени в полпериода, и э. д. с. все это время одного направления, которое мы условно назовем положительным; AB есть другая половина периода, э. д. с. в течение ее действует в другом направлении — отрицательном; OB есть целый период. За точкой B и раньше точки O кривая повторяется неограниченно. Итак, э. д. с. обмотки генератора переменного тока есть периодическая функция времени.

Вследствие „одинаковости“ полей под северным и южным полюсами часть кривой OCA симметрична с частью ADB ; если часть ADB сдвинуть влево на полпериода вдоль по оси абсцисс и перегнуть по оси абсцисс чертем, то обе части, OCA и ADB , совпадут всеми своими точками. Следовательно, кривая э. д. с. симметрична относительно оси абсцисс.

На фиг. 3 (а и б) приведены два примера кривых; а) симметричной относительно оси абсцисс и б) несимметричной. Отступления от этой симметрии у существующих машин переменного тока так редки и незначительны, что мы от них отвлечемся в дальнейшем изложении.

Если мы к зажимам H и K обмотки генератора подключаем некоторое сопротивление и, таким образом, замыкаем цепь, то по всей этой цепи потечет ток. Так как э. д. с. переменна по величине и по направлению и периодична, то и этот ток будет также переменным по величине и по направлению и периодичным.

§ 3. Период, частота, число оборотов и число полюсов

Выведем теперь одно основное соотношение величин для генератора переменного тока, именно определим продолжительность одного полного периода его э. д. с. Обозначим число всех полюсов у машины как число четное через $2p$; продолжительность одного периода — через T .

При числе оборотов в секунду $\frac{n_m}{60}$ один оборот делается за $1: \frac{n_m}{60}$ сек. $= \frac{60}{n_m}$ сек.; за это время мимо любого проводника обмотки статора проходят все $2p$ полюсов, или p пар полюсов; одна пара полюсов, т. е. двойное полюсное деление, проходит мимо проводника за время, в p раз меньшее, т. е. за

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{60}{n_m} \text{ сек.};$$

это и есть продолжительность периода; следовательно,

$$T = \frac{60}{p \cdot n_m} \text{ сек.} \quad (3,1)$$

Величина, обратная продолжительности периода,

$$f = \frac{1}{T} \quad (3,2)$$

выражает число полных периодов, заключающееся в одной секунде, эта величина называется частотой э. д. с. переменного тока и обозначается через Hz (герц).

Подставляя выражение (3,1) в формулу (3,2), получаем

$$f = \frac{p \cdot n_m}{60}. \quad (3,3)$$

Формулу (3,3) можно вывести и не из формулы (3,1), а непосредственно: за один оборот мимо проводника пройдет p пар полюсов, следовательно, протечет p полных периодов; так как за одну секунду ротор сделает $\frac{n_m}{60}$ оборотов, то число периодов, протекших в течение 1 сек., будет в $\frac{n_m}{60}$ раз больше, чем p , т. е. будет равно

$$f = \frac{p \cdot n_m}{60}.$$

Двойное число — $2f$ — есть число перемен направления э. д. с. в секунду.

В современных турбогенераторах, т. е. генераторах переменного тока, соединенных с паровыми турбинами, делают обычно только два полюса, т. е. делают $p=1$; тогда из последних формул имеем $n_m=3\,000$; таково число оборотов вала паровой турбины.

Пример 1. Сколько полюсов должен был иметь в прежнее время генератор, предназначенный работать с паровой машиной, делавшей $n_m=150$ об/мин., чтобы давать ток с $f=50$ Hz?

Когда несколько таких машин работают вместе на одну и ту же сеть, т. е., как принято гово́рить, работают „параллельно“, то, очевидно, число периодов их э. д. с. должно быть строго одно и то же; самая малая разница в числе периодов сделала бы параллельную работу машин невозможной, ибо были бы промежутки времени, когда знаки у соответственных полюсов двух или нескольких генераторов были бы разные, а это было бы равносильно короткому замыканию машин.

Все машины должны работать поэтому со строго одним и тем же числом периодов, меняя знаки у своих полюсов одновременно; поэтому машины переменного тока называются еще синхронными машинами.

§ 4. Индукционная и безиндукционная нагрузки генератора

Сила тока определяется не только величиной э. д. с. e в обмотке и сопротивлением цепи, так как раз ток изменяется, изменяется и создаваемое им магнитное поле, а при этом, как известно, в цепи тока появляется э. д. с. самоиндукции; величина силы тока i в каждый отдельный момент определится отношением алгебраической суммы двух э. д. с. в цепи — индукции в магнитном поле полюсов e и самоиндукции e_c — к сопротивлению всей цепи R :

$$i = \frac{e + e_c}{R}. \quad (4,1)$$

Могут быть случаи, когда магнитное поле, создаваемое этим током, очень слабо; это будет тогда, когда в цепь тока не включено никаких соленоидов или катушек, когда проводники в цепи не образуют витков, хотя в некоторых случаях, например, при большой длине проводников, может оказывать влияние магнитное поле даже и прямолинейных проводников с током и вызывать заметную э. д. с. самоиндукции.

Здесь мы воспользуемся только что употребленным выражением заметная э. д. с., чтобы остановиться на вопросе о величине переменных э. д. с. и силы тока. На кривой фиг. 2 мы видели, что, когда проводники обмотки находятся в нейтральных линиях, э. д. с. e равна нулю. Вблизи этого положения она мала и лишь по удалении от нейтральной линии возрастает до максимума, потом опять постепенно убывает до нуля при подходе к следующей нейтральной линии, меняет направление и т. д. Сила тока тоже, перед тем как ток меняет направление, приближается к нулю, делается на один момент равной нулю, потом растет в противоположном направлении до максимума, убывает и т. д.

Когда мы в дальнейшем будем говорить, что в цепи течет переменный ток небольшой силы или большой, что э. д. с. самоиндукции незначительна или велика, то мы будем понимать это так, что незначительны или велики те наибольшие значения, максимумы, которых соответствующие величины, например, сила тока, вообще достигают за полпериода.

Таким образом выражение „ток в несколько сотых долей ампера“ обозначает ток, наибольшая сила которого достигает лишь нескольких сотых долей ампера; также не забудем и того, что э. д. с. „в десять тысяч вольт“ или сила тока „в сто ампер“ кроме этих наибольших значений проходит и через все меньшие значения и через нуль.

Когда желают э. д. с. самоиндукции сделать возможно меньшей, тогда проводники цепи, по которым ток идет в разных направлениях, — например, провод, подводящий ток, и провод, уводящий ток от какого-нибудь прибора, — помещают рядом, возможно ближе. Тогда магнитный поток на этом участке будет мал вследствие малости площади между проводами.

Для этой же цели служит известная из курса физики бифилярная обмотка.

Подобными расположениями при отсутствии катушек в цепи достигается то, что э. д. с. самоиндукции во внешней части цепи делается очень малой, так что ею даже при точных измерениях можно пренебречь. Такой случай называется случаем безиндукционной нагрузки машины.

Нужно, однако же, заметить, что и в этом случае собственное магнитное поле проводников обмотки машины будет существовать и вызывать некоторую э. д. с. самоиндукции в той же самой обмотке; ее мы назовем „внутренней“ э. д. с. самоиндукции, т. е. индуктирующейся в самой обмотке; если величина ее будет e_1 , то при безиндукционной нагрузке машины

$$I = \frac{e + e_1}{R}. \quad (4,2)$$

В общем случае э. д. с. самоиндукции e_1 в формуле (4,1) распадается на две слагаемые: e_{11} , индуктирующуюся в самой обмотке машины, где индуктируется и e , и e_{12} , индуктирующуюся в разных частях внешней цепи, подключенной к зажимам машины.

Если мы включим где-либо в цепь какую-нибудь катушку, то около нее появится более или менее значительный переменный магнитный поток, и следовательно, в ней самой, в ее проводниках, появится э. д. с. самоиндукции e_{12} . Сила тока в цепи будет в любой момент равна частному от деления алгебраической суммы величин в этот момент всех трех э. д. с. e , e_{11} и e_{12} на сопротивление всей цепи. Это есть случай индукционной нагрузки машины.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

СПОСОБЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЯВЛЕНИЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

§ 5. Средства экспериментального исследования. Электромагнитный осциллограф. Осциллограммы силы тока, напряжения и э. д. с.

Экспериментальное исследование явлений переменного тока необходимо наряду с теоретическим; требуется решить, например, такой вопрос: какова форма или вид кривой, по которой изменяется э. д. с. данной машины; оказывается, кривую э. д. с. можно легко получить с помощью особого прибора, называемого осциллографом. Далее мы приведем еще некоторые примеры того, когда необходимо обращение к этому прибору, а в течение курса нам не раз придется указывать и другие способы экспериментального исследования различных сложных явлений в цепях переменного тока.

Теперь же познакомимся с устройством осциллографа, а именно электромагнитного, как наиболее для нашей цели пока подходящего; кроме него есть осциллографы и других систем.

Устройство электромагнитного осциллографа схематично показано на фиг. 4.

На этой фигуре мы стремимся передать не конструкцию осциллографа, а лишь принцип его действия.

M есть сильный электромагнит; постоянный ток питает его обмотки $W-W$.

Между его полюсами имеется кусок железа A , так что создается два воздушных очень узких ($3-5\text{ мм}$) прослойка, в которых находятся петельки a и b из бронзовых проволонок или очень тонких бронзовых ленточек.

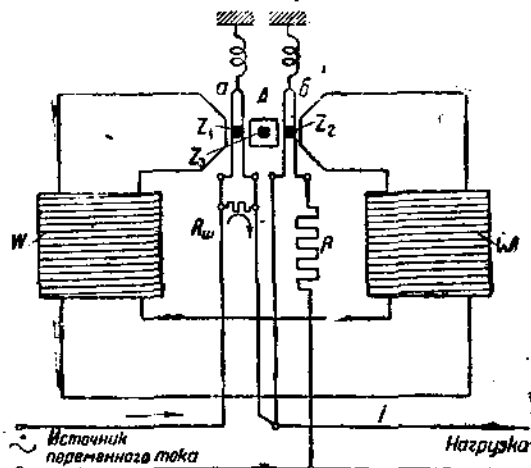
Такая петелька играет роль подвижной катушки гальванометра; поддерживается каждая петелька пружинкой вверх, прикрепленной к неподвижным частям прибора и натягивающей петельку. Плоскость петельки, пока в ней нет тока, направлена вдоль линий поля.

Когда по петельке пойдет ток, она будет стремиться стать в такое положение, чтобы совпали по направлению потоки — один ее собственный, а другой поток электромагнита, и поэтому петелька повернется, закручиваясь, на угол, пропорциональный силе тока, но вообще небольшой, в несколько градусов.

Если мы переменим направление тока, то и петелька повернется в другую сторону на такой же угол.

Увеличим силу тока, и петелька повернется на больший угол аналогично подвижной катушке в гальванометре. При более сильных токах петельку шунтируем шунтом $R_{ш}$.

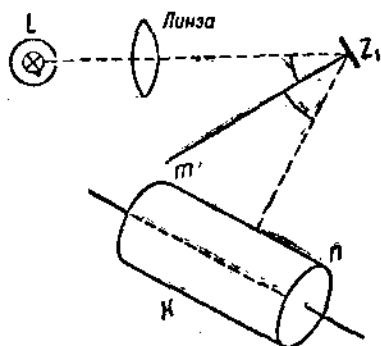
Пропустим через петельку a переменный ток, который мы получили, подключив к зажимам обмотки генератора некоторое сопротивление — нагрузку.



Фиг. 4.

Для этого включим петельку a последовательно в цепь этого тока, сначала зашунтировав ее. Под действием переменного тока петелька будет отклоняться то в одну сторону, то в другую, причем во всякий момент времени угол ее отклонения будет пропорционален силе тока, идущей через нее как раз в этот момент.

Теория осциллографа, излагаемая в курсах „Электрических измерений“¹, показывает, что некоторое расхождение отклонений петельки от изменений силы тока при этом имеется, но его можно сделать настолько малым, что практически это расхождение значения не имеет.



Фиг. 5.

На середине каждой петельки прикреплено по зеркальцу Z_1, Z_2 .

Пусть от некоторого источника света L фиг. 5 луч света через линзу, чтобы он сходился в светлую точку на зеркальце Z_1 петельки a .

Пусть луч, отразившись от зеркальца, падет на какой-то экран и даст там светлую точку. Если зеркальце Z_1 будет колебаться под действием переменного тока, то на экране луч опишет светлую прямую. Вместо экрана поставим на дороге лучу железный пустотелый цилиндр K со щелью $mп$; луч при своих отклонениях все время проходит сквозь щель и попадает на фотографическую бумагу, намотанную на барабан, насажен-

ный на ось внутри железного цилиндра.

Вначале путь лучу в щель загорожен, потом с помощью особого приспособления луч пускается в щель, и затем барабан с фотографической пленкой делает один оборот, после чего щель автоматически загораживается.

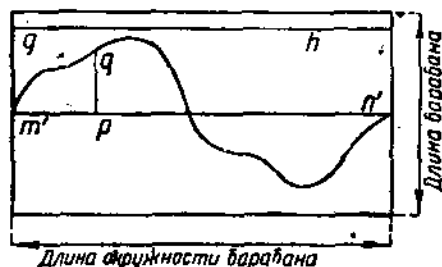
Нетрудно понять, что когда мы снимем фотографическую пленку с барабана и, проявив ее, развернем, то увидим на ней кривую линию (фиг. 6). След от луча движется параллельно длине барабана сначала в одну сторону от средней точки (где он находится тогда, когда петелька осциллографа не отклонена, т. е. когда сила тока равна нулю), потом — в другую. Если бы он не отклонялся, то на пленке получилась бы прямая $m'n'$. Отклонения луча в стороны от этого положения пропорциональны силам тока, продвижение же следа луча параллельно направлению $m'n'$ совершается вследствие равномерного поворота барабана, т. е. оно пропорционально времени.

Обыкновенно механизм срегулирован так, что барабан делает один поворот за два периода исследуемого переменного тока.

Итак, на фиг. 6 мы отрезок $m'n'$ можем принять за период, т. е. за T секунд, а по перпендикулярному направлению отрезки от оси $m'n'$ до кривой —

принять за силы тока; так, например, в момент времени p , т. е. через $\frac{m'p}{m'n'}$ часть периода после его начала m' , сила тока была у нас pq .

Масштаб для таких фотографий устанавливается путем фотографирования отклонения луча постоянным током; сила тока i_c измеряется при этом миллиамперметром, а на фотографии мы получаем некоторую прямую gh , параллельную $m'n'$; расстояние их друг от друга и есть сила тока i_c .



Фиг. 6.

¹ См. проф. З. В. Черданцева, „Электрические измерения“, изд. 3, 1933, Энергиздат.

Такие фотографии кривых переменного тока называются осциллограммами.

Существуют приспособления для того, чтобы наблюдать кривые тока, не фотографируя их.

Осциллограмма дает нам кривую, выражающую графически ход изменений силы тока в течение периода.

Осциллографом обычно пользуются так, что одну петельку шунтируют и снимают с ее помощью кривую силы тока, а другую петельку реостатируют (включают последовательно с ней большое сопротивление), включают ее в цепь как вольтметр параллельно и снимают с ее помощью кривую напряжения. Обе кривые фотографируются одновременно на одну и ту же пленку; фиг. 7 дает пример двух таких осциллограмм.

Таким образом мы всегда можем получить кривую интересующего нас переменного тока.

Если в случае безиндукционной нагрузки мы возьмем внешнее сопротивление R достаточно большим, то получим ток i очень малым (например, сотые доли ам-



Фиг. 7.

пера); тогда его магнитное поле будет очень слабо, и вызываемая изменениями этого поля внутренняя э. д. с. самоиндукции $e_{\text{с}}$ будет сравнительно с э. д. с. e от поля полюсов так мала, что ею можно будет свободно пренебречь и написать для этого случая очень небольшого тока формулу (4,2) так:

$$i = \frac{e}{R}. \quad (5,1)$$

Этот ток мы можем пропустить через петлю осциллографа и получить его кривую; а так как из формулы (5,1) следует, что

$$e = i \cdot R, \quad (5,2)$$

где R — постоянно, то та же кривая в масштабе в R раз более мелком представит нам ход изменений величины э. д. с. e .

Чем больше будет сила тока i , которым мы нагружаем генератор переменного тока, тем менее точной будет становиться формула (5,1) и тем менее точно кривую силы тока можно будет считать за кривую (в ином масштабе) э. д. с. генератора.

Пусть в цепи течет переменный ток i , уже не слабый, а какой угодно. Выделим такой участок AB цепи, чтобы около него магнитное поле было слабо и чтобы э. д. с. самоиндукции в нем можно было пренебречь; тогда для этого участка цепи будем иметь для всякого момента, обозначив переменную разность потенциалов на концах его или напряжение на нем, через u_{AB} , а сопротивление участка — через R_{AB} ,

$$i = \frac{u_{AB}}{R_{AB}}, \quad (5,3)$$

следовательно,

$$u_{AB} = i \cdot R_{AB} \quad (5,4)$$

и кривые напряжения и силы тока [ср. с формулой (5,2)] при отсутствии индуктивности отличаются лишь масштабом.

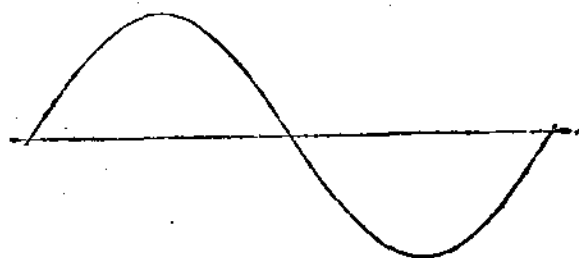
Чтобы иметь возможность производить точные расчеты, как самых генераторов переменного тока, так, в особенности, и различных приборов, потребляющих электрическую энергию, а также и для расчета всех явлений в цепи переменного тока, надо знать аналитическое выражение для этих кривых, т. е. аналитическое выражение зависимости э. д. с. машины от времени (или от положения обмотки под полюсами), как периодической функции этого последнего (времени или положения); то же — и относительно силы тока и э. д. с. самоиндукции.

§ 6. Кривые поля и э. д. с.

Что касается формы кривой э. д. с. генератора, то мы ее можем сильно изменить, меняя форму полюсных наконечников или, объяснение чему увидим далее, систему соединения проводников в обмотке; например, делая воздушный зазор между полюсами и железом статора неодинаковым вдоль под всем полюсом, а увеличивая его по мере удаления от середины полюса в стороны к нейтральным линиям (фиг. 8), мы можем кривой поля придать вид, очень близкий к желаемой аналитической кривой, например, к синусоиде (фиг. 9). Обратным изменением формы наконечников (фиг. 10) можно придать кривой поля вид, близкий к прямоугольнику (фиг. 11). Вместе с кривой поля будет изменяться и кривая э. д. с.



Фиг. 8.



Фиг. 9.

В современных больших (в 20 000, 40 000 kW и больше) генераторах переменного тока, вращаемых паровыми турбинами с большим числом (1500 — 3000)



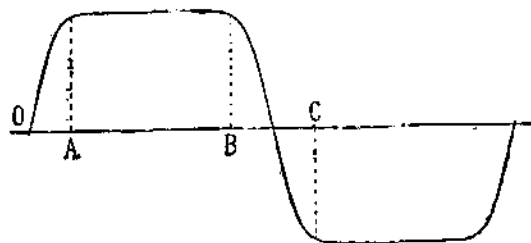
Фиг. 10.

оборотов в минуту, в так называемых „турбогенераторах“, ротор делается без выступающих полюсов, чем достигаются и большая прочность, необходимая при большой скорости, и экономия места, и большее приближение формы кривой э. д. с. к синусоидальной.

Поле создается обмоткой, намотанной, как показано на фиг. 12, на цилиндрический железный якорь; к обмотке по кольцам подводится постоянный ток.

Поле при этом получается двух-полюсное, так что ротор должен делать 3000 об/мин.

Есть конструкции, при которых получаются четыре полюса.



Фиг. 11.

Применяют и другие виды обмоток, что излагается в курсах электрических машин.

Следует заметить, что прежде думали, что всего желательнее иметь для э. д. с. и силы тока форму кривых, приближающуюся к прямоугольнику, ибо при этом лампы накаливания большую часть полупериода, именно AB (фиг. 11), горят с достаточно сильным накалом, и лишь в течение незначительной части периода BC

этого мы радиус OM на фиг. 13 представим себе вращающимся равномерно и описывающим один полный оборот за время T , т. е. как раз в течение периода переменного тока. Угловая скорость его вращения при этом выразится, очевидно, так:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f, \quad (6,1)$$

угол же $AOM = \alpha$ через переменное время выразится так:

$$\alpha = \omega t. \quad (6,2)$$

Что касается времени t , то условимся на фиг. 13 отсчитывать его с того момента, когда подвижная сторона угла OM начинает свое движение, отделяясь от стороны OA , а на фиг. 14 — с того момента, когда обмотка проходит нейтральные линии, т. е. когда э. д. с. или индукция B , равны нулю, или по оси абсцисс, начиная от точки 1, для которой $t = 0$.

Время t , которое соответствует любому значению угла α , мы определим из соотношения (6,2) так:

$$t = \frac{\alpha}{\omega} = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot T, \quad (6,3)$$

что можно словами выразить просто: какую долю α составляет от 2π , такую долю t составляет от T .

Полученную из формулы (6,3) величину t отложим на фиг. 14 от точки 1 в виде абсциссы 1-7, в точке 7 проведем ординату 7-8, равную $MN = \sin \alpha$ на фиг. 13, т. е. синусу угла α . Повторив это построение для достаточно большого числа отдельных моментов времени за период T и соединив одной линией полученные точки 8, 10, ..., мы получим кривую 1-8-10-5-11-6, которую тоже назовем синусоидой, так как ее ординаты равны: $\sin \alpha = \sin \omega t$.

Ее амплитуда, т. е. наибольшая из ординат 9-10, равна единице; основание ее теперь, 1-6, новое.

Умножим все ординаты этой синусоиды на некоторое число a_1 , определяемое по способу, который будет изложен далее, мы и получим кривую 1-р-г-5-8-6. Эта кривая называется синусоидальной кривой и выражается уравнением, показывающим, что ее ординаты в a_1 раз больше синусов переменного угла, меняющегося пропорционально времени по формуле (6,2), т. е.

$$y = a_1 \cdot \sin \omega t. \quad (6,4)$$

Для краткости речи и эту кривую называют синусоидальной и с ней-то и сравнивают экспериментально полученную кривую поля.

При конструировании современных машин стараются придать кривой поля, а следовательно, и э. д. с., форму, наиболее приближающуюся к этой последней полученной нами синусоиде.

Составим и раз навсегда усвоим следующую таблицу значений времени t , аргумента ωt , синуса и самой функции y (6,4) для наиболее важных или бросающихся в глаза моментов времени в течение периода.

Время t	Аргумент ωt	$\sin \omega t$	Функция y
0	0	0	0
$\frac{1}{4} T$	$\frac{1}{4} \omega T = \frac{\pi}{2}$	+ 1	+ a_1
$\frac{1}{2} T$	$\frac{1}{2} \omega T = \pi$	0	0
$\frac{3}{4} T$	$\frac{3}{4} \omega T = \frac{3\pi}{2}$	- 1	- a_1
T	$\omega T = 2\pi$	0	0

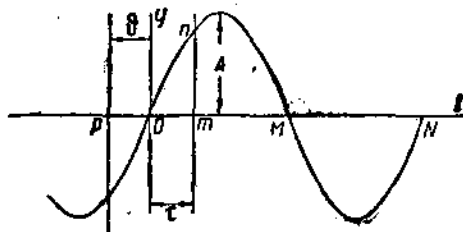
Допустим, что машина сконструирована так, что кривая поля есть точная синусоида, т. е. можно подобрать или вычислить a_1 так, чтобы кривая (6,4) точно совпала с кривой поля. Тогда при известном уже нам изменении масштаба ординат та же кривая даст нам величины э. д. с.

$$e = E_1 \cdot \sin \omega t, \quad (6,5)$$

где E_1 есть „амплитуда“ э. д. с., т. е. отрезок a_1 , измеренный в масштабе э. д. с.

Введем следующее название: любое значение периодической функции, какое только может она получить, мы будем называть мгновенным ее значением. Амплитуда есть тоже одно из мгновенных значений ее, именно наибольшее. В дальнейшем, чтобы применить средства анализа к исследованию этих функций, мы часто будем предполагать, что это мгновенное значение удерживается функцией в течение бесконечно малого промежутка времени dt , после которого функция принимает другое значение, отличающееся от предыдущего на бесконечно малую величину dy .

Представим себе, что мы на фиг. 15 изменяем начало отсчета времени, например, начинаем его от точки m , т. е. на



Фиг. 15.

$$\tau = Om$$

позднее. В этот момент теперь у нас $t=0$, y же равно отрезку

$$mn = A \sin(\omega\tau).$$

Как выразится тогда любое y в функции времени, как изменится формула (6,4)? Выражение для y будет тогда такое:

$$y = A \sin(\omega t + \alpha), \quad (6,6)$$

где угол $\alpha = \omega\tau$; полагая здесь $t=0$, получаем как раз

$$y = A \sin(\omega\tau).$$

Если бы мы начали отсчет времени раньше на θ , чем делали прежде, т. е. от точки p , а не от нуля, то

$$y = A \sin(\omega t - \beta), \quad (6,7)$$

где

$$\beta = \omega\theta.$$

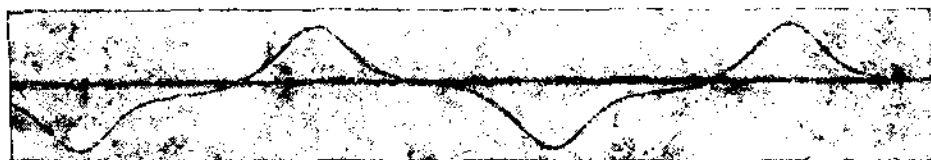
Выражение (6,6), если под α подразумевать величину алгебраическую, является наиболее общим выражением синусоидальной функции.

В дальнейшем мы всегда будем преобразовывать различные выражения переменных величин, стараясь привести их к виду (6,6). Заметим, что α может иметь знаки плюс и минус, а ωt входит в формулу с плюсом; минус же не имел бы смысла.

Если кривая э. д. с. машины выражается точно формулой (6,5), т. е. есть синусоида, и если кривая силы тока тоже есть синусоида, то мы говорим, что имеем дело с синусоидальным током. Теории и расчету явлений такого тока посвящены главы I—X.

На фиг. 16 мы видим осциллограмму кривой тока, который проходит по катушке, намагничивающей этим переменным током железный сердечник. Как видим, форма этой кривой сильно отстает от синусоидальной, таково влияние железа, именно его магнитного насыщения, получающегося в те моменты, когда сила тока приобретает значения около максимального.

Расчет явлений в цепях с такими несинусоидальными периодическими токами имеет большие особенности и требует особой теории — теории переменных токов сложной формы. Эта теория излагается в главах XI—XII.



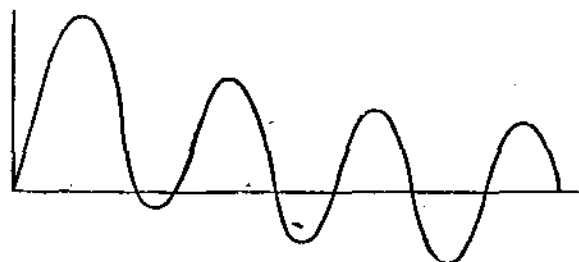
Фиг. 16.

От этих токов надо отличать несинусоидальные токи непериодические, т. е. не повторяющие по прошествии периода своих значений.

На фиг. 17 дана кривая тока при включении переменного тока в цепь, содержащую большую индуктивность.

Здесь ток становится синусоидальным по прошествии некоторого времени; в течение промежутка времени в несколько периодов значения его изменяются по кривой, не повторяющей всех своих значений каждый период.

Это состояние в цепи тока называется неустановившимся режимом.



Фиг. 17.

Явления неустановившегося режима очень разнообразны и сложны и имеют место при включении и выключении тока и при изменениях нагрузки. Область этих явлений надо выделить и рассмотреть особо.

Следует заметить, что в большинстве случаев неустановившийся режим имеет место в течение весьма небольшого промежутка времени — доли секунды, так что

он большей частью остается как бы незаметным для наблюдателя, не вооруженного осциллографом; но иногда он может быть и опасен, почему и необходимо его изучение.

Главы XVIII и XIX посвящены неустановившемуся режиму.

Последняя же глава книги занимается изучением влияния частоты и именно при больших ее значениях влияния высокой частоты на явления переменного тока.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ЦЕПЬ СИНУСОИДАЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО ТОКА, СОДЕРЖАЩАЯ ИНДУКТИВНОЕ И АКТИВНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

§ 7. Синусоидальный ток. Электродвижущая сила самоиндукции

Пусть мгновенные значения э. д. с., измеренные в вольтах, выражаются формулой (6,5):

$$e = E_m \sin(\omega t), \quad (7.1)$$

где E_m есть амплитуда, наибольшее, максимальное значение э. д. с., что и должно указываться значком m .

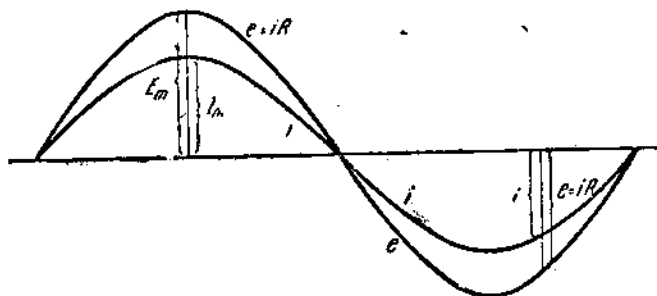
Если эта э. д. с. действует в цепи, индуктивностью которой мы можем пренебречь [формула (5,1)], то мгновенные значения силы тока будут определяться по закону Ома:

$$i = \frac{e}{R},$$

где R есть сопротивление всей цепи. Подставляя сюда выражение (7,1) для e , имеем

$$i = \frac{E_m}{R} \sin(\omega t) = I_m \sin(\omega t). \quad (7,2)$$

Здесь $I_m = \frac{E_m}{R}$ есть амплитуда силы тока, т. е. наибольшая сила тока; она получается в тот момент, когда э. д. с. e имеет наибольшее значение E_m . На фиг. 18 представлены кривые э. д. с. и силы тока, достигающие максимумов и проходящие через нулевые значения одновременно. Ординаты кривой e отложены в масштабе э. д. с., ординаты кривой i — в масштабе для силы тока.



Фиг. 18.

Остановимся теперь на более общем и сложном случае, когда в цепи переменного тока создается настолько значительная э. д. с. самоиндукции, что пренебречь ею уже нельзя.

Электродвижущая сила самоиндукции e_c выражается так:

$$e_c = -L \frac{di}{dt}, \quad (7,3)$$

где L есть индуктивность в цепи в практических единицах, т. е. в генри.

Очень важно не забывать то условие, при котором это выражение для э. д. с. самоиндукции точно; это условие состоит в следующем: в магнитном поле данного тока не должны иметь места явления магнитного насыщения железа и явления гистерезиса. Вообще ведь э. д. с. самоиндукции, индуктирующаяся от изменения потока Φ , создаваемого током i , в каком-нибудь контуре, состоящем в общем случае из w витков, выражается так:

$$e_c = -\frac{d\Phi}{dt} w \text{ вольт} = -\frac{d(Li)}{dt}. \quad (7,4)$$

Если насыщения и гистерезиса нет, то магнитный поток всегда точно пропорционален току, а потому L есть величина постоянная; тогда

$$e_c = -\frac{d(Li)}{dt} = -L \frac{di}{dt}.$$

Если же есть насыщение, т. е. имеется в магнитном поле сильно намагничивающееся железо, то поток не пропорционален току, а растет, чем дальше, тем медленнее сравнительно с силой тока; поэтому L тогда уже не постоянно, а убывает с ростом тока и потока, и в формуле (7,4) следовало бы дифференцирование производить, как у произведения функций.

Так как кривая намагничивания железа не выражена еще точно каким-либо уравнением, то дифференцировать L по i мы можем лишь каким-либо приближенным

способом. В технике переменных токов поэтому пользуются формулой (7,3) даже и тогда, когда имеется намагничивающееся данным переменным током железо. Другим оправданием применения этой формулы служит то обстоятельство, что наибольшие значения магнитной индукции в железе машин и приборов переменного тока обыкновенно из-за соображений о потерях на гистерезис и токи Фуко не бывают очень велики — их допускают не выше 10 000 линий на 1 см²; при таких величинах индукции перегиб кривой намагничивания еще только начинает проходиться, так что допущение пропорциональности между величиной индукции, а следовательно, и ее потока Φ , и мгновенной величиной силы тока, т. е. допущение постоянства L , является приближением, приемлемым вполне.

С приведенными оговорками примем формулу (7,3).

При существовании э. д. с. самоиндукции сила тока выразится формулой (4,1):

$$i = \frac{e + e_s}{R}.$$

Далее мы увидим, что при синусоидальной э. д. с. e сила тока отстает от точной синусоидальной формы только в том случае, когда в магнитном поле тока есть явление гистерезиса, т. е. тогда, когда и формула (7,3) делается лишь приближенной. Этот случай мы разберем потом подробно, пока же исследуем тот случай, когда сила тока изменяется тоже по синусоиде.

Зададимся выражением для такого тока, начав отсчет времени с момента прохождения его через нулевое значение,

$$i = I_m \sin(\omega t). \quad (7,5)$$

Найдем прежде всего э. д. с. самоиндукции, подставив в формулу (7,3) вместо силы тока ее выражение (7,5) и произведя дифференцирование. Будем считать при этом L данным.

Затем решим следующую задачу: какую э. д. с. e надо приложить к нашей цепи с данными сопротивлением ее R и индуктивностью L , чтобы по ней шел переменный ток с амплитудой I_m , которой мы задались в выражении (7,5). При этом мы воспользуемся формулой (4,1) и получим уравнение или формулу, связывающую амплитуды силы тока I_m , э. д. с. E_m , пока искомой, с величинами R , L и числом периодов. Потом же мы сможем из этой формулы просто находить любую из этих всех величин, когда остальные все будут даны. Итак, переходим к первому вопросу — о нахождении выражения э. д. с. самоиндукции. Подставив выражение i из формулы (7,5) в (7,3), имеем

$$\begin{aligned} e_s &= -L \frac{d}{dt} [I_m \sin(\omega t)] = -\omega L I_m \cos(\omega t) = \\ &= \omega L I_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (7,6)$$

Сравнивая выражения (7,5) и (7,6), мы замечаем, что максимум э. д. с. самоиндукции наступает на четверть периода позже, чем максимум силы тока, так как в формуле (7,5) $\sin(\omega t)$ достигает значения $+1$ в момент времени

$$t = \frac{1}{4} T,$$

а $\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ достигает того же значения $+1$ в момент, когда

$$\omega t - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

т. е.

$$t = \frac{1}{2} T;$$

вообще, если $\sin(\omega t_1)$ равен какой-нибудь величине, то $\sin\left(\omega t_2 - \frac{\pi}{2}\right)$ приобретает такую же величину на четверть периода позднее, так как если

$$\sin(\omega t_1) = \sin\left(\omega t_2 - \frac{\pi}{2}\right),$$

то

$$\omega t_1 = \omega t_2 - \frac{\pi}{2},$$

или

$$\frac{2\pi}{T} \cdot t_2 = \frac{2\pi}{T} \cdot t_1 + \frac{\pi}{2} \text{ и } t_2 = t_1 + \frac{1}{4} T.$$

Таким образом синусоиду, изображающую э. д. с. самоиндукции, надо чертить сдвинутой относительно кривой силы тока вправо, в сторону возрастания времени, на четверть периода и с амплитудой

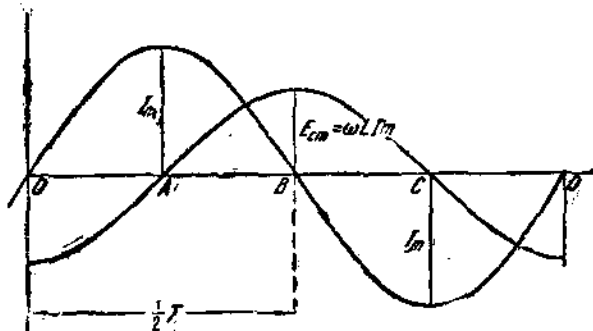
$$E_{cm} = \omega L I_m, \quad (7,7)$$

измеряемой в масштабе э. д. с.

На фиг. 19 изображены обе синусоиды — силы тока и э. д. с. самоиндукции.

Электродвижущая сила самоиндукции положительна все время от момента

$$t = OA = \frac{1}{4} T$$



Фиг. 19.

до момента $t = OC = \frac{3}{4} T$, т. е. пока ток уменьшается в положительном или растет в отрицательном направлении (не забудем, что положительное и отрицательное направления тока — понятия условные, просто обозначающие два противоположных направления), остальные полпериода она отрицательна. В каждый отдельный момент она стремится противодействовать изменению тока согласно закону Ленца.

Формула (7,3) дает непосредственно, что в момент t , когда $\frac{di}{dt} = 0$, т. е. когда $e_c = 0$, сила тока i имеет максимум; наоборот, в моменты времени O , B и D величина $\frac{di}{dt}$, тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной к синусоиде, делается наибольшей, и поэтому в эти моменты э. д. с. самоиндукции достигает максимума в том или другом направлении

§ 8. Закон Ома для всей цепи и для части ее

Перейдем теперь к решению задачи, поставленной нами: найти э. д. с. e . Если бы не было в цепи э. д. с. самоиндукции, кривая э. д. с. e , необходимой для создания данного тока i , была бы кривой e на фиг. 18, причем $e = iR$. Теперь же

$$i = \frac{e + e_c}{R},$$

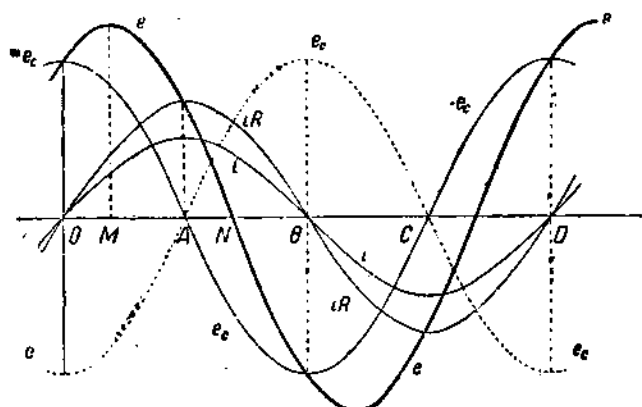
и следовательно,

$$e = iR - e_c. \quad (8,1)$$

Это последнее соотношение показывает, что мы можем представлять э. д. с. e состоящей во всякий момент из двух слагаемых: вторая слагаемая — e_c уравно-

вешивает, компенсирует э. д. с. самоиндукции e_c в цепи, в сумме $-e_c$ и e_c в каждый момент дают нуль; первая слагаемая iR тратится на преодоление сопротивления R при токе i . На фиг. 20 начерчены следующие синусоиды: 1) тока i ; 2) iR , полученная из первой простым умножением ее ординат на R ; 3) э. д. с. самоиндукции e_c (пунктиром); 4) обратной по знаку величины $-e_c$; затем ординаты второй синусоиды iR и четвертой $-e_c$ сложены, и получена пятая синусоида, изображенная на фигуре жирной линией, — синусоида э. д. с. e .

Как видим из чертежа, э. д. с. e достигает максимума или нулевого значения не в те моменты, когда достигает таких значений сила тока, и не в те, когда



Фиг. 20.

их достигает э. д. с. самоиндукции. Например, e имеет положительный максимум в момент времени $t = OM$, т. е. на промежуток времени $AM = \frac{1}{4}T - OM$ раньше, чем достигает положительного максимума сила тока.

На фиг. 20 мы имеем разные синусоидальные функции, или кривые, которые началом отсчета положительного времени застигнуты в разных стадиях своего изменения, или, как принято го-

ворить в теории переменных токов, — в разных фазах. Фазой синусоидальной величины называется та часть периода, которая протекла уже с начала периода этой величины до начала отсчета положительного времени, причем началом периода для единообразия условно считают момент прохождения функции через то нулевое значение, после которого она принимает положительные значения.

Таким образом фазы величин на фиг. 20 будут таковы: сила тока и составляющая iR э. д. с. имеют фазу 0; э. д. с. самоиндукции e_c имеет фазу $-\frac{1}{4}T$;

составляющая э. д. с. $-e_c$ имеет фазу $+\frac{1}{4}T$; э. д. с. e — фазу $\frac{1}{4}T - OM = MA$.

О синусоидальных величинах, имеющих одинаковые фазы, говорят, что они совпадают в фазе, например, i и iR ; о величинах, имеющих разные фазы, говорят, что они имеют разность фаз: например, i и e_c имеют разность фаз в четверть периода, причем сила тока i опережает в фазе э. д. с. самоиндукции на четверть периода, или, иначе, э. д. с. самоиндукции отстает в фазе от силы тока на четверть периода; сила тока отстает в фазе от э. д. с. e на величину MA и т. д. Разность фаз двух синусоидальных величин A и B равна промежутку времени, выраженному в долях периода, протекающему с момента, когда A имеет какую-либо величину, например, положительную максимальную или две трети от максимальной, до момента, когда B имеет соответствующую величину, т. е. свою максимальную или две трети от нее и т. д.

Все вышележащее получим теперь аналитическим путем, который приведет нас к точному выражению функциональной зависимости всех величин в цепи тока друг от друга.

Подставим в формулу (8,1) для э. д. с. e значения i из формулы (7,5) и э. д. с. самоиндукции e_c из формулы (7,6):

$$e = I_m R \sin(\omega t) - \omega L I_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

или

$$e = I_m R \sin(\omega t) + \omega L I_m \cos(\omega t).$$

Чтобы привести это выражение к нормальному виду синусоидальной функции $A_m \sin(\omega t + \alpha)$, вынесем сначала за скобки величину $I_m \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$:

$$e = I_m \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \left[\frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t) + \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos(\omega t) \right].$$

Введем вспомогательный угол φ , определяемый условием

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}, \quad (8,2)$$

откуда получается, что

$$\sin \varphi = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \quad \text{и} \quad \cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}. \quad (8,3)$$

Теперь

$$\begin{aligned} e &= I_m \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} [\cos \varphi \cdot \sin(\omega t) + \sin \varphi \cdot \cos(\omega t)], \\ e &= I_m \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (8,4)$$

Так как $\omega = \frac{2\pi}{T}$, то формулу (8,4) можно представить еще и так:

$$e = I_m \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \sin \left[\omega \left(t + \varphi \frac{T}{2\pi} \right) \right]. \quad (8,5)$$

Сопоставляя это выражение э. д. с. с выражением (7,5) для силы тока $i = I_m \sin(\omega t)$, мы видим, что одни и те же величины синуса получаются для $\sin(\omega t)$ позднее, т. е. для большего значения времени, чем для

$$\sin \left[\omega \left(t + \varphi \frac{T}{2\pi} \right) \right],$$

так как если

$$\sin \left[\omega \left(t_1 + \varphi \frac{T}{2\pi} \right) \right] = \sin(\omega t_2),$$

то

$$\omega \left(t_1 + \varphi \frac{T}{2\pi} \right) = \omega t_2 \quad \text{и} \quad t_2 - t_1 = \varphi \frac{T}{2\pi}. \quad (8,6)$$

Выражение (8,6) дает нам разность фаз между э. д. с. и силой тока, причем последняя запаздывает относительно первой; в момент времени $t = 0$ сила тока равна нулю, а э. д. с. равна

$$e = I_m \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \sin \left(\omega \cdot \varphi \cdot \frac{T}{2\pi} \right) = I_m \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \sin \varphi.$$

Эта разность фаз на фиг. 20 представлена отрезком по оси абсцисс, равным MA , следовательно,

$$MA = \varphi \frac{T}{2\pi} = \frac{T}{2\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega L}{R}. \quad (8,7)$$

Правая часть формулы (8,7) имеет, как видим, размерность времени.

Разность фаз двух синусоидальных величин называют еще сдвигом в фазе, или сдвигом фаз этих величин.

Сообразно формулам (7,6) и (8,5) нужно считать отставание отрицательным сдвигом, опережение — положительным.

Итак, сдвиг фазы силы тока относительно э. д. с. равен

$$-\frac{T}{2\pi} \arctg \frac{\omega L}{R}.$$

Угол $\varphi = \arctg \frac{\omega L}{R}$ называется фазовым углом, или, чаще, углом сдвига фаз.

Рассматривая формулу (8,4), мы видим, что амплитуда э. д. с. равна

$$E_m = I_m \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}. \quad (8,8)$$

Формулы (8,2) и (8,4) представляют вместе полное решение задачи, поставленной нами: какую надо иметь в цепи с данными R , L и числом периодов, т. е. с данной ω , э. д. с., чтобы сила тока имела амплитуду I_m ?

После того как эти соотношения установлены, мы можем любую величину считать неизвестной, а остальные — данными, и ее определить. Неизвестной может быть только одна величина, так как хотя у нас два уравнения (8,2) и (8,4), но (8,2) служит для определения φ ; другими словами, эти два уравнения можно заменить одним, которое и будет представлять самое краткое решение задачи; подставим в (8,4), вместо φ его выражение из (8,2) и мы получим

$$e = I_m \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \sin \left(\omega t + \arctg \frac{\omega L}{R} \right), \quad (8,9)$$

или

$$e = E_m \sin \left(\omega t + \arctg \frac{\omega L}{R} \right). \quad (8,10)$$

Если нам даны E_m , R , L и ω (т. е. f или T), то из формулы (8,8) мы можем определить амплитуду силы тока

$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}. \quad (8,11)$$

Соотношение это называется законом Ома для цепи переменного тока. Оно определяет амплитуду силы тока, фаза же ее определяется из соотношения (8,2).

Когда индуктивности в цепи нет, тогда $L = 0$, и формула (8,9) переходит в

$$e = I_m R \sin(\omega t) = E_m \sin(\omega t)$$

— уже известное нам соотношение.

Формула (8,11) есть закон Ома для всей цепи, поэтому в нее входит э. д. с. генератора, сопротивление R всей цепи и индуктивность L тоже всей цепи, т. е. включая и самую обмотку машины переменного тока. Часто бывает нужно решить другую, хотя и подобную задачу. При данных сопротивлении R_{AB} и индуктивности L_{AB} участка цепи от точки A до точки B требуется узнать, каково должно быть переменное напряжение, или разность потенциалов, на этом участке, чтобы „прогнать“ через него ток с амплитудой I_m . Решение подобно предыдущему, только исходить мы будем из закона Ома для мгновенных значений в форме

$$i = \frac{u_{AB} + e_{cAB}}{R_{AB}}, \quad (8,12)$$

где u_{AB} обозначает напряжение, или разность потенциалов, между точками A и B что дает аналогичную (8,1) формулу:

$$u_{AB} = iR_{AB} - e_{cAB}. \quad (8,13)$$

Само собой понятно, что и e_{cAB} есть э. д. с. самоиндукции на участке AB , равная

$$e_{cAB} = -L_{AB} \frac{di}{dt}. \quad (8,14)$$

Дальнейший ход построения кривых и аналитических выводов ничем уже решительно не отличается от предыдущего и приводит нас к формуле

$$u_{AB} = I_m \sqrt{R_{AB}^2 + (\omega L_{AB})^2} \sin \left(\omega t + \arctg \frac{\omega L_{AB}}{R_{AB}} \right) = U_{ABm} \sin (\omega t + \varphi_{AB}). \quad (8,15)$$

Угол сдвига фаз между силой тока и опережающим ее напряжением

$$\varphi_{AB} = \arctg \frac{\omega L_{AB}}{R_{AB}}. \quad (8,16)$$

Амплитуда напряжения равна

$$U_{ABm} = I_m \sqrt{R_{AB}^2 + (\omega L_{AB})^2}. \quad (8,17)$$

Из последнего мы получаем

$$I_m = \frac{U_{ABm}}{\sqrt{R_{AB}^2 + (\omega L_{AB})^2}}, \quad (8,18)$$

что и представляет собой закон Ома для части цепи AB , или участка AB цепи при переменном токе.

§ 9. Сопrotивления ваттное, или активное, безваттное, или реактивное и полное

Обратимся к знаменателям выражений (8,11) и (8,18) предыдущего параграфа, которые, повидимому, аналогичны простому сопротивлению при постоянном токе.

Величина $\omega L = \frac{2\pi}{T}L$ имеет такую же физическую размерность, как и сопротивление.

Затем из формулы (8,11) и (8,18) видим, что и физическое действие индуктивности L на силу тока похоже в некотором отношении на действие увеличения сопротивления: именно амплитуда силы тока уменьшается, когда в цепи L растёт. Поэтому величину

$$X_L = \omega L$$

называли прежде „индуктивным сопротивлением“ (Reaktanz) в цепи переменного тока; величину же R называли „омическим сопротивлением“ (Resistanz); вся величина знаменателя

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}, \quad (A)$$

тоже имеющая размерность сопротивления, прежде называлась „кажущимся сопротивлением“ (Impedanz).

Эти величины в настоящее время называют так: величину R — ваттным, или активным, сопротивлением всей цепи или части ее, величину X — безваттным, или реактивным, сопротивлением цепи или части ее и, наконец, величину Z — полным сопротивлением всей цепи или части ее. Смысл названий „активное“ и „реактивное“ сопротивления выяснится позднее, когда мы выясним вопрос о мощности в цепи переменного тока.

Следует особенно обратить внимание на то обстоятельство, что для получения полного сопротивления цепи из сопротивлений активного и реактивного служит формула (A) и что нельзя просто сложить эти два последних сопротивления, чтобы получить полное.

Пусть, например, мы имеем напряжение на участке цепи с амплитудой $U_{ABm} = 110$ В; частота переменного тока $f = 50$ Гц, так что $\omega = 314$; активное сопротивление $R_{AB} = 3$ Ом, индуктивность участка AB равна $L_{AB} = 0,0128$ Н. Какова будет при этом сила тока в цепи? Находим прежде всего реактивное сопротивление

$$X_{LAB} = \omega L_{AB} = 2\pi \cdot 50 \cdot 0,0128 = 4 \text{ Ом},$$

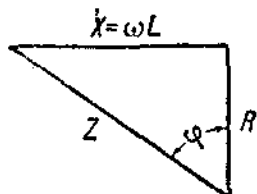
далее по формуле (А) полное сопротивление

$$Z_{AB} = 5 \, \Omega$$

и силу тока в цепи (амплитуда ее)

$$I_m = \frac{U_{ABm}}{Z_{AB}} = 22 \, \text{A}.$$

Соотношения между полным сопротивлением, с одной стороны, и активным и реактивным — с другой, таковы же, как между гипотенузой прямоугольного треугольника и его катетами; формулу (А) можно строить графически, откладывая по сторонам прямого угла в некотором одинаковом масштабе отрезки R и X и соединяя конечные точки их прямой; длина этой прямой между этими точками — гипотенуза полученного прямоугольного треугольника — определится как квадратный корень из суммы квадратов R и X , следовательно, по формуле (А) и даст поэтому величину Z (фиг. 21).



Фиг. 21.

Умножив все стороны этого треугольника на силу тока I , т. е. увеличив его линейно в I раз, мы получим треугольник напряжений, все значение которого выяснится в следующей главе.

При этом, очевидно, угол φ между катетом R и гипотенузой Z есть тот же самый угол φ , который был введен нами выше, ибо из фиг. 21 видно, что

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L}{R}.$$

До сих пор на всех фигурах мы изображали синусоидальные величины, пользуясь прямоугольными координатами; в следующей главе мы применим для той же цели полярные координаты, что позволит нам соотношения в цепи переменного тока представить еще более наглядно.

Пример 2. Определить амплитуду силы тока I_m если дано: $E_m = 135 \, \text{V}$, $R = 3 \, \Omega$, $L = 0,0124 \, \text{H}$ и $f = 50 \, \text{Hz}$.

Пример 3. Определить величину индуктивности L цепи, если $R = 80 \, \Omega$ и при $E_m = 6000 \, \text{V}$ течет ток с амплитудой $I_m = 60 \, \text{A}$ и $f = 50 \, \text{Hz}$.

Пример 4. Какова частота тока, если сила тока в цепи $I_m = 25 \, \text{A}$, а напряжение на участке AB цепи с $R_{AB} = 6 \, \Omega$ и $L_{AB} = 0,0244 \, \text{H}$ равно $U_{ABm} = 250 \, \text{V}$. Какова будет сила тока при частоте $f = 50 \, \text{Hz}$?

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СООТНОШЕНИЙ В ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА ПОСРЕДСТВОМ ВЕКТОРОВ

§ 10. Введение понятия вектора

Любую синусоидальную величину, мгновенное значение которой выражается формулой

$$a = A_m \sin(\omega t + \varphi), \quad (10,1)$$

можно представить геометрически следующим образом.

Проведем под углом φ , входящим в формулу (10,1), к вертикальной оси OY (фиг. 22) прямолинейный отрезок OA , по длине равный в известном масштабе величине A_m

$$OA = A_m.$$

Затем представим себе прямую линию NON_1 , непрерывно вращающуюся около точки O , через которую она проходит, по направлению движения

часовой стрелки с постоянной скоростью и именно такой, что полный оборот линия эта делает точно за один период изменения рассматриваемой синусоидальной величины A .

Таким образом угловая скорость вращения этой линии выразится как

$$\frac{2\pi}{T},$$

следовательно, будет равна ω , входящей под знаком синуса в выражение синусоидальной величины a . Линия NON_1 называется линией времени. Переменный угол $NOX = \alpha$, составляемый с горизонтальной осью OX , пропорционален времени t , протекшему с того момента, когда линия времени совпадала с горизонтальной осью:

$$\alpha = \omega t.$$

Момент, когда линия времени совпадала с осью OX , примем за начало отсчета времени.

Отрезок OA называется вектором рассматриваемой синусоидальной величины.

Вектор имеет, таким образом, величину и направление.

Докажем, что проекция вектора синусоидальной величины на линию времени в любом ее положении, т. е. в любой момент времени, равна мгновенному значению этой синусоидальной величины в этот именно момент.

Проведем линию OK под углом φ к горизонтальной оси OX ниже ее, тогда $\angle KOA = \varphi + \angle XO A = \angle XOY = \frac{\pi}{2}$ и $OK \perp OA$.

Берем произвольное положение линии времени ON ; $\angle NOX = \omega t$; $\angle KON = \angle NOX + \varphi = \omega t + \varphi$; опускаем из точки A перпендикуляр AM на линию времени; отрезок OM есть проекция вектора OA на линию времени.

Далее имеем

$$OM = OA \cdot \sin(\angle OAM).$$

$\angle OAM$ и $\angle KON$ равны как углы с перпендикулярными сторонами; следовательно,

$$\angle OAM = \omega t + \varphi;$$

поэтому

$$OM = OA \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

или

$$OM = A_m \sin(\omega t + \varphi),$$

т. е.

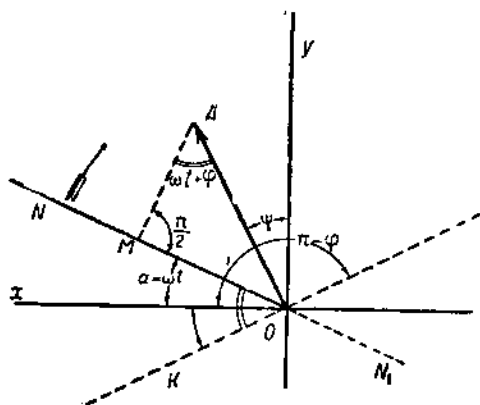
$$OM = a,$$

и теорема доказана.

Таким образом проекции вектора на линию времени в разные моменты являются здесь тем же, чем были на прежних фигурах ординаты синусоид.

Геометрическое место точек M в разные моменты времени, т. е. при вращении линии времени, есть окружность, описанная на векторе, как на диаметре.

Следует заметить, что на фиг. 18, 19, 20 где начерчены синусоиды и применены декартовы координаты, линия времени тоже легко может быть предста-



Фиг. 22.

влена и именно следующим образом: это есть прямая, всегда остающаяся параллельной оси ординат, движущаяся поступательно с постоянной скоростью вдоль оси абсцисс.

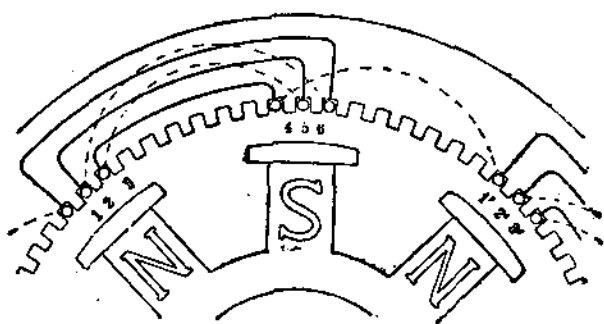
Отрезок ее от оси абсцисс до синусоиды есть мгновенное значение синусоидальной величины; на фиг. же 22 мгновенные значения равны отрезкам от полюса O до окружности, описанной на векторе как на диаметре.

На фиг. 18—20 время пропорционально длине абсциссы места нахождения линии времени, на фиг. 22 — углу поворота ее.

Когда угол $\alpha = \omega t$ ставится больше $\pi - \varphi$, тогда в формуле (10,1) $\sin(\omega t + \varphi)$ становится отрицательным; отрицательным становится поэтому и a ; вместе с тем при $\alpha > \pi - \varphi$, как легко видеть из фиг. 22, величина a как проекция вектора OA откладывается от точки O не по самой линии $\overline{ON}$, а по ее продолжению за точку O — по линии $\overline{ON}_1$. Поэтому будем считать, что линия времени состоит из двух частей: положительной $\overline{ON}$ и отрицательной $\overline{ON}_1$; когда проекция вектора приходится на положительной части линии времени, тогда эта проекция есть величина положительная; когда же линия времени повернется так, что проекция вектора откладывается на ее отрицательной части, эта проекция — величина отрицательная. Таким образом за один полный период T точка M два раза опишет окружность OMA , построенную на OA как на диаметре, один раз — при пересечении окружности положительной частью линии времени, другой — при пересечении отрицательной.

§ 11. Сложение векторов

Предположим, что мы имеем несколько синусоидальных величин, амплитуды которых и фазы не равны, а действия суммируются алгебраически. Такие синусоидальные величины можно все заменить одной новой, результирующей их синусоидальной величиной, действие которой в каждый момент будет тождественно с действием их всех вместе. Посмотрим, как найти эту новую величину, результирующую, т. е. как определить ее амплитуду и фазу.



Фиг. 23.

Как пример таких величин могут служить э. д. с. в отдельных проводниках обмотки, изображенной на фиг. 23. Положим в отмеченные пазы проводники (оставив остальные пазы пустыми), перенумеруем их по порядку слева направо так: 1, 2, 3 — одна группа, 4, 5, 6 — следующая, 1', 2', 3' — следующая и т. д., и соединительными проводниками соединим их последовательно в обмотку; пунктиром показаны соединительные проводники на задней стороне статора; таким образом от проводника 1 подем по передней стороне статора к проводнику 6, от 6 — по задней стороне к проводнику 2, от 2 — по передней стороне к 5, от 5 — по задней к 3, от 3 — по передней к 4, от 4 — по задней к новой группе, к проводнику 1' и там повторим соединение подобно предыдущему. Совокупность проводников 1-6-2-5-3-4 составляет катушку обмотки, проводник между 4 и 1' соединяет одну катушку с другой. Проводники 1, 2 и 3 составляют одну сторону катушки, проводники 4, 5 и 6 — другую. Заметим, что середины сторон катушек, у нас проводники 2 и 5, 5 и 2', отстоят друг от друга на полюсное деление. Обычно в современных машинах сторона катушки заполняет от трех до пяти

пазов (оставив остальные пазы пустыми), перенумеруем их по порядку слева направо так: 1, 2, 3 — одна группа, 4, 5, 6 — следующая, 1', 2', 3' — следующая и т. д., и соединительными проводниками соединим их последовательно в обмотку; пунктиром показаны соединительные проводники на задней стороне статора; таким образом от проводника 1 подем по передней стороне статора к проводнику 6, от 6 — по задней стороне к проводнику 2, от 2 — по передней стороне к 5, от 5 — по задней к 3, от 3 — по передней к 4, от 4 — по задней к новой группе, к проводнику 1' и там повторим соединение подобно предыдущему. Совокупность проводников 1-6-2-5-3-4 составляет катушку обмотки, проводник между 4 и 1' соединяет одну катушку с другой. Проводники 1, 2 и 3 составляют одну сторону катушки, проводники 4, 5 и 6 — другую. Заметим, что середины сторон катушек, у нас проводники 2 и 5, 5 и 2', отстоят друг от друга на полюсное деление. Обычно в современных машинах сторона катушки заполняет от трех до пяти

пазов. Рассмотрим сначала э. д. с. в одной катушке. Так как в катушке шесть проводников: 1, 2, 3, 4, 5 и 6, то и э. д. с. мы имеем шесть. Максимумы и нулевых значений они достигают не все одновременно, а парами, сначала (при вращении полюсов по часовой стрелке) в паре проводников 1 и 4, затем в паре 2 и 5 и после всего 3 и 6; таким образом э. д. с. будут обладать разностью фаз. Амплитуды же их будут одинаковы.

Мгновенное значение результирующей э. д. с. сложится из мгновенных значений всех шести э. д. с.:

$$e = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6,$$

или, так как они попарно обладают одинаковыми фазами (e_1 во всякий момент равно e_4 , то же e_2 и e_5 и то же e_3 и e_6 , как э. д. с. проводников, отстоящих ровно на одно полюсное деление),

$$e = 2(e_1 + e_2 + e_3).$$

Будем считать, что в формулах, выражающих эти э. д. с. как синусоидальные функции времени, моментом начала отсчета времени является момент прохождения через нейтральную линию проводников 1-4; тогда

$$e' = e_1 + e_4 = 2e_1 = E'_m \sin(\omega t), \quad (\alpha)$$

где E'_m есть удвоенная амплитуда э. д. с. в каждом отдельном проводнике.

Электродвижущие силы проводников 2 и 5 запаздывают на время τ , составляющее такую долю периода, какую от двойного полюсного деления составляет расстояние 1-2 или 4-5; поэтому

$$e'' = e_2 + e_5 = 2e_2 = E'_m \sin[\omega(t - \tau)]; \quad (\beta)$$

время τ вошло сюда со знаком минус, чтобы выразить, что e_2 запаздывает сравнительно с e_1 ; время t должно иметь большее значение в формуле (β), чем в формуле (α) для равных значений e_1 и e_2 .

Преобразуем (β):

$$2e_2 = E'_m \sin(\omega t - \omega\tau) = E'_m \sin(\omega t - \varphi). \quad (\gamma)$$

Здесь φ есть фазовый угол, определяемый соотношением

$$\omega\tau = \varphi,$$

и, наоборот, имеем

$$\tau = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{\varphi}{2\pi} T$$

— формулу, нам уже знакомую.

Электродвижущие силы проводников 3 и 6 запоздают на вдвое большую часть периода против e_1 , поэтому

$$e''' = e_3 + e_6 = 2e_3 = E'_m \sin[\omega(t - 2\tau)] = E'_m \sin(\omega t - 2\varphi). \quad (\delta)$$

Чтобы пример и дальнейшие построения уяснить полнее, конкретизируем задания еще полнее. Заданым числом пазов, уместающихся на двойном полюсном делении. Пусть это число будет 18, т. е. расстояние между центрами двух соседних пазов, например, 1 и 2, равно одной восемнадцатой от двойного полюсного деления.

Тогда и

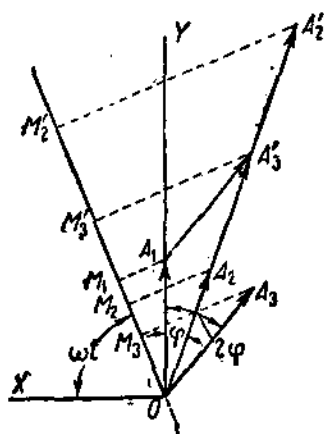
$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{18},$$

и, следовательно,

$$\varphi = \frac{2\pi}{18} = \frac{1}{9} \pi,$$

в градусах $\varphi = 20^\circ$.

Применим построение фиг. 22 к этим э. д. с. Для e' угол φ фиг. 22 равен нулю; поэтому (фиг. 24) амплитуду $OA_1 = E'_m$ откладываем прямо по вертикальной оси OY . Для e'' угол φ фиг. 22 отрицателен (формула γ) и равен $\frac{1}{9} \pi$; отложим его вправо от оси OY , т. е. по вращению линии времени; на стороне его откладываем $OA_2 = E'_m$. Линия времени позднее совпадает с OA_2 , чем с OA_1 , и максимум e'' наступит позднее, чем e' .



Фиг. 24.

Для e''' угол отрицателен и равен $\frac{2}{9} \pi$ согласно формуле (б). Откладываем $\angle A_1OA_3 = \frac{2}{9} \pi$, вправо же, на стороне этого угла, откладываем $OA_3 = E'_m$.

При каком-нибудь положении ON линии времени, т. е. в произвольный момент времени t , мгновенные значения э. д. с. выразятся проекциями векторов OA_1 , OA_2 и OA_3 на линию времени:

$$\overline{OM_1} = \overline{OA_1} \cdot \sin(\omega t) = e',$$

$$\overline{OM_2} = \overline{OA_2} \cdot \sin(\omega t - \varphi) = e'',$$

$$\overline{OM_3} = \overline{OA_3} \cdot \sin(\omega t - 2\varphi) = e'''.$$

Нас интересует величина

$$e = e' + e'' + e'''.$$

Известно, что алгебраическая сумма проекций отрезков произвольных величин и направлений равна проекции геометрической суммы этих отрезков. Приложив к OA_1 отрезок $A_1A'_2$, равный по величине и по направлению вектору OA_2 , видим, что его проекция на линию времени $M_1M'_2$ равна OM_2 . Отложив отрезок $A'_2A'_3$, по величине и направлению равный вектору OA_3 , имеем, что его проекция $M'_2M'_3$ равна OM_3 . Таким образом для любого и, следовательно, для всякого момента времени мгновенное значение результирующей э. д. с.

$$e = e' + e'' + e''' = OM'_3,$$

— проекции геометрической суммы векторов э. д. с. OA_1, OA_2, OA_3 , или проекции результирующего вектора OA'_3 .

Когда линия времени повернется так, что совпадет с линией OA'_3 , тогда сумма э. д. с. $e' + e'' + e'''$ имеет свой максимум, достигает своей амплитуды, равной отрезку OA'_3 . Заметим, что из чертежа очевидно, что эта амплитуда меньше $3E'_m$. Если мы все три проводника каждой стороны катушки поместим вместе в одном пазу, то все углы φ станут равными нулю, и амплитуда результирующей э. д. с. станет $3E'$. Из фиг. 24 легко видеть, что при увеличении углов φ , т. е. при увеличении расстояния между соседними пазами, амплитуда OA'_3 будет уменьшаться, и, наоборот, она будет расти до предела, равного $3E'_m$, при уменьшении углов φ до нуля, т. е. при сближении пазов.

Те же результаты можно получить и аналитическим путем, преобразовав выражение мгновенного значения результирующей э. д. с.:

$$e = e' + e'' + e''' = E'_m \{ \sin(\omega t) + \sin(\omega t - \varphi) + \sin(\omega t - 2\varphi) \}.$$

Складывая сначала в скобках первый член с третьим, преобразуя их как сумму синусов и вынося затем $\sin(\omega t - \varphi)$ за скобки, имеем

$$e = E'_m (1 + 2 \cos \varphi) \cdot \sin(\omega t - \varphi). \quad (11,1)$$

Амплитуда результирующей э. д. с. равна

$$E_m = E'_m (1 + 2 \cos \varphi) = E'_m + 2E'_m \cos \varphi.$$

Это есть выражение для величины отрезка OA'_2 на фиг. 24, так как

$$A'_2 A'_2 = E'_m, \quad \text{а} \quad OA'_2 = 2E'_m \cos \varphi.$$

Фаза результирующей э. д. с. по формуле (11,1) есть $-\varphi$, что является также и фазой вектора OA'_2 .

Если бы векторы OA_1 , OA_2 и OA_3 имели физическое значение другое, например, представляли бы силы токов, наши рассуждения и выводы величины результирующего вектора или вектора результирующей физической величины ни сколько бы не изменились.

Таким образом имеем окончательно: по величине и фазе вектор результирующей нескольких синусоидальных величин тождествен с вектором геометрической суммы векторов этих величин.

Чтобы придать рассмотренному примеру законченность, заметим, что э. д. с. всей обмотки машины выразится вектором, в p раз большим OA'_2 , так как OA'_2 есть вектор э. д. с. одной катушки, а катушек столько, сколько пар полюсов, т. е. p .

Рассмотрим еще один пример.

Пусть даны две синусоидальные величины, которые все время в действии своем суммируются

$$b_1 = B_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1) \quad \text{и} \quad b_2 = B_{2m} \sin(\omega t + \varphi_2);$$

требуется найти амплитуду B_m и фазу φ результирующей синусоидальной величины b .

B_m и φ должны быть таковы, чтобы в каждый момент

$$b = b_1 + b_2 = B_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1) + B_{2m} \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Преобразуем это выражение так, разлагая синусы сумм:

$$b = (B_{1m} \cos \varphi_1 + B_{2m} \cos \varphi_2) \sin \omega t + (B_{1m} \sin \varphi_1 + B_{2m} \sin \varphi_2) \cos \omega t.$$

Вводим вспомогательный угол φ , который определим известным образом:

$$\varphi = \arctg \frac{B_{1m} \sin \varphi_1 + B_{2m} \sin \varphi_2}{B_{1m} \cos \varphi_1 + B_{2m} \cos \varphi_2}. \quad (11,2)$$

Тогда вынося за скобки в правой части корень квадратный из суммы квадратов коэффициентов при $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$, получаем

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{(B_{1m} \cos \varphi_1 + B_{2m} \cos \varphi_2)^2 + (B_{1m} \sin \varphi_1 + B_{2m} \sin \varphi_2)^2} \sin(\omega t + \varphi) = \\ &= \sqrt{B_{1m}^2 + B_{2m}^2 + 2B_{1m}B_{2m} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (11,3)$$

На фиг. 25 построены векторы: OA_1 , представляющий по амплитуде и фазе величину b_1 ; OA_2 , представляющий b_2 , и их геометрическая сумма — вектор OA .

Нетрудно видеть, что длина OA выразится точно так же, как амплитуда в формуле (11,3), а фазовый угол AOY определится так же, как φ в формуле (11,2).

Следовательно, OA по амплитуде и по фазе и представит искомую результирующую.

Когда мы будем иметь несколько различных синусоидальных величин, то найдем сначала результирующую двух из них, потом, прибавив третью величину, найдем новую результирующую и т. д., как поступают при сложении сил.

В отдельных случаях задача может вследствие соотношений амплитуд и фаз составляющих упрощаться (фиг. 24).

После уяснения сложения векторов остановимся на вычитании их.

Пусть дана синусоидальная величина

$$a_1 = A_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Так как

$$\sin(a \pm \pi) = -\sin a,$$

то синусоидальная величина

$$a_2 = A_m \sin(\omega t + \varphi \pm \pi)$$

с амплитудой той же, что и у a_1 , но с фазовым углом, отличающимся на $\pm \pi$ от угла величины a_1 , будет всегда равна и противоположна по знаку величине a_1 , т. е.

$$a_2 = -a_1,$$

или

$$A_m \sin(\omega t + \varphi \pm \pi) = -A_m \sin(\omega t + \varphi). \quad (11,4)$$

Поэтому мы всегда можем $-a_1$ заменить $+a_2$, т. е. заменить вычитание синусоидальной величины сложением с новой синусоидальной величиной, с амплитудой, такой же, как и у вычитаемой величины, но с фазовым углом, отличающимся на $\pm \pi$.

Вектор, изображающий величину a_2 , будет иметь длину такую же, как и вектор, изображающий величину a_1 , по направлению же он будет отличаться от него на разность фазовых углов $\pm \pi$, т. е. будет ему прямо противоположен.

Вычесть какой-нибудь вектор — значит прибавить прямо противоположный по направлению вектор той же длины.

Заметим, что чертеж, на котором нанесено несколько векторов, приведенных в некоторую связь друг с другом, называется „векторальной“, или „векторной диаграммой“ тех физических величин, которые этими векторами представлены.

Пример 5. Построить в масштабе четыре вектора э. д. с.

$$100 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right), 100 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right), 100 \sin(\omega t) \text{ и } 50 \sin(\omega t + \pi)$$

и сложить их графически.

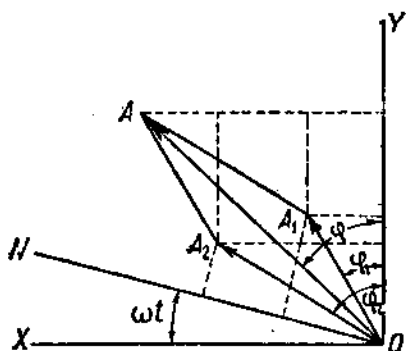
§ 12. Векторная диаграмма напряжений в цепи переменного тока

Ту задачу о нахождении э. д. с. по данным активному и реактивному сопротивлению цепи и амплитуде силы тока, которую мы аналитически решили в главе второй, можем теперь решить, применяя метод изображения синусоидальных величин векторами.

Построим векторную диаграмму напряжений в цепи переменного тока.

В основу рассуждений, как и прежде, положим формулу

$$e = iR - e_c. \quad (12,1)$$



Фиг. 25.

Пусть отсчет времени начат так, что на фиг. 22 угол φ для силы тока i равен нулю; в таком случае вектор силы тока I_m откладываем по оси Y (фиг. 26). Величина iR , очевидно, имеет ту же фазу, что и i , и отличается от последней лишь амплитудой.

Поэтому, умножив I_m на R и переведя на масштаб напряжений, получим вектор $OF = I_m R$, который представит нам величину iR .

Электродвижущая сила самоиндукции имеет амплитуду $\omega L I_m$ и отстает в фазе на четверть периода; поэтому ее следует представить вектором OD , направленным под углом $\frac{\pi}{2}$ к оси Y , т. е.

вправо от O по горизонтальному направлению. Ясно, что линия времени совпадает с OD на четверть периода позднее, чем с I_m и OF . Длина $OD = \omega L I_m$.

Так как э. д. с., приложенная к цепи, распадается на две слагаемые: iR и $-e$, то нам надо ввести в чертеж еще вектор синусоидальной величины — e , т. е. равной, но противоположной по знаку величине э. д. с. самоиндукции; это есть вектор OH , отложенный в противоположную сторону, чем OD , и равный ему по длине.

По формуле (8,1) мгновенное значение э. д. с. e равно сумме мгновенных значений iR и $-e$, т. е. проекция на линию времени вектора э. д. с. равна сумме проекций векторов OF и OH ; следовательно, вектор э. д. с. согласно предыдущему равен по величине и направлению геометрической сумме этих двух векторов. Складывая геометрически OF и OH , находим вектор OA . Найдем из прямоугольного треугольника OFA его величину — амплитуду E_m э. д. с. — и фазовый угол FOA :

$$\overline{OA^2} = \overline{OF^2} + \overline{FA^2}$$

или

$$E_m^2 = (I_m R)^2 + (\omega L I_m)^2,$$

откуда

$$E_m = I_m \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

и

$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}},$$

что представляет уже известный нам закон Ома. Далее

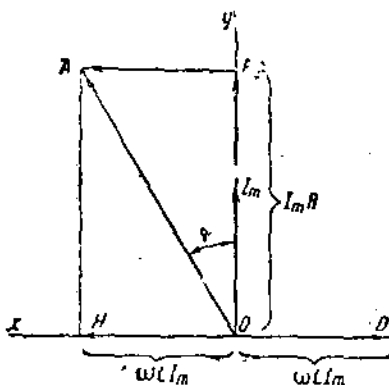
$$\operatorname{tg} \angle FOA = \frac{\overline{FA}}{\overline{OF}} = \frac{\omega L I_m}{I_m R} = \frac{\omega L}{R},$$

что тождественно с формулой (8,2), и $\angle FOA = \varphi$.

Таким образом задачу об определении амплитуды и фазы приложенной к цепи э. д. с. мы решили здесь геометрическим путем при помощи представления синусоидальных величин векторами.

Треугольник OFA носит название векторной диаграммы напряжений в цепи переменного тока.

Вектор э. д. с. OA представлен здесь как геометрическая сумма двух составляющих его векторов, которые называются так: вектор OF — вектором активной составляющей э. д. с., вектор $OH = FA$ — вектором реактивной составляющей ее. Смысл этих названий, как и смысл соответствующих названий сопротивлений R и ωL , выяснится позднее, когда мы будем разбирать вопрос о мощности и цепи переменного тока.



Если бы в только что изложенном построении R и L были активным сопротивлением и индуктивностью не всей цепи, а лишь одного ее участка, то вектор OA представил бы нам не э. д. с. E_m , а напряжение U_m на этом участке согласно с формулой (8,17). Векторы OF и $OH=FA$ были бы векторами активной и реактивной составляющих напряжения OA на участке цепи.

Обратим внимание на следующее обстоятельство: очевидно, что на соотношения различных величин в цепи переменного тока не может иметь никакого влияния то, с какого момента мы начнем отсчет времени — с момента ли прохождения через нулевое значение силы тока, или же с момента его максимума, или с момента прохождения через нулевое значение приложенной к цепи э. д. с.

Положим, что отсчет времени взят такой, что представит общий случай, сила тока выразится так:

$$i = I_m \sin(\omega t + \alpha).$$

Тогда э. д. с. самоиндукции выразится так:

$$e_c = -L \frac{di}{dt} = -\omega L I_m \cos(\omega t + \alpha) = \omega L I_m \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right),$$

следовательно, попрежнему отстает на четверть периода. Далее, э. д. с.

$$e = iR - e_c = I_m \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \sin(\omega t + \alpha + \varphi),$$

где φ определится той же самой формулой (8,2).

Как видим, существа соотношений между сопротивлениями, э. д. с. и силой тока тот или иной отсчет времени совсем не затрагивает и сказывается лишь введением во все формулы для синусоидальных величин под знаком синуса угла α . На векторной диаграмме напряжений (фиг. 26) тот или иной отсчет времени скажется лишь поворотом всех векторов на угол α . Если угол α в формуле (A) положителен, то вектор силы тока I_m повернется от него влево, т. е. в сторону опережения или более раннего времени; если α отрицателен, вектор I_m повернется вправо в сторону более позднего времени. Вместе с вектором I_m повернется в ту или другую сторону и весь треугольник напряжений OFA . Таким образом тот или иной отсчет времени скажется на чертеже только поворотом треугольника OFA около точки O . В зависимости от удобства или частных, конкретных, условий задач мы будем чертить векторы различных величин, треугольники напряжений и пр. в различных случаях различно, т. е. под разными углами к оси OY , в разных положениях относительно точки O , и читателю следует поэтому теперь же проделать вычерчивание всей фиг. 26 для нескольких различных случаев начала отсчета времени, чтобы узнавать все элементы этой фигуры впоследствии без труда независимо от положения треугольника напряжений около точки O .

Выразим теперь еще раз в виде четырех положений главнейшие результаты предыдущего относительно фаз различных величин в цепи переменного тока:

1) э. д. с. самоиндукции отстает в фазе от силы тока на четверть периода, вектор ее „отстает“, т. е. сдвинут по направлению вращения линии времени относительно вектора силы тока на угол $\frac{\pi}{2}$;

2) э. д. с., приложенная к цепи, в случае существования в цепи индуктивности, опережает силу тока в фазе на $\frac{\varphi}{2\pi} T$; вектор ее „опережает“ вектор силы тока, т. е. сдвинут относительно его навстречу вращения линии времени на угол φ , определяемый формулой (8,2);

3) обратно второму — сила тока отстает от приложенной э. д. с. в фазе на $\frac{\varphi}{2\pi} T$, и вектор ее отстает от вектора э. д. с. на угол φ ;

4) если рассматривается не вся цепь, а лишь некоторая часть ее, то во втором и третьем положениях вместо приложенной к цепи э. д. с. надо взять приложенное к рассматриваемой части цепи напряжение (или разность потенциалов).

Прежде чем перейти к изложению некоторых подробностей о векторной диаграмме напряжений, остановимся на следующем.

После того как мы построили векторы, результирующие из нескольких других векторов, мы получили треугольники OA_1A_3' на фиг. 24, OA_1A на фиг. 25 и OFA на фиг. 26; на эти треугольники можно взглянуть еще с новой точки зрения.

Линии A_1A_3' , $A_3'A_2'$ на фиг. 24, A_1A на фиг. 25 и FA на фиг. 26 (или OH) представляют соответствующую синусоидальную величину (например, FA — величину, противоположную э. д. с. самоиндукции) так же полно, как если бы они были построены из точки O , так как длина их равна амплитуде, а угол с осью Y есть фазовый угол соответствующей синусоидальной величины, ибо эти линии параллельны соответствующим векторам, построенным из точки O . Проекции этих линий на линию времени во всякий момент равны проекциям соответствующих векторов и представляют поэтому мгновенные значения соответствующих синусоидальных величин.

Таким образом при суждении о той или иной синусоидальной величине безразлично, от какой точки построить вектор этой величины; проще всего при выборе точки начала вектора руководиться тем, с каким, например, другим вектором рассматриваемый вектор должен складываться или из каких других векторов и какими действиями он получается. При этом на основании предыдущего для всякого вектора характерным для него является не фазовый угол его сам по себе, а разности фазовых углов — углы его с другими векторами диаграммы (фиг. 26).

Из вышесказанного следует правило условного обозначения вектора, когда вектор обозначается буквами, стоящими у начала и у конца его; при таком обозначении сначала называется буква, стоящая у начала вектора, например, вектор OD , вектор FA и т. д. Принимая же во внимание, что поворот вектора на угол $\pm \pi$ изменяет знак соответствующей синусоидальной величины, получаем, что вектор (фиг. 26)

$$FA = -AF,$$

и вообще вектор

$$NM = -MN.$$

Как не изменяет зависимости между величинами поворот диаграммы около точки O , так не изменит этой зависимости и перенос всей диаграммы в другую точку, как начало, каковой перенос все же может иметь свой обычный физический смысл.

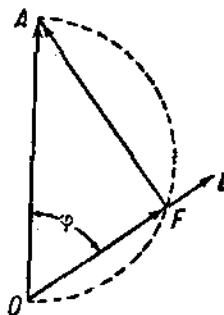
Для того чтобы легко отличить начало и конец вектора в сложных диаграммах, часто на конце вектора ставят стрелку. Мы тоже иногда будем делать это, но не всегда, для того чтобы читатель в простых случаях приучался „видеть“ направление вектора и без стрелки, так как и в журнальной литературе он встретит часто векторы без стрелок.

Пример 6. Построить в масштабе треугольник напряжений OFA для примеров 2, 3 и 4 § 9.

На фиг. 27 произведено это построение. Для примера 2 выбран масштаб $1 \text{ мм} \equiv 2 \text{ В}$; отложен отрезок $OA = 67,5 \text{ мм} = 1,35 \text{ В}$; на нем как на диаметре начерчена полуокружность, так как угол F прямой; умножением I_m на R получена величина вектора $I_m R = 27,3 = 81 \text{ В}$; при выбранном масштабе $OF = 40,5 \text{ мм}$, наконец, точка F соединена с A .

Если нам нужно представить и силу тока, откладываем по направлению OF отрезок OC , выбрав масштаб для силы тока, например, $1 \text{ мм} \equiv 0,5 \text{ А}$. Тогда $OC = 54 \text{ мм} = 27 \text{ А}$.

Читатель должен проделать подобные построения для примеров 3 и 4, выбрав другие масштабы.



Фиг. 27.

§ 13. Диаграмма синхронного генератора

Обратимся к тому, что мы назовем детализацией основной диаграммы напряжений генератора переменного тока. На фиг. 28 мы имеем снова треугольник OFA фиг. 26, расположенный на чертеже так, что с вертикальной осью Y совпадает гипотенуза его — вектор приложенной к цепи э. д. с. I_m есть вектор силы тока, отстающий от OA на угол $\angle AOF$, который мы прежде обозначали через φ , а теперь обозначим через φ_e . Далее, вектор $OF = I_m R$, где R есть активное сопротивление всей цепи. Обозначим сопротивление самой обмотки генератора через $R_{вну}$, а сопротивление внешней части цепи — через $R_{вне}$, так что $R = R_{вну} + R_{вне}$; тогда, очевидно, OF разлагается на сумму двух величин:

$$OF = I_m R = I_m (R_{вну} + R_{вне}) = I_m R_{вну} + I_m R_{вне}.$$

Пусть

$$OC = I_m R_{вне} \text{ и } CF = I_m R_{вну}.$$

Далее, аналогично только что изложенному и индуктивность можно разложить на сумму:

$$L = L_{вну} + L_{вне}.$$

Вспоминая рассуждения о самоиндукции в первой главе, мы видим, что индуктивность обмотки машины $L_{вну}$ никогда не бывает равна нулю; индуктивность же внешней части цепи $L_{вне}$ в случае безиндукционной нагрузки равна нулю.

Вектор FA разлагается на сумму

$$FA = \omega (L_{вне} + L_{вну}) I_m = \omega L_{вне} I_m + \omega L_{вну} I_m = FD + DA,$$

где

$$DA = \omega L_{вну} I_m \text{ и } FD = \omega L_{вне} I_m.$$

Вектор CF назовем вектором активного падения напряжения внутри машины, вектор DA назовем вектором реактивного падения напряжения там же; название „падение напряжения“ следует здесь из полной аналогии с падением напряжения в источнике постоянного тока. Если мы из э. д. с. OA вычтем оба падения напряжения, то получим то напряжение, которое остается для внешней части цепи, или напряжение на зажимах машины. Вычтем вектор DA — значит согласно предыдущему прибавить вектор AD , а вычтем CF — значит прибавить FC . Прикладываем к OA от точки A вектор AD , затем DB , равный FC , и получаем результирующий вектор OB — вектор напряжения на зажимах; его величину обозначим через U_m . Так как линия DB равна и параллельна линии FC , то и CB равно и параллельно FD , и OB представляется результирующим вектором из двух: во-первых, вектора OC , равного $I_m R_{вне}$, и, во-вторых, CB , равного $\omega L_{вне} I_m$. Можно было построение начать с проведения CB , вектора, равного FD ; тогда мы сначала получили бы вектор напряжения на зажимах OB , а вектор BA потом, — как разность между OA и OB .

Из фиг. 28 видим, что напряжение на зажимах запаздывает относительно э. д. с. на угол $\angle AOB$. Назовем угол запаздывания силы тока против напряжения $\angle FOB$ через φ_a ; значки при φ_e и φ_a указывают, что в первом случае угол берется между векторами силы тока и э. д. с. e , во втором же — между векторами силы тока и напряжением u . Угол сдвига фаз между э. д. с. и напряжением, $\angle AOB$, обозначим через θ :

$$\theta = \varphi_e - \varphi_a.$$

Пример 7. Проделаем один пример построения диаграммы. Пусть будет дано, что напряжение на зажимах машины имеет амплитуду: $U_m = 2000 \text{ В}$, сила тока в цепи имеет амплитуду $I_m = 100 \text{ А}$, активное сопротивление обмотки машины $R_{\text{вну}} = 1 \text{ }\Omega$; индуктивность обмотки $L_{\text{вну}} = 0,0095 \text{ Н}$; затем дано, что угол φ_u таков, что $\cos \varphi_u = 0,8$. Как увидим далее, из непосредственных измерений в цепи переменного тока можно вычислить именно прежде всего $\cos \varphi_u$, а затем уже узнать самый угол.

Затем дана еще частота переменного тока: $f = 50 \text{ Нз}$, так что $\omega = 2\pi f = 314$. Требуется по этим данным построить диаграмму напряжений генератора и, в частности, узнать его э. д. с. На фиг. 29 проделаны все относящиеся к задаче построения.

Прежде всего чертим две линии под углом одна к другой таким, косинус которого равен 0,8. Для этого из произвольной точки O проводим в произвольном направлении линию OB . Откладываем на ней отрезок OI , равный 50 мм; из точки I , как из центра, описываем радиусом IO окружность O_2B ; затем из точки O радиусом, численное значение которого в миллиметрах равно значению косинуса в сотых долях единицы, т. е. в данном случае радиусом в 80 мм, зачерчиваем дугу окружности, пересекающую первую окружность, в точке 2 проводим прямую $O2$, угол $BO2$ имеет косинус требуемой величины 0,8.

Откладываем по линии $O2$ отрезок Og , равный 50 мм, представляющий в масштабе $1 \text{ мм} \equiv 2 \text{ А}$ силу тока с амплитудой в 100 А. Для напряжений выбираем масштаб $1 \text{ мм} \equiv 20 \text{ В}$.

Отложим вектор $OB = 2000 \text{ В}$; значит длина отрезка OB равна 100 мм.

Приложим к нему, как на фиг. 28, вектор $BD = I_m R_{\text{вну}} = 100 \cdot 1 \text{ В}$, представляемый отрезком 5 мм, параллельным линии $O2$.

Перпендикулярно к нему строим отрезок DA длиной в 15 мм, представляющий вектор реактивного падения напряжения

$$\omega L_{\text{вну}} \cdot I_m = 314 \cdot 0,0095 \cdot 100 = 300 \text{ В}.$$

Отрезок OA есть вектор э. д. с. машины. Длина его $113\frac{2}{3}$ мм, следовательно,

$$E_m = 113\frac{2}{3} \cdot 20 = 2273 \text{ В}.$$

Предлагаем читателю для упражнения достроить диаграмму до вида фиг. 28, т. е. найти точки F и C , и вычислить $R_{\text{внв}}$, $L_{\text{внв}}$ и $\cos \varphi_e$.

Пример 8. Построить всю диаграмму снова для случая, когда $L_{\text{внв}} = 0$.

В диаграмме фиг. 28 важны четырехугольник векторов $OBDA$ и вектор тока I_m , остальные линии все вспомогательные и в них нет нужды, когда построение диаграммы понятно.

В таком виде векторная диаграмма синхронного генератора называется диаграммой Потье, по имени французского ученого, впервые введшего ее в теорию электрических машин.

Следует запомнить следующее важное замечание об этой диаграмме:

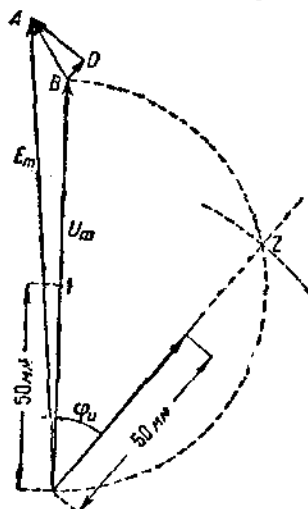
Она точна только для машин без выступающих (или „явно выраженных“) полюсов, ротор которых изображен на фиг. 12. Таковы все современные большие станционные генераторы мощностью в десятки тысяч киловатт, приводимые в движение паровыми турбинами, делающими 3000 об/мин.

Но эта диаграмма нуждается в изменении для генераторов с выступающими (или явно выраженными) полюсами, а таковы все генераторы, приводимые в движение гидравлическими турбинами, делающими иногда и очень низкое число оборотов (например, 100 в минуту), или двигателями внутреннего сгорания.

Далее, синхронная машина, как и всякая другая электрическая машина, обратима, т. е. может работать и как двигатель.

Синхронные двигатели строятся часто на не очень высокое число оборотов (например, 1000 в минуту или еще ниже).

В этом случае машину тоже предпочитают делать с выступающими полюсами.



Фиг. 29.

Для всех машин с выступающими полюсами магнитный поток, вызванный током i в обмотке статора, распадается на три части; получаются и три э. д. с., которые дают результирующую э. д. с., не совпадающую по направлению и величине с вектором $\overline{AD}$ на фиг. 28.

Этот вопрос представляет предмет изучения уже в „Курсе электрических машин“, так же как и вопрос, какой обмоткой надо снабдить ротор, чтобы получить на нем четыре или шесть полюсов, когда это удобно по конструктивным соображениям и когда неудобно.

В заключение укажем, что на векторы $\overline{OA}$ и $\overline{AD}$ можно взглянуть несколько с иной точки зрения и сказать, что оба вектора $\overline{OA}$ и $\overline{AD}$ есть векторы двух э. д. с., индуцирующихся в обмотке статора, и именно: $\overline{OA}$ индуцируется полем электромагнитов ротора или, точнее, просто полем (ротор ведь может и не иметь электромагнитов, т. е. ясно выраженных полюсов); а $\overline{AD}$ — собственным полем обмотки статора. Сумма этих двух векторов $\overline{OD}$ есть вектор фактически индуцирующейся в обмотке статора э. д. с., результирующей из $\overline{OA}$ и $\overline{AD}$, иначе $E_{всe}$.

Тогда, вычитая из $E_{всe}$ падение напряжения в активном сопротивлении обмотки $IR_{вну}$, мы получаем напряжение на зажимах.

Мы $E_{всe}$ в предыдущем разложили на векторы $\overline{OA}$ и $\overline{AD}$; $\overline{OA}$ зависит от силы тока в цепи возбуждения — в обмотке ротора; $\overline{AD}$ зависит от силы тока в обмотке статора.

§ 14. Векторная диаграмма напряжений для последовательно соединенных участков цепи

Перейдем к другому примеру.

Дана часть внешней части цепи, подразделяющаяся еще на три участка, последовательно соединенных один с другим; допустим, что каждый участок представляет собой, например, катушку с сердечником. Даны активные и реактивные

сопротивления каждого из трех участков, т. е. каждой из этих последовательно соединенных катушек: $R_1=3$, $\omega L_1=4$, $R_2=2$, $\omega L_2=2$, $R_3=5$, $\omega L_3=1$; сила тока, текущего через цепь, равна (амплитуда) $I_m=5$ А. На фиг. 30 построены в масштабе $1 \text{ мм} = 1,5 \text{ В}$ векторы $\overline{OM_1}=R_1 I_m$, $\overline{M_1 K_1}=\omega L_1 I_m=X_1 I_m$, которые дают вектор $\overline{OK_1}$ напряжения U_1 на участке первом; далее, векторы $\overline{K_1 M_2}=R_2 I_m$ и $\overline{M_2 K_2}=\omega L_2 I_m=X_2 I_m$ дают вектор $\overline{K_1 K_2}$ напряжения U_2 на участке втором; наконец, векторы $\overline{K_2 M_3}=R_3 I_m$ и $\overline{M_3 K}=\omega L_3 I_m=X_3 I_m$ дают вектор $\overline{K_2 K}$ напряжения U_3 на участке третьем. Сложив все три вектора напряжений на участках, получим вектор $\overline{OK}$ напряжения U на всей рассматриваемой части цепи. Измерив в миллиметрах длины OD и KD , мы найдем сдвиг фаз во всей цепи по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{KD}{OD}.$$

Фиг. 30.

Мы видим, что напряжения на разных участках имеют разные фазы, которые совпадают в том случае, когда углы φ имеют одну и ту же величину для разных участков, т. е. если

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \dots,$$

или, пользуясь известным соотношением (8,16),

$$\frac{\omega L_1}{R_1} = \frac{\omega L_2}{R_2} = \frac{\omega L_3}{R_3} = \dots = \frac{\omega(L_1 + L_2 + L_3 + \dots)}{R_1 + R_2 + R_3 + \dots} = \frac{\omega L}{R},$$

или, наконец, сокращая на ω ,

$$\frac{L_1}{R_1} = \frac{L_2}{R_2} + \frac{L_3}{R_3} = \dots = \frac{L_1 + L_2 + L_3 + \dots}{R_1 + R_2 + R_3 + \dots} = \frac{L}{R}, \quad (14,1)$$

где L и R есть индуктивность и активное сопротивление всей рассматриваемой части цепи. При выполнении такой пропорциональности все U , включая и результирующие, имеют одну и ту же фазу; для получения результирующего напряжения на нескольких участках частичные напряжения нужно при этом сложить просто арифметически.

Треугольник напряжений участка цепи, как, например, OM_1K_1 , или $K_1M_2K_2$, или ODK и т. д., есть один из всего чаще встречающихся элементов векторных диаграмм, а потому читателю рекомендуется освоиться с ним как можно лучше путем вычерчивания для различных частных случаев.

ПРИМЕР 9. Построить в масштабе векторную диаграмму напряжений на участках цепи и определить все напряжения U на ней и угол φ сдвига фаз между U и силой тока I , если $I = 6$ А и

$$R_1 = 10 \, \Omega, R_2 = 2 \, \Omega, R_3 = 5 \, \Omega, R_4 = 15 \, \Omega,$$

$$X_1 = 2 \, \Omega, X_2 = 4 \, \Omega, X_3 = 0 \, \Omega, X_4 = 3 \, \Omega.$$

§ 15. Вектор э. д. с. индукции в контуре при синусоидальном изменении магнитного потока

Электродвижущая сила самоиндукции представляет частный случай индукции э. д. с. при синусоидальном изменении магнитного потока, проходящего через какой-либо контур.

Магнитный поток через контур может измениться только от двух причин: или контур движется в магнитном поле соответствующим образом (движение понимается как относительное) или магнитный поток создается переменным током.

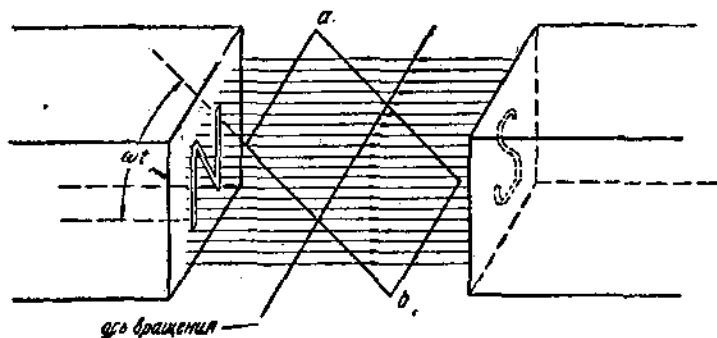
Рассмотрим сначала первый случай.

Синусоидальность изменения потока в этом случае может осуществиться следующим образом:

Представим, что в однородном магнитном поле (фиг. 31) вращается равномерно около перпендикулярной к направлению индукционных линий оси прямоугольный контур из проводников.

Обозначив угол поворота плоскости контура от направления индукционных линий через ωt , мы будем иметь, что площадь s проекции контура на плоскость, перпендикулярную к индукционным линиям (например, торцевую поверхность полюса), выразится через площадь контура S и время так:

$$s = S \sin(\omega t).$$



Фиг. 31.

Так как поле однородно, то поток, проходящий через контур,

$$\Phi = Bs,$$

где B есть магнитная индукция. Поэтому

$$\Phi = B \cdot S \sin(\omega t) = \Psi_m \sin(\omega t),$$

где $\Psi_m = B \cdot S$ есть амплитуда синусоидально изменяющегося потока через контур;

Ψ_m есть поток, проходящий через контур при $\omega t = \frac{\pi}{2}$.

Электродвижущая сила, индуцируемая в каждом витке контура при этом изменении потока,

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\omega \Psi_m \cos(\omega t) = \omega \cdot \Psi_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \quad (15,1)$$

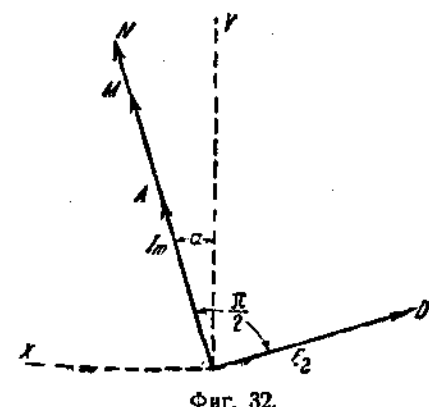
Эта э. д. с., как видим, отстаёт от индукционного потока в фазе на четверть периода. Физически это можно пояснить элементарно так, что, когда $\omega t = \frac{\pi}{2}$

и поток Φ достигает максимума, тогда проводники a и b контура движутся вдоль индукционных линий и э. д. с. равна нулю и т. д.

Переходим ко второму, более важному случаю.

Пусть мы имеем два контура, первый и второй, и пусть магнитная проницаемость пространства, где они находятся, есть величина постоянная.

Если в контуре 1 будет течь синусоидально меняющийся ток, то магнитный поток от контура 1, как весь Φ_1 , так и та часть его Φ_1'' , которая проходит через контур 2, будет изменяться как синусоидальная функция времени. Вводя величину M , равную взаимной ин-



Фиг. 32.

дукции контуров 1 и 2, будем иметь

$$\Phi_1'' = M \cdot I_1.$$

Положим

$$I_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \alpha);$$

э. д. с. индукции в контуре 2 выразится так:

$$\begin{aligned} e_2 &= -\frac{d\Phi_1''}{dt} = -M \cdot \frac{dI_1}{dt} = -\omega \cdot M \cdot I_{1m} \cos(\omega t + \alpha) = \\ &= \omega \cdot M \cdot I_{1m} \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (15,2)$$

Здесь амплитуда э. д. с. равна

$$E_{2m} = \omega \cdot M \cdot I_{1m},$$

и фазовый угол равен $\alpha - \frac{\pi}{2}$, т. е. э. д. с. e_2 отстаёт в фазе от индуцирующего ее тока I_1 на четверть периода, а вектор ее отстаёт от вектора силы тока I_1 на $\frac{\pi}{2}$. На фиг. 32 нанесены: OA — вектор силы тока I_1 ; ON — вектор всего магнитного

потока Φ_1 , совпадающий в фазе с током; OM — вектор потока Φ_1 , проходящего через контур 2, совпадающий в фазе со всем потоком Φ_1 ; OD — вектор э. д. с. e_2 , отстающий от векторов тока и потоков на угол $\frac{\pi}{2}$.

Этот случай индукции представляет собой основу идеи трансформатора и поэтому очень важен, так же как и изображающая его векторная диаграмма фиг. 32. С нею нам придется еще не раз встретиться.

§ 16. Цепь, содержащая индуктивность и взаимную индуктивность

Представим себе участок цепи с напряжением u_1 , сопротивлением R_1 , индуктивностью L_1 и взаимной индуктивностью M_{12} с другой цепью, в которой течет ток i_2 той же самой частоты, что и ток i_1 в рассматриваемой цепи, но сдвинутый относительно него в фазе. Требуется выразить соотношение в этом случае посредством векторной диаграммы.

Закон Ома для мгновенных значений напишется так:

$$i_1 = \frac{u_1 + e_{1c} + e_{12}}{R_1}, \quad (16,1)$$

где $e_{1c} = -L_1 \frac{di_1}{dt}$ есть э. д. с. самоиндукции,

а $e_{12} = -M_{12} \frac{di_2}{dt}$ есть э. д. с. взаимной индукции. Из уравнения (16,1) получаем

$$u_1 = i_1 R_1 - e_{1c} - e_{12},$$

или

$$u_1 = i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt}.$$

Полагая

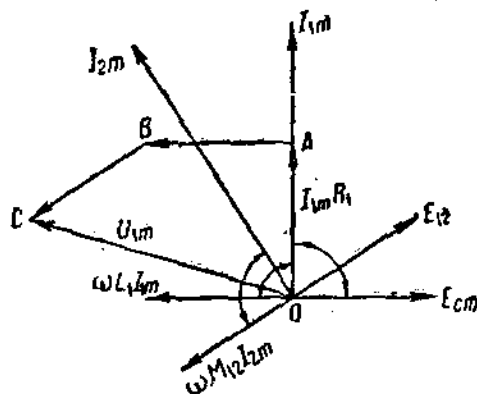
$$\left. \begin{aligned} i_1 &= I_{1m} \sin(\omega t) \\ i_2 &= I_{2m} \sin(\omega t + \alpha), \end{aligned} \right\} \quad (16,2)$$

подставляем вместо производных и тока i_1 их выражения через синусоидальные функции:

$$u_1 = I_{1m} R_1 \sin(\omega t) + \omega L_1 I_{1m} \cos(\omega t) + \omega M_{12} I_{2m} \cos(\omega t + \alpha).$$

Вектор U_{1m} , очевидно, равен геометрической сумме векторов $I_{1m} R_1$, $\omega L_1 I_{1m}$, опережающего вектор I_{1m} на $\frac{\pi}{2}$ (не забудем, что он ведь прямо противоположен вектору э. д. с. самоиндукции) и вектора $\omega M_{12} I_{2m}$, опережающего на $\frac{\pi}{2}$ вектор тока I_{2m} , который в свою очередь нам задан уравнением (16,2), как опережающий по фазе на угол α силу тока I_{1m} .

На фиг. 33 начерчены все векторы и произведено сложение трех только что перечисленных векторов, что дало на диаграмме вектор $OC = U_{1m}$, приложенного напряжения.



Фиг. 33.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ДЕЙСТВУЮЩИЕ ЗНАЧЕНИЯ СИЛЫ ТОКА И НАПРЯЖЕНИЯ.
МОЩНОСТЬ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

§ 17. Показания приборов. Действующие, или эффективные, значения силы тока и напряжения

До сих пор мы считали, что мы знаем все, что нужно, о синусоидальной величине, если нам известны ее амплитуда и разность фаз с другими величинами. Но как узнать амплитуду силы тока или напряжения в действительности, имея перед собой цепь переменного тока? Если известны сопротивления цепи, то одну из этих величин можно вычислить по другой, например напряжение по силе тока, на основании закона Ома, но эту другую, в примере — силу тока, надо узнать непосредственным измерением в цепи тока. Как измерить амплитуду силы тока? Ведь сила тока имеет значение I_m (амплитуду) лишь в течение бесконечно-малого промежутка времени; поэтому отклонения или показания теплового амперметра, включенного в цепь переменного тока, не могут быть равны I_m , иначе выходило бы, что сила тока все время I_m . Вообще же тепловой амперметр должен давать какие-то отклонения или показания, если через него идет переменный ток, так как, отклонения стрелки обусловлены нагревом и удлинением от нагрева проволоки, по которой проходит ток, а нагрев происходит и при переменном токе (лампы накаливания).

Если бы мы включили в цепь амперметр не тепловой, а типа Депре-Дарсонваля, с постоянным магнитом и подвижной катушечкой, связанной со стрелкой, то такой прибор ничего не показал бы при частоте в 50 Hz, ибо катушка и стрелка не успевали бы преодолевать свою инерцию. При очень малой частоте, например, один период в секунду, она качалась бы вправо и влево (если на шкале нуль предположить по середине) соответственно с изменениями направления тока, но все же и тут мы не могли бы решить, успевает стрелка показать амплитуду силы тока или нет.

Как известно, осциллографы являются такими гальванометрами, у которых инерция подвижной системы очень мала, период собственных колебаний тоже мал (тысячные доли секунды), так что с помощью их можно проследить ход изменений, например, силы тока за весь период. Но для повседневных измерений для практики эти приборы дороги, громоздки и неудобны по сложности измерений. Поэтому займемся решением вопроса, что покажет в цепи переменного тока тепловой амперметр?

Когда через тепловой амперметр с сопротивлением проволоки R_a протекает постоянный ток I , то количество теплоты, развивающейся в проволочке, одинаково в любые одинаковые промежутки времени t и выражается через $I^2 R_a t$ в джаулях; при этом стрелка отклоняется на постоянный угол, указывая на шкале силу тока I .

При переменном токе количество развивающегося тепла в проволочке будет за одинаковые промежутки времени, но в разные моменты разное, так как сила тока i переменна. За бесконечно малый промежуток времени dt , в течение которого силу тока i можно рассматривать как неизменяющуюся, разовьется количество тепла, равное в джаулях

$$i^2 R_a dt.$$

Температура проволоки и ее удлинение не смогут следовать за всеми мгновенными значениями величины мощности $i^2 R_a$, превращающейся в тепло в разные моменты, — не смогут потому, что проволочка обладает известной теплоемкостью; температура и удлинение установятся соответственно среднему количеству тепла, развивающемуся за целый период переменного тока.

Все количество тепла, развивающееся в проволочке за целый период, равно

$$\int_0^T i^2 R_a dt = R_a \int_0^T i^2 dt.$$

Среднее количество тепла, выделяемое за единицу времени, равно всему теплу, разделенному на время T :

$$\frac{R_a}{T} \int_0^T i^2 dt.$$

При развитии в проволочке в среднем такого количества тепла стрелка как-то отклонится и покажет на шкале деление I ; такое же точно отклонение при постоянном токе будет в том случае, когда количество тепла за единицу времени будет такое же; раз стрелка опять покажет то же I , то значит сила постоянного тока равна I , а из условия равенства средних количеств тепла в обоих случаях имеем

$$I^2 R_a = \frac{R_a}{T} \int_0^T i^2 dt,$$

откуда мы получаем, что та величина I , которая на шкале будет показана стрелкой, выражается следующим образом:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (17,1)$$

Вычислим правую часть этой формулы для случая синусоидальной силы тока i . Так как вообще

$$\begin{aligned} \int \sin^2 \alpha \cdot d\alpha &= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2\alpha) d\alpha = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\alpha, \\ \text{то} \quad \int_0^T i^2 dt &= \int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t) \cdot dt = \frac{I_m^2}{\omega} \int_0^T \sin^2(\omega t) d(\omega t) = \\ &= \frac{I_m^2}{\omega} \left[\frac{\omega t}{2} - \frac{1}{4} \sin(2\omega t) \right]_0^T = \frac{I_m^2 T}{2}. \end{aligned} \quad (17,2)$$

Следовательно, подставляя в формулу (17,1), имеем

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (17,3)$$

Таким образом то, что покажет тепловой амперметр, в $\sqrt{2}$ раз меньше амплитуды силы тока. Пусть, например, в цепи переменного тока амперметр показывает 15 А. Согласно формуле (17,3) мы находим, что амплитуда силы тока равна

$$I_m = 15 \cdot \sqrt{2} = 15 \cdot 1,4 = 21 \text{ А.}$$

Величина I , показываемая тепловым амперметром, в корень квадратный из двух раз меньшая амплитуды, называется действующей, или эффективной,

силой тока. Мы будем обозначать ее той же большой буквой I , что и амплитуду, только без значка m , в отличие от последней.

Нужно помнить, что в действительности такая сила тока (в примере 15 А) существует только бесконечно малый промежуток времени, появляясь четыре раза за полный период, остальное время сила тока или больше или меньше; но среднее количество тепла, развивающееся в проволочке при переменном токе, точно таково, какое получится, если все время сила тока была бы постоянной, равной I , поэтому прибор и покажет эту величину.

Далее, следует помнить и то, что при большой продолжительности периода, например, 2—3 сек., проволочка будет успевать нагреваться сильнее, когда сила тока близка к максимуму, и остывать, когда сила тока близка к нулю, и стрелка будет показывать то большую, то меньшую, чем I , силу тока.

Так как вольтметр есть не что иное, как амперметр с очень большим сопротивлением и со шкалой, на которой нанесены произведения из силы тока, идущего через него, на это сопротивление, то и для случая измерения напряжения или э. д. с. (последнее приближенно) тепловым вольтметром мы получим подобное же соотношение. Обозначая действующую силу тока через вольтметр I_s , амплитуду ее через I_{sm} , сопротивление вольтметра через R_s , имеем, что прибор покажет

$$I_s R_s = \frac{I_{sm}}{\sqrt{2}} R_s = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = U,$$

где U есть действующее значение напряжения.

Рассмотрим, что покажет прибор электродинамический, т. е. с двумя катушками.

В электродинамическом амперметре через неподвижную катушку течет весь измеряемый ток i , а через подвижную, обычно шунтированную, — только часть его $i' = \beta i$.

Если мы задержим подвижную катушку в каком-нибудь положении, так что взаимодействующие стороны катушек будут все время в одинаковом положении друг относительно друга, то вращающий момент, действующий на подвижную катушку, будет зависеть только от токов i и i' , именно будет им пропорционален:

$$m = C \cdot i \cdot i',$$

где коэффициент C зависит от чисел витков в катушках, их размеров и от положения их друг относительно друга.

Так как токи переменны, то вращающий момент будет принимать разные значения в течение периода, средняя величина его за целый период выразится так:

$$M_{sp} = \frac{1}{T} C \int_0^T i \cdot i' dt = \frac{C}{s} \left(\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt \right) = \frac{C}{s} I^2.$$

Пропустив через прибор постоянный ток силы I ампер, мы найдем, что его постоянный вращающий момент равен

$$C \cdot I \cdot \frac{I}{s} = \frac{C}{s} I^2,$$

т. е. тот же самый, следовательно, и отклонение будет то же самое.

Тот же результат получим и при вольтметре.

В практике приборы для переменного тока, например, электромагнитные, градуируются по электродинамическим, последние же градуируются при постоянном токе.

Подвижная катушка снабжена спиральной пружиной, сила противодействия которой кручению пропорциональна углу кручения α . Этому углу пропорционален и момент D этой силы относительно оси вращения:

$$D = c \cdot \alpha.$$

При равновесии средний момент вращающий (от взаимодействия токов в катушках) и момент противодействия (пружины) равны:

$$M = D,$$

или

$$c \cdot \alpha = \frac{C}{s} I^2$$

и

$$\alpha = K \cdot I^2.$$

Таким образом угол отклонения подвижной катушки и связанной с ней стрелки был бы пропорционален квадрату силы тока, если бы K было постоянно. Но K зависит от C , и следовательно, от положения катушек и с ростом угла α уменьшается, поэтому удастся достигать довольно равномерной шкалы подбором размеров катушек.

§ 18. Длина вектора и масштаб

Возьмем формулу, выражающую закон Ома для части цепи, и разделим обе части ее на $\sqrt{2}$; тогда и в левой и в правой частях вместо амплитуд войдут действующие значения:

$$I = \frac{U_{AB}}{\sqrt{R_{AB}^2 + (\omega L_{AB})^2}};$$

аналогично получим для всей цепи

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}.$$

Если у нас имеется какая-нибудь векторная диаграмма, т. е. фигура более или менее сложная, элементами которой являются векторы и их фазовые углы, то, уменьшив все линейные размеры в $\sqrt{2}$ раз, мы не изменим соотношений между ними по законам геометрического подобия; примером этому может служить только что приведенный закон Ома в связи с фиг. 30. Можно не изменять в $\sqrt{2}$ раз линейные элементы чертежа, а увеличить в $\sqrt{2}$ раз масштабы для силы тока, напряжения и э. д. с. Тогда прямолинейный отрезок, выражавший своей длиной амплитуду какой-нибудь величины, выразит в $\sqrt{2}$ раз меньшее значение ее, т. е. действующее. На фиг. 30, 31 и других в этом легко убедиться вполне. Таким образом можно на всякой векторной диаграмме считать длиной вектора не A_m — амплитуду, а A — действующее значение.

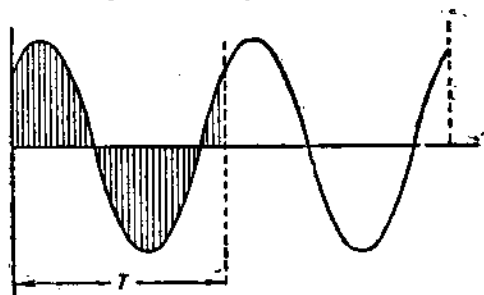
Например, мы желаем начертить вектор силы тока. Амперметр показывает 15 А. Нам нужно было бы изобразить длиной вектора амплитуду, равную 21 А; но мы, назначив масштаб, например, 1 мм $\equiv$ 1 А, чертим отрезок длиной 15 мм, подразумевая, что если надо знать амплитуду или любое мгновенное значение, то масштаб должен быть другой, именно 1 мм $\equiv$ $\sqrt{2}$ А. Этим достигается то упрощение, что величины, полученные на чертеже, именно и будут показаны приборами без предварительного перевычисления, т. е. деления $\sqrt{2}$; и наоборот, измеренные величины прямо наносятся на чертеж без предварительного умножения их на $\sqrt{2}$.

Условимся также называть и обозначать вектор его действующей величиной: вектор I , вектор E , вектор IR и т. д.

§ 19. Средние значения синусоидальных величин

Кроме амплитуд и действующих, или эффективных, значений синусоидальных величин встречаются при некоторых расчетах и доказательствах их средние величины.

Последние бывают двух видов: средняя величина за целый период или за целое число периодов и средняя величина за полпериода. Остановимся сначала на первой.



Фиг. 34.

На фиг. 34 изображена синусоидальная функция

$$a = A_m \sin(\omega t + \alpha).$$

Средним значением ее за период называется величина

$$\frac{1}{T} \int_0^T a dt = \frac{1}{T} \int_0^T A_m \sin(\omega t + \alpha) dt.$$

Очевидно, что интеграл, стоящий здесь и представляющий сумму положительных и отрицательных площадок $a \cdot dt$ на протяжении целого периода T , равен нулю, так как для каждой положительной площадки можно найти равную ей отрицательную площадку, и наоборот; поэтому и среднее значение за период равно нулю

$$\frac{1}{T} \int_0^T a \cdot dt = 0.$$

Очевидно, что и среднее значение за целое число периодов

$$\frac{1}{mT} \int_0^{mT} a \cdot dt,$$

где m — целое число тоже равно нулю.

То же самое справедливо и для функции „косинусоидальной“

$$A_m \cos(\omega t + \alpha),$$

ибо она преобразуется в

$$A_m \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) = A_m \sin(\omega t + \beta),$$

т. е. в синусоидальную функцию.

Перейдем к среднему значению за полпериода, определив его так:

$$\frac{1}{\frac{1}{2}T} \int_0^{\frac{1}{2}T} a \cdot dt = \frac{1}{\frac{1}{2}T} \int_0^{\frac{1}{2}T} A_m \sin(\omega t + \alpha) dt.$$

Это выражение равно

$$\frac{A_m}{\frac{1}{2}T\omega} \left[-\cos(\omega t + \alpha) \right]_0^{\frac{1}{2}T} = \frac{2}{\pi} A_m \cos \alpha.$$

Таким образом среднее значение синусоидальной величины за полпериода зависит от фазы ее в момент начала этого промежутка времени, равного по продолжительности полпериоду (фиг. 35).

Если $\alpha = 0$, то среднее значение получает свою наибольшую величину (фиг. 36)

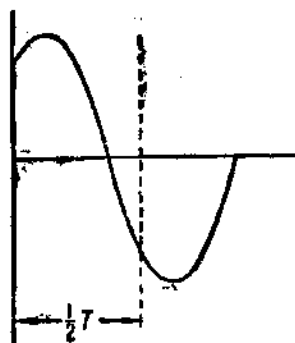
$$A_{cp} = \frac{2}{\pi} A_m.$$

В технике переменных токов обычно эту величину и понимают под средним значением, например, для силы тока,

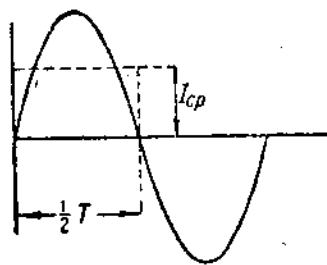
$$I_{cp} = \frac{2}{\pi} I_m.$$

В предыдущем примере эта величина равна

$$\frac{2}{\pi} \cdot 21 = 13,3 \text{ А.}$$



Фиг. 35.



Фиг. 36.

Физический смысл среднего значения силы тока следующий: такова (I_{cp}), должна быть сила постоянного тока, чтобы за тот же промежуток времени $\frac{1}{2} T$ протекло то же количество электричества $I_{cp} \cdot \frac{1}{2} T$, что и при данном переменном токе, т. е.

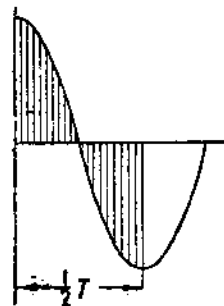
$$\int_0^{\frac{1}{2} T} I_m \sin(\omega t) dt.$$

Если этот промежуток времени $\frac{1}{2} T$ захватывает часть одной половины периода тока, когда он имеет одно направление, и часть другой, когда он изменил направление, это среднее значение и получается меньше, а именно

$$\int_0^{\frac{1}{2} T} I_m \sin(\omega t + \alpha) dt = \frac{2}{\pi} I_m \cos \alpha.$$

Если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то мы имеем случай, изображенный на фиг. 37, т. е. случай косинусоиды, и

$$\int_0^{\frac{1}{2} T} A_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) dt = \int_0^{\frac{1}{2} T} A_m \cos(\omega t) dt = 0,$$



Фиг. 37.

т. е. сколько электричества протекло в одном направлении (за одну четверть периода, как видно из фигуры), столько же его протекло и в противоположном (за вторую четверть периода).

§ 20. Средняя за период мощность в цепи переменного тока

Разберем вопрос о мощности в цепи переменного тока, в которой имеется э.д.с.

$$e = E_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_e) \quad (20,1)$$

и сила тока

$$i = I_m \cdot \sin(\omega t). \quad (20,2)$$

Угол φ_e согласно предыдущему есть угол сдвига фаз между э.д.с. и силой тока, угол между их векторами.

Если вместо всей цепи рассматривается только часть ее, то вместо e , E_m и φ_e во всех следующих выводах следует только поставить u , U_m и φ_u соответственно.

Мощность при синусоидальном токе есть величина переменная. Ее мгновенное значение равно по определению мощности

$$p = ei. \quad (20,3)$$

Работа тока за бесконечно малый промежуток времени dt , в течение которого можно считать e , i и p неизменяющимися, равна

$$dw = p dt = e i dt. \quad (20,4)$$

Работа, совершаемая переменным током за целый период, очевидно, выразится интегралом от dw :

$$w = \int_0^T p \cdot dt = \int_0^T e \cdot i \cdot dt. \quad (20,5)$$

При всех расчетах главную роль играет понятие мощности; например, работа пара при расширении его в цилиндре паровой машины неодинакова за равные малые промежутки времени, взятые в разные моменты; работа за весь ход поршня, деленная на время — продолжительность его, дает нам „индикаторную“ мощность, с которой дальше и ведут расчеты. Аналогично, если мы работу переменного тока за целый период разделим на продолжительность периода, мы получим среднюю мощность тока. Она оказывается очень удобной для всевозможных расчетов, в чем мы впоследствии и будем часто убеждаться; к тому же, что чрезвычайно важно, и прибор, служащий для измерения мощности, — ваттметр — показывает именно ее — среднюю мощность. Обозначим ее величину большой буквой P . Итак,

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p \cdot dt. \quad (20,6)$$

Выразим p через e и i :

$$p = ei = E_m I_m \sin(\omega t + \varphi_e) \cdot \sin(\omega t).$$

Преобразуем это выражение, пользуясь соотношением

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}. \quad (20,7)$$

Полагаем здесь

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \omega t + \varphi_e \quad \text{и} \quad \frac{\alpha - \beta}{2} = \omega t.$$

Отсюда, складывая и вычитая, получаем

$$\alpha = 2\omega t + \varphi_e, \quad \beta = \varphi_e.$$

Подставляем эти значения в (20,7):

$$\cos(2\omega t + \varphi_e) - \cos \varphi_e = -2 \sin(\omega t + \varphi_e) \sin(\omega t).$$

Следовательно,

$$\sin(\omega t + \varphi_e) \sin(\omega t) = \frac{1}{2} [\cos \varphi_e - \cos(2\omega t + \varphi_e)]$$

и, наконец,

$$p = e \cdot i = \frac{E_m I_m}{2} [\cos \varphi_e - \cos(2\omega t + \varphi_e)] = \frac{E_m I_m}{2} \cos \varphi_e - \frac{E_m I_m}{2} \cos(2\omega t + \varphi_e).$$

Пользуясь тем, что $2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$, мы можем ввести действующие значения э. д. с. и силы тока:

$$p = EI \cos \varphi_e - EI \cos(2\omega t + \varphi_e). \quad (20,8)$$

Таким образом мгновенная мощность складывается из двух величин: постоянной $EI \cos \varphi_e$ и переменной-синусоидальной $-EI \cos(2\omega t + \varphi_e)$ двойной частоты, т. е. с продолжительностью периода вдвое меньше периода исследуемого тока, ибо

$$2\omega t = 2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}T} \cdot t.$$

Средняя мощность P есть среднее значение за период T от величин выражения (20,8); но среднее значение постоянной $EI \cos \varphi_e$ равно ей самой, а среднее значение от $\cos(2\omega t + \varphi_e)$ за T , т. е. за два целых периода для этой функции, как известно уже, равно нулю.

Таким образом получается

$$P = EI \cos \varphi_e. \quad (20,9)$$

Если мы будем рассматривать только часть цепи с напряжением u , то мощность в этой части получим аналогично (20,3) и (20,8), как среднее значение от

$$p = u \cdot i = UI \cos \varphi_u - UI \cos(2\omega t + \varphi_u), \quad (20,10)$$

т. е. как

$$P = UI \cos \varphi_u. \quad (20,11)$$

Итак, величина средней мощности в цепи переменного тока зависит не только от величины силы тока и э. д. с. (или напряжения), но и от сдвига фаз их, или от разности фаз. Чем больше этот сдвиг фаз, чем больше угол φ , представляющий угол между векторами силы тока и э. д. с. (или напряжения), тем меньше $\cos \varphi$ и тем меньше мощность P .

Таким образом при одних и тех же значениях U и I мощность может иметь самые разнообразные значения в зависимости от величины множителя $\cos \varphi$, и наоборот, при одной и той же мощности и том же напряжении сила тока может быть самой различной величины в зависимости от $\cos \varphi$: чем $\cos \varphi$ меньше, тем больше нужна сила тока, чтобы при данном напряжении получить данную мощность. Это чрезвычайно важно заметить для дальнейшего.

Произведение UI часто называется „кажущейся“ мощностью; она равна „средней“, т. е. действительно развиваемой, только тогда, когда $\cos \varphi = 1$.

Прибор, измеряющий среднюю мощность, называется ваттметром; электродинамический ваттметр состоит из двух катушек: неподвижной — из более толстой проволоки, включаемой в цепь тока последовательно, так что через нее и идет ток i , и подвижной — из тонкой проволоки, включаемой последовательно с большим сопротивлением в цепь, как вольтметр, т. е. параллельно; через нее идет ток i' , пропорциональный напряжению u . Если индуктивностью подвижной катушки можно

пренебречь, то i' находится в фазе с напряжением u ; обозначим сопротивление подвижной катушки с подключенным к ней сопротивлением через R' , тогда

$$i' = \frac{u}{R'}.$$

Вращающий момент, действующий на подвижную катушку, будет зависеть только от сил токов i и i' , именно будет им пропорционален:

$$m = C \cdot i \cdot i'.$$

Так как токи переменны, то вращающий момент будет принимать разные значения в течение периода, будет становиться даже отрицательным, если токи не совпадают в фазе, на то время, пока они разно направлены в катушках. Средняя величина вращающего момента за период выразится так:

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{T} \cdot C \int_0^T i \cdot i' \cdot dt = \frac{C}{T} \int_0^T i \cdot \frac{u}{R'} \cdot dt = \frac{C}{T \cdot R'} \int_0^T i \cdot u \cdot dt = \\ &= \frac{C}{R'} \cdot P = C_1 \cdot P, \end{aligned}$$

согласно формуле (20,11), вводя величину средней мощности.

Подвижная катушка снабжена спиральной пружиной, сила противодействия которой кручению пропорциональна углу кручения α . Этому углу пропорционален и момент D этой силы относительно оси вращения:

$$D = c \cdot \alpha.$$

При равновесии средний момент вращающий (от взаимодействия токов в катушках) и момент противодействия (пружины) равны:

$$M = D,$$

или

$$c \cdot \alpha = C_1 \cdot P$$

и

$$\alpha = \frac{C_1}{c} P = KP.$$

Коэффициент K стараются сделать посредством подбора размеров катушек возможно более постоянным для получения более равномерной шкалы. Таким образом угол отклонения подвижной катушки и связанной с ней стрелки пропорционален величине P , так что ваттметр показывает нам среднюю мощность тока. Мы можем толстую катушку включить в цепь одного источника переменного тока с действующим значением силы тока I и неизвестным напряжением, а тонкую подключить к другому источнику переменного тока с тем же числом периодов и с действующим значением напряжения U . Раз число периодов одинаково, строго одинаково, то I и U будут все время сохранять постоянным некоторый сдвиг фаз φ (в частном случае равный нулю), как будто бы они принадлежали к одной

цепи. В последней формуле $\int_0^T i \cdot u \cdot dt$ даст тогда ту же величину $U \cdot I \cdot \cos \varphi$, и ваттметр укажет эту величину, но это будет фиктивная, не существующая в действительности, мощность. При некоторых измерениях с переменными токами часто бывает нужно знать, не сдвинуто ли то или иное напряжение относительно какого-нибудь тока (даже и в другой цепи, но при условии одинаковости числа периодов) на четверть периода; тогда подключают, как только что описано, ваттметр, и если он отклоняется, то заключают, что сдвиг фаз не достигает четверти периода, так

как $\cos \varphi$ не равен нулю. Если же ваттметр не отклоняется, то значит $\cos \varphi = 0$, и U и I сдвинуты на четверть периода. Заметим теперь же, а докажем это впоследствии, что при разной частоте в цепях толстой и тонкой катушек ваттметр не отклонится вообще.

§ 21. Кривые мгновенных мощностей

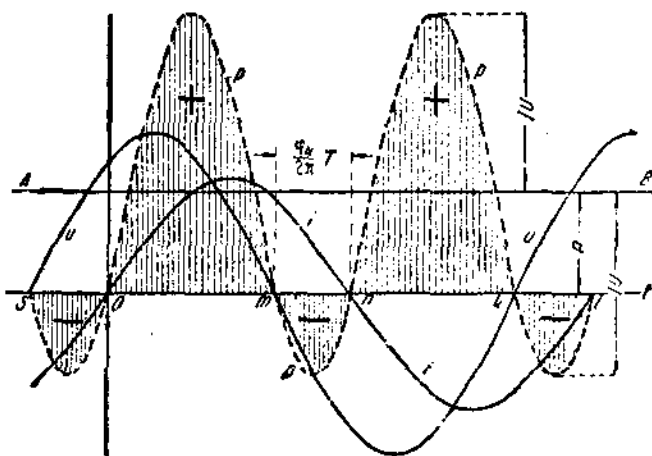
Для понимания явлений в цепи переменного тока крайне важно усвоить не только понятие о средней мощности, но и весь ход изменения мощности, мгновенных значений ее, в течение периода. К исследованию этого хода изменений мощности за период мы теперь и обратимся.

Построим кривую мгновенных значений мощности

$$p = ui, \quad (21,1)$$

где u есть напряжение на любом участке цепи; вместо u , понятно, может быть взята э. д. с. источника, — это несколько не изменит хода последующих рассуждений. На фиг. 38 начерчены

синусоиды силы тока и напряжения для случая опаздывания тока на угол φ_u сравнительно с напряжением. Затем согласно формуле (21,1) ординаты u и i перемножены и получена кривая p мгновенных мощностей. Мы видим, что p положительна и кривая расположена выше оси абсцисс все то время, пока u и i имеют одинаковые знаки, т. е. или оба положительны — промежуток om — или оба отрицательны — промежуток nk , пока же u и i имеют разные знаки — промежутки ml , kl и т. д., мощность p отрицательна, и кривая ее идет ниже оси абсцисс.



Фиг. 38.

Чтобы выразить аналитически кривую p , воспользуемся выражением (20,16):

$$p = UI \cos \varphi_u - UI \cos (2\omega t + \varphi_u) = P - UI \cos (2\omega t + \varphi_u). \quad (21,2)$$

Таким образом ординаты кривой мгновенной мощности складываются из постоянной величины P средней мощности и ординат синусоиды с двойной частотой (пунктирная линия), значения p колеблются около средней мощности P , причем наибольшие положительные и отрицательные значения ее в моменты, когда

$$\cos (2\omega t + \varphi_u) = \mp 1,$$

равны (фиг. 38)

$$P \pm IU.$$

Если на фиг. 38 за ось абсцисс взять линию AB , проведенную параллельно оси t на расстоянии P от нее, то уравнение кривой p будет

$$p = -IU \cos (2\omega t + \varphi_u).$$

Возьмем прежнюю ось абсцисс t и посмотрим, какова работа, производимая током в цепи.

Напомним, что выводы наши относятся к тому случаю, когда L — индуктивность цепи — постоянна. Если L непостоянна в течение периода, то, значит, имеется магнитное насыщение железа (мы исключаем случай искусственного изменения L посредством, например, изменения формы цепи, числа витков и пр.), имеются потери энергии на перемагничивание (на гистерезис). Этот случай разберем позднее.

Элемент площади между кривой p и осью абсцисс t выразится через $p dt$, а это же есть и элементарная работа, производимая током. Интегрируя за любой промежуток времени, мы получим, что площадь между кривой и осью абсцисс равна работе в цепи тока. При этом одни площади, над Om , nk , положительны, значит, работа в эти промежутки действительно совершается, энергия тратится в цепи; другие площади, как под mn , kl , отрицательны, значит, за эти промежутки энергия возвращается в цепь; в эти промежутки генератор переменного тока не производит работы, но, наоборот, сам поглощает ее.

Откуда возвращается энергия в эти промежутки?

Из магнитного поля вокруг цепи тока, где она была запасена. Чтобы яснее представить себе процесс обмена энергией между цепью и средой, причем передаточным механизмом является э.д.с. самоиндукции, произведем еще следующие построения.

Разложим напряжение U на две составляющие (фиг. 39): IR и ωLI , чему соответствует разложение мгновенной величины, нам уже известное, выражаемое формулой

$$u = iR - e_c.$$

Из последней формулы, умножив левую и правую ее части на i , имеем

$$p = i^2 R - e_c i. \quad (21,3)$$

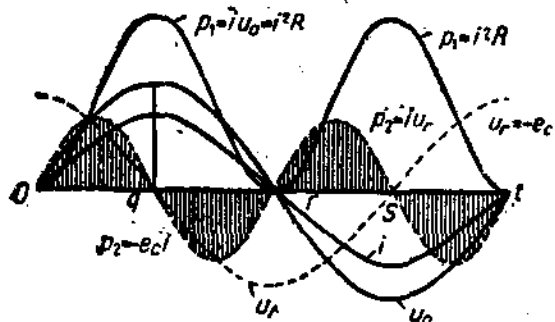
Величину iR мы раньше называли активной составляющей, а ωLI — реактивной составляющей напряжения; смысл этих названий теперь и выяснится. Обозначим iR через u_a , указав значком „а“ активный характер составляющей, а $-e_c$ через u_r , со значком „r“, указывающим реактивный ее характер. Тогда

$$u = u_a + u_r, \\ p = ui = u_a i + u_r i. \quad (21,4)$$

Представим это разложение u на две составляющие на чертеже синусоидами, начертив синусоиды u_a и u_r (фиг. 40). Синусоида u_a совпадает в фазе с синусоидой тока, ординаты ее равны iR ; синусоида $u_r = -e_c$ опережает в фазе на четверть периода силу тока (вспомним кривую $-e_c$ фиг. 20), ординаты ее равны ωL , помноженному на силу тока, имеющие быть еще четверть периода спустя. Умножим ординаты той и другой синусоиды на i и мы получим, во-первых, кривую $p_1 = i^2 R = i u_a$, расположенную всегда выше оси абсцисс, т. е. с ординатами всегда положительными (ибо i и u_a совпадают в фазе); эти ординаты дают мгновенные значения мощности, переходящей в тепло в проводниках (джаулев эффект); во-вторых, мы получим кривую $p_2 = i u_r$, четверть периода (промежутки Oq , rs и т. д. — когда i и u_r имеют одинаковые знаки) имеющую ординаты положительные и расположенную поэтому сверх оси абсцисс, а четверть периода (промежутки qr , st и т. д. — когда i и u_r имеют разные знаки) имеющую ординаты отрицательные и расположенную ниже оси абсцисс; ее ординаты дают мгновенные



Фиг. 39.



Фиг. 40.

значения мощности, запасаемой в магнитном поле, когда $p_2 > 0$, или получаемой из него цепью, когда $p_2 < 0$.

Площади кривой p_1 всегда положительны, проводники всегда нагреваются, и с течением времени энергия, ушедшая на их нагревание (джаулев эффект), непрерывно растет, как растет площадь, ограниченная кривой p_1 , по мере продвижения вдоль по оси t .

Площади, ограниченные кривой p_2 , попеременно положительны и отрицательны, по абсолютной же величине они равны между собой. За целый период сумма их равна нулю, и потерь в магнитном поле, например, на перемагничивание железа, нет. Положительная площадь представляет энергию, запасенную в магнитном поле около цепи за ту четверть периода, пока сила тока растет в том или другом направлении — промежутки Oq, rs ; отрицательная площадь представляет энергию, возвратившуюся в цепь из магнитного поля при его исчезновении, когда ток с максимума убывал до нуля в течение четверти периода — промежутки qr, st . Электродвижущая сила самоиндукции e_c представляет тот „механизм“, посредством которого энергия передается из цепи в среду, в магнитное поле, и возвращается из него в цепь. Если e_c направлена одинаково с током, а это бывает всегда, когда сила тока убывает, то в выражении (21,3) ($-e_c i$) отрицательно, т. е. мощность p , посылаемая в цепь от зажимов с напряжением u , меньше мощности $i^2 R$, переходящей в этот момент в тепло в сопротивлении R ; недостаток $e_c i$ покрывается мощностью, возвращающейся из поля. Вычислим одну из площадей, чтобы узнать, какое количество энергии и запасается в магнитном поле за время роста силы тока.

Эта энергия

$$W_{\kappa} = \int_0^{\frac{1}{4}T} p_2 dt = \int_0^{\frac{1}{4}T} i u_c dt = - \int_0^{\frac{1}{4}T} i e_c dt.$$

Так как

$$e_c = -L \frac{di}{dt},$$

то

$$W_{\kappa} = L \int_0^{\frac{1}{4}T} i di = \frac{L i_m^2}{2}.$$

Выражение

$$W_{\kappa} = \frac{L i_m^2}{2} \quad (21,5)$$

для энергии магнитного поля известно нам из курса физики.

Когда e_c и i имеют разные знаки, т. е. когда i возрастает, такое количество энергии запасается в магнитном поле; в выражении (21,3) $-e_c i$ тогда положительно, и источник тока доставляет мощность не только $i^2 R$, переходящую в тепло в цепи, но еще и $p_2 = -e_c i$, идущую в магнитное поле.

Кроме того, фиг. 38 нам показывает, что в течение промежутков времени $m\pi = \frac{\varphi}{2\pi} T$, меньших четверти периода, вся мощность p отрицательна; следовательно, мощность $e_c i$, возвращающаяся в цепь, не только покрывает потери на джаулев эффект в цепи в это время, но и превышает их на некоторую величину, разную в разные моменты внутри этих промежутков времени $m\pi$; эти превышения и есть ординаты отрицательной части кривой p под $m\pi$, $k\pi$ и т. д. Эта мощность идет к генератору, который в эти промежутки времени берет, таким образом,

мощность из сети, работает двигателем. Любая катушка, включенная в цепь, возвращая запасенную в ее поле магнитную энергию в цепь, посылает в эти промежутки электрическую мощность в генератор переменного тока: она, катушка, есть сейчас генератор, а он является приемником, двигателем. В эти промежутки времени напряжение u у зажимов и сила тока i имеют разное направление; направление силы тока определяется сейчас э. д. с. самоиндукции. Если мы сравним фиг. 38 с фиг. 20, то увидим то же самое в промежутке NB и т. д.

Таковы соотношения мощностей и энергий в цепи переменного тока, обладающей индуктивностью.

Так как сумма площадей кривой $p_2 = iu_r$ за целый период равна нулю, то можно сказать, что при учете средней мощности составляющая u_r дает с своей стороны среднюю мощность, равную нулю; вся средняя мощность обусловлена составляющей u_a :

$$p_1 \cdot dt = u_a i \cdot dt = i^2 R \cdot dt.$$

Поэтому и назвали величину

$$u_r = -e_c = -\omega L I_m \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

реактивной составляющей напряжения, вектор $OH = FA$ на фиг. 26 — вектором реактивной составляющей, величину u_a — активной составляющей напряжения, вектор OF — вектором активной составляющей.

Далее, так как

$$u_a = iR$$

и

$$u_r = -e_c,$$

то сопротивление R назвали активным сопротивлением, а ωL , входящее в e_c , — реактивным сопротивлением. В дальнейшем при изучении зависимости величины средней мощности P от этих величин правильность таких названий еще более уяснится.

Возвратимся к кривой p_2 мощности, то уходящей в магнитное поле, то возвращающейся из нее:

$$\begin{aligned} p_2 = -e_c i &= \omega L I_m \cos(\omega t) \cdot I_m \sin(\omega t) = \frac{\omega L I_m \cdot I_m}{2} \cdot 2 \sin(\omega t) \cos(\omega t) = \\ &= \omega L I \cdot I \cdot \sin(2\omega t) = U \cdot I \cdot \sin \varphi \cdot \sin(2\omega t), \end{aligned} \quad (21,6)$$

так как

$$\omega L I = U \sin \varphi.$$

Максимум p_2 достигает в момент, когда

$$2\omega t = \frac{\pi}{2},$$

т. е. когда

$$t = \frac{\pi}{2} : 2\omega = \frac{T}{8}$$

и эта максимальная величина p_2 или амплитуда колеблющейся мощности равна, очевидно,

$$P_{2m} = UI \sin \varphi. \quad (21,7)$$

Заметим, что величину $P = UI \cos \varphi$ называют активной мощностью, а величину $P_{2m} = UI \sin \varphi$ — реактивной мощностью, величину же

$$UI = \sqrt{U^2 I^2 \cos^2 \varphi + U^2 I^2 \sin^2 \varphi} = \sqrt{P^2 + P_{2m}^2}$$

называют, как уже было сказано, кажущейся мощностью.

Следует особенно заметить, что $UI \sin \varphi$ не является средним значением, а есть амплитудное значение мощности P_2 , колеблющейся между полем и цепью.

Кажущаяся мощность есть величина тоже весьма важная: она тоже показывает, как нагружен источник тока.

Особенно это станет ясно, если мы вместо напряжения U введем E — э. д. с. генератора. Множитель E в выражении EI показывает, как машина возбуждена, т. е. дает меру использования магнитной системы генератора, магнитной индукции в ней; далее он дает и меру нагрузки изоляции электрическим напряжением; второй множитель I характеризует нагрузку машины силой тока, иначе, развивающимся от тока теплом. Все эти три момента очень важны при работе машины; всего важнее, пожалуй, из них практически третий, нагрузка током или теплом, пропорциональным $I^2 R_{\text{ану}}$.

Для охарактеризования же работы, или нагрузки турбины, вращающей генератор, важна именно средняя мощность, т. е. величина

$$UI \cos \varphi.$$

Соотношение между тремя названными мощностями может быть представлено прямоугольным треугольником с гипотенузой UI и одним из острых углов, равным φ . Направим катет $UI \cos \varphi$ по вертикали, а катет $UI \sin \varphi$ — влево по горизонтали из верхнего конца первого катета, как представлено на фиг. 41. Очевидно, что этот треугольник подобен треугольнику сопротивлений фиг. 21 на R и мы получим треугольник мощностей фиг. 41.

Упражнение. Предлагаем читателю вывести выражение для величины всей энергии, отданной источником тока в цепи с R и L за первую четверть периода, если отсчет времени начат в момент прохождения силы тока через нуль.

Ответ:

$$I^2 R \frac{T}{4} + LI^2.$$

Вопрос: какова средняя величина мощности, уходящей в магнитное поле и возвращающейся из него, за ее собственные (как синусоидальной величины) пол-периода, т. е. за $\frac{1}{4} T$.

Эта средняя величина имеет знак плюс или минус в отличие от P .

§ 22. Зависимость средней мощности от других величин в цепи

Теперь мы можем опять обратиться к средней мощности P и рассмотреть, как меняется ее величина в зависимости от изменения различных других величин в цепи.

Из фиг. 26, 28 и 39 мы видим, что активная составляющая э. д. с. или напряжения есть проекция вектора э. д. с. или напряжения на направление вектора тока. Будем в дальнейшем говорить лишь о части цепи и о напряжении на этой части, помня, что все выводы без всякого изменения могут быть отнесены и ко всей цепи и ее э. д. с. Для упрощения не будем при U и R ставить значков, указывающих границы участка цепи. Тогда

$$I_m R = U_m \cos \varphi_a,$$

или

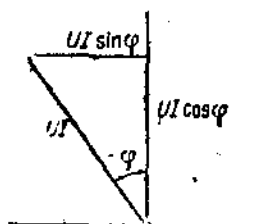
$$IR = U \cos \varphi_a.$$

(22,1)

Теперь в формулу (20,11) подставим вместо $U \cos \varphi_a$ величину IR и мы получим

$$P = I^2 R;$$

(22,2)



Фиг. 41.

это есть второй вид выражения средней мощности, показывающий, между прочим, известный уже нам факт, что вся средняя мощность переходит в тепло. (Нужно заметить, что если в цепи включен двигатель переменного тока, то большая или меньшая часть средней мощности перейдет в механическую мощность; двигатель имеет противоэлектродвижущую силу, которую всегда можно заменить сопротивлением так, чтобы сила тока в цепи по величине и по фазе не изменилась; тогда механическая мощность двигателя будет заменена равной ей мощностью, превращающейся в тепло в сопротивлении. На такой замене основаны все способы теоретического рассмотрения и учета работы, например, асинхронного двигателя и др., так что эта замена представляет для электротехники очень важный прием.)

Теперь в выражение (22,2) подставим вместо I его величину, определяемую из закона Ома, и мы получим:

$$P = \frac{U^2 R}{R^2 + (\omega L)^2}; \quad (22,3)$$

это есть третий вид выражения мощности.

Исследуем изменения мощности в цепи переменного тока в зависимости от изменения различных условий. Предположим, что частота постоянна и напряжение, приложенное к цепи, постоянно

$$U = \text{const},$$

а величины R и L изменяются. В зависимости от изменения этих величин будет изменяться и мощность по ф-ле (22,3).

Разберем сначала случай, когда R и L изменяются не одновременно. Пусть L постоянно, а R изменяется.

На фиг. 42 опять произведено обычное построение составляющих; каковы бы ни были изменения R , L и связанного с ними закона Ома I , векторы $I_m R$ и $\omega L I_m$ составляют прямой угол, а следовательно, при всех этих изменениях точка M движется по окружности, построенной на U_m как на диаметре. При изменении R мощность имеет максимум, условия которого можно найти, приравняв первую производную от (22,3) нулю; но мы найдем их иначе.

Площадь треугольника OAM равна

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{OM} \cdot \overline{AM} = \frac{1}{2} I_m R \omega L I_m = \omega L I_m^2 R = \omega L P.$$

Так как ω и L по условию постоянны, то очевидно для P будет тогда максимум, когда левая часть формулы, площадь треугольника, будет иметь максимум. Последнее наступит, когда точка M будет в M_0 , середине полуокружности OMA ; при этом

$$OM_0 = M_0 A,$$

или

$$I_m R = \omega L I_m.$$

т. е.

$$R = \omega L. \quad (22,4)$$

Таким образом, когда L в цепи дано, мощность в цепи достигнет максимума при выполнении условия (22,4). При значениях $R \gg \omega L$ мощность будет меньше, и чем больше будет неравенство между этими величинами, тем ближе к диаметру переместится точка M , тем меньше будут площадь треугольника и мощность.

Теперь посмотрим, что будет с мощностью, если R остается постоянным, а L изменяется. Формула (22,3) дает непосредственно, что с увеличением L мощность уменьшается от величины $P = \frac{U^2}{R}$ при $L = 0$ непрерывно до величины $P = 0$ при $L = \infty$.

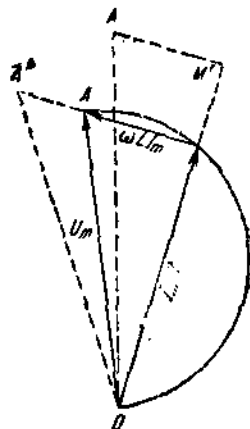
Это влияние величины индуктивности на величину мощности следует представлять себе так: увеличение индуктивности вызывает уменьшение силы тока по закону Ома, а уменьшение силы тока при том же R — уменьшение мощности по формуле (22,2). Увеличение индуктивности можно представить себе конкретно, например, как результат вдвигания железного сердечника в катушку, включенную в цепь тока, или замыкания ее разомкнутой магнитной цепи.

Таким образом мы видим, что влияние изменений R и L на величину мощности неодинаково.

В случае одновременного изменения R и L мощность будет изменяться в зависимости от того, как и в каком отношении друг к другу изменяются величины R и L ; рекомендуем читателю обсудить несколько случаев возможных комбинаций изменений этих величин. Теперь нам надо исследовать еще, как будет изменяться мощность при изменении R и L в цепи, в которой не напряжение, а сила тока постоянна.

Итак полагаем $I = \text{const.}$

Сначала опять разберем случай, когда L постоянно, а R изменяется. Построим для какого-нибудь значения R треугольник векторов OAM (фиг. 43). В этом треугольнике при условии постоянства I и L сторона AM будет постоянна по величине; с изменением R будет пропорционально ему изменяться сторона OM , пропорционально ей будет изменяться площадь треугольника и, следовательно, мощность. При каком-нибудь R' будет $OM' = I_m R'$; $A'M' = \omega L I_m = AM$; $OA' = U_m$ — новому напряжению, и, наконец, $\angle A'OM' = \varphi'_a$, и $\cos \varphi'_a > \cos \varphi_a$, так как $\varphi'_a < \varphi_a$.



Фиг. 43.

При росте R в формуле $P = UI \cos \varphi_a$, где I теперь постоянно, растет активная составляющая напряжения $U \cos \varphi_a = IR$, представляемая векторами $OM, OM', \dots$; при этом уменьшается угол φ_a .

Посмотрим, что будет с мощностью, если R будет постоянно при постоянном I , а изменяться будет L . При этом сторона $OM = I_m R$ будет оставаться постоянной; пропорционально L будут изменяться сторона AM и площадь треугольника OAM , так что согласно соотношению

$$\text{площадь } \triangle OAM = \omega L P,$$

мощность P будет оставаться постоянной.

Иначе при означенных условиях активная составляющая напряжения не будет изменяться и с постоянной силой тока даст постоянную мощность.

Может быть еще случай, когда даны (т. е. считаются за постоянные) и напряжение и сила тока; тогда мощность будет изменяться пропорционально $\cos \varphi$, т. е. величине выражения:

$$\cos \varphi_a = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}.$$

Так как $\cos \varphi$ является множителем, отличающим выражение мощности при переменном токе от выражения ее при постоянном, то иногда его называют еще коэффициентом мощности. Это название в особенности уместно, когда кривые u и i не синусоиды, а сложной формы. Об этом подробнее будет сказано ниже, когда будет изучаться влияние формы кривых u и i .

Остается сказать еще о влиянии на мощность изменения частоты, которую до сих пор мы предполагали по условию постоянной. Формула (22,3) показывает, что с ростом частоты при прочих равных условиях мощность непрерывно уменьшается до нуля при $f = \infty$. Закон Ома показывает, что и сила тока при этом тоже уменьшается до нуля.

Этим мы закончим обсуждение вопроса о влиянии на величину средней мощности различных величин в цепи переменного тока.

В виде примера приложим изученное нами понятие средней мощности к диаграмме генератора переменного тока (фиг. 28), где вместо амплитуд представим теперь действующие значения, чтобы иметь упражнение в таком переходе.

Здесь мы будем иметь прежде всего мощность

$$P_m = EI \cos \varphi_e,$$

которую назовем механической мощностью генератора и отметим буквой *м*. На такую величину мощность машины-двигателя (например, паровой трубы), вращающей наш генератор, должна быть при нагрузке, т. е. когда мы берем от генератора ток, больше, чем при холостом ходе, т. е. когда цепь, подключенная к генератору, разомкнута и $I=0$.

Из чертежа видим, что

$$P_m = E \cos \varphi_e \cdot I = \overline{OF} \cdot I = I^2 (R_{\text{мн}} + R_{\text{ам}}). \quad (22,5)$$

Далее, мы имеем мощность

$$P_e = UI \cos \varphi_u. \quad (22,6)$$

которую мы назовем электрической мощностью генератора и отметим буквой *э*. Такую мощность генератор отдает во внешнюю цепь, ибо

$$P_e = U \cos \varphi_u \cdot I = \overline{OD} \cdot I = I^2 R_{\text{ам}}.$$

Разность этих двух мощностей

$$P_m - P_e = I^2 R_{\text{мн}}$$

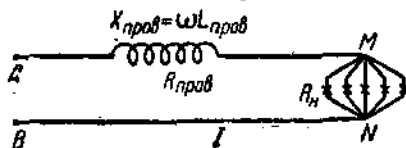
представляет потерю мощности в самом генераторе на нагревание его обмотки.

В примере, к которому относится фиг. 29, был в числе данных назван $\cos \varphi_m$, равный 0,8. Теперь мы видим, что он мог быть узан следующим путем: ваттметром могла быть измерена электрическая мощность P_e (формула 22,6), амперметром измерена сила тока, действующая, в 71,4А, что дает амплитуду $71,4 \cdot \sqrt{2} = 100\text{А}$; вольтметром измерено напряжение, действующее, в 1428В, что дает его амплитуду $1428 \cdot \sqrt{2} = 2000\text{В}$. Разделив согласно формуле (22,6) электрическую мощность на произведение действующих силы тока и напряжения, мы и получим $\cos \varphi_m$.

Предлагаем читателю для упражнения вычислить в этом примере P_m , P_e и разность между ними.

§ 23. Диаграмма Беделя и Крехора

Рассмотренный в предыдущем параграфе первый случай цепи, состоящей из постоянного X и переменного R , включенных последовательно, имеет следующую аналогию в практике:



Фиг. 44.

На фиг. 44 изображена воздушная линия передачи энергии. Точки *A* и *B* есть ее начало, здесь провода *AM* и *AN* подключены к генератору; напряжение *U* в *A* и *B* постоянно; между точками *M* и *N* подключены лампы, т. е. осветительная нагрузка. При практических подсчетах часто считают лампы накаливания за

чисто активное сопротивление; обозначим его через R_n как сопротивление нагрузки. Кроме него в цепи есть активное сопротивление проводов $R_{\text{провод}}$; затем есть индуктивность проводов $L_{\text{провод}}$. Строго говоря, эта индуктивность распределена равномерно

§ 24. „Падение“ напряжения и „потеря“ напряжения в проводах линии передачи энергии

Построив (фиг. 46а) еще раз треугольник напряжений OAM для линии передачи энергии, поступим с его катетами аналогично тому, как мы поступали с ними в фиг. 28; именно выделим падения напряжения в активном сопротивлении проводов линии передачи — векторов $KM = NP = IR_{\text{пров}}$ и в реактивном — вектор $PA = IX_{\text{пров}}$. Предположим для общности, что нагрузка индуктивная, так что кроме R_N существует и $X_N = \omega L_N$ (нагрузка).

Вектор $NA = IZ_{\text{пров}} = I\sqrt{R_{\text{пров}}^2 + X_{\text{пров}}^2}$ есть вектор падения напряжения в проводах. Вычитая его из $OA = U_1$, получим вектор $ON = U_2$, напряжению на конце линии, на нагрузке. Обычно это последнее напряжение поддерживается

постоянным по величине при разных нагрузках посредством регулирования напряжения U_1 . Но для машин и ламп в месте нагрузки важна величина U_2 , а не его фаза относительно U_1 , поэтому для практики важно, насколько арифметически U_2 меньше U_1 , или U_1 больше U_2 .

Продолжим линию ON и опустим $AQ \perp OQ$. Приблизительно примем $OQ = OA$, что возможно во многих случаях по малости угла α . Тогда

$$U_1 - U_2 = OQ - ON = NQ.$$

NQ разлагаем на два отрезка:

$$NQ = NS + SQ = NS + PT.$$

Далее,

$$NS = NP \cdot \cos \varphi_2 = IR_{\text{пров}} \cos \varphi_2$$

$$PT = PA \cdot \sin \varphi_2 = IX_{\text{пров}} \sin \varphi_2,$$

$$U_1 - U_2 = NQ = IR_{\text{пров}} \cos \varphi_2 + IX_{\text{пров}} \sin \varphi_2.$$

Эта арифметическая разность двух напряжений, учитываемая легко с помощью двух вольтметров, называется **потерей напряжения** в проводах.

Пример 10. К линии передачи энергии с $R_{\text{пров}} = 0,6 \Omega$ и $X_{\text{пров}} = 0,8 \Omega$ подключен асинхронный двигатель, полезная мощность которого P_2 равна 304 кВт, к. п. д. его η равен 0,95, при этой мощности $\cos \varphi_2 = 0,8$ напряжение U_2 на его зажимах должно быть 2000 В. Вычислить „потерю“ напряжения в проводах, мощность, берущуюся в линию от генератора, к. п. д. всей линии передачи энергии, напряжение, $\cos \varphi_1$ в начале линии и построить векторную диаграмму.

Потеря напряжения равна согласно последней формуле

$$U_1 - U_2 = (IR_{\text{пров}} \cos \varphi_2 + IX_{\text{пров}} \sin \varphi_2);$$

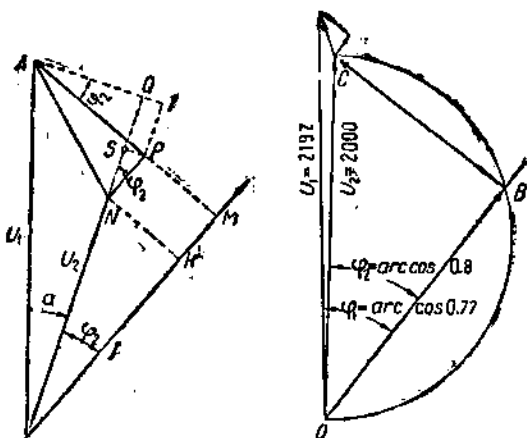
надо, следовательно, прежде всего узнать I .

Мощность, берущаяся линией передачи от генератора,

$$P = \frac{P_2}{\eta} = \frac{304}{0,95} = 320 \text{ киловатт} = 320\,000 \text{ ватт},$$

так как в формуле

$$P_2 = U_2 I \cos \varphi_2$$



Фиг. 46 а и б.

P должно быть выражено в ваттах
и

$$I = \frac{P_2}{U_2 \cos \varphi_2} = \frac{320\,000}{2\,000 \cdot 0,8} = 200 \text{ ампер.}$$

Теперь вычисляем

$$U_1 - U_2 = 200 (0,6 \cdot 0,8 + 0,8 \cdot 0,6) = 200 \cdot 0,96 = 192 \text{ вольт,}$$

что соответствует около 10% от U_1 , которое равно 2 192 вольт.

В проводах тратится

$$I^2 R_{\text{пров}} = 200^2 \cdot 0,6 = 24\,000 \text{ ватт} = 24 \text{ киловатт.}$$

Мощность P_1 , берущаяся из генератора, равна

$$P_1 = 320 + 24 = 344 \text{ киловатт} = 344\,000 \text{ ватт.}$$

Коэффициент полезного действия всей установки равен

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{304}{344} = 0,88.$$

В начале линии имеется

$$\cos \varphi_1 = \frac{P_1}{U_1 I} = \frac{344\,000}{2\,192 \cdot 200} = 0,785.$$

На фиг. 46b построена векторная диаграмма напряжений и тока.

Пример 11. Прodelать весь пример 10 с измененными данными: $\cos \varphi_2 = 0,6$ и $X_{\text{пров}} = 1,2 \Omega$.

§ 25. Диаграмма синхронного двигателя

Следует заметить — как общий закон, — что всякая электрическая машина обратима, т. е. может работать генератором, если мы подведем в ней механическую мощность, и двигателем, если мы подведем к ней электрическую мощность, и что в генераторе э. д. с. и ток одинакового направления, а в двигателе — противоположного.

Из диаграммы фиг. 28, 29 мы видим, что в работе генератора переменного тока бывают краткие промежутки — доли периода, когда э. д. с. и мгновенная сила тока направлены разно, но что большую часть периода э. д. с. и ток направлены одинаково. Следовательно, для машин переменного тока важно, какой угол составляют вектор э. д. с. и вектор силы тока: если острый, то большую часть периода e и i направлены одинаково, и мы имеем работу машины генератором.

При этом и угол между U и I тоже острый. Отсюда же следует, что мощности

$$EI \cos \varphi_e \text{ и } UI \cos \varphi_u$$

обе положительны: машина отдает их в сеть.

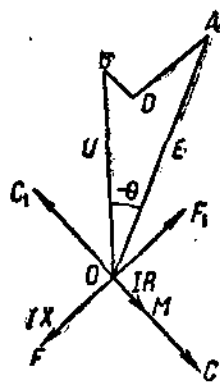
Представим себе, что вектор тока I составляет с вектором E и U тупые углы, как на фиг. 47.

Что это будет означать?

Мощность $UI \cos \varphi_u$ при $\varphi_u > \frac{\pi}{2}$ будет отрицательна; это значит, что машина не посылает в сеть $UI \cos \varphi_u$, а берет из сети мощность такую именно по величине.

Векторная диаграмма строится совершенно так же, как и диаграмма на фиг. 28, 29.

К*



Фиг. 47.

К э. д. с. E от поля тока в обмотке ротора надо приложить э. д. с. от поля тока в обмотке статора $\overline{AD} = I\omega L_{\text{вну}}$, отстающую на $\frac{\pi}{2}$ от вектора тока I , и затем вычесть вектор $\overline{IR_{\text{вну}}} = \overline{OM} = \overline{BD}$.

Вычесть $\overline{BD}$ — значит прибавить $\overline{DB}$.

Таким образом получаем вектор напряжения.

$$\overline{OB} = \overline{U}.$$

Теперь угол θ между $\overline{E}$ и $\overline{U}$ находится вправо от $\overline{U}$, мы его будем считать поэтому в дальнейшем отрицательным.

Что касается тока, то мы можем относительно него сказать то же, что и относительно мощности: ток, представленный вектором $\overline{OC}$, машина по нашему прежнему представлению посылала в сеть; начертим вектор $\overline{OC_1} = -\overline{OC}$ и мы можем сказать, что машина берет такой ток из сети.

Это утверждение кажется естественное, но следует отметить, что начинающий читатель, строя векторную диаграмму для двигателя и беря за вектор тока с самого начала вектор $\overline{OC_1}$, может легко ошибиться в направлении э. д. с. самоиндукции обмотки и, считая ее, как всегда, отстающей на $\frac{\pi}{2}$ от тока, сделать из этой

верной мысли неверный вывод, будто бы она будет не $\overline{OF}$, а $\overline{OF_1}$; тогда он будет и к вектору э. д. с. $\overline{OA}$ прикладывать не $\overline{AD}$, а обратный вектор и получит неверный результат.

Поэтому вначале лучше всегда исходить из мысли, что э. д. с. и ток в двигателе должны быть разного направления (по крайней мере большую часть периода), чертить вектор тока, как вектор $\overline{OC}$, строить всю диаграмму и лишь тогда заменять ток $\overline{OC}$, посылаемый машиной-двигателем в сеть, током $\overline{OC_1}$, который она берет из сети.

В этом заключается некоторое осложнение сравнительно с генераторами и двигателями постоянного тока.

ГЛАВА ПЯТАЯ

ЕМКОСТЬ В ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

§ 26. Закон Ома для цепи, содержащей активное сопротивление и емкость

Если мы к зажимам переменного тока последовательно с некоторым активным сопротивлением подключим конденсатор, то он будет заряжаться попеременно то в одном направлении, то в другом, при этом в цепи будет идти переменный ток, сила которого будет зависеть и от величины активного сопротивления и от емкости конденсатора.

Разберем этот вопрос.

Обозначим для дальнейшего, как и раньше, активное сопротивление цепи через R , емкость конденсатора в практических единицах (фарадах) через C , разность потенциалов, или напряжение, на его обкладках — мгновенное значение — через u_k , амплитуду — через U_{km} , действующее значение — через U_k ; все напряжение или э. д. с., приложенные к цепи, как и раньше, — через u , U или e , E .

Количество электричества q , собравшееся к произвольному моменту времени на обкладках конденсатора, может быть выражено через емкость его и существующую в этот момент на его обкладках разность потенциалов так:

$$q = Cu_k. \quad (26,1)$$

За следующий бесконечно малый промежуток времени dt в конденсатор притечет количество электричества dq ; значит, сила тока в этот момент была равна

$$i = \frac{dq}{dt}. \quad (26,2)$$

Если dq положительно, т. е. если заряд увеличивается, то и $\frac{dq}{dt}$ положительно и сила тока i положительна.

Подставляя в формулу (26,2) вместо q его выражение (26,1) и дифференцируя последнее по t , получаем

$$i = C \frac{du_k}{dt}. \quad (26,3)$$

Заладимся тем, что напряжение u_k есть синусоидальная функция времени при произвольном начале отсчета времени, выражающаяся так:

$$u_k = U_{km} \sin(\omega t + \beta). \quad (A)$$

Тогда подставляя вместо u_k это последнее выражение в формулу (26,3) и производя дифференцирование, имеем

$$i = \omega C U_{km} \cos(\omega t + \beta) = \omega C U_{km} \sin\left(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2}\right). \quad (26,4)$$

Синусоидальная функция $\sin\left(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2}\right)$, как известно, опережает на четверть периода функцию $\sin(\omega t + \beta)$.

Таким образом сила тока, проходящего через конденсатор, опережает напряжение на его обкладках на четверть периода; на векторной диаграмме поэтому вектор напряжения на конденсаторе надо чертить повернутым относительно вектора силы тока в сторону более позднего времени, т. е. по вращению линии времени на угол $\frac{\pi}{2}$.

Амплитуда силы тока из формулы (26,4) получается в виде

$$I_m = \omega C U_{km}, \quad (26,5)$$

и напряжение на конденсаторе, выраженное через силу тока и емкость,

$$U_{km} = \frac{I_m}{\omega C}. \quad (26,6)$$

Это выражение аналогично выражению (7,7) для амплитуды э. д. с. самоиндукции через силу тока и индуктивность, хотя, как видим, полного сходства в строении обеих формул нет.

Быть может, у читателя явится вопрос, почему при выводе этого соотношения между э. д. с. самоиндукции и силой тока мы задавались тем, что сила тока есть синусоидальная функция времени, а теперь задавались аналогичным выражением для напряжения у конденсатора [формула (A)]?

Мы сделали так просто потому, что этим путем скорее получается результат, выражаемый формулой (26,4). Следует заметить, что и здесь, при выводе соотношения между силой тока и напряжением на конденсаторе, мы могли поставить условием существование в цепи синусоидального тока с данной амплитудой

$$i = I_m \sin(\omega t) \quad (B)$$

и искать, как будет через силу тока выражаться напряжение u_k . Итак допустим, что формулу (26,4) мы не знаем.

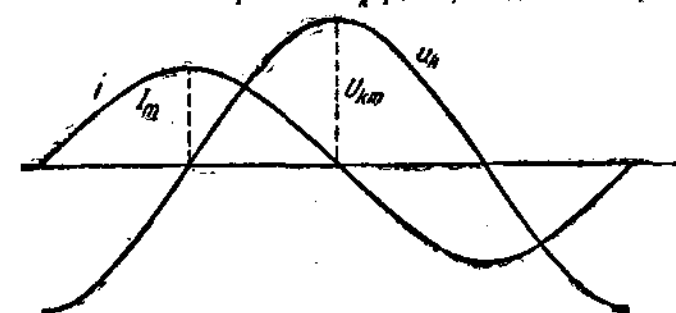
Из формулы (26,3) следует, что

$$u_k = \frac{1}{C} \int_x i \cdot dt, \quad (C)$$

но поставить здесь у интеграла нижний предел для читателя, незнакомого с действием емкости в цепи переменного тока, представит трудности, так как для указания этого предела необходимо уже знать, что сила тока опережает напряжение на четверть периода. Однако определить этот предел можно путем следующих рассуждений, которые мы приведем для того, чтобы читатель мог узнать подход с разных сторон к этому вопросу.

Установим сначала такое положение: интегрируя синусоидальную функцию между пределами, один из которых переменен, мы получим тоже синусоидальную функцию того же периода; таким образом u_k должно быть по (C) синусоидальной функцией того же периода, что и i .

Далее, из формулы (26,3) имеем, что когда $i = 0$, то $\frac{du_k}{dt} = 0$ и, следовательно, u_k равно положительному или отрицательному максимуму (амплитуде) U_{km} . До этого момента напряжение u_k росло, следовательно, электричество текло в конденсатор; после этого момента U_k , оставаясь по знаку таким же, как и раньше, будет уменьшаться, следовательно, ток будет течь из конденсатора. Поэтому силу тока после момента положительного максимума напряжения нужно счесть отрицательной. Сообразно этому синусоиды u_k и i чертим так, как на фиг. 48, при этом сила тока опережает напряжение на четверть периода. Таким образом, когда $i = I_m$, тогда $u_k = 0$; поэтому интегрировать между моментами, когда $u_k = 0$ и когда оно имеет некоторую величину u_k , — значит интегрировать как раз между моментами, когда $i = I_m$ и когда $i = i$.



Фиг. 48.

Таким путем мы приходим к величине нижнего предела в интеграле (C) $x = I_m$ и пишем

$$u_k = \frac{1}{C} \int_{I_m}^i i \cdot dt. \quad (D)$$

Подставляя вместо i его выражение (B) и ставя пределы для переменной t , имеем

$$u_k = \frac{I_m}{\omega C} \int_{\frac{1}{4}T}^t \sin(\omega t) \cdot d(\omega t) = \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \quad (26,7)$$

Формула (26,7) по содержанию одинакова с (26,4); из нее вытекают также и формулы (26,5) и (26,6).

Заметим, что нижний предел в формуле (C) пишется очень часто неверно, именно, как $i = 0$ (например, Arnold Wechselstromtechnik. Bd. I. S. 47,2 Aufl.),

Предлагаем читателю убедиться, что можно поставить нижним пределом $i=0$, если выражение для u_k взять не (C), а иное, именно

$$u_k = \frac{1}{C} \int_0^i i \cdot dt - U_{km},$$

и что в результате вычислений получится тоже формула (26,7).

Перейдем теперь к решению следующей задачи.

Требуется определить амплитуду и фазу напряжения, или э. д. с., которые надо приложить к цепи с активным сопротивлением R и емкостью C , включенной в цепь, чтобы получить силу тока данной амплитуды.

Возможны два способа решения: аналитический и геометрический, или лучше сказать, графический, как и при решении задачи о цепи с индуктивностью.

Основанием для того и другого хода решения является разложение напряжения u , которое надо приложить к цепи, на два слагаемых — первое iR , необходимое для того, чтобы силу тока i „прогнать“ через сопротивление R , и второе u_k — напряжение у конденсатора, необходимое для силы тока i .

Итак,

$$u = iR + u_k. \quad (26,8)$$

Для аналитического решения положим

$$i = I_m \sin(\omega t)$$

и

$$u_k = \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

где I_m нам задано. Подставляем эти величины в формулу (26,8):

$$\begin{aligned} u &= I_m R \sin(\omega t) + \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_m \left[R \sin(\omega t) - \frac{1}{\omega C} \cos(\omega t) \right] = \\ &= I_m \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} [\cos \varphi_u \sin(\omega t) - \sin \varphi_u \cos(\omega t)] = \\ &= I_m \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \sin(\omega t - \varphi_u). \end{aligned} \quad (26,9)$$

Здесь

$$\operatorname{tg} \varphi_u = \frac{1}{\omega C R} = \frac{1}{\omega C R} \quad (26,10)$$

и

$$U_m = I_m \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad (26,11)$$

и следовательно,

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (26,12)$$

Последнее соотношение справедливо и для действующих значений I и U ; оно называется законом Ома для цепи, содержащей емкость.

Величина

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (26,13)$$

по физической размерности своей представляет сопротивление, аналогично величине $X_L = \omega L$, и называется реактивным сопротивлением. Разница между ними та, что ωL вызывает своим присутствием в цепи отставание тока от напряжения, а $\frac{1}{\omega C}$ вызывает опережение током напряжения.

Графическое решение состоит в следующем:

Отложим вектор силы тока I (фиг. 49). Введем для упражнения в выводы и построения не амплитуды, а действующие значения. Вектор I есть $\overline{OA}$; $\overline{OB}$ представляет величину IR , $\overline{OD}$ есть вектор напряжения на конденсаторе (26,6)

$$U_C = \frac{I}{\omega C},$$

отстающего от силы тока на четверть периода.

Отрезок $\overline{OC}$ есть результирующий вектор напряжения в цепи U . На основании теоремы Пифагора легко получаем соотношение (26,12) для действующих значений.

Сравнивая фиг. 49 с фиг. 26, мы видим, что угол φ при индуктивности откладывается влево от вектора силы тока, а при емкости — вправо. Будем считать углы φ , откладываемые в одном направлении, положительными, откладываемые в другом, — отрицательными. Условимся, что положительные φ мы откладываем влево,

отрицательные — вправо; значит формула (8,2) дает положительные φ , а формула (26,10) — отрицательные; такое условие есть просто в свою очередь следствием из формул (8,4) и (26,9).

Если мы желаем найти соотношение мощности и других величин в цепи с емкостью, то мы в формулу (20,1) должны поставить вместо $+\varphi_e$, угла запаздывания тока, угол $-\varphi_u$, угол его опережения. Дальнейшие выводы величины средней мощности от этого несколько не изменятся, и мы получим те же формулы

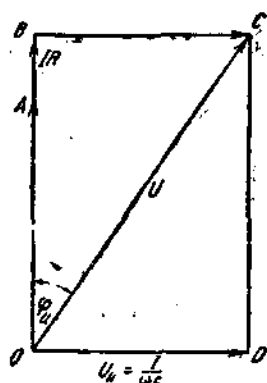
(20,9) и (20,11), так как при изменении знака угла косинус его не меняет знака.

Итак, от чего бы ни происходил сдвиг фаз между силой тока и напряжением (или э. д. с.), т. е. будет ли он положительным или отрицательным, средняя мощность выражается формулами (20,9) и (20,11).

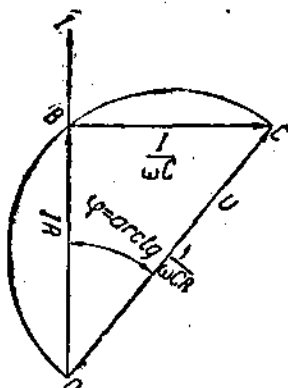
Затем заметим, что при изменении C или R точка B движется по полуокружности (фиг. 50); чем больше емкость C , тем меньше угол φ ; когда $C = \infty$, тогда $\varphi = 0$ и из формулы (26,12)

$$I = \frac{U}{R}.$$

Таким образом не следует думать, что когда источник переменного тока замкнут на одно лишь активное сопротивление R , то емкость в цепи равна нулю, — наоборот, тогда емкость бесконечна. Когда же цепь совсем разомкнута и части ее в месте размыкания удалены одна от другой так, что электрическое поле между ними равно нулю, тогда и емкость в цепи равна нулю, т. е. $C = 0$, и по формуле (26,12) $I = 0$.



Фиг. 49.

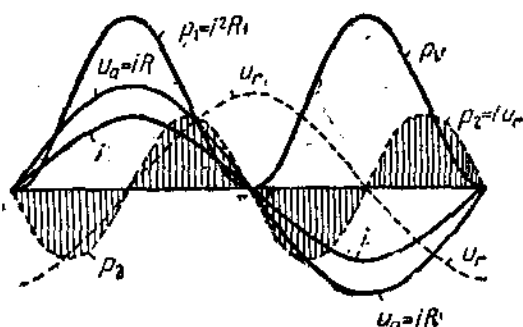


Фиг. 50.

Вектор OB есть вектор активной составляющей напряжения, вектор OD есть вектор реактивной составляющей напряжения. Аналогия и во всем остальном тому случаю, когда в цепь включена индуктивность, — полная, только угол φ имеет теперь другой знак, сила тока опережает напряжение.

§ 27. Мощность в цепи с емкостью

Мы могли бы повторить все рассуждения, приведенные в гл. IV по поводу фиг. 38 и 40 о ходе изменений мгновенных значений мощности, с той лишь разницей, что реактивная составляющая напряжения на фиг. 39 и 40 опережала силу тока, а теперь (фиг. 50) она будет отставать от силы тока. Эти кривые изображены на фиг. 51. О кривой мощности $p_1 = i^2 R$ ничего нового нельзя сказать. Наоборот, умножив ординаты кривой $u_r = u_k$ на i и получив кривую $p_2 = u_k i$, мы видим, что ординаты ее положительны, т. е. источник тока тратит мощность или энергию тогда, когда сила тока убывает по своей величине, — промежуток времени qr ; в это время u_k растет до максимума, следовательно, происходит заряд конденсатора, накопление в нем энергии в виде энергии электрического поля; продолжительность этого накопления — четверть периода; в следующую четверть периода u_k убывает до нуля, и электричество



Фиг. 51.

течет из конденсатора по цепи (от одной его обкладки через всю цепь к другой обкладке), здесь нет нужды в особом „механизме“, каким была э. д. с. самоиндукции для возвращения запасенной в электрическом поле энергии в цепь. Сумма всех площадей за целый период равна нулю, следовательно, происходит лишь простой обмен энергией между цепью и диэлектриком конденсатора без потерь. Строго говоря, существует явление диэлектрических потерь при циклическом изменении электрического поля, но эти потери для некоторых диэлектриков так малы, что ими можно пренебречь; далее мы покажем, как их учесть, когда это оказывается необходимым.

Вычислим энергию, запасаемую в диэлектрике конденсатора за четверть периода qr (фиг. 51):

$$W_s = \int_{u_k=0}^{u_k=U_m} u_k i dt,$$

или, принимая во внимание выражение (26,3) для i ,

$$W_s = \int_{u_k=0}^{u_k=U_{km}} C \cdot u_k \cdot du_k = \frac{CU_{km}^2}{2}. \quad (27,1)$$

Формула (27,1) представляет известное из курса физики выражение для энергии заряженного до разности потенциалов U_{km} конденсатора, вывод ее не зависит от закона изменения u_k и i во время заряда.

§ 28. Закон Ома для цепи, содержащей активное сопротивление, индуктивность и емкость

Перейдем теперь к общему случаю, когда в цепь переменного тока включены активное сопротивление R , индуктивность L и емкость C . Какое надо приложить к этой цепи напряжение (или э. д. с.), чтобы сила тока в ней была данной амплитуды (или действующего значения)?

Для мгновенных значений имеем, что

$$u = iR - e_c + u_k, \quad (28,1)$$

т. е. в каждый момент часть u_k всего напряжения сосредоточивается на конденсаторе, часть $-e_c$ компенсирует э. д. с. самоиндукции и часть iR тратится на проведение тока через сопротивление R цепи.

Подставляя сюда вместо i его выражение $i = I_m \sin(\omega t)$ и связанные с этим выражением выражение (7,6) для e_c и выражение (26,7) для u_k , получаем

$$u = I_m R \sin(\omega t) - \omega L I_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Выносим I_m за скобки и соединяем два последних члена в одночлен:

$$\begin{aligned} u &= I_m \left\{ R \sin(\omega t) - \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \right\} = \\ &= I_m \left\{ R \sin(\omega t) + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cos(\omega t) \right\}. \end{aligned}$$

Совершенно аналогично предыдущим случаям вводим вспомогательный угол

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (28,2)$$

и получаем

$$u = I_m \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \cdot \sin(\omega t + \varphi). \quad (28,3)$$

Отсюда для амплитуд и для действующих значений имеем формулу

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}, \quad (28,4)$$

которую и назовем законом Ома в общем случае цепи переменного тока.

Здесь уже

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = X_L - X_C \quad (28,5)$$

есть реактивное сопротивление.

В векторальной форме решение представится в следующем виде:

Откладываем вектор $OB = IR$ (фиг. 52); перпендикулярно вправо — вектор $OD = U_k = \frac{I}{\omega C}$, перпендикулярно влево — вектор $OH = -E_c = -\omega LI$; складываем векторы, сначала, например, OH и OD , где сложение сводится к вычитанию из OH отрезка $HF = OD$; разность — вектор OF — складываем с OB и получаем OC , вектор результирующий из всех трех, а потому представляющий все напряжение u согласно формуле (28,1).

Величина вектора OF равна

$$\omega LI - \frac{I}{\omega C} = I \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = IX. \quad (28,6)$$

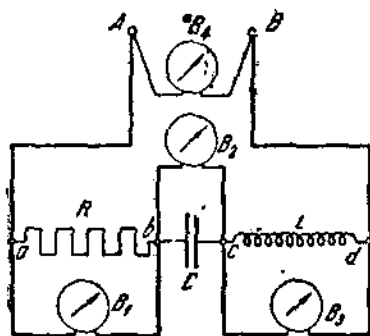
Применив к треугольнику OBC теорему Пифагора, получим опять формулу (28,4) закона Ома.

Средняя мощность выражается прежней формулой $P = IU \cos \varphi_a$, где угол φ_a определяется из формулы (28,2); ординаты кривой мгновенных мощностей разлагаются на сумму ординат трех кривых: $i^2 R$, $-e_i i$ и $u_i i$, к которым и применимо все сказанное о них выше.

Если мы измерили амперметром I , вольтметром U и ваттметром P , то, разделив P на IU , мы получим $\cos \varphi_a$, причем, однако, мы не будем знать, положителен или отрицателен сам угол φ_a , другими словами, чем вызван сдвиг фаз — емкостью или индуктивностью, или при существовании и той и другой в цепи, влияние которой больше, каков знак X в формуле (28,5). Если $X_L > X_C$, то берет верх индуктивность X положительно, φ положительно, и сила тока отстает от напряжения; если же $X_L < X_C$, то берет верх емкость, X и φ отрицательны и сила тока опережает напряжение. Таким образом мы приходим к необходимости как бы приписать реактивным сопротивлениям знак: сопротивлению $X_L = \omega L$ знак плюс, а сопротивлению $X_C = \frac{1}{\omega C}$

знак минус; он и стоит в формулах (28,2) (28,3), (28,4) и (28,5). „Результирующее“ сопротивление $X = X_L - X_C$ тоже получает знак. Для определения этого знака и, следовательно, знака угла φ_a экспериментально нужны другие еще приборы, например, осциллограф.

Нам надо теперь для дальнейшего условиться в способе обозначения на схеме активного и реактивного сопротивлений. Будем активное сопротивление обозначать ломаной линией, как на фиг. 53



Фиг. 53.

между точками a и b ; реактивное сопротивление индуктивности будем обозначать витой линией, как на той же фигуре между точками c и d ; так же будем обозначать и всякую катушку с небольшим активным сопротивлением; наконец, емкость обозначим двумя параллельными линиями одинаковой длины, как на фиг. 53 между точками b и c .

На схеме (фиг. 53) изображена цепь переменного тока, присоединенная к зажимам A и B источника переменного тока; в цепь включено активное сопротивление R , емкость C (конденсатор) и индуктивность L (катушка). Конечно,

провода Aa , Bb и соединительные провода между R и C и между C и L тоже обладают и активным сопротивлением и индуктивностью. При решении многих задач, однако, этими величинами можно пренебречь ввиду их чрезвычайной малости в сравнении с активным сопротивлением R какого-нибудь реостата или т. п. и индуктивностью L катушки. В других случаях можно через R обозначить активное сопротивление всей части цепи от A до B , включая и провода и активное сопротивление проволоки, свитой в катушку, а через L обозначить индуктивность всей части AB цепи. Наконец, можно все эти величины учесть и порознь, считая, что

участок cd кроме индуктивности L обладает еще и некоторым активным сопротивлением, так же как и все остальные участки. В последующем мы будем иметь случаи разного подхода к этому вопросу сообразно конкретным условиям каждой задачи, соотношениям в ней всех этих величин.

Между прочим, следует заметить, что если мы подключим по вольтметру на каждый участок цепи и „главный“ вольтметр к самым зажимам AB , то в противоположность случаю цепи постоянного тока показание этого „главного“ вольтметра вообще не будет равно сумме показаний всех вольтметров на участках, так как все напряжения на участках складываются в результирующее напряжение не арифметически, а геометрически (вспомним фиг. 30, где было несколько участков, каждый с разным отношением своего ωL к своему R).

Прделаем небольшой пример.

Пример 12. Пусть на фиг. 53 катушка самоиндукции сделана из небольшого числа витков очень толстой проволоки, так что ее активным сопротивлением мы можем пренебречь, индуктивность же ее $L = 0,31$ Н, активное сопротивление какого-то приемника электрической энергии $R = 10$ Ом; емкость конденсатора $C = 20$ мкФ, или $20 \cdot 10^{-6}$ Ф; сопротивлением активным и реактивным коротких соединительных проводов пренебрегаем ввиду их малости. Сила тока I равна 5 А. Что покажут все четыре вольтметра?

Вольтметр B_1 покажет напряжение

$$IR = 5 \cdot 10 = 50 \text{ В},$$

Вольтметр B_2 покажет напряжение [формула (26,6), отнесенная не к амплитудам, а к действующим значениям]

$$U_R = \frac{I}{\omega C} = \frac{5 \cdot 10^4}{314 \cdot 20} \approx 800 \text{ В}.$$

Вольтметр B_3 покажет напряжение, равное э. д. с. самоиндукции, так как на этом участке мы положили $R = 0$, т. е. величину

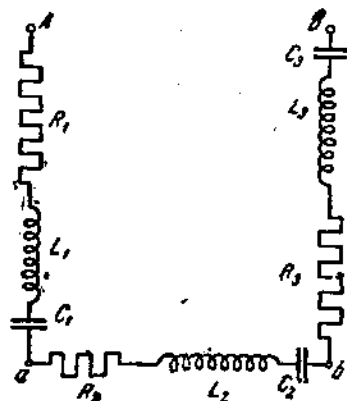
$$U_L = \omega LI = 314 \cdot 0,31 \cdot 5 = 500 \text{ В}.$$

Вольтметр же главный B_4 покажет напряжение

$$U = I \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = 5 \sqrt{10^2 + (100 - 160)^2} \approx 304 \text{ В},$$

т. е. даже меньше, чем B_2 и B_3 .

Закончим этот параграф построением векторной диаграммы для случая более сложного. На фиг. 54а дана схема цепи переменного тока, разделяющейся на три последовательно соединенных участка A_2 , ab и bB . Каждый участок представляет



Фиг. 54а.

последовательное соединение активного сопротивления, индуктивности и емкости. Нас интересуют напряжения на отдельных целых участках, но не отдельно на каждом сопротивлении, конденсаторе и т. д., так как этот последний случай мы только что уже изучили. Как все напряжение на зажимах A и B разложится на участковые напряжения? Мы пойдем обратным путем и построим все участковые напряжения, сложив которые, затем получим все напряжение на зажимах A и B . Пусть (фиг. 54б) $\vec{OA}$ есть вектор силы тока I ; а $\vec{OB}_1$ — вектор IR_1 падения напряжения в активном сопротивлении первого участка; отложим по известным уже правилам аналогично фиг. 52, векторы $\vec{OD}_1 = U_{L_1}$ и $\vec{OH}_1 = -E_{C_1}$; сложив все три вектора, получим $\vec{OC}_1 = U_1$ — вектор напряжения на первом участке; переходя ко

второму участку, заметим, что напряжение на нем придется потом геометрически складывать с напряжением U_1 , а потому для упрощения и строить его будем не

от точки O , а от точки C_1 , построение аналогично предыдущему: $\overline{C_1B_2} = IR_2$, $\overline{C_1D_2} = U_{k2}$, $\overline{C_1H_2} = -E_{c2}$ и $\overline{C_1C_2} = U_2$. Точно так же поступим и с напряжениями третьего участка: $\overline{C_2C_3} = U_3$. Величины векторов E_c и U_k для участков таковы, что, как изображено на векторной диаграмме, на первых двух участках индуктивность берет верх над емкостью и сдвиг фаз φ_u получается положительным, на третьем же участке емкостный эффект сильнее эффекта самоиндукции, и φ_3 отрицательно. При изображенных на диаграмме соотношениях для всей части цепи от A до B угол φ_u получился положительным.

Если все участковые φ_u равны, то напряжения на участках сложатся арифметически в полное напряжение U ; для этого согласно формуле (28,2) должно быть

$$\frac{\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}}{R_1} = \frac{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}}{R_2} = \dots = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}, \quad (28,7)$$

где L есть индуктивность всей части цепи от A до B , C — ее емкость, а R — активное сопротивление. Как известно из формулы (14,1),

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n + \dots$$

Что активное сопротивление R выразится таким же образом через сопротивления участков, — очевидно.

Как связано C с величинами емкостей в участках?

Легко видеть, что построение фиг. 54b можно изменить следующим образом: построим сначала все векторы $-E_{c1}$, $-E_{c2}$, $-E_{c3}$ и сложив их, получим $-E_c$ — вектор слагающей напряжения, уравнивающей э. д. с. самоиндукции для всей части AB цепи; так же построим и сложим U_{k1} , U_{k2} и U_{k3} ; очевидно, что, вычтя их из предыдущего вектора $-E_c$, мы получим ту же самую реактивную слагающую, равную $\overline{C_3B}$, что и прежде; и окончательный результат будет тот же самый — вектор $\overline{OC_3} = U_r$ но

$$U_{k1} + U_{k2} + U_{k3} = U_r,$$

или

$$\frac{1}{\omega C_1} + \frac{1}{\omega C_2} + \frac{1}{\omega C_3} = \frac{1}{\omega C},$$

и, обобщая,

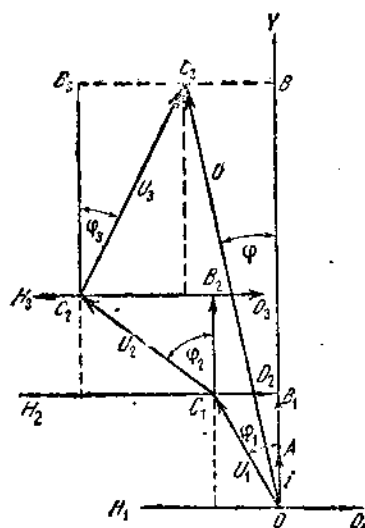
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_m}. \quad (28,8)$$

Итак, когда мы имеем в цепи последовательно соединенные емкости (непосредственно соединенные или с промежутками из L и R — это безразлично, как явствует из всего хода рассуждений), то емкость всей рассматриваемой части цепи определяется из емкостей участков этой части по формуле (28,8).

Формула (28,8) известна и из курса физики.

Таким образом при нескольких участках имеем

$$\begin{aligned} R &= R_1 + R_2 + R_3 + \dots, \\ \omega L &= \omega L_1 + \omega L_2 + \omega L_3 + \dots, \\ \frac{1}{\omega C} &= \frac{1}{\omega C_1} + \frac{1}{\omega C_2} + \frac{1}{\omega C_3} + \dots, \\ X &= X_1 + X_2 + X_3 + \dots \end{aligned}$$



Фиг. 54b.

Пример 13. Построить последнюю векторную диаграмму для случая: $R_1 = 3\Omega$, $L_1 = 0,01$ H; $C_1 = 100$ μ F; $R_2 = 10$; $L_2 = 0,1$; $C_2 = 200$; $R_3 = 5$; $L_3 = 0,05$; $C_3 = 50$.

§ 29. Резонанс напряжений

Может случиться, что в формуле (28,4) $X = 0$, т. е. что

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}. \quad (29,1)$$

Тогда на фиг. 52 вектор $\overline{OD} = -\overline{OH}$, $\overline{FO} = \overline{CB} = 0$ и $U = IR$, т. е. вектор $\overline{OB}$ сливается с вектором $\overline{OC}$ по величине и по фазе, угол φ становится равным нулю.

При всяком другом φ , при $\omega L \geq \frac{1}{\omega C}$, будет $\overline{OC} > \overline{OB}$; поэтому при выполнении равенства (29,1) необходимое для создания данной силы тока напряжение является при данном R наименьшим. В формуле (28,4) знаменатель получается при этом наименьшим, так что можно из этой формулы вывести и другое заключение, именно, что при данном напряжении U и при данном R сила тока I будет наибольшей при выполнении равенства (29,1).

Эта сила тока равна

$$I = \frac{U}{R},$$

как будто в цепи нет ни индуктивности, ни емкости, а есть только одно активное сопротивление.

Описываемый случай носит название резонанса напряжений емкости и индуктивности.

Резонанс может случиться от разных причин, например, при постоянной индуктивности L цепи может изменяться емкость так, что станет равной

$$\frac{1}{\omega^2 L},$$

или же при постоянной емкости C может изменяться индуктивность так, что станет равной

$$\frac{1}{\omega^2 C}.$$

или же изменения обеих величин приведут к выполнению равенства (29,1), наконец, может изменяться в некоторых случаях практики и число периодов в секунду так, что получится

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (29,2)$$

что опять приводит к равенству (29,1).

Теперь следует остановиться на следствиях из равенства (29,1) на различных сторонах этого явления „резонанса“.

Для этого обратимся к тому численному примеру, который мы рассматривали в предыдущем параграфе.

Мы из него видели, что напряжения на отдельных участках могут значительно превосходить все напряжение в цепи — такова особенность явлений в цепи переменного тока.

Посмотрим, что будет, если мы, оставляя напряжение U неизменно равным 304 V, будем увеличивать индуктивность в цепи (например, заменяя одну катушку другой или вдвигая в них железные сердечники и т. п.) до того, чтобы наступил резонанс напряжений.¹

В примере $\frac{1}{\omega C} = 160 \text{ } \Omega$, так что для резонанса должно быть и $\omega L = 160 \text{ } \Omega$, и следовательно, $L = 0,5 \text{ H}$.

Тогда

$$I = \frac{U}{R} = \frac{304}{10} = 30,4 \text{ A},$$

а напряжения будут

$$U_R = U_L = 160 \cdot 30,4 = 4864 \text{ V!}$$

Мы вычислили действующие значения напряжений на емкости и на индуктивности, т. е. на конденсаторе и на катушке, а амплитуды будут в $\sqrt{2}$ раз больше.

Эти два напряжения достигают на L и C своих амплитуд и других равных значений в одно и то же время, только направления их в цепи всегда прямо противоположны (проекция на линию времени векторов $\overline{OD}$ и $\overline{OH}$ на фиг. 52 при равенстве величин OD и OH); например, на схеме фиг. 53 в тот момент, когда потенциал точки b оказывается выше потенциала точки c на 3000 V , на столько же выше потенциала точки c и потенциал точки d ; точка же d имеет тот же потенциал, что и зажим B (мы ведь считаем сопротивление между B и d равным нулю), следовательно, зажим или конец b активного сопротивления $R(ab)$ всегда имеет тот же потенциал, что и зажим B , другой же конец a активного сопротивления R имеет, очевидно, тот же потенциал во всякий момент, что и зажим A . Таким образом сопротивление ab (R) подключено к напряжению U на зажимах AB . Кроме того, имеется точка c , потенциал которой то становится ниже на тысячи вольт, чем потенциал b или B , то выше на такие же величины. Вольтметры B_2 и B_3 эти напряжения покажут (действующие их значения), а вольтметр „главный“ B_1 их совсем никак не отметит и покажет только IR .

Эти отдельные напряжения могут быть и опасны, например, конденсатор может не выдержать напряжения около 5000 V и диэлектрик его может быть пробит искрой, так же как и изоляция в катушке самоиндукции.

Таким образом, включая эти приборы в цепь с напряжением, для них не опасным (в примере 304 V), не подсчитав заранее частичных напряжений, не посмотрев, не имеет ли места соотношение (29,1), можно как раз получить случайно резонанс, причем высокими частичными напряжениями могут быть пробиты и испорчены включенные приборы. При включении в цепь переменного тока емкости и индуктивности нужно поэтому предварительно проверять возможность резонанса по формуле (29,1).

Может быть еще и следующий случай:

Пусть в нашем примере изменится R и станет вместо десяти равным одному ому. Пока резонанса не было, сила тока при изменившемся R была следующая:

$$I = \frac{304}{\sqrt{1^2 + (100 - 160)^2}} \approx 5 \text{ A};$$

сильное изменение — с десяти до одного ома — активного сопротивления не привело к заметному изменению силы тока, что является следствием того, что реактивное сопротивление осталось прежним и что оно велико в сравнении с активным.

Пусть теперь при изменившемся R наступит резонанс; тогда сила тока будет

$$I = \frac{304}{1} = 304 \text{ A!}$$

Смотря по обстоятельствам, может быть тот или иной вред от неожиданно большой силы тока; всего легче может попортиться от нагрева изоляция и быть затем пробита большим частичным напряжением, которое теперь, при уменьшенном R и увеличенном I , будет

$$U_R = U_L = \omega LI = 160 \cdot 304 = 48640 \text{ V!}$$

Само собой разумеется, что можно получать произвольно резонанс напряжений в цепи переменного тока, подсчитав предварительно, какое напряжение U к ней надо приложить и какую силу тока установить в цепи, чтобы частичные напряжения при резонансе и сила тока не были опасны; можно соответствующим образом подбирать и самые величины L и C .

Теперь следует сказать несколько слов о смысле самого названия описанного явления — „резонанс напряжений“.

Мы уже раньше условились отвлечься пока от потерь на гистерезис (перемагничивание) в магнитном поле переменного тока и считать, что вся средняя мощность P идет на нагрев сопротивления R .

Разберем следующий абстрактный случай, к которому, однако, мы практически очень близко можем подойти:

Пусть $R = 0$; тогда

$$I = \frac{U}{\omega L - \frac{1}{\omega C}}$$

и при резонансе

$$I = \frac{U}{0} = \infty. \quad (A)$$

Последнее выражение показывает, что при отсутствии в цепи активного сопротивления достаточно самого небольшого напряжения, чтобы в случае резонанса вызвать ток бесконечно большой силы.

Отделив провода aA и dB от зажимов A и B и соединив их, эти провода, друг с другом, мы делаем все напряжение U , приложенное к ad , равным нулю, и тогда получается из (A) сила тока $I = \frac{0}{0}$, что представляет неопределенность;

значит, сила тока может иметь разную величину.

Объяснение мы найдем в следующем:

Присоединим конденсатор C к зажимам некоторого источника постоянного тока, например, аккумуляторной батареи, на короткое время; конденсатор зарядится; при этом в нем запасется электрическая энергия; затем отделим конденсатор от батареи, вставим его на место между b и c и провода aA и dB соединим друг с другом; конденсатор теперь окажется замкнутым через активное сопротивление R и индуктивность L и будет разряжаться. В том случае, о котором мы условились выше перед формулой (A), т. е. когда $R = 0$, разряд будет колебательным. Дальше, в параграфе, посвященном разряду конденсаторов, мы разберем теорию этого явления подробнее, пока же ограничимся лишь самым существенным.

Условием существования колебательного разряда является выполнение неравенства

$$R < \sqrt{\frac{4L}{C}},$$

что в нашем случае, очевидно, имеет место, так как мы приняли $R = 0$. Колебательный разряд состоит в том, что конденсатор, разрядившись до напряжения, равного нулю, тотчас же уже сам собой заряжается до прежнего напряжения, однако в направлении, противоположном прежнему, обкладка, которая была раньше „плюсом“, теперь станет „минусом“, и наоборот, после чего опять разряжается и затем заряжается в первоначальном направлении. При таком разряде все время происходит превращения энергии из электрической в магнитную и обратно. Когда конденсатор заряжен в том или ином направлении до полного напряжения U_{km} , вся энергия цепи есть энергия в нем

$$W = \frac{U_{km}^2 C}{2},$$

по формуле (27,1); когда напряжение на обкладках нуль, тогда сила тока в цепи максимум, вывод этого мы увидим при изложении теории разряда конденсатора, и вся энергия W_s теперь превратилась в энергию магнитного поля

$$W_m = \frac{I_m^2 L}{2},$$

по формуле (21,5). В промежуточные моменты энергия представляется в виде суммы

$$\frac{I^2 L}{2} + \frac{U^2 C}{2}, \quad (B)$$

равной каждому из предыдущих выражений энергии. Наложим фиг. 51 на фиг. 40; запасенная за время Oq в магнитном поле энергия, равная площади кривой $p_2 = -e_i$ над Oq (фиг. 40), затем начинает возвращаться в цепь в течение времени qr , но в цепи она идет вся в конденсатор, — площадь кривой $p_2 = u_k i$ над qr (фиг. 51). Так как $R=0$ и траты энергии на джаулев эффект в цепи нет, то количество ее постоянно, распределение же ее между электрическим и магнитным полями изменяется по формуле (B). Равенство W_s и W_m нетрудно доказать. Так как у нас имеется резонанс, то

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}; \quad (C)$$

умножая на I_m , получим

$$\omega L I_m = \frac{I_m}{\omega C}, \quad (D)$$

что, впрочем, следовало и из известного уже нам равенства векторов напряжений:

$$-E_{cm} = U_{km} \text{ или } U_{Lm} = U_{km}.$$

Преобразуем одно из выражений энергии, например, W_s , следующим образом:

$$W_s = \frac{U_{km}^2 C}{2} = \frac{U_{Lm}^2 C}{2} = \frac{(\omega L I_m)^2 C}{2};$$

подставляя сюда выражение для C из условия резонанса [формула (C)], получаем окончательно

$$W_s = \frac{I_m^2 L}{2} = W_m.$$

Здесь, однако, можно возразить следующее: так как источника — генератора — переменного тока больше нет в цепи, то как можно говорить о выполнении условия резонанса (C), где входит величина $\omega = \frac{2\pi}{T}$?

Как определяется теперь T ?

Упомянутая уже нами изложенная ниже теория разряда конденсатора дает выражение для периода колебательного разряда, периода возникающего при нем переменного тока в цепи конденсатора, именно следующее:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{LC}, \quad (29,3)$$

откуда тотчас же получается

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

т. е. соотношение (29,2), а отсюда сейчас же имеем соотношение (C) или (29,1). Когда R не равно нулю и когда при колебательном разряде происходит за каждые полпериода трата энергии, частота и, следовательно, продолжительность периода этого переменного тока уже другие; в теории разряда конденсатора мы выведем формулы для продолжительности периода этих „собственных“ колебаний контура или цепи:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$

и для „частоты собственных колебаний“:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Если положить здесь $R=0$, то и получим

$$T_0 = 2\pi \sqrt{LC}.$$

Частота

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}$$

называется частотой резонанса.

Какая же сила тока будет в рассматриваемом случае разряда, если мы предположим, что $R=0$?

Какая же сила тока будет в рассматриваемом случае разряда?

Так как

$$W_s = W_m,$$

то

$$\frac{I_m^2 L}{2} = \frac{U_{km}^2 C}{2}$$

и

$$I_m = U_{km} \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad (29,4)$$

и действующее значение силы тока

$$I = U_{km} \sqrt{\frac{C}{2L}}.$$

Не забудем, что здесь U_{km} есть амплитуды напряжения на конденсаторе, равные тому напряжению, которое первоначально было на его обкладках, равные, следовательно, напряжению постоянного тока (аккумуляторной батареи) при заряде конденсатора.

Теперь возвратимся к формуле (A), $I = \frac{U}{0} = \infty$, и замечанию, следующему за ней.

Пусть при $R=0$ и колебательном разряде в цепи действует какая-нибудь переменная э. д. с., например, индукции, в одном из соединительных в схеме проводников, хотя бы и очень незначительной величины. При отсутствии траты энергии на нагрев проводника колебательный разряд продолжается до бесконечности; если эта э. д. с. имеет период, в точности совпадающий с периодом переменного тока при разряде, то она все время своим действием будет уси-

ливать силу тока в цепи и увеличивать при этом запас энергии в полях цепи. Через бесконечно большой промежуток времени сила тока возрастает до бесконечности. Такой случай имеет себе механическую аналогию в явлениях раскачивания до очень большой амплитуды колебания тяжелого маятника легкими толчками, следующими в такт за качаниями маятника, — толчками, разделенными друг от друга одинаковыми промежутками времени, равными половине периода качания маятника, если толчки следуют попеременно то в одну, то в другую сторону, или же целому периоду при одинаковом направлении всех толчков. Подобные явления известны и из акустики и носят везде название резонанса. Поэтому и вышеописанному явлению переменного тока в цепи с $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ дано название резонанса, и именно — „резонанса напряжений“.

Достаточно немного изменить частоту приложенного к цепи внешнего напряжения U , как равенство (29,1) уже не будет иметь места, и сила тока очень сильно уменьшится.

В общем случае, когда цепь обладает и активным сопротивлением R , а сила тока определяется формулой (28,4), это уменьшение силы тока будет разное при разных R , что можно обнаружить аналитически следующим образом:

Возьмем производную от I по ω (28,4):

$$\frac{dI}{d\omega} = - \frac{U \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \left(L + \frac{1}{\omega^2 C} \right)}{\sqrt{\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]^{3/2}}}.$$

Если мы в прямоугольной системе координат абсциссами будем откладывать разные ω (равные $2\pi f$, как известно), а как ординаты будем откладывать I , вычисляемые по формуле (28,4) при постоянных U , L , C и R , то $\frac{dI}{d\omega}$ выразит тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной к кривой $I=f(\omega)$. Рассмотрим влияние величины R на величину этого угла. Из выражения для $\frac{dI}{d\omega}$ мы видим, что при данном ω и данных U , L и C эта производная имеет тем меньшую величину, следовательно, касательная и кривая тем ближе, чем R больше, и наоборот, при $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ или $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ выражение для производной обращается в нуль, кривая достигает максимума и перегиба; при отступлении от этой величины ω изменение в силе тока тем больше, чем меньше в цепи R , т. е. при малом R в цепи явление резонанса сказывается на силе тока резче — достаточно малого изменения ω или частоты, чтобы сила тока изменилась сильно.

Как сказано в начале этого параграфа, резонанс может получиться при изменении любой из величин L , C и f (или при комбинации их изменений); оказывается, что при наличии в цепи R сила тока и частичные напряжения на конденсаторе и на индуктивности достигают максимума не все одновременно.

Не нужно забывать, что каждой паре значений L и C соответствует своя частота резонанса, т. е. свое

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Далее заметим, что реактивные сопротивления ωL и $\frac{1}{\omega C}$ можно представить при резонансе, т. е. когда ω , L и C таковы, что между ними существует соотношение

$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, иначе именно:

$$\omega L = \frac{1}{\sqrt{LC}} L = \sqrt{\frac{L}{C}};$$

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{LC}} C} = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Эта величина $\sqrt{\frac{L}{C}}$ называется „волновым сопротивлением“ контура.

Отношение $k = R : \sqrt{\frac{L}{C}}$ активного сопротивления к этому волновому сопротивлению имеет в явлении колебаний большое значение. Например, при резонансе напряжение на конденсаторе

$$U_k = I_0 \cdot \frac{1}{\omega C} = \frac{U}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{U}{k}$$

и э. д. с. самоиндукции

$$E_c = \frac{U}{R} \omega L = \frac{U}{k}$$

зависят именно от этого отношения (и, конечно, еще от всего приложенного напряжения U).

Введем еще такое обозначение: отношение любой частоты f к частоте резонанса f_0 обозначим через α :

$$\frac{f}{f_0} = \frac{\omega}{\omega_0} = \alpha.$$

Тогда при этой не резонансной частоте f

$$\omega L = \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \omega_0 L = \alpha \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\alpha}{k} R,$$

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{\omega_0}{\omega} \cdot \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{\alpha k} R,$$

и полное сопротивление цепи равно

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = R \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{k} - \frac{1}{\alpha k} \right)^2},$$

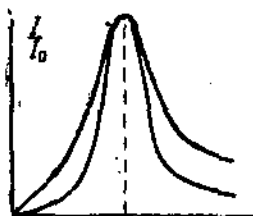
так что сила тока

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{R \sqrt{1 + \frac{(\alpha^2 - 1)^2}{\alpha^2 k^2}}}.$$

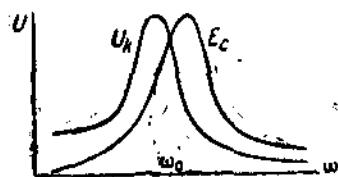
Отношение этой силы тока к силе тока $I_0 = \frac{U}{R}$ при резонансе показывает значение величин α и k

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(\alpha^2 - 1)^2}{\alpha^2 k^2}}}.$$

На фиг. 55а начерчены две кривые, дающие своими ординатами значение этого отношения $\frac{I}{I_0}$ в функции ω , т. е. в зависимости от частоты для разных k . Чем k больше, тем кривая выше, т. е. момент резонанса у нее выявлен все менее резко.



Фиг. 55а.



Фиг. 55b.

Теперь обратимся еще к вопросу, когда, т. е. при каких частотах, наступают наибольшие значения напряжений на емкости и на индуктивности. Оказывается, напряжения эти при резонансе не являются наибольшими.

Рассмотрим, например, выражение э. д. с. самоиндукции

$$E_c = \omega LI = \frac{U\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Пусть изменяется частота. Найдем максимум E_c ; для этого продифференцируем E_c по ω и приравняем производную нулю:

$$\frac{dE_c}{d\omega} = \frac{L \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} - \omega L \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \left(L + \frac{1}{\omega^2 C}\right)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = 0.$$

Приравняв нулю числитель, получаем уравнение

$$R^2 - 2 \frac{L}{C} + 2 \cdot \frac{1}{\omega^2 C^2} = 0.$$

Откуда, отметив эту ω индексом L , имеем

$$\omega_L = \frac{1}{\sqrt{CL - \frac{R^2 C^2}{2}}}.$$

Выражение получилось, как видим, отличное от ω_0 ; очевидно, что $\omega_L > \omega_0$ и $f_L > f_0$, т. е. максимальное значение E_c получается при частоте большей, чем резонансная (пусть читатель проверит, что при этом значении ω будет $\frac{d^2 E_c}{d\omega^2} < 0$).

Обратимся к напряжению на емкости:

$$U_k = I \cdot \frac{1}{\omega C} = \frac{U}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

или

$$U_k = \frac{U}{\sqrt{\omega^2 C^2 R^2 + (\omega^2 CL - 1)^2}}.$$

Так как здесь переменная ω находится только в знаменателе, то можно искать минимум знаменателя.

Дифференцируя подкоренное выражение, получаем

$$2\omega C^2 R^2 + 4(\omega^2 CL - 1)\omega CL = 0.$$

Первым корнем этого уравнения, очевидно, является $\omega = 0$; это означает постоянный ток, причем, естественно, $U_k = U$.

Сократив уравнение на $2C\omega$, получим

$$CR^2 + 2\omega^2 CL^2 - 2L = 0,$$

откуда, отметив эту ω индексом C , имеем

$$\omega_c = \sqrt{\frac{2L - CR^2}{2CL^2}} = \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{2L^2}}.$$

Сравнивая ω_c с ω_0 , видим, что

$$\omega_c < \omega_0.$$

т. е. максимальное напряжение на емкости наступает при частоте меньшей, чем резонансная.

Кривые E_c и U_k нанесены на фиг. 55b.

Заметим еще, что из формул для ω_L и ω_c ясно видно, что чем активное сопротивление R больше, тем ω_L и ω_c дальше отходят от ω_0 .

Когда $k=1$, т. е. $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$, тогда, как легко убедиться подстановкой этого значения R в формулы для ω_L и ω_c , получается

$$\omega_L = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{2} = \omega_0 \sqrt{2},$$

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{2CL}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}},$$

т. е. максимум для E_c наступает при частоте, вдвое большей, чем та частота, при которой наступает максимум U_k . Подсчитаем, чему равны эти максимумы.

Подставляя в формулу для E_c значения

$$\omega = \omega_L = \sqrt{\frac{2}{CL}} \text{ и } R = \sqrt{\frac{L}{C}},$$

находим

$$E_c = U \sqrt{\frac{4}{3}}.$$

Подставляя же в формулу для U_k значение

$$\omega = \omega_c = \frac{1}{\sqrt{2CL}} \text{ и } R = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

получаем

$$U_k = U \sqrt{\frac{4}{3}}.$$

т. е. тот же максимум, что и для E_c .

Это наводит нас на мысль: каковы же будут максимумы E_c и U_k при произвольном k , т. е. при $R \geq \sqrt{\frac{L}{C}}$? Подставляя в формулы для E_c и U_k теперь только

выражения

$$\omega_L = \frac{1}{\sqrt{CL - \frac{R^2 C^2}{2}}}$$

и

$$\omega_c = \sqrt{\frac{1}{CL - \frac{R^2}{2L^2}}}$$

получаем, что

$$E_{c \max} = \frac{UL}{R \sqrt{CL - \frac{R^2 C^2}{4}}} = \frac{U}{R \sqrt{\frac{C}{L} - \frac{R^2 C^2}{4L^2}}} = U_{k \max}.$$

Таким образом максимальные значения E_c и U_k равны одно другому при любом R ; не забудем, что достигаются они при разных частотах.

Теперь нам осталось еще рассмотреть вопрос о наибольших напряжениях при постоянной частоте.

Если мы будем изменять, например, L , оставляя C постоянным, то, чтобы найти максимум E_c и U_k , надо их дифференцировать по L .

Имеем, приравнявая числитель у $\frac{dE_c}{dL}$ нулю,

$$\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} - \frac{\omega^2 L \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = 0,$$

откуда

$$L_L = CR^2 + \frac{1}{\omega^2 C},$$

так что

$$E_{c \max} = U \sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 C^2 R^2}}.$$

Для нахождения максимума у U_k ищем минимум знаменателя, для которого легко и получаем

$$2(\omega^2 CL - 1)\omega^2 C = 0,$$

откуда

$$L_c = \frac{1}{\omega^2 C} < L_L,$$

т. е. должно выполняться условие резонанса

$$\omega L_c = \frac{1}{\omega C},$$

при этом

$$U_{k \max} = \frac{U}{\omega CR}.$$

Будем теперь L держать постоянной — не забудем: при постоянной частоте — и менять емкость C . Так как C входит в E_c только в знаменатель, то ищем минимум знаменателя; очевидно, этот минимум есть R , причем опять

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}, \quad C_L = \frac{1}{\omega^2 L},$$

$$E_{c \max} = \frac{U \omega L}{R} = \frac{U}{\omega CR}.$$

Наконец, найдем максимум U_k , найдя минимум его знаменателя:

$$2C\omega^2 R^2 + 2(\omega^2 CL - 1)\omega^2 L = 0.$$

Что это будет минимум, легко видеть, так как вторая производная есть

$$2\omega^2 R^2 + 2\omega^4 L^2 > 0.$$

Для C получаем величину

$$C_c = \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{1}{\omega^2 L} \cdot \frac{1}{\frac{R^2}{\omega^2 L^2} + 1} < C_L.$$

Далее

$$U_{k\max} = U \cdot \frac{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}{R}.$$

При экспериментальном снятии кривых напряжений следует помнить, что вольтметром мы э. д. с. самоиндукции измерить не можем, что вольтметр, подключенный к индуктивности, показывает величину напряжения, равную

$$I\sqrt{R_L^2 + (\omega L)^2},$$

где R_L есть активное сопротивление катушки самоиндукции или вообще той части цепи, которая представляет индуктивность.

§ 30. Разложение силы тока на активную и реактивную составляющие проводимости

В предыдущем мы разлагали напряжение (или э. д. с.) на две составляющие — активную и реактивную, сила тока определялась при этом законом Ома по формуле

$$I = \frac{U}{Z}, \quad (A)$$

где Z обозначало полное сопротивление, равное $\sqrt{R^2 + X^2}$, R — активное, а X — реактивное сопротивление, определяемое формулой (28,5).

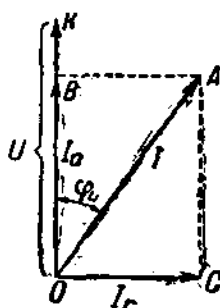
При расчетах передачи электрической энергии и всех явлений, связанных с ней, удобнее исходить из представления о постоянстве напряжения в сети или у генераторов и оперировать все время с одной величиной этого напряжения при всяких изменениях нагрузки, а потому введено разложение силы тока на активную и реактивную составляющие. Пусть на фиг. 56 вектор $\overline{OK}$ есть напряжение, вектор $\overline{OA}$ есть сила тока; разложим последний вектор на составляющие $\overline{OB}$ — по направлению $\overline{OK}$ и $\overline{OC}$ — по перпендикулярному к $\overline{OK}$ направлению. Составляющая $\overline{OB}$ называется активной составляющей силы тока, а $\overline{OC}$ — реактивной. Обозначим первую через I_a , а вторую через I_r .

Аналогично тому, что активная составляющая всего напряжения U равняется произведению всей силы тока на активное сопротивление R , мы выразим теперь активную составляющую силы тока I_a произведением всего напряжения на некоторый множитель g , который назовем активной проводимостью.

$$I_a = Ug. \quad (30,1)$$

Аналогично же реактивной составляющей напряжения IX выразим реактивную составляющую силы тока при помощи реактивной проводимости b так:

$$I_r = Ub. \quad (30,2)$$



Фиг. 56.

Так как из фиг. 56 следует, что

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_b^2},$$

то, подставив сюда формулы (30,1) и (30,2), имеем

$$I = U \sqrt{g^2 + b^2} = UY. \quad (30,3)$$

Здесь Y мы назовем полной проводимостью данного участка цепи.

Сравнив формулу (30,3) с формулой (A), мы видим, что

$$Y = \frac{1}{Z}, \quad (30,4)$$

т. е. что полная проводимость есть величина, обратная полному сопротивлению аналогично этим величинам в учении о постоянном токе.

За единицу проводимости принята полная проводимость проводника, полное сопротивление которого равно одному ому. Эту единицу проводимости иногда обозначают словом „мо“ или „Сименс“ (S).

Следует особенно заметить, что активная проводимость и активное сопротивление не являются величинами друг другу обратными, тоже и реактивные проводимость и сопротивление.

Из фиг. 56 имеем

$$I_a = I \cos \varphi_a$$

или

$$I_a = I \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

и, заменяя I по закону Ома,

$$I_a = U \frac{R}{R^2 + X^2}.$$

Сравнивая последнее выражение с формулой (30,1), видим, что

$$g = \frac{R}{R^2 + X^2} = \frac{R}{Z^2}. \quad (30,5)$$

Таково выражение активной проводимости через сопротивления активное и реактивное.

Аналогично на основании фиг. 56 и закона Ома

$$I_b = I \sin \varphi_a = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}} \cdot \frac{X}{\sqrt{R^2 + X^2}} = U \frac{X}{R^2 + X^2};$$

сравнивая это с формулой (30,2), получаем выражение реактивной проводимости через сопротивления

$$b = \frac{X}{R^2 + X^2} = \frac{X}{Z^2}. \quad (30,6)$$

Разделив на фиг. 57а все стороны треугольника OAB на U , мы получим треугольник проводимостей с гипотенузой Y и катетами g и b (фиг. 57), подобный треугольнику сопротивлений (фиг. 21).

Из формул (30,5) и (30,6) можно, наоборот, выразить сопротивления через проводимости:

$$R = gZ^2 = \frac{g}{Y^2}, \quad (30,7)$$

$$X = bZ^2 = \frac{b}{Y^2}. \quad (30,8)$$

Перейдем к мощности

$$P = UI \cos \psi = UI_a. \quad (30,9)$$

Мощность переменного тока зависит, таким образом, при данном U только от I_a , но не от всего I и, следовательно, не от I_r , почему I_a , составляющая силы тока, совпадающая в фазе с напряжением, и называется активной, а I_r , имеющая разность фаз в четверть периода (на фиг. 56 I_r отстает, но ясно, что если в цепи емкостный эффект больше индукционного, то I_r будет опережать напряжение на четверть периода), — реактивной.

Подставляя в формулу (30,9) формулу (30,1), получаем

$$P = U^2 g. \quad (30,10)$$

Подставив сюда вместо g его выражение (30,5), получим уже известную формулу (22,3) с тем обобщением, что X определяется уже формулой (28,5).

В дальнейшем читатель будет иметь случай упражняться в применении понятий о проводимостях и о разложении тока к различным приборам.

В заключение заметим, что понятие о реактивной составляющей силы тока, или просто „реактивном токе“, является понятием чисто формальным, под которое не нужно подводить определенного физического содержания или обоснования сверх того, что заключается в формуле (30,9),

$$P = UI_a.$$

т. е. что мощность можно выразить произведением всего напряжения на часть тока. Это выражение и это разложение тока есть лишь прием расчета. Физически всякий ток в проводнике есть ток активный, так как при всяком токе развивается тепло в проводнике, причем мощность, переходящая в тепло, выражается так:

$$P = I^2 R = (I_a^2 + I_r^2) R.$$

Физически активно или реактивно — напряжение, для расчетов же мы множитель $\cos \psi$ в формуле мощности относим не к U , а к I .

Подобно тому, как мы до сих пор разлагали напряжение, приложенное к цепи, на две составляющих, сдвинутых на четверть периода IR и IX , чему соответствовала схема нагрузки в виде последовательно включенных R и X , мы теперь представили ток разложенным на две составляющих U_g и U_b , сдвинутых на четверть периода, и можем сейчас же дать и схему, заменяющую нагрузку, или эквивалентную ей, в виде двух параллельных ветвей (фиг. 57b).

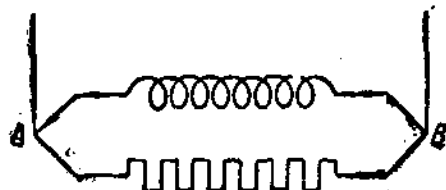
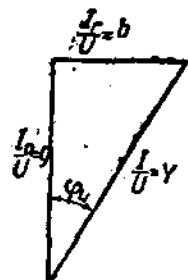
Здесь ветвь с проводимостью b есть ветвь чистой индуктивности (или емкости); ток в ней $I_r = U_b$ отстает от напряжения U_{AB} на $\frac{\pi}{2}$; напряжение U_{AB} равно и противоположно по знаку э. д. с. самоиндукции E_c .

Величина индуктивности L' в ветви B теперь не есть истинная индуктивность L цепи, ибо по абсолютной величине

$$E_c = I_r \omega L' = U_{AB},$$

следовательно,

$$\omega L' = X' = \frac{U_{AB}}{I_r} = \frac{1}{b} = \frac{Z^2}{X} = \frac{Z^2}{\omega L}.$$



Фиг. 57 а и б.

Аналогично для другой ветви (ветви чисто активного сопротивления)

$$I_a \cdot R' = U_{AB} \quad \text{или} \quad U_{AB} \cdot g \cdot R' = U_{AB}$$

и

$$R' = \frac{1}{g} = \frac{Z^2}{R}.$$

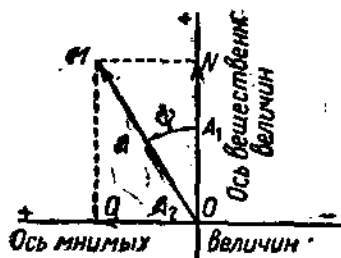
Такими двумя параллельными ветвями мы можем заменить действительные последовательно включенные R и X .

ГЛАВА ШЕСТАЯ

МЕТОД КОМПЛЕКСНЫХ ВЕЛИЧИН ИЛИ СИМВОЛИЧЕСКИЙ

§ 31. Основные понятия

Векторные диаграммы дают очень наглядное представление о соотношениях между различными величинами в цепи переменного тока, — соотношениях, существующих при данной нагрузке или вообще при каких-нибудь определенных условиях, для случая выполнения которых и построена диаграмма, но, чтобы найти численные значения тех или иных величин, нужно векторную диаграмму чертить в подходящем масштабе с достаточной точностью и для новых условий чертить ее вновь. Это требует много времени, и, что еще важнее, часто случается, что нельзя и построить чертеж, когда неизвестным является какой-нибудь особый элемент диаграммы. Все это заставляет искать особого алгебраического метода, позволяющего геометрические соотношения на диаграмме выразить алгебраически, т. е. в общей форме, охватывающей все частные случаи данной диаграммы, чтобы затем из алгебраических формул и уравнений вычислять искомые величины в разных частных случаях. Алгебраический метод может быть полезен и для нахождения геометрических мест концов тех или иных векторов, когда соотношения на чертеже сложны. Самым удобным методом приложения алгебры к векторным диаграммам является геометрическое представление комплексных величин.



Фиг. 58.

Пусть (фиг. 58) нам дан вектор OM , величину которого обозначим через A . Проведем через начало его O две взаимно перпендикулярные оси — горизонтальную и вертикальную. Первую назовем осью мнимых величин и положительной частью ее будем считать левую от O часть, вторую назовем осью вещественных величин и положительной будем считать ее верхнюю часть. Заметим, что выбор левой части горизонтальной оси за положительную находится, как убедимся далее, в согласии с фиг. 22, знаком угла φ на ней и т. д.

Разложим вектор OM на два составляющих вектора: $\overline{ON} = A_1$ и $\overline{OQ} = A_2$. Чтобы отличить составляющую по одной оси от составляющей по другой, будем к составляющим по горизонтальной оси приписывать множитель $\sqrt{-1}$, тогда вектор OM как геометрическая сумма отрезков ON и OQ представится так:

$$\overline{OM} = A_1 + \sqrt{-1} A_2.$$

Далее, введем еще следующие обозначения: вместо $\sqrt{-1}$ будем писать букву j (буква j , обыкновенно обозначающая корень из минус единицы, у нас обозначает силу тока); затем, когда мы говорим о векторе как об отрезке, имеющем не только определенную длину, но и определенное направление, мы будем обозначать

вектор большой буквой с точкой над ней. Соответствующая буква без точки будет обозначать его величину.

Таким образом вектор $\overline{OM}$ обозначится буквой $\dot{A}$ и выразится через составляющие так:

$$\dot{A} = A_1 + jA_2, \quad (31,1)$$

причем величина его равна

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \quad (31,2)$$

а направление его на плоскости определяется углом, составляемым им с одной из осей; условимся отсчитывать направление от вертикальной оси; тогда оно дается соотношением

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{A_2}{A_1}. \quad (31,3)$$

Соотношение (31,1) является вполне определяющим вектор; его можно заменить двумя соотношениями (31,2) и (31,3). Если мы пишем букву $\dot{A}$ с точкой, то этим мы обозначаем вектор и по величине и по направлению.

Раз мы условились посредством множителя $\sqrt{-1}$ отличать одно геометрическое направление от другого, то нужно принять и вытекающие из этого условия математические следствия.

Прежде всего вспомним, что если $j = \sqrt{-1}$, то

$$j^2 = -1, \quad j^3 = -\sqrt{-1} = -j \text{ и } j^4 = +1.$$

Рассмотрим различные математические операции с комплексами, выражающими векторы, и исследуем геометрический смысл результатов этих операций.

Пусть даны два вектора $\dot{A} = A_1 + jA_2$ и $\dot{B} = B_1 + jB_2$; сложим их геометрически, что алгебраически выразим так:

$$\dot{A} + \dot{B} = A_1 + jA_2 + B_1 + jB_2 = (A_1 + B_1) + j(A_2 + B_2).$$

Результатом сложения является новый вектор с составляющими по горизонтальной оси $A_1 + B_1$ и по вертикальной оси $A_2 + B_2$. Длина нового вектора равна

$$\sqrt{(A_1 + B_1)^2 + (A_2 + B_2)^2},$$

направление его определяется тангенсом угла его с вертикальной осью

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{A_2 + B_2}{A_1 + B_1}.$$

Этот результат можно обобщить на какое угодно число слагаемых векторов, а также и на случай вычитания одного вектора из другого. Ввиду элементарности этого вопроса мы на нем более не остановимся. Переходим к умножению.

Умножим вектор $\dot{A}$ на вещественную величину m :

$$m\dot{A} = mA_1 + jmA_2;$$

результат представляет новый вектор того же направления, что и прежний, так как тангенс угла его наклона к вертикальной оси равен

$$\frac{mA_2}{mA_1} = \frac{A_2}{A_1} = \operatorname{tg} \phi;$$

длина же нового вектора

$$\sqrt{(mA_1)^2 + (mA_2)^2} = m \cdot \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = mA$$

в m раз больше длины прежнего.

Умножим вектор A на $+j$:

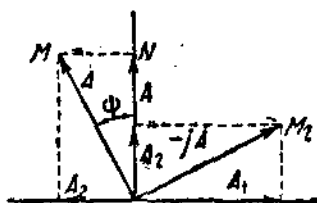
$$j\dot{A} = j(A_1 + jA_2) = jA_1 - A_2 = -A_2 + jA_1; \quad (31,4)$$

получается новый вектор, у которого горизонтальная составляющая имеет длину A_1 , так как в выражении этого вектора через составляющие множитель j стоит при A_1 ; начертим (фиг. 59) вектор с составляющими по горизонтальной оси A_1 , а по вертикальной $-A_2$; мы видим, что новый вектор OM_1 по длине равен прежнему, по направлению же к нему перпендикулярен: вертикальная ось положительна вверх от O , горизонтальная — положительна влево от O , новый вектор сдвинут на $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки от старого; новый вектор опережает прежний на $\frac{\pi}{2}$.
таков результат, или геометрический смысл, умножения вектора на $+j$.

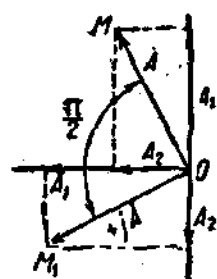
Умножим вектор $\dot{A}$ на $-j$:

$$-j\dot{A} = -j(A_1 + jA_2) = -jA_1 + A_2 = A_2 - jA_1; \quad (31,5)$$

начертим (фиг. 60) новый вектор OM_2 с составляющими: по горизонтальной оси $-A_2$ и по вертикальной оси A_1 , длина его равна длине прежнего вектора OM , направление же перпендикулярно к направлению прежнего; новый вектор отстает на $\frac{\pi}{2}$ от прежнего вектора; таков геометрический смысл умножения вектора на $-j$.



Фиг. 60.



Фиг. 59.

Так как $(j \cdot j) = (-j) \cdot (-j) = -1$, то последовательное умножение вектора два раза на $+j$ или на $-j$ дает вектор, повернутый на π относительно прежнего, или, иначе, прямо ему противоположный:

$$j \cdot j \cdot \dot{A} = -\dot{A}.$$

Умножение вектора на $+j \cdot t$ или $-j \cdot t$ можно рассматривать как операцию, состоящую из двух последовательных умножений вектора: сначала на t , причем изменяется только длина вектора в t раз, а затем на $+j$ или на $-j$, причем вектор, так сказать, поворачивается на $+\frac{\pi}{2}$ или $-\frac{\pi}{2}$ „навстречу“ вращению линии времени (ср. знак угла ϕ , фиг. 22).

Рассмотрим умножение вектора $\dot{A}$ на комплекс $m + jn$. Произведем умножение алгебраически:

$$\dot{A}(m + jn) = (A_1 + jA_2)(m + jn) = A_1m - A_2n + j(A_2m + A_1n).$$

Построим новый вектор с горизонтальной составляющей $A_2 \cdot m + A_1 \cdot n$ и вертикальной $A_1 \cdot m - A_2 \cdot n$; обозначим новый вектор через B .

Определим сначала его длину, упростив радикал:

$$B = \sqrt{(A_2 \cdot m + A_1 \cdot n)^2 + (A_1 \cdot m - A_2 \cdot n)^2} = \sqrt{(A_1^2 + A_2^2)(m^2 + n^2)} = A \cdot M, \quad (31,6)$$

где буквой M мы обозначим модуль того комплекса, на который множим вектор.

Теперь определим направление нового вектора, т. е. угол ϕ' , который он составляет с вертикальной осью. Мы имеем

$$\operatorname{tg} \phi' = \frac{A_2 \cdot m + A_1 \cdot n}{A_1 \cdot m - A_2 \cdot n}.$$

Для большей наглядности или ясности лучше ввести в рассмотрение угол поворота нового вектора от направления прежнего вектора, т. е. разность углов $\psi' - \psi$, где $\operatorname{tg} \psi = \frac{A_2}{A_1}$. По известной формуле для тангенса разности двух углов мы имеем:

$$\operatorname{tg}(\psi' - \psi) = \frac{\frac{A_2 \cdot m + A_1 \cdot n}{A_1 \cdot m - A_2 \cdot n} - \frac{A_2}{A_1}}{1 + \frac{A_2 \cdot m + A_1 \cdot n}{A_1 \cdot m - A_2 \cdot n} \cdot \frac{A_2}{A_1}}.$$

После всех упрощений мы получаем

$$\operatorname{tg}(\psi' - \psi) = \frac{n}{m}. \quad (31,7)$$

Таким образом умножение вектора на комплексную величину равносильно умножению длины вектора на модуль этой комплексной величины (31,6) и повороту вектора (этой новой длины) на угол, тангенс которого выражается формулой (31,7), навстречу вращению линии времени.

Величины m и n могут быть положительными или отрицательными. Если m и n одинакового знака, то $\operatorname{tg}(\psi' - \psi)$ положителен, и $\psi' > \psi$, т. е. новый вектор повернут относительно прежнего навстречу вращению линии времени; если же m и n разных знаков, то $\operatorname{tg}(\psi' - \psi)$ отрицателен, $\psi' < \psi$, и новый вектор повернут сравнительно с прежним в сторону вращения линии времени.

Предлагаем читателю разобрать все частные случаи комбинаций знаков ψ' , ψ и $(\psi' - \psi)$, исходя из выражений вектора и комплекса, например, $A_1 - jA_2$ и $m - jn$ и т. д.

В дальнейшем нам окажет большую пользу изображение комплексных величин, не являющихся векторами синусоидальных величин, например, полных сопротивлений и проводимостей, тоже прямолинейными отрезками. Например, величину $m + jn$ мы представим отрезком, проведенным из начала O , длиной

$$M = \sqrt{m^2 + n^2},$$

с составляющими: по горизонтальной оси m , по вертикальной оси n . Угол этого отрезка с вертикальной осью

$$\phi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{n}{m}.$$

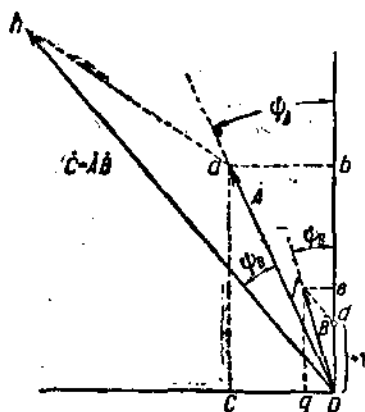
Символически мы такой комплекс будем обозначать той же буквой, что его модуль, только с точкой, например, M .

На фиг. 61 представлены вектор $\vec{A}$ отрезком Oa , некоторая комплексная величина $\vec{B}$ отрезком Of , причем $Ob = A_1$, $Oc = A_2$, $Oe = B_1$ и $Og = B_2$.

$$\text{Далее, } \operatorname{tg} \phi_e = \operatorname{tg} \phi_B = \frac{B_2}{B_1}, \operatorname{tg} \phi_a = \operatorname{tg} \phi_A = \frac{A_2}{A_1}.$$

На чертеже нанесен вектор $\vec{Oh} = \vec{C}$, равный произведению вектора $\vec{A}$ на комплекс B :

$$\vec{C} = \vec{A}\vec{B}$$



Фиг. 61a.

Длина его равна $A \cdot B$, а направление отклонено от направления Oa на угол $\phi_B = \arctg \frac{B_2}{B_1}$ согласно только что изложенному правилу умножения вектора на комплекс; но это есть как раз угол, составляемый с вертикальной осью линией $Of = B$. Следовательно, мы можем правило умножения вектора на комплекс формулировать и так: в результате умножения вектора на комплексную величину получается новый вектор с длиной, равной произведению длины прежнего вектора на модуль комплекса, повернутый относительно прежнего вектора навстречу вращению линии времени на такой же угол (положительный или отрицательный), на который относительно вертикальной оси повернут отрезок, представляющий комплекс.

Отложим отрезок Od , равный единице, в том масштабе, в котором нанесены на чертеже величины B_1 , B_2 и B . Сравнивая треугольники $Od f$ и $Oa h$, мы видим, что они подобны. Поэтому правило умножения вектора на комплекс можно формулировать еще новым образом: вектор, представляющий произведение другого вектора на комплекс, геометрически так получается из этого другого вектора, как комплекс (отрезок, его представляющий) получается из действительной единицы (Od).

Возможно упростить операции с векторами и комплексами посредством дальнейшего проведения символизации в обозначении. Преобразуем выражение вектора через составляющие следующим образом:

$$\dot{A} = A_1 \pm j A_2 = A \left(\frac{A_1}{A} \pm j \frac{A_2}{A} \right) = A (\cos \phi_A \pm j \sin \phi_A).$$

Так как по формуле Euler'a

$$\cos \phi \pm j \sin \phi = e^{\pm j \phi},$$

где e есть основание натуральных логарифмов, то выражение вектора через составляющие преобразуется в следующий символический вид:

$$\dot{A} = A e^{\pm j \phi_A}. \quad (31,8)$$

Аналогично для любого комплекса получаем

$$\dot{B} = B e^{\pm j \phi_B}.$$

С этими формулами следует мысленно соединять две операции, которые нужно сделать, чтобы получить на чертеже вектор $\dot{A}$ (или комплекс $\dot{B}$): отрезок на вертикальной оси, равный единице, сначала надо увеличить в A (или B) раз и затем повернуть влево на угол $\pm \phi_A$ (или $\pm \phi_B$). (Очевидно, что если угол будет $-\phi$, то фактический поворот будет вправо на угол ϕ .)

Таким образом, умножив вектор $\dot{A}$ на комплекс $\dot{B}$, мы получим новый вектор $\dot{C}$ такой:

$$\dot{C} = \dot{A} \dot{B} = A B e^{j(\pm \phi_A \pm \phi_B)}. \quad (31,9)$$

Если отвлечься от возможности изображения мгновенных значений синусоидальной величины, представляемой вектором, то в изображении векторов и комплексных величин не векториальных и операциях с ними разницы нет. Поэтому, переходя к последним вопросам из области действий над векторами и комплексами, мы будем говорить только о комплексах. Итак, рассмотрим деление комплекса на комплекс. Пусть требуется разделить комплекс $\dot{M} = m + j n$ на комплекс $\dot{P} = p + j q$.

Алгебраически имеем

$$\dot{N} = \frac{\dot{M}}{P} = \frac{m + jn}{p + jq} = \frac{(m + jn)(p - jq)}{p^2 + q^2} = \frac{mp + nq}{p^2 + q^2} + j \frac{np - mq}{p^2 + q^2}.$$

Величина нового комплекса N равна

$$\sqrt{\frac{(mp + nq)^2 + (np - mq)^2}{(p^2 + q^2)^2}} = \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{p^2 + q^2}} = \frac{M}{P}; \quad (31,10)$$

направление отрезка N дается соотношением

$$\tan \phi_N = \frac{np - mq}{mp + nq},$$

разделим числитель и знаменатель на mp :

$$\tan \phi_N = \frac{\frac{n}{m} - \frac{q}{p}}{1 + \frac{n}{m} \cdot \frac{q}{p}} = \frac{\tan \phi_M - \tan \phi_P}{1 + \tan \phi_M \cdot \tan \phi_P} = \tan (\phi_M - \phi_P). \quad (31,11)$$

Из (31,10) и (31,11) видно, что деление комплекса на комплекс сводится к делению модуля (или величины) делимого на модуль делителя и повороту отрезка, изображающего делимое, на угол, равный углу с вертикальной осью отрезка, представляющего делитель, в сторону вращения линии времени.

Символически деление выражается просто:

$$\dot{N} = \frac{\dot{M}}{P} = \frac{M e^{j\phi_M}}{P e^{j\phi_P}} = \frac{M}{P} e^{j(\phi_M - \phi_P)}, \quad (31,12)$$

что представляет соединение (31,10) и (31,11) в одной формуле.

Наконец, имеем соотношения:

$$\dot{N} = (\dot{M})^P = (m + jn)^P = M^P e^{jP\phi_M},$$

$$\dot{N} = \frac{P}{\sqrt{M}} = \frac{P}{\sqrt{M}} e^{j\frac{\phi_M}{P}}.$$

До сих пор мы вектором в теории переменных токов называли прямолинейный отрезок, представляющий ту или иную синусоидально меняющуюся с течением времени величину; мы проектировали иногда вектор на вращающуюся линию времени и получали мгновенное значение этой величины. Назовем эти векторы векторами первого рода; полные сопротивления и проводимости мы назовем векторами второго рода; они представляют постоянные величины, и проектировать их на линию времени не имеет смысла.

Если мы умножим вектор $\dot{A}$ на комплекс, у которого модуль равен единице, т. е. на комплекс

$$e^{\pm j\varphi} = \cos \varphi \pm j \sin \varphi = \xi \pm j\eta,$$

то величина вектора не изменится, а изменится лишь его направление — его угол с вертикальной осью — на величину угла $\pm \varphi$. Мы будем такой комплексный множитель $e^{\pm j\varphi}$ называть поворачивающим множителем.

Когда этот множитель дан в виде $\xi \pm j\eta$, мы будем говорить, что он дан в раскрытой форме; когда же он дан в виде $e^{\pm j\varphi}$, мы будем говорить о символической форме.

Особенно важен множитель, поворачивающий вектор на угол $\pm \frac{\pi}{2}$; для поворачивания на угол $+\frac{\pi}{2}$, т. е. навстречу вращению линии времени, он равен

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} = j,$$

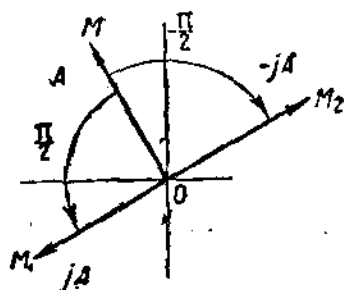
и для поворачивания на угол $-\frac{\pi}{2}$, т. е. по направлению вращения линии времени, он равен

$$e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j.$$

Таким образом, умножив (фиг. 61b) вектор $\overline{OM} = \hat{A}$ на $+j$, мы получим вектор

$$\overline{OM}_1 = A e^{j(\alpha + \frac{\pi}{2})};$$

умножив же его на $-j$, мы получим вектор $\overline{OM}_2 = A e^{j(\alpha - \frac{\pi}{2})}$.



Фиг. 61b.

Пример 14. Дан множитель

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}};$$

требуется узнать, изменит ли он величину вектора и на какой угол повернет его. Так как модуль его равен

$$\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1,$$

то это только поворачивающий множитель.

Угол поворота равен

$$\arctg \left(\frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \arctg 1 = +45^\circ;$$

поворот происходит в сторону против движения часовой стрелки; множитель можно представить в символической форме, как e^{j45° .

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}} = e^{j45^\circ}.$$

Пример 15. Дан множитель

$$-\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2};$$

узнать, есть ли это только поворачивающий множитель и на какой угол он поворачивает вектор.

Модуль его равен

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1,$$

поэтому множитель есть только поворачивающий.

Угол поворота поворачивающего множителя удобнее всего определять не по тангенсу, как мы сделали в предыдущем примере, а строя вектор, изображающий этот множитель, т. е. откладывая его компоненты по осям. Эту операцию следует приучаться производить мысленно, воображая оси и отрезки на них без помощи карандаша и бумаги.

Так как в данном примере оба компонента отрицательны, то вектор находится в правой и нижнем квадранте, угол φ поворота отрицателен и равен $-\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right)$.

Отложив компоненты, мы видим, что $\delta = 30^\circ$, $\varphi = -120^\circ = -\frac{2\pi}{3}$. Поворот происходит по вращению часовой стрелки на угол 120° .

Таким образом

$$-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-j\frac{2\pi}{3}}$$

Примеры. Определить, является ли множитель $\dot{v}$ только поворачивающим и на какой угол в следующих случаях:

$$16) \dot{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 17) \dot{v} = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 18) \dot{v} = \frac{\sqrt{3}}{4} - j\frac{1}{4}.$$

Примеры. Перевести из символической в раскрытую форму множители:

$$19) e^{+j\frac{2\pi}{3}}; \quad 20) e^{+j\frac{\pi}{2}}; \quad 21) e^{j\pi}; \quad 22) e^{-j\frac{3}{2}\pi}; \quad 23) e^{j150^\circ}; \quad 24) e^{-j50^\circ}; \quad 25) e^{-j\frac{\pi}{2}}; \quad 26) e^{-j\pi}.$$

Преобразовать так, чтобы не было минуса перед всем выражением:

$$27) -e^{-j\pi}; \quad 28) -e^{-j\frac{\pi}{2}}.$$

Выразить в символической форме:

$$29) (-1) \text{ и } (\pm j).$$

Вычислить и результат представить как в раскрытой, так и в символической форме:

$$30) 5e^{j30^\circ} \cdot 7e^{j45^\circ}; \quad 31) 4e^{j30^\circ} \cdot 10e^{j30^\circ}; \quad 32) 3,5e^{j30^\circ} \cdot 2e^{-j150^\circ}; \quad 33) (3+j4)(3-j4);$$

$$34) (a+jb)(a-jb).$$

Выразить числитель и знаменатель в символической форме и после этого произвести деление:

$$35) \frac{3+j4}{3-j4}; \quad 36) \frac{6-j8}{3+j4}.$$

Чему равно:

$$37) 15e^{-j180^\circ} \cdot 3e^{j\frac{\pi}{10}}.$$

Пример 38. В цепи переменного тока при индукционной нагрузке приборы дают следующие показания:

$$\begin{aligned} \text{Вольтметр} &= 120 \text{ В} \\ \text{Амперметр} &= 20 \text{ А} \\ \text{Киловаттметр} &= 1,68 \text{ кВт}. \end{aligned}$$

Для введения напряжения и силы тока в некоторые расчеты требуется придать силе тока символическую форму выражения.

Прежде всего определяем косинус угла сдвига фаз между напряжением U и силой тока I ; так как мощность $P = 1,68 \text{ кВт} = 1,680 \text{ Вт}$, то

$$\cos \varphi = \frac{1680}{120 \cdot 20} = 0,7.$$

Из таблиц находим угол φ :

$$\varphi = \arccos 0,7 = 45^\circ 35'.$$

Вектор напряжения, если нет других условий, вытекающих из данных задачи, подлежащей решению, расчету, можно направить по вертикальной оси и положить

$$\dot{U} = U = 120 \text{ В}.$$

Сила тока I отстает от $\dot{U}$ на φ и лежит в правом верхнем квадранте, поэтому

$$\dot{I} = 20e^{-j45^\circ 35'}.$$

§ 32. Простейшие примеры приложений метода

Приложим теперь изложенные правила обозначений векторов и комплексов и действий над ними к действиям над векторами величин в цепи переменного тока.

На фиг. 62а отрезок OA есть вектор силы тока, $OA = \dot{I}$. Выразим вектор в. д. с. самоиндукции $OC = E_c$ с помощью j через $\dot{I}$. Известно, что величина в. д. с. самоиндукции

$$E_c = \omega LI. \quad (32,1)$$

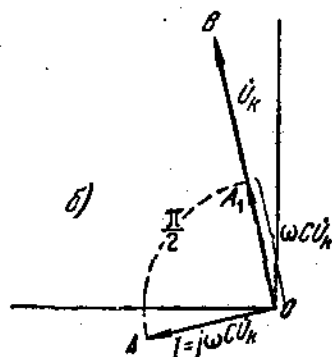
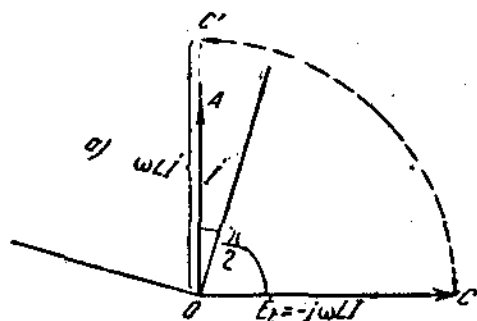
Вектор $OC' = \omega LI$ по величине равен вектору э. д. с. самоиндукции, но по направлению не совпадает с ним, так как вектор ωLI получается от умножения вектора I на действительную величину ωL , а потому совпадает по направлению с I . Вектор $\dot{E}_c$ сдвинут на $\frac{\pi}{2}$ в сторону вращения линии времени, поэтому если мы вектор ωLI умножим на $-j$, то как раз и получим вектор $\dot{E}_c$. Итак

$$\dot{E}_c = -j\omega LI, \quad (32,2)$$

или

$$\dot{E}_c = -jX_L I,$$

Перейдем к току через конденсатор.



Фиг. 62 а и б.

Как известно, сила тока через конденсатор и напряжение на нем связаны соотношением их величин:

$$I_k = \omega C U_k$$

и соотношением фаз: вектор силы тока опережает на $\frac{\pi}{2}$ вектор напряжения. Вектор $\omega C \dot{U}_k$ (фиг. 62b) совпадает по направлению с вектором $\dot{U}_k$; умножим его на $+j$ и мы получим вектор силы тока

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_k &= +j\omega C \dot{U}_k \\ \dot{I}_k &= +j \frac{1}{X_C} \dot{U}_k \end{aligned} \right\} \quad (32,3)$$

или еще удобнее

$$\dot{I}_k = +jb_C \dot{U}_k$$

где b_C есть величина реактивной проводимости самого конденсатора.

Вспомним, что мы реактивное сопротивление обозначаем буквой X с индексом L при индуктивности, с индексом C — при емкости и без индекса — в общем случае.

Известно, что вектор напряжения $\dot{U}$ на участке, содержащем активное сопротивление R и реактивное X_L , можно разложить на два составляющих: один, равный по величине $R\dot{I}$ и совпадающий в фазе с током, т. е. того же направления, обозначим его согласно предыдущему $R\dot{I}$, и другой — противоположный и равный по величине э. д. с. самоиндукции $\dot{E}_c$, мы его обозначим (формула 32,2):

$$-\dot{E}_c = +jX_L \dot{I}.$$

Таким образом

$$\dot{U} = R\dot{I} + jX_L \dot{I} = (R + jX_L) \dot{I}. \quad (32,4)$$

Мы видим, что вектор силы тока надо помножить на комплекс

$$\dot{Z}_L = R + jX_L, \quad (32,5)$$

чтобы получить вектор напряжения. Так как модуль этого комплекса

$$Z_L = \sqrt{R^2 + X_L^2}$$

есть просто полное сопротивление участка цепи, то и весь комплекс Z мы назовем полным сопротивлением и представим отрезком из O длины Z , направленным под углом

$$\varphi = \arctg \frac{X_L}{R}$$

влево к вертикальной оси. Таким образом мы ввели в наши методы представление сопротивления посредством прямолинейного отрезка определенной длины и направления.

На фиг. 56 нами была разложена сила тока I на две составляющие: $I_a = Ug$ и $I_r = Ub$. Выразим теперь соотношения в этом случае при помощи изложенного метода. I_a совпадает в фазе с U , поэтому (мы предположим для общности результатов, что вектор напряжения не совпадает с вертикальной осью)

$$\dot{I}_a = \dot{U}g.$$

I_r отстает в фазе от U на $\frac{\pi}{2}$; поэтому

$$\dot{I}_r = -jUb.$$

Далее, вектор силы тока $\dot{I}$ есть геометрическая сумма этих двух составляющих; поэтому

$$\dot{I} = \dot{I}_a + \dot{I}_r = \dot{U}g - jUb = (g - jb)\dot{U}.$$

Здесь сила тока получается от умножения напряжения на комплекс

$$\dot{Y} = g - jb, \quad (32,6)$$

который есть полная проводимость. Ее мы теперь тоже представим отрезком длиной

$$Y = \sqrt{g^2 + b^2},$$

проведенным из O под углом

$$\varphi = \arctg \left(-\frac{b}{g} \right)$$

к вертикальной оси.

Полная проводимость участка есть величина, обратная полному сопротивлению; следовательно, произведение их должно равняться единице; проверим это на выражениях проводимости и сопротивления через комплексы (32,5) и (32,6).

$$\dot{Z}\dot{Y} = (R + jX_L)(g - jb) = gR + bX_L + j(gX_L - bR).$$

Подставляя сюда значения g и b из формул (30,5) и (30,6), получаем

$$gR + bX_L = 1, \quad gX_L - bR = 0 \text{ и } \dot{Z} \cdot \dot{Y} = 1.$$

Не нужно забывать, что если реактивное сопротивление в цепи будет обусловлено емкостью, то выражение для полного сопротивления будет содержать знак минус перед мнимым членом

$$\left. \begin{aligned} \dot{Z}_c &= R - jX_c, \\ \dot{Y} &= g + jb; \end{aligned} \right\} \quad (32,7)$$

а проводимость выразится

в общем случае, когда в цепи есть и индуктивность и емкость, имеем

$$\dot{Z} = R + j(X_L - X_C) = R + jX. \quad (32,8)$$

Формулы (32,6) и (32,8) можно согласно предыдущему написать и так:

$$\left. \begin{array}{l} \text{или} \\ \dot{Y} = Y e^{j\varphi}, \\ \dot{Y} = \sqrt{g^2 + b^2} \cdot e^{-j \arctg \left(\frac{b}{g} \right)}, \\ \text{и} \\ \dot{Z} = Z \cdot e^{j\varphi}, \\ \text{или} \\ Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} e^{j \arctg \left(\frac{X_L - X_C}{R} \right)}. \end{array} \right\} \quad (32,9)$$

Представляя любой вектор $\overline{OM}$ (фиг. 60) выражением

$$\dot{A} = A e^{j\varphi},$$

мы вводим в показатель у e тот самый угол $\varphi = \angle MON$, который фигурирует как фазовый угол в аналитическом выражении данной синусоидальной функции времени:

$$a = A_m \sin(\omega t + \varphi) = A_m \sin(\omega t + \angle MON).$$

При последовательном соединении нескольких участков с сопротивлениями

$$\dot{Z}_1 = R_1 + jX_1,$$

$$\dot{Z}_2 = R_2 + jX_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

и т. д.

Полное сопротивление всей цепи выразится как

$$\dot{Z} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dots = R_1 + R_2 + \dots + j(X_1 + X_2 + \dots).$$

Читателю предлагается для упражнения вывести это соотношение из диаграммы фиг. 54b и найти Z и φ в формуле

$$\dot{Z} = Z e^{j\varphi}$$

для того численного примера, который был дан после этой фигуры.

Для вектора $\overline{OM}_2$ (фиг. 60), представляющего, скажем, силу тока, напомним

$$I = I e^{-j\varphi},$$

где φ есть угол, составляемый вектором $\overline{OM}_2$ с вертикальной осью; но можно здесь и не писать минуса в показателе, если считать φ величиной алгебраической и вспомнить, что углы вправо от вертикальной оси мы условились считать отрицательными.

Остановимся еще на случае цепи, содержащей R_1 , L_1 и M_{12} (т. е. взаимную индуктивность). В § 16 была выведена формула для напряжения в такой цепи:

$$U_1 = I_1 R_1 \sin(\omega t) + \omega L_1 I_1 \cos(\omega t) + \omega M_{12} I_2 \cos(\omega t + \alpha),$$

где α есть угол сдвига фаз тока I_2 относительно тока I_1 , и дана векторная диаграмма фиг. 83.

В векторном обозначении это равенство переписывается так:

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 (R_1 + jX_1) + \dot{I}_2 jX_{12},$$

где

$$X_{12} = \omega M_{12}.$$

Полагая

$$R_1 + jX_1 = \dot{Z}_1$$

и

$$jX_{12} = \dot{Z}_{12},$$

получаем

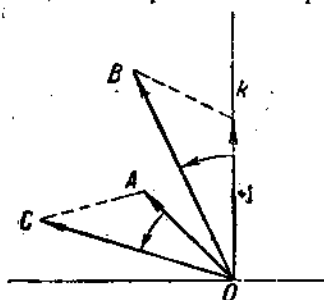
$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 \dot{Z}_1 + \dot{I}_2 \dot{Z}_{12},$$

причем надо при раскрытии этих выражений не забыть, что $\dot{Z}_{12}$ содержит только реактивное сопротивление $jX_{12} = j\omega M_{12}$.

§ 33. Графический метод умножения и деления комплексных чисел

При решении некоторых задач, например, при расчете цепей трехфазного тока, к которым мы скоро перейдем, встречается много вычислений, сводящихся к умножениям и делениям векторов, представленных комплексными числами. Чтобы уменьшить утомительность этих расчетов, можно прибегнуть к графическим методам умножения и деления таких векторов. Основой для него служат определение комплексного произведения векторов и следствие: если $\dot{C} = \dot{A}\dot{B}$ (фиг. 63), то

$$\frac{\dot{C}}{\dot{A}} = \frac{\dot{B}}{1},$$



Фиг. 63.

т. е. $\dot{C}$ получается из $\dot{A}$ посредством такого же построения, каким $\dot{B}$ получается из $+1$.

Если нам даны векторы $\overline{OA} = \dot{A}$ и $\overline{OB} = \dot{B}$ непосредственно на чертеже или в виде комплексов $\dot{A} = Ae^{j\alpha}$, $\dot{B} = Be^{j\beta}$, которые мы сейчас же построим, то, чтобы найти $\dot{C}$ графически, строим вектор $\overline{OK} = +1$; затем строим $\angle AOC = \angle KOB$, соблюдая правило, чтобы вектор $\overline{OC}$ был повернут относительно $\overline{OA}$ в ту же сторону, в какую $\overline{OB}$ повернут относительно $\overline{OK}$, как это следует из определения комплексного произведения, затем строим $\angle OAC = \angle OKB$ и находим в пересечении двух построенных линий точку $\dot{C}$.

Следует остановиться на вопросе о масштабах, в особенности на масштабе, в котором меряется длина вектора $\overline{OK} = +1$.

Пусть у нас та физическая величина, которая выражает вектор $\overline{OA} = \dot{A}$, измеряется в масштабе $1 \text{ мм} \equiv m$ соответствующих единиц, для вектора $\overline{OB} = \dot{B}$ масштаб пусть будет $1 \text{ мм} \equiv n$ единиц и для вектора $\overline{OK} = +1$ пусть $1 \text{ мм} \equiv p$ отвлеченных единиц.

Тогда отрезки на чертеже в миллиметрах будут

$$OA = \frac{A}{m}, \quad OB = \frac{B}{n}, \quad OK = \frac{1}{p}.$$

Из подобия треугольников имеем

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OK}$$

или

$$OC = \frac{OA \cdot OB}{OK} = \frac{A \cdot B \cdot p}{m \cdot n} = \frac{p}{m \cdot n} AB \text{ миллиметров,}$$

здесь $\frac{m \cdot n}{p} = q$ есть масштаб для вектора $\overline{OC}$. Таким образом очевидно, что, беря

тот или иной масштаб p для $OK = +1$, мы получаем ту или другую длину $\overline{OK}$ и ту или другую длину OS ; самый вид треугольников OKB и OAC зависит от масштаба p . Его следует выбирать таким, чтобы, во-первых, треугольник OAC был удобен для построения его по двум углам, а для этого лучше делать углы OKB и OAC поближе к прямым, во-вторых же, чтобы масштаб для нового вектора $q = \frac{m \cdot n}{p}$ получился удобным.

При делении вектора на вектор строим те же треугольники, считая вектор B за искомое частное и строя поэтому треугольник OKB подобным треугольнику OAC .

Пусть читатель произведет эти построения и получит графическим методом произведение двух векторов в предыдущих примерах 30, 31, 32, 33 и 36.

§ 34. О выражении мощности и $\cos \varphi$

Следует при пользовании методом комплексных величин помнить, что величина мощности не получается простым перемножением комплексных выражений $\dot{E} = E \cdot e^{j\varphi_1}$ и $\dot{I} = I \cdot e^{j\varphi_2}$; в таком произведении будет, во-первых, мнимая часть, а во-вторых, чтобы ввести в действительной части угол между векторами $\dot{E}$ и $\dot{I}$, а не сумму их фазовых углов, как это получается из

$$\dot{E} \cdot \dot{I} = E \cdot I \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

приходится вводить дополнительные соображения о двойной частоте изменений мгновенной мощности (ср. формулу 21,2) и положить $j^2 = -1$, оставляя в стороне только что написанное выражение произведения через e .

Хотя Штейнмецом подобные векторы мощности и были введены в теорию переменных токов, мы, ввиду того что пользование ими не несет за собой никаких особых удобств в вычислительных операциях, заниматься ими здесь не будем.

Когда даны напряжение вектором $\dot{U} = U_1 + jU_2$ и сила тока вектором $\dot{I} = I_1 + jI_2$, то косинус угла между ними определится так:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \cos(\varphi_u - \varphi_i) = \cos \varphi_u \cdot \cos \varphi_i + \sin \varphi_u \cdot \sin \varphi_i = \\ &= \frac{I_1}{I} \cdot \frac{U_1}{U} + \frac{I_2}{I} \cdot \frac{U_2}{U} = \frac{I_1 U_1 + I_2 U_2}{IU}. \end{aligned} \quad (34,1)$$

Эта формула имеет еще и тот смысл, что в числителе стоит мощность в нашей цепи, состоящая из двух мощностей (ибо I_1 с U_2 , так же как и I_2 с U_1 , не дают мощности, так как сдвинуты друг относительно друга на $\frac{\pi}{2}$), а в знаменателе — так называемая „кажущаяся“ мощность IU .

Разумеется, аналогично мы можем определить косинус угла между двумя любыми векторами, уже не придавая физического смысла действиям с их составляющими, и т. д.

Когда векторы выражены в символической форме

$$\dot{U} = Ue^{j\varphi_1} \text{ и } \dot{I} = Ie^{j\varphi_2},$$

то, очевидно, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ и $\cos \varphi = \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$.

На основании этого применяют еще следующий способ для выражения мощности посредством комплексных выражений:

Возьмем не самый ток $\dot{I}$, а комплексную величину, ему сопряженную, $Ie^{-j\varphi_2}$, которую обозначим через $\dot{I}_{\text{conj}}$, помножим ее на напряжение и раскроем это произведение

$$\dot{U} \dot{I}_{\text{conj}} = Ue^{j\varphi_1} Ie^{-j\varphi_2} = UI \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + jUI \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi.$$

Таким образом $\dot{U}i_{\text{собр}}$ есть комплексное выражение кажущейся мощности UI , действительная часть этого выражения есть действительная мощность, или активная, а мнимая часть есть мнимая мощность, или реактивная.

§ 35. Дифференцирование векторов. О символических обозначениях вращающихся векторов

В дальнейшем, в особенности в главах о длинных линиях передачи, нам встретится необходимость в дифференцировании векторов.

Когда нам дан вектор (фиг. 64)

$$\overline{OM} = \dot{A} = A_1 + jA_2, \quad (A)$$

причем оба его компонента являются функциями некоторой переменной x , в векторную диаграмму даже не входящей, то для некоторого значения этой переменной $x + dx$ значения компонентов будут:

$$A'_1 = A_1 + dA_1$$

и

$$A'_2 = A_2 + dA_2,$$

и сам вектор

$$\dot{A}' = A'_1 + jA'_2. \quad (B)$$

Вычитая (A) из (B), имеем вектор

$$\dot{A}' - \dot{A} = dA_1 + jdA_2$$

с бесконечно малыми компонентами; этот вектор мы и будем считать дифференциалом вектора $\dot{A}$. Итак

$$d\dot{A} = dA_1 + jdA_2. \quad (C)$$

Производной вектора $\dot{A}$ по x назовем отношение

$$\frac{d\dot{A}}{dx} = \frac{dA_1}{dx} + j \frac{dA_2}{dx}.$$

Можно выражению дифференциала вектора придать и другую форму, чем (C); продифференцировав символическое выражение вектора

$$\dot{A} = A \cdot e^{j\varphi},$$

получим

$$d\dot{A} = dA \cdot e^{j\varphi} + j \cdot A \cdot e^{j\varphi} d\varphi. \quad (D)$$

Здесь дифференциал вектора представлен тоже в виде геометрической суммы двух бесконечно малых векторов, только других, чем в уравнении (C), теперь уже не совпадающих по направлению с осями фиг. 65. Первый вектор $dA \cdot e^{j\varphi}$ имеет направление самого вектора $\dot{A}$ и равен приращению его величины, второй вектор $j \cdot A \cdot e^{j\varphi} d\varphi$ имеет величину $A \cdot d\varphi$, т. е. дуги, на которую повернется конец вектора $\dot{A}$ при увеличении угла φ на дифференциал $d\varphi$, и направлен перпендикулярно к вектору $\dot{A}$, что показывает множитель $j \cdot e^{j\varphi}$, в сторону увеличения угла φ .

Формула (D) и фиг. 65 справедливы с точностью до бесконечно малых второго порядка.

Из формулы (D) легко получить формулу (C) выражения дифференциала вектора; в самом деле, подставляя в формулу (D) вместо $e^{j\varphi}$ его обычное разложение, получаем

$$d\dot{A} = dA \cdot \cos \varphi - A \sin \varphi \cdot d\varphi + j(dA \cdot \sin \varphi + A \cos \varphi \cdot d\varphi),$$

что представляет дифференциал выражения

$$A \cdot \cos \varphi + j \cdot A \cdot \sin \varphi,$$

т. е. выражения

$$A_1 + jA_2.$$

Далее следует упомянуть, что изредка пользуются еще иначе комплексными выражениями, именно операции с мгновенным значением синусоидальной величины

$$a = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

заменяют операциями с выражением

$$\dot{A} = A \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}. \quad (35,1)$$

Это выражение разлагается в такое:

$$\dot{A} = A \cdot [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)]. \quad (M)$$

Формуле (M) можно дать следующее простое геометрическое толкование:

Отложив по оси ординат вверх $A \cos(\omega t + \varphi)$, а по оси абсцисс влево $A \sin(\omega t + \varphi)$, мы получим из этих двух составляющих вектор, величина которого, очевидно, есть A , а угол с вертикалью $\varphi = \omega t + \varphi$ изменяется пропорционально времени. Таким образом формула (M) представляет вращающийся против часовой стрелки вектор $\dot{A}$.

Линию времени мы должны теперь считать неподвижной, иначе период изменений величины a был бы иной, чем нужно.

Полагая линию времени совпадающей, например, с вертикальной осью, мы вводим в наши расчеты функцию $A \cos(\omega t + \varphi)$.

Возьмем производную от функции a по t .

$$\frac{d\dot{A}}{dt} = j\omega A e^{j(\omega t + \varphi)} = \omega A [j \cos(\omega t + \varphi) - \sin(\omega t + \varphi)].$$

То же самое, конечно, получим дифференцированием формулы (M).

Для изображения этой функции вектором надо вниз отложить $\omega A \sin(\omega t + \varphi)$ и влево $\omega A \cos(\omega t + \varphi)$; величина вектора есть ωA , он составляет с вертикалью угол $\varphi' = \omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}$, т. е. опережает вектор величины a на $\frac{\pi}{2}$. Величина

$\left(-\frac{d\dot{A}}{dt}\right)$ будет, очевидно, отставать от $\dot{A}$ на $\frac{\pi}{2}$; все соотношения получаются, таким образом, совершенно такими же, как мы имели их раньше.

При выкладках не нужно и переходить к тригонометрической форме, так как оперирование с показательной функцией много ускоряет дело.

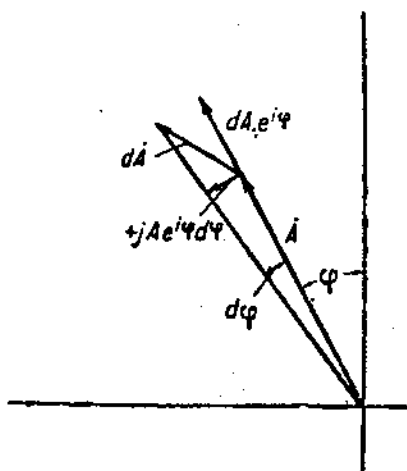
Иногда употребляют такой прием: когда после различных преобразований мы получаем какую-либо окончательную формулу, ее можно опять написать с помощью тригонометрических функций, просто отбросив в разложении показательной функции мнимую часть.

Пусть, например,

$$\dot{i} = I \cdot e^{j\omega t},$$

т. е.

$$i = I \cdot \cos(\omega t),$$



Фиг. 65.

если мы отбросим мнимую часть, э. д. с. самоиндукции выразится так:

$$e_c = -L \frac{di}{dt} = -L \frac{d}{dt} (I \cdot e^{j\omega t}),$$

или

$$e_c = -j\omega LI e^{j\omega t};$$

с таким выражением мы можем оперировать и дальше. Если же это была бы окончательная наша формула, то мы раскрыли бы ее так:

$$e_c = -j\omega LI \cdot e^{j\omega t} = -j\omega LI (\cos \omega t + j \sin \omega t) = \omega LI (\sin \omega t - j \cos \omega t),$$

или

$$e_c = \omega LI \cdot \sin \omega t = \omega LI \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Последнее выражение мы написали лишь для уяснения того, что получается правильное соотношение между фазами силы тока и э. д. с. самоиндукции e_c ; вообще же оно ненужно. В последней главе о поверхностном эффекте мы тоже сделаем употребление из этого способа условного, символического обозначения синусоидальных величин.

Выражение мощности и при этом способе не получается без добавочных условий.

§ 36. Соотношения в синхронном генераторе.

Применим изложенный метод к выражению соотношений на диаграмме фиг. 28. Вектор э. д. с. $\dot{E}$ машины переменного тока распадается на сумму трех векторов: напряжения на зажимах $\dot{U}$, падения напряжения в активном сопротивлении обмотки машины $R_{\text{вну}} \dot{I}$ и вектора, противоположного э. д. с. самоиндукции в обмотке машины, $-\dot{E}_c = j\omega L_{\text{вну}} \dot{I} = jX_{\text{вну}} \dot{I}$. Таким образом

$$\dot{E} = \dot{U} + (R_{\text{вну}} + jX_{\text{вну}}) \dot{I}, \quad (\text{A})$$

или

$$\dot{E} = \dot{U} + \dot{Z}_{\text{вну}} \dot{I}. \quad (\text{B})$$

Пример 39. Проделаем пример на вычисления с комплексными величинами

Даны (фиг. 28) $R_{\text{вну}} = 0,1 \, \Omega$, $X_{\text{вну}} = \omega L_{\text{вну}} = 0,3 \, \Omega$, $\dot{U} = 115 + j \cdot 20 \, \text{V}$, $\dot{I} = 100 + j \cdot 30 \, \text{A}$. Требуется вычислить все остальные величины. Подставляем данные в формулу (A):

$$\dot{E} = 115 + j \cdot 20 + (0,1 + j \cdot 0,3) (100 + j \cdot 30) = 116 + j \cdot 53 \, \text{вольт}.$$

$$E = \sqrt{116^2 + 53^2} \approx 128 \, \text{V}.$$

$$U = \sqrt{115^2 + 20^2} = 116,7 \, \text{V}.$$

$$I = \sqrt{100^2 + 30^2} = 104 \, \text{A}.$$

По формуле (32,4) $\dot{U} = \dot{Z}_{\text{вне}} \dot{I}$, следовательно,

$$\dot{Z}_{\text{вне}} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{115 + j \cdot 20}{100 + j \cdot 30} = 1,11 - j \cdot 0,22 \, \Omega.$$

Следовательно,

$$R_{\text{вне}} = 1,11 \, \Omega,$$

$$X_{\text{вне}} = -0,22 \, \Omega,$$

значит, во внешней цепи имеется емкость, и ее влияние сильнее влияния индуктивности.

Определить величину емкости нельзя, пока неизвестна величина индуктивности внешней части цепи.

Далее, имеем

$$\cos \varphi_n = \frac{R_{\text{вне}}}{\sqrt{R_{\text{вне}}^2 + X_{\text{вне}}^2}} = 0,98.$$

Сила тока опережает напряжение, что ясно из самых заданий обеих величин.
Полезная мощность

$$P_1 = UI \cos \varphi_u = 116,7 \cdot 104 \cdot 0,98 = 11\,894 \text{ W} \approx 11,9 \text{ kW}.$$

Продолжая вычисления, можно найти $\cos \varphi_e$, всю мощность машины, потери в ней и т. п. д.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

СЛОЖНЫЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

§ 37. Разветвляющиеся цепи

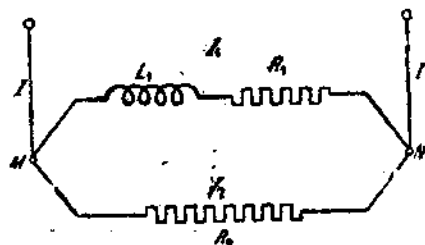
При рассмотрении вопросов о разветвлении токов следует прежде всего помнить, что напряжение на всех ветвях, выходящих из одной общей точки и в другую общую точку сходящихся, одно и то же и представляется поэтому одним и тем же вектором, какую бы из ветвей мы ни рассматривали; силы же токов отдельных ветвей будут суммироваться геометрически, давая силу тока главного до и после разветвления.

При последовательных соединениях различных сопротивлений активных и реактивных, которые мы до сих пор исключительно рассматривали, было обратное: мы силу тока и ее вектор принимали для всех участков и сопротивлений одними и теми же и складывали геометрически напряжения.

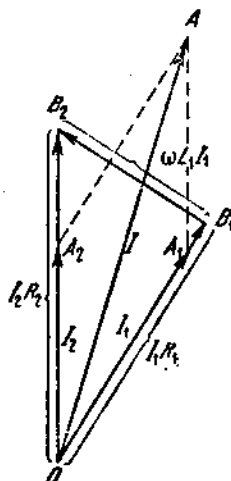
Пусть мы имеем между точками M и N (фиг. 66) цепи переменного тока две ветви: одна с активным сопротивлением R_1 и реактивным ωL_1 , другая только с активным сопротивлением R_2 ; силу тока в первой ветви обозначим через I_1 , а во второй — через I_2 .

Напряжение между точками M и N представим вектором $\overline{OB}_2 = U$ (фиг. 67). Так как в ветви второй сила тока определяется просто, как

$$I_2 = \frac{U}{R_2},$$



Фиг. 66.



Фиг. 67.

то $U = I_2 R_2$, и тот же вектор $\overline{OB}_2$ представит нам и $I_2 R_2$. Разделив его величину на R_2 , мы получим в масштабе силы тока вектор $\overline{OA}_2 = I_2$, представляющий силу тока во второй ветви.

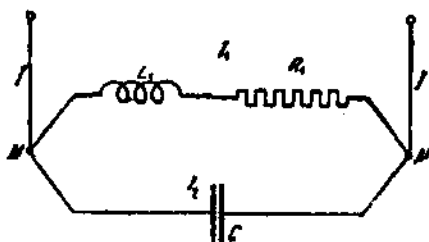
Перейдя к первой ветви, мы тот же самый вектор U разлагаем на две составляющих, причем фаза силы тока в первой ветви I_1 определяется из обычной формулы $\varphi = \arctg \frac{\omega L_1}{R_1}$; строим прямоугольный треугольник на гипотенузе $\overline{OB}_2$ с ост-

рым углом $B_2 O B_1 = \varphi$. Деля катет $\overline{OB}_1$ на R_1 , получаем силу тока I_1 в виде вектора $\overline{OA}_1$. В цепи до и после разветвлений M и N текут оба тока $\overline{OA}_1$ и $\overline{OA}_2$, которые, складываясь геометрически, дают результирующую силу тока $\overline{OA} = I$.

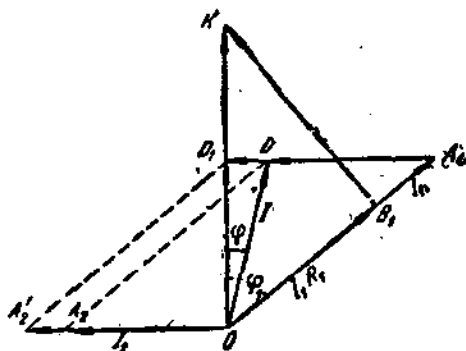
Заметим, что сдвиг фазы этой всей силы тока против напряжения U меньше, чем сдвиг фазы силы тока I_1 (но больше, чем I_2 , для которого сдвиг в фазе равен нулю).

Разберем теперь другой случай, имеющий большое значение для практики. На фиг. 68 изображена схема цепи, состоящей из двух длинных проводов, между концами M и N которых включены две ветви: первая, содержащая R_1 и L_1 с силой тока I_1 , и вторая, содержащая только емкость C ; пусть мы можем пренебречь активным сопротивлением проводов в этой второй ветви по его малости.

На фиг. 69 построена векторная диаграмма для разветвления MN . Напряжение $U = \overline{OK}$ разложено в ветви первой на две составляющих: $\overline{OB}_1 = I_1 R_1$ и $\overline{KB}_1 = \omega L_1 I_1$, при помощи построения прямоугольного треугольника на $\overline{OK}$ с острым углом $\varphi_1 = \arctg \frac{\omega L_1}{R_1}$; разделив $\overline{OB}_1$ на R_1 , получим в масштабе силы тока вектор $\overline{OA}_1$ силы тока I_1 . Для ветви второй нужно построить лишь вектор силы тока I_2 ; он будет перпендикулярен к напряжению (как вектор $\overline{OA} = I$ перпендикулярен к $\overline{OD} = U$ на фиг. 52) и будет опережать на прямой угол его; вектор $\overline{OA}_2$ есть I_2 . Теперь, сложив векторы $\overline{OA}_1$ и $\overline{OA}_2$, мы узнаем силу тока до и после разветвлений I ; вектор $\overline{OD}$ представляет ее. Из того обстоятельства, что к отстающему току $\overline{OA}_1$ мы прикладываем опережающий напряжение ток $\overline{OA}_2$, следует, что результирующая сила тока будет сдвинута в фазе или на меньший угол, чем



Фиг. 68.



Фиг. 69.

φ_1 , если I будет отставать от U , или на угол, могущий принимать разные значения, если I будет опережать напряжение. Сила тока I_2 определяется ведь по известной формуле

$$I_2 = U\omega C,$$

и стоит только выбрать емкость C достаточно большой, чтобы $\overline{A_1 D} = I_2$ было, например, больше $\overline{A_1 D_1}$ и точка D оказалась влево от линии $\overline{OK}$, т. е. чтобы вектор $\overline{OD}$ опережал напряжение. При соотношениях, как на фиг. 69, главный ток $\overline{OD}$ имеет меньший сдвиг фаз, чем ток I_1 , и меньшую величину, чем оба тока в ветвях.

Подобрав подходящую величину емкости, мы получим для I_2 вектор $\overline{OA}_2$ и для главного тока вектор $\overline{OD}_1 = I$, совпадающий в фазе с напряжением U : В этом случае главный ток I имеет наименьшую величину при данных R_1 и L_1 . Это явление мы назовем компенсацией сдвига фаз. Влиянием емкости в одной ветви мы компенсируем влияние индуктивности в другой.

Чтобы получить напряжение в начале проводов, надо к вектору $\overline{OK}$ приложить вектор $\overline{IR}_{\text{пров}}$, — где $R_{\text{пров}}$ означает сопротивление проводов, — который совпадает в фазе с вектором $\overline{OK}$ в том случае, когда ток I представляется вектором $\overline{OD}_1$. Если индуктивность проводов значительна, легко и ее принять в расчет, прибавив вектор $\omega L_{\text{пров}} I$, перпендикулярный к $\overline{OK}$ ($L_{\text{пров}}$ есть индуктивность проводов).

§ 38. Значение компенсации сдвига фаз

При достижении минимального значения главного тока, причем мощность в ветви первой и сила тока в ней остаются без изменения (мы меняем ведь только I_2 , меняя емкость), достигают наименьшей величины и потеря напряжения и потеря энергии в проводах, и в отношении опасности их сильного нагрева условия изменяются; раз сила тока I наименьшая, то, очевидно, и поперечное сечение проводов, подсчитанное на основании допустимых из экономических соображений падения напряжения в них и потери энергии, становится наименьшим, и, следовательно, стоимость этих проводов — наименьшей. Таким образом, когда мы имеем на конце двух проводов сильную индукционную нагрузку, что вызывает большой сдвиг фаз между током и напряжением, малый $\cos \varphi$ и силу тока, большую, чем нужно для получения той же мощности при $\cos \varphi = 1$, то подключением параллельно к нагрузке там же на концах проводов подходящей величины емкости можно улучшить $\cos \varphi$ и уменьшить ток в проводах, сделав установку более экономичной со стороны потери энергии на нагрев проводов или со стороны стоимости меди этих проводов.

Кроме изложенного здесь имеется и еще одна сторона дела, именно экономичность работы самой станции в начале проводов.

Представим себе, что на электрической станции имеется несколько агрегатов, состоящих каждый из двигателя внутреннего сгорания (или паровой машины) и генератора переменного тока. Пусть на конце двух проводов, идущих от станций, подключен ряд приборов, представляющих сильно индукционную нагрузку, со средним $\cos \varphi = 0,8$, но при некоторых условиях $\cos \varphi$ может доходить до 0,6.

Пусть каждый агрегат на станции имеет напряжение на зажимах в 2000 V, и рассчитан на электрическую мощность $P_g = UI \cos \varphi_g = 800 \text{ kW}$, или 800 000 W, и при $\cos \varphi_g = 0,8$, как это теперь всегда делается при расчете генераторов переменного тока, т. е. обмотка его может выдержать в $\frac{1}{\cos \varphi} = 1,25$ раз большую силу тока, чем нужно для полной безиндукционной нагрузки генератора. В данном случае каждый генератор может выдержать, следовательно, длительно без опасного нагрева силу тока

$$I = \frac{P_g}{U \cos \varphi_g} = \frac{800\,000}{2\,000 \cdot 0,8} = 500 \text{ A},$$

тогда как при $\cos \varphi_g = 1$ сила тока достигла бы для той же мощности величины

$$\frac{800\,000}{2\,000 \cdot 1} = 400 \text{ A}.$$

Предположим, что нагрузка такова, что $\cos \varphi_g = 0,6$ при силе тока $I = 600 \text{ A}$. т. е. мощность, требуемая от генераторов станции, равна

$$2\,000 \cdot 600 \cdot 0,6 \text{ W} = 720 \text{ kW}.$$

Такая мощность меньше мощности одного агрегата, но сила тока в 600 A больше, чем предельная длительно допустимая сила тока в 500 A для каждого генератора, в 1,2 раза. Если сила тока больше в 1,2 раза, то тепла выделится в обмотке больше в $1,2^2 = 1,44$ раза (по формуле $I^2 R$). Такая длительная перегрузка опасна, поэтому придется пускать в ход второй агрегат машин на станции в помощь первому и распределять между ними мощность, которой мало и для одного, с тем чтобы и сила тока распределилась между ними приблизительно поровну — по 360 kW и 300 A. При таких малых нагрузках, меньших половины нормальной, двигатели внутреннего сгорания и паровые машины работают с плохим к. п. д., и вся установка, включая сюда и линию передачи с большими потерями энергии в ней, работает неэкономично.

В практике подобные случаи бывают, например, с трехфазным током и асинхронными двигателями в виде нагрузки (на заводе или на руднике). Тогда все наши электрические расчеты должны относиться к одной фазе, и при переходе к машинам на станции все мощности должны умножаться на три. Читателю рекомендуется после прочтения главы о трехфазном токе возвратиться к этому примеру и пересчитать все величины, исходя из данной мощности агрегата и линейного напряжения.

Если мы включением конденсатора доведем $\cos \varphi$ до единицы и тем уменьшим силу тока в проводах и в генераторе, то к. п. д. всей установки сильно увеличится; в нашем примере с нагрузкой в 720 kW и 360 А, т. е. в условиях, близких к полной нагрузке, будет работать один агрегат, и при этом потери в линии будут меньше.

Применение конденсаторов для этой цели упрочивается по мере улучшения их конструкции в отношении их прочности и пр. Но чаще в подобных случаях применяют "перевозбужденные" синхронные двигатели. О них будет сказано в следующей главе.

В последнее время начали применяться также так называемые асинхронные генераторы реактивной мощности.

В последние годы, однако, применение конденсаторов в Америке и в Германии для улучшения $\cos \varphi$ сделало большие успехи.

Имеются заводские установки, где конденсаторы берут до 7 500 kVA реактивной мощности.

В практике предпочитают конденсаторы включать параллельно не к самой линии передачи энергии, а параллельно каждому отдельному большому приемнику мощности, например, большому асинхронному двигателю (об устройстве асинхронного двигателя читатель узнает позднее, в главе о вращающемся магнитном поле), который и вызывает в линии понижение $\cos \varphi$, или параллельно металлургической индукционной печи и др.

При этом способе включения конденсаторов, т. е. при распределении их по всем местам, где имеются приемники, понижающие $\cos \varphi$, получаются следующие удобства: во-первых, одновременно с выключением приемника выключается соответствующая батарея конденсаторов, во-вторых, конденсаторы при этом требуются на напряжение не очень высокое, от 200 до 3 000 V.

При сосредоточении же всех конденсаторов у места ввода линии передачи энергии в завод необходимо особо следить за колебаниями нагрузки и при выключении моторов или печей где-нибудь на заводе, в том или другом цехе, выключать подходящее число конденсаторов в их батарее, что, очевидно, более хлопотливо, чем вышеописанный первый способ.

Далее, напряжение в линии передачи выше, и конденсаторы на такое напряжение стоят еще очень дорого.

Если же их делать на пониженное напряжение, то тогда их лучше распределять по заводу. Кроме того, все операции с меньшими реактивными мощностями легче, чем с крупными.

Конденсаторы употребляются бумажные, погруженные в масло, которое служит одновременно для двух целей: во-первых, пропитывая бумагу все время, улучшает ее диэлектрическую прочность, во-вторых, отводит тепло, развивающееся в большой батарее вследствие потерь мощности, неизбежных во всяком техническом конденсаторе. Вопросу о причинах и об учете потерь в конденсаторе посвящен следующий параграф. Там читатель увидит, что в действительности всякий конденсатор берет ток, опережающий напряжение не ровно на $\frac{\pi}{2}$, а на угол, немного меньший.

Каждый конденсатор имеет емкость в несколько микрофард и изготовлен из бумаги с обкладками из алюминиевой фольги, свернутыми в рулон или же сложенными в пакеты; встречаются обе конструкции.

Такие элементы соединяются группами параллельно и погружаются в бак с маслом; группы соединяются наружными переключателями последовательно или параллельно.

§ 39. Потери в диэлектрике емкости

Вернемся к тому, что в диэлектрике конденсатора от изменений в нем электрического поля происходят потери энергии, которыми во многих случаях по их малости пренебрегают; в некоторых случаях их необходимо, однако, принимать во внимание. Таков, например, случай кабеля, в котором провод и наружная оболочка, или если в нем два или три провода, то и эти провода друг относительно друга представляют емкость, диэлектриком же является гуттаперча или другое изолирующее вещество. Когда имеются в емкости потери в диэлектрике, тогда ток через емкость сдвинут относительно напряжения на ее зажимах на угол φ_2 , меньший $\frac{\pi}{2}$.

Кроме того, обыкновенно в емкости есть еще потери от так называемой „утечки“, т. е. от того, что кроме токов смещения в диэлектрике имеется еще, хотя нормально и слабый, ток от одной обкладки емкости к другой, вследствие того что диэлектрик не является идеальным, непроводящим. Когда имеются эти потери энергии, тогда мы можем представить себе их как происходящие в некотором активном сопротивлении, заменяя, таким образом, явлением выделения в этом активном сопротивлении мощности в виде тепла явление потерь мощности в диэлектрике (или так называемого диэлектрического гистерезиса), тоже, разумеется, переходящей в тепло.

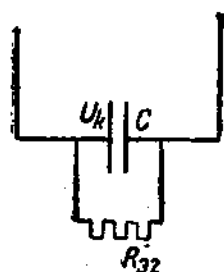
Есть два способа представить себе включение этого активного сопротивления. По первому способу (фиг. 70) предполагают, что перед емкостью включено сопротивление R_{s1} . Тогда все напряжение на емкости U_k можно разложить на две составляющие, как показано на фиг. 71, сдвинутые

в фазе на $\frac{\pi}{2}$, одну, равную IR_{s1} , и другую, равную $\frac{I}{\omega C}$; при этом, очевидно,

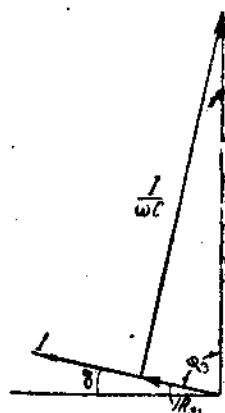
$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{1}{\omega C R_{s1}}.$$

Полное сопротивление конденсатора имеет, очевидно, выражение

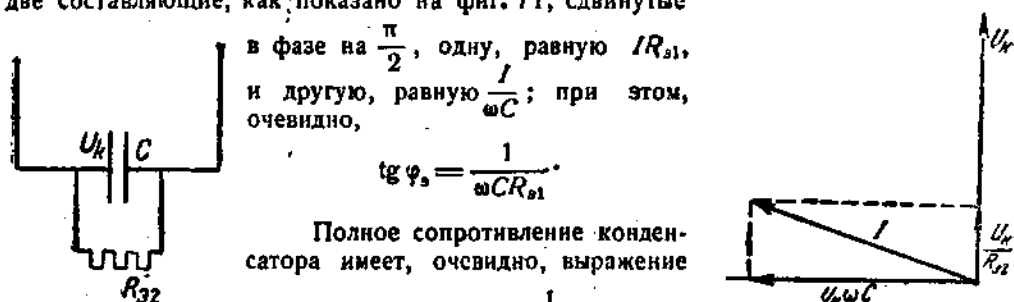
$$Z_1 = R_{s1} - j \frac{1}{\omega C}.$$



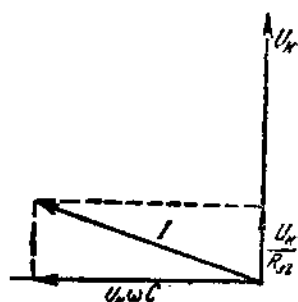
Фиг. 70.



Фиг. 71.



Фиг. 72.



Фиг. 73.

Однако вследствие того что, во-первых, напряженность электрического поля и диэлектрическое смещение в нем пропорциональны всему напряжению на емкости U_k , что от него же зависит и потеря энергии и что, во-вторых, ему же при прочих равных условиях пропорционален и ток утечки, лучше представлять себе, что активное сопротивление подключено параллельно к емкости (фиг. 72). В этом случае мы имеем разветвление тока, как показано на векторной диаграмме фиг. 73. Сила тока через емкость есть $U_k \omega C$, она опережает напряжение U_k на четверть-

периода; сила тока через активное сопротивление есть $\frac{\dot{U}_k}{R_{s2}}$, этот ток находится в фазе с $\dot{U}_k$. При этом действительно существующий ток равен их геометрической сумме.

Здесь полное сопротивление $\dot{Z}_2$ мы сможем определить, вычислив сначала полную проводимость, так как имеются две параллельные ветви; итак

$$\dot{Y}_2 = \frac{1}{R_{s2}} + j\omega C,$$

$$\dot{Z}_2 = \frac{1}{\dot{Y}_2} = \frac{1}{\frac{1}{R_{s2}} + j\omega C} = \frac{R_{s2}}{1 + j\omega CR_{s2}} = \frac{R_{s2} - j\omega CR_{s2}^2}{1 + \omega^2 C^2 R_{s2}^2}.$$

Далее имеем

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \omega CR_{s2}.$$

В таблицах справочных книг дают обыкновенно величины тангенсов дополнительного угла, т. е. угла $\delta = \frac{\pi}{2} - \varphi$, называемого углом потерь.

Для парафина $\operatorname{tg} \delta$ равен $0,8 \cdot 10^{-4}$, для бумаги $30 \cdot 10^{-4} + 150 \cdot 10^{-4}$, для стекла $30 \cdot 10^{-4} + 180 \cdot 10^{-4}$, для фарфора $500 \cdot 10^{-4}$, для резины (каучука) $200 \cdot 10^{-4} + 400 \cdot 10^{-4}$ и для гуттаперчи $300 \cdot 10^{-4} + 700 \cdot 10^{-4}$.

§ 40. Резонанс токов

Определим величину емкости, необходимой для того, чтобы довести $\cos \varphi$ до единицы.

Из фиг. 69 имеем

$$\overline{OA'_2} = \overline{A_1 D_1} = \overline{OA_1} \cdot \sin \varphi_1, \text{ или } I_2 = I_1 \cdot \sin \varphi_1.$$

Из треугольника $OB_1 K$ имеем

$$\sin \varphi_1 = \frac{\omega L_1}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}}.$$

Затем имеем два выражения для напряжения U , одно — для одной ветви, другое — для другой, которые и приравниваем:

$$\frac{I_2}{\omega C} = I_1 \sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}.$$

Подставляя сюда выражения для I_2 и $\sin \varphi_1$, получаем после сокращения

$$\frac{L_1}{C} = R_1^2 + (\omega L_1)^2,$$

откуда искомое

$$C = \frac{L_1}{R_1^2 + (\omega L_1)^2}. \quad (40,1)$$

Когда величина емкости, подключенной параллельно другой ветви с R_1 и L_1 , удовлетворяет этому соотношению, говорят, или что мы имеем компенсацию сдвига фаз или что мы имеем резонанс токов.

Разберем тот случай, когда $R_1 = 0$; тогда из формулы (40,1)

$$C = \frac{1}{\omega^2 L_1},$$

или

$$\omega L_1 = \frac{1}{\omega C}$$

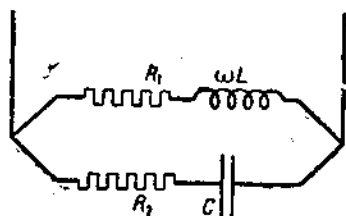
уравнение, уже знакомое нам из явления резонанса напряжений. При $R_2 = 0$ имеем $\sin \varphi_1 = 1$ и $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, а $I_2 = I_1$. Главный ток при этом получается

$$I = I_1 \cos \varphi_1 = 0!$$

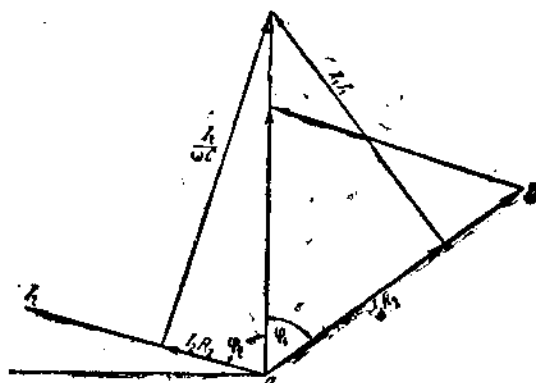
Таким образом в этом случае в обеих ветвях идут во всякий момент токи равные, но противоположные по фазе: если один из них (фиг. 68) в данный момент идет, например, по ветви первой слева направо, то в это время другой идет по ветви второй справа налево и т. д. Они представляют собой просто один переменный ток, циркулирующий только по обеим ветвям; наружу ток не выходит: $I = 0$. Такое явление опять представляет тот же колебательный разряд конденсатора при $R = 0$, который мы уже начали разбирать в предыдущей главе.

§ 41. Точное решение вопроса о компенсации сдвига фаз

Исследуем более общий случай, когда сопротивлением в ветви, содержащей емкость C , нельзя пренебречь; обозначим его величину через R_2 (фиг. 74). Очевидно, что векторная диаграмма фиг. 69 изменится для этого случая лишь в том, что напряжение OK будет иметь составляющую, направленную по вектору тока I_2 и выражающую потерю напряжения в активном сопротивлении R_2 .



Фиг. 74.



Фиг. 75.

Приняв обозначения, указанные на фиг. 75, мы можем выразить условие компенсации, т. е. что результирующий ток совпадает в фазе с напряжением U (вектор OK), таким уравнением:

$$I_1 \sin \varphi_1 = I_2 \sin \varphi_2.$$

Так как

$$I_1 = \frac{U}{Z_1}$$

и

$$I_2 = \frac{U}{Z_2},$$

где Z_1 и Z_2 суть полные сопротивления ветвей, а из чертежа

$$\sin \varphi_1 = \frac{\omega L}{Z_1}$$

и

$$\sin \varphi_2 = \frac{1}{\omega C Z_2},$$

то, подставляя эти выражения в первое уравнение, получаем

$$\frac{\omega L}{Z_1^2} = \frac{1}{\omega C Z_2^2},$$

или

$$\frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} = \frac{1}{\omega C R_2^2 + \frac{1}{\omega C}};$$

упрощая,

$$\frac{L}{R_1^2 + (\omega L)^2} = \frac{C}{(\omega C)^2 R_2^2 + 1}. \quad (41,1)$$

Это уравнение может служить для определения емкости C при остальных известных величинах и, наоборот, для определения L , когда известно C и все остальное.

Пусть L дано, так же как и R_1 и R_2 .

Введем обозначение

$$\frac{L}{R_1^2 + (\omega L)^2} = F.$$

Тогда

$$\frac{C}{\omega^2 C^2 R_2^2 + 1} = F, \quad (41,2)$$

или

$$\omega^2 R_2^2 F C^2 + F - C = 0,$$

или еще

$$C^2 - \frac{1}{\omega^2 R_2^2 F} C + \frac{1}{\omega^2 R_2^2} = 0, \quad (41,3)$$

откуда

$$C_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\omega^2 R_2^2 F^2}}{2\omega^2 R_2^2 F}.$$

Таким образом получаются для C два решения, следовательно, и векторов I_2 будет два и соответственно два угла φ_2 , так как на основании (41,2) мы можем написать, что

$$Z_2^2 = R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2} = \frac{1}{\omega^2 C F}$$

и

$$\sin \varphi_2 = \frac{1}{\omega C Z_2} = \sqrt{\frac{F}{C}},$$

и следовательно, каждому из двух C соответствует свой φ_2 . Эти углы φ_2' и φ_2'' дополняют друг друга до прямого. В самом деле составим и преобразуем выражение суммы квадратов синусов этих углов:

$$\sin^2 \varphi_2' + \sin^2 \varphi_2'' = \frac{F}{C_1} + \frac{F}{C_2} = F \cdot \left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \right)$$

Вместо суммы и произведения C_1 и C_2 (корней квадратного уравнения) подставим их выражения из уравнения (41,3):

$$\sin^2 \varphi_2' + \sin^2 \varphi_2'' = F \cdot \frac{1}{\omega^2 R_2^2 F} \cdot \omega^2 R_2^2 = 1.$$

Таким образом мы видим, что

$$\varphi_2' + \varphi_2'' = \frac{\pi}{2}.$$

Оба вектора I'_2 и I''_2 , соответствующие двум возможным значениям C , представлены на фиг. 76. Из нее мы ясно видим, что решение с C_1 , обуславливающим ток I'_2 , невыгодно, ибо этот ток очень велик, а также велик, хотя и находится в фазе с напряжением, и ток в линии; эти токи тем больше при прочих равных условиях, чем меньше R_2 , как нетрудно видеть и из формул для C_1 и C_2 . Но мало того, что это решение невыгодно, оно в промышленных установках и технически почти невыполнимо вследствие большой величины емкости C_1 . Рассмотрим пример.

Пример 40. Моторы рудника поглощают 2 000 kW при 6 000 V напряжения и $\cos \varphi_1 = 0,6$, что соответствует силе тока

$$I_1 = \frac{2\,000\,000}{6\,000 \cdot 0,6} = 555 \text{ A};$$

$\sin \varphi_1$ при этом равен 0,8;

$$\omega L = \frac{6\,000 \cdot 0,8}{555} = 8,6;$$

$$L = 0,027 \text{ H}; \quad R_1 = \frac{6\,000 \cdot 0,6}{555} = 6,5 \text{ } \Omega.$$

Введенное выше F равно 0,00023.

Допустим, что $R_2 = 0,01 \text{ } \Omega$; тогда

$$4\omega^2 R_2^2 F^2 = 21 \cdot 10^{-7}.$$

Ввиду малости этой величины положим радикал равным приближенно единице. Тогда

$$C_1 = \frac{2}{2\omega^2 R_2^2 F} \approx 438 \text{ F}.$$



Фиг. 76.

Получается, как видим, совершенно неудобная для осуществления на практике величина. При больших R_2 могут получиться и выполнимые величины для C_1 .

Что касается C_2 , то ввиду близости величины радикала к единице и малости числителя нам лучше для суждения о величине C_2 преобразовать выражение для него, именно помножив числитель и знаменатель на сумму единицы и радикала; тогда мы получаем

$$C_2 = \frac{2F}{1 + \sqrt{1 - 4\omega^2 R_2^2 F^2}};$$

положив здесь, при малом R_2 , радикал равным приближенно единице, получим

$$C_2 = F,$$

т. е., принимая во внимание значение F , мы получаем то же самое выражение для емкости, что уже было получено выше в виде формулы (40,1).

Теперь предположим, что в уравнении (41,1) нам дано C и требуется найти L , т. е. мы имеем задачу, обратную прежней.

Обозначим правую часть уравнения через K , т. е. положим

$$\frac{C}{(\omega C)^2 R_2^2 + 1} = K.$$

Тогда

$$\frac{L}{R_1^2 + (\omega L)^2} = K, \quad (41,4)$$

или

$$Z_1^2 = \frac{L}{K}. \quad (41,5)$$

Решая уравнение (41,4) получим

$$L_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\omega^2 R_1^2 K^2}}{2\omega^2 K},$$

т. е. тоже два решения и для индуктивности, которым соответствуют и два угла φ'_1 и φ''_1 .

Так как

$$\sin \varphi_1 = \frac{\omega L}{Z_1} = \frac{\omega L}{\sqrt{\frac{L}{K}}} = \omega \sqrt{LK},$$

то

$$\sin^2 \varphi'_1 + \sin^2 \varphi''_1 = \omega^2 K (L_1 + L_2).$$

В скобках стоит сумма корней, которая, очевидно, равна $\frac{1}{\omega^2 K}$, а поэтому

$$\sin^2 \varphi'_1 + \sin^2 \varphi''_1 = 1,$$

т. е. углы φ'_1 и φ''_1 дополняют друг друга до прямого.

Предлагаем читателю самому рассмотреть вопрос о сравнительной величине обоих корней, L_1 и L_2 , аналогично предыдущему.

Можно предыдущую задачу видоизменить следующим образом:

При данных сопротивлениях R_1 и R_2 в двух параллельных ветвях и данных L и C найти частоту, при которой наступит резонанс токов.

Из уравнения (41,1) получаем

$$\omega^2 C^2 R_2^2 L + L = C R_1^2 + C \omega^2 L^2,$$

откуда

$$\omega^2 CL (R_2^2 C - L) = R_1^2 C - L$$

и

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{R_1^2 - \frac{L}{C}}{R_2^2 - \frac{L}{C}}}. \quad (41,6)$$

Частота f в 2π раз меньше.

Очевидно, что если под корнем числитель и знаменатель имеют разные знаки, т. е. если

$$R_1 \geq \sqrt{\frac{L}{C}} \geq R_2,$$

то корень из дроби получается мнимый, и нет такой частоты, при которой возможен был бы резонанс или компенсация фаз.

Если $R_1 = R_2$, то корень из дроби обращается в единицу и

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

— величина, нам встречавшаяся уже дважды.

Если, наконец

$$R_1 = R_2 = \sqrt{\frac{L}{C}},$$

то дробь под корнем превращается в неопределенность $\frac{0}{0}$, и для ω нет определенного значения, т. е. резонанс есть при всяких частотах, обе параллельные ветви вместе взятые представляют только активное сопротивление. Выясним это еще другим путем, применяя метод комплексных величин.

§ 42. Общий вид задачи о параллельных ветвях

Предварительно решим в общем виде задачу о нахождении полного сопротивления, эквивалентного нескольким параллельным ветвям. Пусть между точками A и B цепи мы имеем n параллельных ветвей с сопротивлениями

$$\dot{Z}_1 = R_1 + jX_1, \dot{Z}_2 = R_2 + jX_2, \dots, \dot{Z}_n = R_n + jX_n.$$

Сопротивление, эквивалентное совокупности всех этих параллельных ветвей, обозначим через $\dot{Z} = R + jX$, обратная ему величина есть проводимость $\dot{Y} = g - jb$. Так как при включении вместо n ветвей одного сопротивления $\dot{Z}$ напряжение между A и B должно остаться прежним, U_{AB} , а сила тока должна равняться геометрической сумме сил токов в ветвях, т. е. равняться силе тока до и после разветвления, то должно быть

$$\frac{\dot{U}_{AB}}{\dot{Z}} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\dot{Z}_1} + \frac{\dot{U}_{AB}}{\dot{Z}_2} + \frac{\dot{U}_{AB}}{\dot{Z}_3} + \dots + \frac{\dot{U}_{AB}}{\dot{Z}_n},$$

или

$$\frac{1}{\dot{Z}} = \frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_3} + \dots + \frac{1}{\dot{Z}_n}, \quad (42,1)$$

или еще

$$g - jb = \frac{1}{R_1 + jX_1} + \frac{1}{R_2 + jX_2} + \frac{1}{R_3 + jX_3} + \dots + \frac{1}{R_n + jX_n}.$$

Освобождаясь от мнимостей в знаменателях, имеем

$$g - jb = \frac{R_1 - jX_1}{Z_1^2} + \frac{R_2 - jX_2}{Z_2^2} + \dots + \frac{R_n - jX_n}{Z_n^2},$$

откуда

$$g = \frac{R_1}{Z_1^2} + \frac{R_2}{Z_2^2} + \dots + \frac{R_n}{Z_n^2} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{R_k}{Z_k^2} = \sum_{k=1}^{k=n} g_k,$$

$$b = \frac{X_1}{Z_1^2} + \frac{X_2}{Z_2^2} + \dots + \frac{X_n}{Z_n^2} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{X_k}{Z_k^2} = \sum_{k=1}^{k=n} b_k.$$

R и X определяются по формулам (30,7) и (30,8)

$$R = \frac{g}{g^2 + b^2},$$

$$X = \frac{b}{g^2 + b^2}$$

Таким образом основной формулой для расчетов эквивалентных нескольким ветвям сопротивлений является формула (42,1), аналогичная формуле для подобных расчетов при постоянном токе.

Пример 41. Даны четыре параллельные ветви:

$$\dot{Z}_1 = 20 + j30, \quad \dot{Z}_2 = 10 + j, \quad \dot{Z}_3 = 5 - j3 \text{ и } \dot{Z}_4 = 30;$$

дано, что сила тока через третью ветвь $I_3 = 3 \text{ А}$.

Вычислить, какова сила тока до и после разветвления и каков весь $\cos \varphi$ в цепи.

Всю силу тока мы получим, если напряжение на ветвях разделим на эквивалентное сопротивление, или, что то же самое, умножим на эквивалентную проводимость; напряжение же, которое нам неизвестно, узнаем умножением силы тока в третьей ветви на сопротивление этой ветви.

Вычисляем

$$\dot{Y} = g - jb = \sum \frac{R_k}{Z_k^2} - j \sum \frac{X_k}{Z_k^2}.$$

$$Z_1^2 = 1300; \quad Z_2^2 = 101; \quad Z_3^2 = 34; \quad Z_4^2 = 900.$$

$$\frac{R_1}{Z_1^2} = \frac{20}{1300} = 0,015; \quad \frac{R_2}{Z_2^2} = \frac{10}{101} = 0,1; \quad \frac{R_3}{Z_3^2} = \frac{5}{34} = 0,147; \quad \frac{R_4}{Z_4^2} = \frac{30}{900} = 0,033.$$

$$\sum \frac{R_k}{Z_k^2} = 0,295,$$

$$\frac{X_1}{Z_1^2} = \frac{30}{1300} = +0,023; \quad \frac{X_2}{Z_2^2} = \frac{1}{101} = +0,01; \quad \frac{X_3}{Z_3^2} = -\frac{3}{34} = -0,088; \quad \frac{X_4}{Z_4^2} = 0.$$

$$\sum \frac{X_k}{Z_k^2} = -0,055.$$

$$\dot{Y} = 0,295 + j0,055 = 0,300 e^{j10^\circ 35'}.$$

Очевидно, что так как $\dot{I}$ получается из $\dot{U}$ умножением $\dot{U}$ на $\dot{Y}$, то угол сдвига фаз между $\dot{U}$ и $\dot{I}$ есть аргумент $\dot{Y}$, т. е. $\varphi = \arg \dot{Y} = 10^\circ 35'$; откуда $\cos \varphi = 0,982$.

Теперь вычисляем напряжение, полагая $\dot{I}_3 = I_3$.

$$\dot{U} = \dot{I}_3 \dot{Z}_3 = 15 - j9 = 17,5 e^{-j31^\circ}.$$

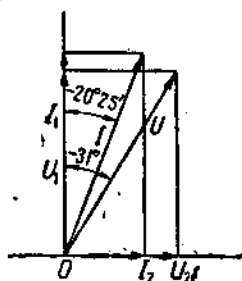
Вся сила тока до и после разветвления

$$\dot{I} = \dot{U} \dot{Y} = (15 - j9)(0,295 + j0,055) = 4,920 - j1,830 = 5,25 e^{-j20^\circ 25'}.$$

На фиг. 77 начерчены оба вектора $\dot{I}$ и $\dot{U}$.

Найдем $\cos \varphi$ еще иначе, именно по формуле (34,1):

$$\cos \varphi = \frac{I_1 U_1 + I_2 U_2}{IU} = \frac{4,92 \cdot 15 + 1,83 \cdot 9}{5,25 \cdot 17,5} = 0,982.$$



Фиг. 77.

Пример 42. Найти $\dot{Y}$, $\dot{I}$, $\dot{U}$ и $\cos \varphi$ для случая, когда

$$\dot{Z}_1 = 4 + j2, \quad \dot{Z}_2 = 5 + j3 \text{ и } \dot{Z}_3 = 1 - j.$$

если сила тока через вторую ветвь равна 10 А. Начертить векторную диаграмму.

Вычислить, какой величины емкость надо включить в третью ветвь, чтобы $\cos \varphi$ равнялся единице.

§ 43. Продолжение исследования резонанса токов

Перейдем опять к задаче о резонансе токов. Полные сопротивления ветвей на фиг. 74 выражаются так:

$$\dot{Z}_1 = R_1 + j\omega L \quad \text{и} \quad \dot{Z}_2 = R_2 - j\frac{1}{\omega C}.$$

Общая проводимость обеих ветвей равна

$$\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R_1 + j\omega L} + \frac{1}{R_2 - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{R_1 - j\omega L}{Z_1^2} + \frac{R_2 + j\frac{1}{\omega C}}{Z_2^2} = \dot{Y}. \quad (A)$$

Для того чтобы получить резонанс токов, или, иначе, компенсацию одним током сдвига фазы другого, необходимо, чтобы эквивалентное полное сопротивление $\dot{Z}$ или эквивалентная полная проводимость $\dot{Y}$ обеих ветвей не содержала в себе мнимого члена; ибо тогда, умножив напряжение U на действительное число Y , мы получим ток I , не сдвинутый в фазе от напряжения. Это равносильно требованию, чтобы в символическом выражении

$$\dot{Y} = Y e^{j\varphi}$$

угол φ равнялся нулю, тогда

$$\dot{I} = \dot{U}\dot{Y} = \dot{U}Y,$$

сила тока будет совпадать в фазе с напряжением.

Итак, мнимая часть в выражении для $\dot{Y}$ должна быть равна нулю, т. е.

$$-\frac{\omega L}{Z_1^2} + \frac{1}{Z_2^2} = 0,$$

или

$$\frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} = \frac{1}{\omega C R_2^2 + \frac{1}{\omega C}}, \quad (B)$$

что представляет собой уже полученное нами другим путем условие резонанса (41, 1).

Теперь выясним, при каких условиях наступление резонанса не будет зависеть от частоты.

Преобразуем последнее уравнение и получим опять

$$\omega^2 C^2 R_2^2 L + L = C R_1^2 + C \omega^2 L^2.$$

Это есть условие резонанса в несколько другой только форме; оно должно выполняться при всяких значениях ω . Очевидно, что это возможно только тогда, когда порознь равны между собой члены правой и левой части, содержащие ω , и тоже — члены, не содержащие ω , т. е.

$$L = C R_1^2$$

и

$$C^2 R_2^2 L = C L^2,$$

откуда и получается

$$R_1 = R_2 = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (C)$$

уже знакомое нам условие резонанса при всяких частотах.

Какова же при выполнении этого условия величина эквивалентного сопротивления всего разветвления?

Так как мнимая часть в $\dot{Y}$ равна нулю, то остается только действительная, равная

$$g = \frac{R_1}{Z_1^2} + \frac{R_2}{Z_2^2}.$$

Подставляя сюда значения R_1 , R_2 , Z_1 и Z_2 , получаем

$$g = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{\frac{L}{C} + \omega^2 L^2} + \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{\frac{L}{C} + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = \frac{\frac{C}{L} \sqrt{\frac{L}{C}}}{1 + \omega^2 LC} + \frac{\omega^2 C^2 \sqrt{\frac{L}{C}}}{\omega^2 CL + 1} =$$

$$= \frac{(\omega^2 CL + 1) \frac{C}{L} \sqrt{\frac{L}{C}}}{1 + \omega^2 LC} = \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Итак

$$\dot{Y} = g = \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Следовательно,

$$\dot{Z} = \frac{1}{\dot{Y}} = \frac{1}{g} = \sqrt{\frac{L}{C}} = R_1 = R_2.$$

Итак, эквивалентное сопротивление обеих ветвей вместе при условии (С) равно активному сопротивлению каждой ветви в отдельности.

При невыполнении условий резонанса (В) эквивалентное сопротивление разветвления представляет величину, сильно меняющуюся с частотой.

Это сопротивление $\dot{Z}$ мы получим как величину обратную $\dot{Y}$ в формуле (А).

Пример 43. Пусть на фиг. 74 $L = 0,01$ Н, а $C = 100$ мФ.

Тогда для независимости величины сопротивления разветвления от частоты надо взять

$$R_1 = R_2 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{0,01}{100 \cdot 10^{-6}}} = 10 \Omega.$$

Если $R_1 = R_2$, но не равно 10Ω , то резонанс наступает при частоте

$$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} = 15,92 \text{ Hz}.$$

Если $R_1 = 3$ и $R_2 = 8 \Omega$, то резонанс наступает при частоте [формула (41,6)]

$$f = 15,92 \sqrt{\frac{100 - 9}{100 - 64}} = 25,3 \text{ Hz}.$$

Если $R_1 = 5$, а $R_2 = 12 \Omega$, резонанс вообще невозможен.

Предлагаем читателю для двух последних случаев значений R_1 и R_2 и для $f = 50$ Hz вычислить $\dot{Z} = Z e^{j\varphi}$, т. е. определить, исходя из формулы для $\dot{Y}$, величину Z эквивалентного сопротивления и вызываемый им сдвиг тока в цепи относительно напряжения, и построить диаграмму напряжений, если $U = 120$ В.

§ 44. Решение одной задачи

Решим символическим методом следующую задачу:

Дана цепь переменного тока, изображенная на фиг. 78, состоящая из активного сопротивления R_1 , индуктивности L и емкости C с параллельно к ней подключенным сопротивлением R_2 .

Как было пояснено в параграфе 39, сопротивление R_2 может заменять утечку и диэлектрический гистерезис и должно быть переменным, если C переменное. Но мы сейчас не будем придавать такого толкования или значения сопротивлению R_2 и формулируем задачу так: при постоянных R_1 , L и R_2 найти такое C , чтобы сила тока совпала в фазе с напряжением на AB .

Найдем результирующую проводимость параллельно включенных C и R_2 ; она равна той величине, на которую надо умножить напряжение $\dot{U}_{MN}$ между точками M и N , чтобы получить силу тока в главной цепи. Сила тока через R_2 равна

$$i' = \frac{\dot{U}_{MN}}{R_2},$$

сила тока через конденсатор [формула (32,3)] выражается так:

$$i'' = +j\omega C \dot{U}_{MN}.$$

Сумма этих сил токов есть сила тока в главной цепи

$$\left(\frac{1}{R_2} + j\omega C\right) \dot{U}_{MN}$$

следовательно, проводимость цепи между точками M и N равна

$$\frac{1}{R_2} + j\omega C.$$

Введя для нее обозначение

$$\dot{Y}_{MN} = g_{MN} + jb_{MN}$$

имеем

$$g_{MN} = \frac{1}{R_2}$$

и

$$b_{MN} = \omega C.$$

Сопротивление цепи между точками M и N равно $\frac{1}{\dot{Y}_{MN}}$.

Полное сопротивление всей цепи, очевидно, выразится так:

$$R_1 + j\omega L + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\omega C} = R_1 + j\omega L + \frac{\frac{1}{R_2} - j\omega C}{\frac{1}{R_2^2} + \omega^2 C^2}.$$

Чтобы сила тока совпадала в фазе с напряжением на всей цепи, реактивное сопротивление в ней должно равняться нулю; следовательно, в последнем выражении должна равняться нулю сумма мнимых членов или должно быть

$$\omega L - \frac{\omega C}{\frac{1}{R_2^2} + \omega^2 C^2} = 0.$$

Таким образом для C получаем квадратное уравнение

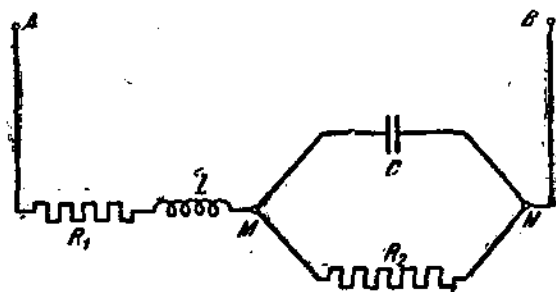
$$C^2 - \frac{1}{\omega^2 L} C + \frac{1}{\omega^2 R_2^2} = 0.$$

Отсюда

$$C = \frac{R_2 \pm \sqrt{R_2^2 - 4\omega^2 L^2}}{2\omega^2 L R_2}.$$

Решение возможно, если

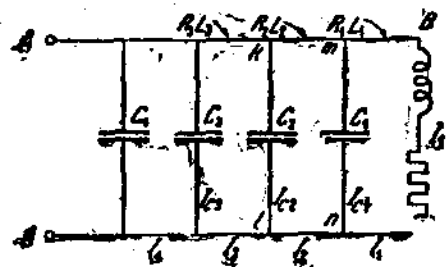
$$R_2 > 2\omega L.$$



Фиг. 78.

§ 45. Приближенная векторная диаграмма длинной линии передачи энергии

Рассмотрим соотношения в цепи из двух длинных проводов с нагрузкой на конце, но в отличие от рассуждений по поводу фиг. 44 и 45, принимая во внимание емкость этих проводов. Два параллельных провода или две жилы кабеля представляют собой, между прочим, две обкладки конденсатора; изоляция, разделяющая эти жилы, или воздух между двумя свободными проводами есть диэлектрик этого конденсатора. На всем протяжении двух жил или проводов между ними существует электрическое поле, обусловленное разностью потенциалов точек того и другого проводов. Каждый бесконечно малый элемент длины одного провода с другим проводом составляет конденсатор бесконечно малой емкости. Кроме того, надо принимать во внимание при построении векторных диаграмм и активное сопротивление и индуктивность проводов.



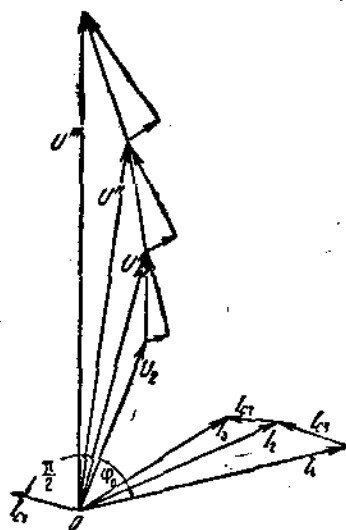
Фиг. 79.

Таким образом следовало бы провода разделить на бесконечно большое число бесконечно малых элементов и представить себе, что между проводами с R и L включены все эти элементы как обкладки бесконечно малых конденсаторов. Качественно исследовать явление мы можем, взяв не бесконечно большое, а просто достаточное количество конденсаторов, включенных между проводами параллельно друг другу (фиг. 79). На этой фигуре A и A суть зажимы генератора, от которых идут два длинных провода AB и AB , между концами B и B которых включена нагрузка. Емкость этих проводов друг относительно друга мы заменим некоторым числом параллельно включенных конденсаторов с емкостями $C_1, C_2, C_3, \dots$

Точки присоединения этих конденсаторов разделяют всю цепь на участки 1-й, 2-й, 3-й и т. д.

Назовем через R и L со значками 1, 2, 3 и т. д. активное сопротивление и индуктивность каждого отдельно участка в целом, т. е. обеих его частей, например, R_{12} и L_{12} для участка второго. Соответствующими значками, как показано на фиг. 79, снабдим и силы токов в проводах $I_1, I_2, \dots$ и в конденсаторах $I_{C1}, I_{C2}, \dots$; в ветвях m, l и т. д. нет уже ни индуктивности, ни активного сопротивления: эти ветви фиктивные и представляют собой исключительно действие емкости проводов друг относительно друга.

Пусть дано, что между точками B и B имеются напряжение U_2 и сила тока I_1 с данным сдвигом фаз φ_0 . Требуется найти построением напряжение U_1 у генератора. Строим на фиг. 80 векторы U_2 и I_1 под углом φ_0 друг к другу. Найдем теперь напряжение между точками m и n , или, что то же самое, ввиду условия, сделанного нами только что о ветвях m, l (их R и L равны нулю), напряжение на конденсаторе C_1 . Приложим к вектору U_2 векторы: $I_1 R_1$, параллельный I_1 , и $\omega L_1 I_1$, перпендикулярный к I_1 , и мы получаем требуемый вектор напряжения U' между m и n . Сила тока в конденсаторе C_1 равна $I_C = U' \omega C_1$ и опережает напряжение U'



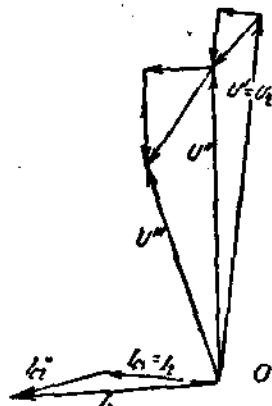
Фиг. 80.

на $\frac{\pi}{2}$, что и изображено на фиг. 80. Сложив два тока I_1 и I_{c1} , мы получим ток дальше точек разветвления m и n , т. е. ток I_2 на участке km и ln .

После этого приложим к вектору U' векторы: $I_2 R_2$, параллельный I_2 , и $\omega L_2 I_2$, перпендикулярный к I_2 , и получим U'' — вектор напряжения между точками k и l или на конденсаторе C_2 . Теперь приложим к вектору I_2 вектор $I_{c2} = U'' \omega C_2$ по направлению, опережающему U' на $\frac{\pi}{2}$, и получим вектор I_3 силы тока в проводах на третьем участке. Продолжая так построение до участка, примыкающего к A и A , мы найдем напряжение U_1 в AA и силу тока у AA .

На этой диаграмме мы замечаем, что напряжение у генератора больше, чем где-нибудь между проводами, — напряжение убывает по мере удаления от генератора, сила же тока в проводах, наоборот, растет по мере удаления от станции. Это явление есть, очевидно, то же самое, что и рассмотренное выше уменьшение тока в главной цепи при подключении параллельно нагрузке конденсаторов.

Предположим, что цепь между B и B разомкнута. Вследствие существования емкости проводов ток будет циркулировать в проводах и при разомкнутой цепи. В предыдущей диаграмме надо положить при этом I_1 равным нулю и перестроить диаграмму, как показано на фиг. 81. При $I_1 = 0$ имеем и $U' = U_2$; U'' отличается от U' на падение напряжения в участке $km - ln$ от тока $I_{c1} = U_2 \omega C_1 = I_2$. Строим вектор I_{c1} и проводим из конца вектора U_2 вектор $I_{c1} R_2$ параллельно ему и вектор $\omega L_2 I_{c1}$ перпендикулярно и получаем вектор U'' . Затем строим вектор $I_{c2} = U'' \omega C_2$. Складываем его с I_{c1} и получаем вектор I_3 . Строим от конца вектора U'' векторы $I_3 R_3$ и $\omega L_3 I_3$ и получаем вектор U''' и т. д. На этой диаграмме мы замечаем обратное тому, что было на фиг. 80. Сила тока в проводах уменьшается по мере удаления от генератора; напряжение же, наоборот, по мере удаления от генератора растет, таково действие емкости проводов в незамкнутой цепи. Увеличение напряжения по мере удаления от станции носит название «явления Ферранти», по имени инженера, открывшего его впервые на опыте с длинным concentрическим кабелем в Лондоне.



Фиг. 81.

В нашей схеме, когда мы емкость проводов, распределенную по всей длине их непрерывно, заменили емкостями, сосредоточенными лишь в известных точках mn , kl и т. д., сила тока и напряжение изменялись скачками от участка к участку, тогда как в действительности эти величины изменяются непрерывно. Однако эта разница между схемой и действительностью часто не имеет значения, если важны лишь наибольшие и наименьшие величины сил токов, напряжения и падения напряжения. Чтобы приблизиться в этих величинах к действительности, следует лишь взять достаточное количество делений на участки и соответствующие величины C , R и L . Точную теорию распределения напряжения и сил токов в длинных проводах мы найдем в главе «Теория длинных линий передачи энергии».

§ 46. Измерение мощности тремя вольтметрами или тремя амперметрами

На схеме фиг. 82 участок MN есть та часть цепи, в которой нам желательно узнать потребляемую мощность. Пользуясь ваттметром, следовало бы его тонкую катушку подключить к M и N параллельно к участку MN , а толстую включить последовательно с MN . Можно измерить мощность без ваттметра при помощи трех

вольтметров. Обозначим напряжение на MN через U_1 , силу тока в MN через I , угол сдвига фаз между этими величинами через φ_1 . Искомая мощность равна

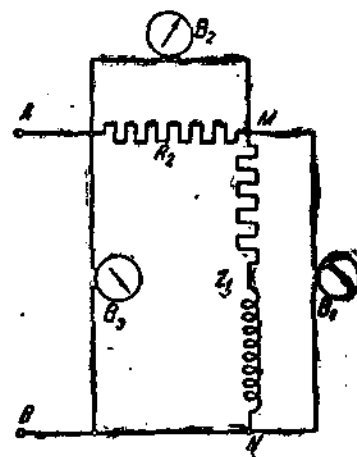
$$P = U_1 I \cos \varphi_1.$$

Включим последовательно с MN некоторое активное сопротивление R_2 и увеличим все напряжение, приложенное к цепи, так, чтобы напряжение на MN и теперь, после включения R_2 , оставалось прежним U_1 ; тогда и мощность в MN останется прежней. Подключим три вольтметра: B_1 к MN , B_2 к активному сопротивлению R_2 и B_3 к зажимам A и B всей цепи. Индуктивностью и активным сопротивлением проводов в цепи пренебрежем. Величину R_2 выберем так, чтобы напряжение на этом участке, $U_2 = IR_2$, было приблизительно равно напряжению U_1 .

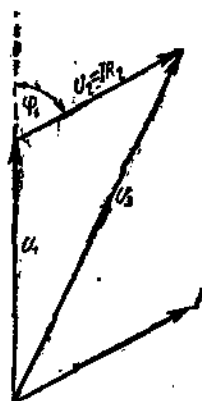
Так как $I = \frac{U_2}{R_2}$, то мощность выразится так:

$$P = \frac{U_1 U_2}{R_2} \cos \varphi_1.$$

Начертим диаграмму напряжений в цепи (фиг. 83). Векторы U_1 и I составляют угол φ_1 ; приложим к U_1 вектор $U_2 = IR_2$, совпадающий в фазе с I , мы полу-



Фиг. 82.



Фиг. 83.

чим вектор всего напряжения U_3 , причем из полученного косоугольного треугольника имеем

$$U_3^2 = U_1^2 + U_2^2 + 2U_1 U_2 \cos \varphi_1,$$

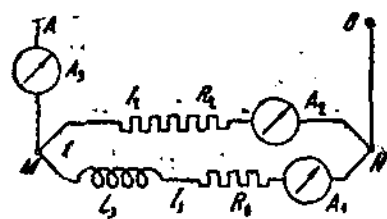
откуда

$$U_1 U_2 \cos \varphi_1 = \frac{1}{2} (U_3^2 - U_1^2 - U_2^2).$$

Это выражение подставим в выражение мощности и получим

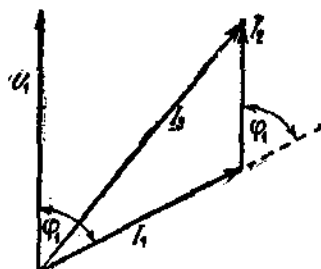
$$P = \frac{1}{2R_2} (U_3^2 - U_1^2 - U_2^2).$$

Таким образом, зная R_2 и измерив вольтметрами означенные три напряжения, мы сможем вычислить P . Из того обстоятельства, что для большей точности определения величины $U_1 U_2 \cos \varphi_1$ надо, чтобы в треугольнике на-



Фиг. 84.

пряжений сторона U_2 была приблизительно той же длины, что и U_1 , и следовательно, все напряжение после включения R надо повысить почти в два раза до величины U_3 , вытекает неудобство этого метода для практики. Удобнее в этом



Фиг. 85

отношении способ трех амперметров измерения мощности, который заключается в следующем:

Не будем изменять напряжения в цепи и включим параллельно участку MN некоторое активное сопротивление R_2 . Затем включим в обе параллельные

ветви по амперметру, как показано на фиг. 84, а также в цепь за разветвлением — один амперметр. Для ветви R_2 имеем $U_1 = I_2 R_2$, так что выражение мощности мы можем теперь преобразовать так:

$$P = U_1 I_1 \cos \varphi_1 = I_1 I_2 R_2 \cos \varphi_1.$$

Так как I_2 совпадает в фазе с U_1 , то (фиг. 85) проводим из конца вектора I_1 вектор I_2 , параллельный вектору напряжения U_1 , и, складывая I_1 и I_2 , получаем вектор I_3 силы тока за разветвлением.

Из треугольника токов следует, что

$$I_3^2 = I_1^2 + I_2^2 + 2I_1 I_2 \cos \varphi_1,$$

откуда

$$I_1 I_2 \cos \varphi_1 = \frac{1}{2} (I_3^2 - I_1^2 - I_2^2). \quad (A)$$

Подставляя в выражение для мощности, получаем

$$P = \frac{R_2}{2} (I_3^2 - I_1^2 - I_2^2).$$

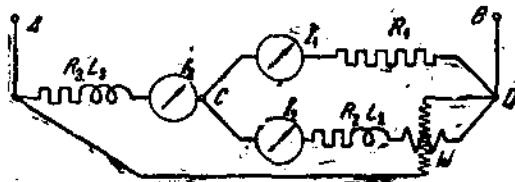
Формула (A) может служить также и для определения $\cos \varphi_1$.

Способ трех вольтметров был предложен Эйртоном, Сванбурном, Сэмнером, а трех амперметров — Флемингом.

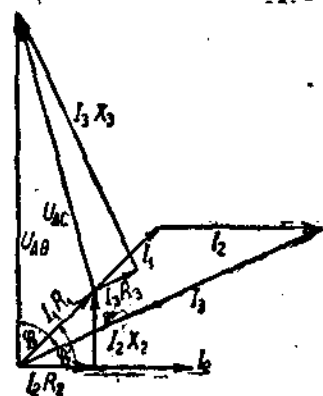
§ 47. Получение токов или напряжений, сдвинутых в фазе на четверть периода

Рассмотрим теперь задачу о получении сначала двух токов, затем двух напряжений со сдвигом фаз в четверть периода, когда дано на зажимах AB (фиг. 86 и 87) напряжение U .

Для получения таких двух токов служит способ Гуммеля, схема включения которого изображена на фиг. 86. К зажимам A и B подключена цепь, состоящая из катушки некоторого сопротивления Z_2 с небольшим активным сопротивлением R_2 и большим реактивным ωL_2 и последовательно к нему присоединенных двух параллельных ветвей — одной из активного сопротивления R_1 и другой из катушки сопротивления Z_2 с активным сопротивлением R_2 и с реактивным ωL_2 . В обе ветви и в главную цепь включено



Фиг. 86.



Фиг. 87.

по амперметру; кроме того, W обозначает ваттметр, толстая катушка которого включена в ветвь 2, а тонкая подключена к зажимам A и B (или, что то же самое, AD), т. е. к данному напряжению U . Изменением Z_2 , Z_3 и R_1 можно достичь того, чтобы сила тока I_2 была сдвинута на четверть периода относительно U и, следовательно, любого тока в какой-нибудь другой цепи, присоединенной к тем же зажимам A и B , находящегося в фазе с U (т. е. идущего лишь через активное сопротивление, подключенное к A и B). Что такой сдвиг фаз достигнут, узнают по ваттметру, который при этом покажет нуль, так

как косинус угла сдвига фаз между токами в катушках его будет равен при этом нулю. О таком употреблении ваттметра было уже сказано в главе четвертой после описания ваттметра.

Векторная диаграмма (фиг. 87) начерчена для случая осуществления требуемого сдвига фаз.

Сила тока I_3 имеет сдвиг фаз относительно напряжения U_{AB} , равный φ_3 ; сила тока I_1 имеет меньший сдвиг фаз, а сила тока I_2 — больший, именно равный $\frac{\pi}{2}$. Напряжение между C и D представлено вектором $I_1 R_1$; сила тока I_2 отстает от напряжения между C и D по общему правилу на угол

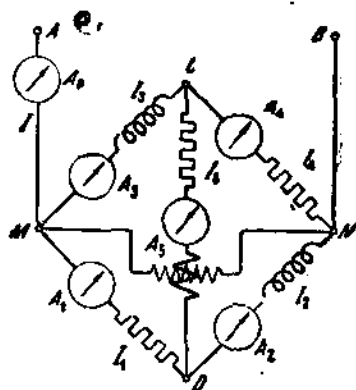
$$\varphi_2 = \arctg \frac{\omega L_2}{R_2}.$$

Суммируя I_1 и I_2 , получаем I_3 со сдвигом фаз, промежуточным между сдвигами фаз I_1 и I_2 . Разность между U_{AB} и $I_1 R_1$ есть вектор U_{AC} напряжения между A и C ; угол между векторами U_{AC} и I_3 определяется как $\arctg \frac{\omega L_3}{R_3}$ и при малом R_3 приближается к прямому.

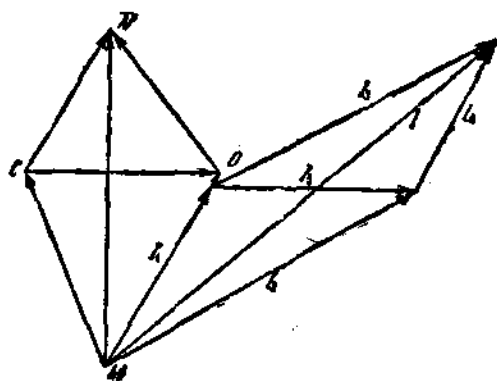
Упражнение. Вывести аналитическое условие перпендикулярности I_3 к U_{AB} .

Указание. Направить U_{AB} по вертикальной оси, так что мнимая часть комплекса U_{AB} равна нулю, и вывести условие, когда I_3 не будет иметь действительной части.

Сдвиг фаз в четверть периода между двумя напряжениями получается по способу Гёргеса, схема включения которого дана на фиг. 88. На зажимах A и B или M и N имеется данное напряжение U ; на фиг. 89 оно представлено вектором $\overline{MN}$. Главный ток I , измеряемый амперметром A_0 , отстает от напряжения и представлен вектором I . В участках MC и DN включены регулируемые катушки (с выдвижными сердечниками) с малым R и большим L ; в участках же MD и CN включены лишь активные сопротивления, так что токи I_1 и I_4 совпадают в фазе с напряже-



Фиг. 88.



Фиг. 89.

ниями на MD и CN соответственно. Между C и D включено тоже активное сопротивление; в эту ветвь включена и толстая катушка ваттметра, тонкая катушка которого подключена к зажимам M и N , т. е. к напряжению U . Шестью амперметрами мы можем измерить все шесть токов; вольтметром же, не изображенным на чертеже, можем измерить все шесть напряжений, т. е. на участках MC , CN , MD , DN , CD и главное — на MN .

Сила тока (главного) I может быть представлена двояким образом или как сумма I_1 и I_2 , причем I_1 меньше отстает от напряжения, чем I , а I_2 — больше; или

как сумма I_2 и I_4 , причем I_4 меньше отстает от напряжения, чем I_1 , а I_2 — больше. Напряжение на MD совпадает в фазе с I_1 и представлено вектором $\overline{MD}$; разность между $\overline{MN}$ и $\overline{MD}$ — вектор $\overline{DN}$ — есть напряжение на участке DN ; сила тока I_2 сильно отстает от этого напряжения. Вектор $\overline{CN}$, параллельный вектору I_4 , есть напряжение на участке NC , а вектор $\overline{MC}$ представляет напряжение на MC . Наконец, разность векторов $\overline{MD}$ и $\overline{MC}$ есть вектор $\overline{CD}$ напряжения на участке CD , диагональ четырехугольника $MCND$. Векторы $\overline{CD}$ и I_3 параллельны.

Изменением всех сопротивлений, активных и реактивных, можно достичь того, чтобы вектор $\overline{CD}$ был перпендикулярен к вектору $\overline{MN}$; что требуемый сдвиг фаз в четверть периода достигнут, на опыте узнается из того, что ваттметр при этом показывает нуль, так как сила тока I_3 в толстой катушке находится в фазе с напряжением CD .

Очевидно, что изменение частоты, хотя бы и небольшое, повлечет за собой нарушение требуемого сдвига фаз в $\frac{\pi}{2}$ в обеих разобранных схемах.

Ответ к упражнению настоящего параграфа. Сопротивление всего включения Z равно

$$\dot{Z} = \dot{Z}_2 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{\dot{Z}_3}} = \dot{Z}_2 + \frac{R_1 \dot{Z}_3}{R_1 + \dot{Z}_3} = R_2 + jX_2 + \frac{R_1(R_1 + jX_3)}{R_1 + R_2 + jX_3}.$$

Напряжение $\dot{U}_{AB}$ направим по вертикальной оси, так что $\dot{U}_{AB} = U_{AB}$:

$$\dot{i}_2 = \frac{U_{AB}}{\dot{Z}}.$$

Далее,

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_{AC} = \dot{i}_2 \dot{Z}_3 = U_{AB} \frac{\dot{Z}_3}{\dot{Z}};$$

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_{CD} = \dot{U}_{AB} - \dot{U}_{AC} = U_{AB} - U_{AB} \cdot \frac{\dot{Z}_3}{\dot{Z}} = U_{AB} \cdot \frac{\dot{Z} - \dot{Z}_3}{\dot{Z}} = U_{AB} \cdot \frac{R_1 \dot{Z}_3}{(R_1 + \dot{Z}_3) \dot{Z}};$$

$$\dot{i}_2 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_2} = U_{AB} \cdot \frac{R_1}{(R_1 + \dot{Z}_3) \dot{Z}}.$$

Это выражение не должно содержать действительной части; следовательно, не должно ее иметь и дробь,

$$\frac{1}{(R_1 + \dot{Z}_3) \dot{Z}},$$

а это возможно только тогда, когда знаменатель не имеет действительной части (докажем это!); итак

$$(R_1 + \dot{Z}_3) \dot{Z}$$

не должно иметь действительной части. Раскроем это выражение:

$$(R_1 + \dot{Z}_3) \dot{Z} = R_1(R_2 + jX_2) + (R_1 + R_2 + jX_2)(R_3 + jX_3).$$

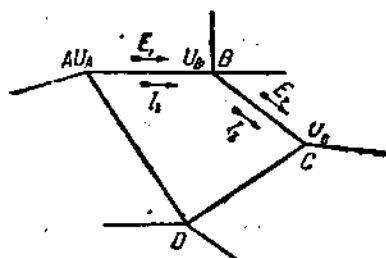
Следовательно, получаем, что должно удовлетворяться условие

$$R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_3 - X_2 X_3 = 0.$$

§ 48. Первый и второй законы Кирхгофа

Из последних трех задач мы замечаем следующее: векторы сил токов, протекающих к одной точке (или утекающих от нее), — в наших задачах их было три, — составляют замкнутый многоугольник. Это положение является геометрической формой закона Кирхгофа для переменного тока: $\sum \dot{i} = 0$, что при перехо-

де к векторам от мгновенных значений означает, что результирующий вектор равен нулю (его проекция на ось времени, равная $\sum i$, всегда равна нулю), так что векторы сил токов, притекающих к одной точке (или утекающих от нее), образуют всегда замкнутый многоугольник (в наших примерах — треугольник).



Фиг. 90.

Второй закон Кирхгофа применительно к замкнутому контуру (фиг. 90) выводится способом, совершенно подобным тому, которым этот закон доказывается в учении о постоянном токе. Для каждой ветви контура мы имеем:

$$\begin{aligned} i_1 R_1 &= u_A - u_B + e_1 + e'_1 + e''_1 + \dots \\ i_2 R_2 &= u_B - u_C + e_2 + e'_2 + e''_2 + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

где e_1, e'_1, e''_1 означают все возможные э. д. с., одного и того же числа периодов с токами, действующие в ветви AB ; e_2, e'_2, e''_2 — то же в ветви BC и т. п.

Складывая эти равенства, мы получим

$$\sum i_K R_K = \sum e_K,$$

т. е. формулу, выражающую второй закон Кирхгофа для мгновенных значений.

Здесь под e_K мы подразумеваем все э. д. с., действующие в сторонах, т. е. в том числе и э. д. с. самоиндукции. Перенеся их в левую часть с обратным знаком и переходя к векторам и действующим значениям, получим

$$\sum i_K (R_K + jX_K) = \sum E_K,$$

где E_K означает действующие в сторонах контура э. д. с. индукции от других токов, в том числе и от других сторон контура и пр.

Может случиться, что э. д. с., действующие в сторонах контура, не все одинаковой частоты; спрашивается, как тогда вести расчет.

Такой случай подойдет под очень общее правило или принцип расчета, который называется принципом наложения.

§ 49. Принцип наложения или суперпозиции.

Принцип наложения мы формулируем так: если в цепи электрического тока причина A (например, некоторая э. д. с.) вызывает явление M (например, некоторую силу тока), а причина B (пусть — другая э. д. с.) вызывает явление N (силу тока, отличную от прежней), то при совместном действии A и B вызываются явления M и N (если обе э. д. с. при этом одной частоты, они геометрически суммируются и оба тока тоже), и только они, если связь между A и M и между B и N математически выражается линейным уравнением. В скобках мы привели пример этого. Приведем обратный пример. Сила тока постоянного I_1 (причина A) вызывает тепло $I_1^2 R$ (явление M) в цепи; связь здесь выражается не линейно, а с помощью второй степени; сила тока I_2 (причина B) вызывает тепло $I_2^2 R$ (явление N). Когда существуют обе причины A и B , т. е. токи I_1 и I_2 , то тепло будет не $I_1^2 R + I_2^2 R$ (явления M и N), а другое, именно $(I_1 + I_2)^2 R$.

Таким образом все те явления, которые связаны э. д. с. линейно, например, сила тока, а через нее магнитное поле, можно рассчитывать отдельно для каждой из э. д. с., а затем результаты сложить геометрически или алгебраически и получить то результирующее явление, которое в действительности будет при наличии нескольких первопричин, например, э. д. с.

Исключаются те явления, которые с причиной (силой тока или э. д. с.) связаны не линейно, например, выделение тепла в меди, магнитное поле в железе при заметном его насыщении, потери на гистерезис, токи Фуко и пр.

Далее при исследовании несинусоидальных токов как периодических, так и непериодических мы воспользуемся принципом наложения для вывода теории явлений этих токов.

У п р а ж н е н и е. Составить уравнения для схемы Гертса.

§ 50. Мостик переменного тока

В практике электрических измерений часто употребляется мостик Уитстона при переменном токе; таким способом меряют емкости, углы потерь в диэлектриках емкостей, индуктивности и взаимные индуктивности. Гальванометр при этом употребляется вибрационный (употребляется также телефон). Стороны мостика содержат активные и реактивные (индуктивные или емкостные) сопротивления (фиг. 91). Когда в ветви гальванометра нет тока, тогда, очевидно, падения напряжения в сторонах схемы попарно равны:

$$i_1 \dot{Z}_1 = i_2 \dot{Z}_3,$$

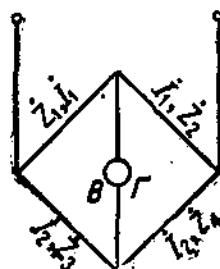
$$i_1 \dot{Z}_2 = i_2 \dot{Z}_4,$$

откуда

$$\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2} = \frac{\dot{Z}_3}{\dot{Z}_4}$$

или

$$\dot{Z}_1 \dot{Z}_4 = \dot{Z}_2 \dot{Z}_3.$$



Фиг. 91.

Если комплексы равны, то равны их модули и равны их аргументы, поэтому условиями равновесия мостика являются уравнения:

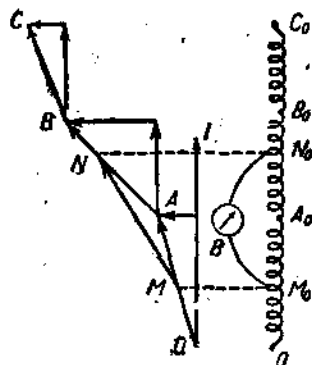
$$Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3$$

и

$$\varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3.$$

§ 51. Топографический метод

При решении некоторых задач может оказаться весьма полезным по своей наглядности так называемый топографический метод, который в краткой формулировке заключается в том, что мы расстояния между двумя любыми точками на векторной диаграмме считаем за векторы разностей потенциалов между этими двумя точками как точками цепи.



Фиг. 92.

Поясним эту идею на примере. Пусть нам дан один провод линии передачи энергии, состоящий из трех участков (фиг. 92): OA_0 , A_0B_0 и B_0C_0 ; провод продолжается и далее или, быть может, в C_0 к нему подключена нагрузка, но мы рассмотрим именно только показанную на фиг. 92 часть его OC_0 . Сопротивление R и индуктивность L распределены вдоль по каждому участку равномерно, как было уже пояснено раньше, но на разных участках имеют разную величину, и фазовый угол между силой тока I и участковыми напряжениями U_{OA} , U_{AB} , U_{BC} получается разным.

На фиг. 92 дана диаграмма этих напряжений.

Емкостью одного провода относительно другого мы в данном примере для упрощения вопроса пренебрегаем.

Если на всем участке OA_0 теряется напряжение $\overline{OA}$, то на части его OM_0 потеряется напряжение $\overline{OM}$, причем $\overline{OM}$ совпадает в фазе с $\overline{OA}$, так как мы имеем равенство

$$\frac{\omega L_{OM_0}}{R_{OM_0}} = \frac{\omega L_{OA_0}}{R_{OA_0}}$$

вследствие равномерного распределения сопротивления и индуктивности вдоль провода.

По той же причине и по величине

$$\frac{OM}{OA} = \frac{OM_0}{OA_0},$$

где OM_0 и OA_0 могут выражать прямо длины частей провода.

Таким образом расстояния точек M до O дадут нам прямо напряжения на участках OM_0 .

То же самое относится, очевидно, и к участку A_0B_0 . Например вектор $\overline{AN}$ даст нам напряжение между точками A_0 и N_0 .

Соединив M с N , мы получим отрезок $\overline{MN}$, который векториально представит нам разность потенциалов между точками M_0 и N_0 , складывающуюся из двух векторов: $\overline{MA}$ — напряжения на участке M_0A_0 и $\overline{AN}$ — напряжения на участке A_0N_0 .

Итак, соединив между собой отрезком любые две точки ломаной $OABC$, мы получим вектор, дающий напряжение между двумя соответствующими точками цепи.

В данном примере мы должны обе точки брать на линии $OABC$, должны оставаться на этой линии; но могут быть случаи, когда отрезок между любыми точками площади фигуры и точками даже целой плоскости дает напряжение между этими точками. С такими примерами мы встретимся в следующей главе при изучении явлений трехфазного тока.

Рассмотрим другой пример.

На фиг. 93 даны две параллельные ветви, в одной включено только сопротивление R_1 , в другой сопротивление R_p и катушка с индуктивностью L и сопротивлением R_k . Рядом построена векторная диаграмма.

Здесь

$$\overline{OA} = i_1 R_1, \quad \overline{OB} = i_2 (R_p + R_k); \quad \overline{OC} = i_2 R_p.$$

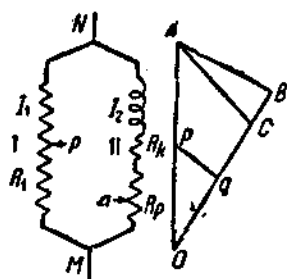
Возьмем в левой ветви какую-нибудь точку p , например, „электрическую“ середину ее, делящую сопротивление R_1 пополам; такую же точку возьмем на сопротивлении R_p правой ветви. Тогда напряжение между этими точками представится вектором $\overline{qr}$, соединяющим на векторной диаграмме середины (или иные соответствующие точки) векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OC}$.

Здесь в обоих примерах мы чертили рядом схему и векторную диаграмму. Обычно схемы и не чертят в таких случаях, а на векторной диаграмме отождествляют векторы напряжений на участках цепи с самими участками.

Конечно, здесь нужна известная осмотнительность. Например, середине катушки будет соответствовать середина вектора $\overline{AC}$, а не $\overline{AB}$ или $\overline{BC}$ и т. д.

Остановимся еще на одном весьма важном для последующего примере.

На статоре генератора переменного тока помещена вторая обмотка, совершенно одинаковая с первой, но смещенная относительно нее на одну треть двойного полюсного деления, э. д. с. в ней имеет поэтому ту же самую амплитуду, как и в первой обмотке, но запаздывает (или опережает, смотря по направлению сдвига обмотки) относительно нее на одну треть периода. Эти э. д. с. представлены на



Фиг. 93.

фиг. 94 векторами $\overline{OI}$ и $\overline{O2}$, угол между которыми равен $\frac{2\pi}{3}$ или 120° . Тут же схематически — витками — изображены и обе обмотки.

Начала обеих обмоток соединены вместе, в одну точку O ; спрашивается, каково будет напряжение между двумя оставшимися свободными концами обмоток?

Здесь нельзя сложить геометрически векторы э. д. с., ибо катушки нельзя рассматривать, как соединенные последовательно; последнее имело бы место, если бы конец первой обмотки, ее последний проводник, соединили с первым проводником второй обмотки — с ее началом.

Конец 1 первой обмотки имеет потенциал, отличающийся от потенциала начала ее на разность потенциалов, изображаемую вектором э. д. с. $\overline{OI}$, или, короче, — на вектор $\overline{OI}$.

Конец второй обмотки имеет потенциал, отличающийся от потенциала в O на вектор $\overline{O2}$.

Отсюда мы заключаем, что к потенциалу точки 2 надо приложить вектор $\overline{2I}$, чтобы получить потенциал точки 1, т. е.

$$\dot{U}_2 + \overline{2I} = \dot{U}_1,$$

или

$$\dot{U}_1 - \dot{U}_2 = \dot{U}_{12} = \overline{2I},$$

и, конечно, наоборот

$$\dot{U}_2 - \dot{U}_1 = \overline{I2}.$$

С подобными соотношениями мы встретимся в трехфазном токе.

Для последующего полезно определить величину вектора $\overline{2I}$.

Так как $\angle 2OI = 120^\circ$ и $\triangle 2OI$ равнобедренный, то

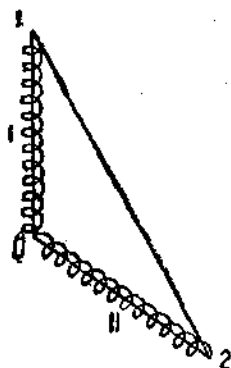
$$\angle O2I = \angle OI2 = 30^\circ$$

и

$$(2I) = 2 \cdot (OI) \cdot \cos 30^\circ,$$

или

$$(2I) = (OI) \cdot \sqrt{3}.$$



Фиг. 94.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ НА ПРИМЕРЕ РАБОТЫ СИНХРОННОЙ МАШИНЫ

§ 52. Понятие о геометрическом месте конца переменного вектора

Решение предыдущих вопросов заключалось каждый раз в построении одной единственной векторной диаграммы, выражавшей соотношения между величинами графически.

Во многих случаях бывает важно знать, как будут меняться некоторые величины, например, напряжение на каком-либо участке цепи или сила тока через какую-либо ветвь цепи, при изменении других величин. В особенности подобные вопросы важны при рассмотрении работы электрических машин при разных нагрузках или других меняющихся обстоятельствах. Как пример можно указать на работу синхронного генератора при постоянной нагрузке, но при меняющейся силе тока в цепи возбуждения его. В таких случаях, чтобы получить ответ на поставленный вопрос, надо было бы построить целый ряд векторных диаграмм для отдельных

частных случаев и смотреть, как изменяется на них по величине и фазе интересующий нас вектор в зависимости от меняющихся условий в цепи, — в упомянутом примере, скажем, ток в статоре при изменении возбуждения.

Вместо построения большого количества диаграмм, что и утомительно, да и само по себе, без геометрических выводов, все равно не приведет к точной формулировке закона изменений рассматриваемого вектора, идут другим путем.

Анализируя векторную диаграмму, выводят геометрически, как будет изменяться один вектор при изменении других. Чаще всего в таких случаях ищут, какое геометрическое место будет описывать конец вектора интересующей нас величины при изменении тех или иных условий в цепи.

В гл. XIII рассматривается работа нагруженного трансформатора и асинхронного двигателя и доказывается, что конец вектора первичного тока, который трансформатор или асинхронный двигатель берет из первичной сети, будет при изменениях нагрузки перемещаться по окружности, причем и выводятся формулы для положения центра и для величины радиуса этой окружности. Таким образом дается закон, как изменяется с нагрузкой сила тока из сети по своей величине и фазе.

Когда для той или иной машины, для определенных условий ее работы, такое геометрическое место найдено, уже легко судить, какое состояние, какой режим работы ее наиболее выгоден или удобен, что можно ожидать при изменениях его и т. д.; на одной такой диаграмме с начерченным на ней геометрическим местом можно легко обозреть все состояния работы машины, недогрузку, нормальную работу, перегрузку и пр.

В этой главе мы покажем, как эта идея прилагается к изучению работы синхронной машины.

Каким вектором при этом „заинтересоваться“, геометрическое место концов какого вектора искать, какие величины считать неизменяющимися, какие считать изменяющимися, — на эти вопросы иногда может быть и не один, а два и три ответа, смотря по тому, с какой точки зрения мы подходим к задаче исследования работы машины. Обыкновенно напряжение сети переменного тока, к которой подключена машина, считают постоянным и ищут, как будет изменяться при тех или иных условиях сила тока в машине. Иногда же поступают иначе.

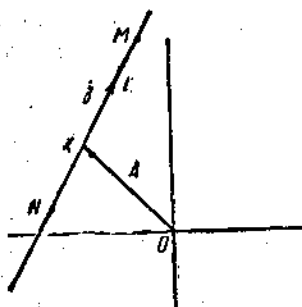
Теперь мы должны познакомиться с тем, как аналитически выражаются геометрические места, описываемые векторами, т. е. познакомиться с векторными уравнениями, пока в простейшем виде.

§ 53. Векторные уравнения прямой линии и окружности

Мы можем в некоторых случаях по одному виду выражения одного вектора в функции других известных постоянных и переменных векторов судить о том, какое геометрическое место описывает конец этого вектора при изменениях его; в других более сложных случаях требуется исследование того уравнения, которое связывает один вектор с другими.

Начнем с того, как выразить посредством векторов уравнение некоторой произвольно проведенной прямой линии MN (фиг. 95).

Проведем некоторый вектор $\overline{OK} = A = Ae^{j\alpha}$ из начала координат до некоторой точки K прямой. На прямой возьмем отрезок $\overline{KL}$ и назовем его вектором $\overline{B} = Be^{j\beta}$. Положение точки L теперь определяется суммой векторов $\overline{A} + \overline{B}$, точка L есть конец



Фиг. 95.

этого результирующего вектора. Какая-нибудь другая точка M на прямой MN определяется вектором $\overline{OK} + \overline{KM}$, но $\overline{KM} = m\overline{KL} = m\overline{B}$, где m — некоторое действительное число, поэтому

$$\overline{OK} + \overline{KM} = \overline{A} + m\overline{B}.$$

Для точки N вектор $\overline{KN}$ имеет направление, обратное вектору $\overline{B}$:

$$\overline{KN} = -n\overline{B};$$

поэтому положение точки N определяется вектором

$$\overline{OK} + \overline{KN} = \overline{A} - n\overline{B}.$$

Нетрудно видеть, что общий вид выражения вектора $\overline{U}$ из O до точек прямой MN будет такой:

$$\overline{U} = \overline{A} + x\overline{B}, \quad (I)$$

где x есть переменное действительное число.

Следовательно, конец вектора $\overline{U}$, выражающегося согласно уравнению (I), описывает прямую линию.

Рассмотрим пример.

Сопротивление цепи состоит из постоянного активного сопротивления R_0 и переменного сопротивления $\dot{Z}_1 = R_1 + jX_1$, причем величины R_1 и X_1 меняются одна пропорционально другой, так что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_1}{R_1} = \operatorname{const} \quad (II)$$

и угол φ остается постоянным.

На фиг. 96 отложены $\overline{Oa} = R_0$ и угол φ при точке a такой, что

$$\overline{aq} = \dot{Z}_1 = R_1 + jX_1.$$

Уравнение прямой ap получается в виде

$$\overline{Oq} = \dot{U} = R_0 + R_1 + jX_1, \quad (III)$$

или, так как $R_1 = cX_1$ из уравнения (II), то

$$\dot{U} = R_0 + (c + j)X_1, \quad (IV)$$

где переменен только X_1 .

Если мы введем вектор

$$\dot{B} = c + j,$$

который, как читатель должен сам доказать, параллелен прямой линии ap , или вектору $\overline{aq}$, то уравнение (IV) превращается в

$$\dot{U} = R_0 + \dot{B}X_1,$$

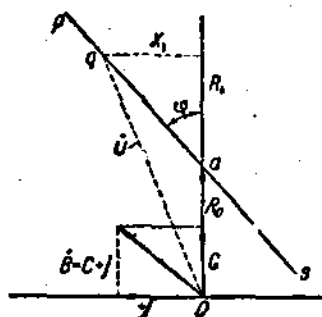
в котором легко видеть частный случай уравнения (I).

Если вектор $\dot{A}$ перпендикулярен к вектору $\dot{B}$, то $\dot{A}$ означает кратчайшее расстояние из начала координат O до прямой [уравнение (I)].

Если вектор $\dot{A}$ равен O , то прямая проходит через начало координат и уравнение ее принимает вид

$$\dot{U} = x\dot{B} = xBe^{j\beta} = Me^{j\beta},$$

где модуль M переменен, а аргумент β постоянен.



Фиг. 96.

Выражению $\dot{A} + x\dot{B}$ можно придать несколько иную форму.

Опустим из начала координат O перпендикуляр на прямую $\dot{A} + x\dot{B}$; обозначим его как вектор через $\dot{P}$. Очевидно, что вектор $\dot{A} + x\dot{B}$ может быть представлен как сумма вектора $\dot{P}$ и вектора, направленного по прямой, т. е. перпендикулярного к $\dot{P}$; этот последний вектор можно выразить как $\pm j\dot{P} \cdot y$. Таким образом

$$\dot{A} + x\dot{B} = \dot{P}(1 + jy),$$

где y — действительное число, меняющееся от $-\infty$ до $+\infty$.

Что за геометрическое место опишет конец вектора $\dot{U}$, если у него, наоборот, модуль будет постоянным, а аргумент будет переменным, т. е. если

$$\dot{U} = B e^{j\varphi}?$$

Очевидно, что это будет дуга окружности с центром в начале координат.

Если φ может изменяться от 0 до 2π , то конец вектора опишет полную окружность.

Теперь посмотрим, как посредством векторов выразить окружность фиг. 97, у которой центр лежит не в начале координат.

Из сделанного на фиг. 97 построения очевидно, что переменный вектор $\dot{U}$, конец которого описывает окружность, может быть представлен в виде суммы двух векторов: одного постоянного $\dot{A}$ от начала координат до центра окружности и другого переменного, по величине равного радиусу окружности B , имеющего аргумент φ , изменяющийся от 0 до 2π ; таким образом

$$\dot{U} = \dot{A} + B e^{j\varphi} \quad (\varphi \text{ от } 0 \text{ до } 2\pi) \quad (V)$$

есть векторное уравнение окружности.

Два вектора: $R = R e^{j\alpha}$ и $\dot{r} = r e^{j\gamma}$, связанные соотношением

$$R = \frac{1}{r},$$

называются взаимно обратными. Очевидно, что при этом

$$R = \frac{1}{r} \text{ и } \alpha = -\gamma,$$

так как

$$R e^{j\alpha} = \frac{1}{r} e^{-j\gamma}.$$

Мы знаем, что конец вектора $\dot{A} + x\dot{B}$ описывает прямую; оказывается, что конец обратного вектора

$$\frac{1}{\dot{A} + x\dot{B}}$$

опишет при изменении x окружность.

Это значит, что уравнение

$$\dot{r} = \frac{1}{\dot{A} + x\dot{B}}$$

есть другой вид векторного уравнения окружности. Докажем это.

Прежде всего положим

$$\dot{A} + x\dot{B} = \dot{P}(1 + jy),$$

где

$$\dot{P} = P e^{j\beta},$$

и затем преобразуем выражение

$$\dot{r} = \frac{1}{\dot{P}(1 + jy)}$$

следующим образом:

$$\dot{r} = \frac{1}{P} e^{-j\beta} \cdot \frac{1 - jy}{1 + y^2} = \frac{1}{P} e^{-j\beta} \cdot \frac{1}{1 + y^2} - j \frac{1}{P} e^{-j\beta} \cdot \frac{y}{1 + y^2},$$

но

$$\frac{1}{1 + y^2} = 1 - \frac{y^2}{1 + y^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{y^2}{1 + y^2};$$

поэтому

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{P} e^{-j\beta} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{P} e^{-j\beta} - \frac{1}{P} e^{-j\beta} \cdot \frac{y^2}{1 + y^2} - j \frac{1}{P} e^{-j\beta} \cdot \frac{y}{1 + y^2} = \\ &= \frac{1}{2P} e^{-j\beta} + \frac{1}{2P} e^{-j\beta} \left(1 - \frac{2y^2}{1 + y^2} - j \frac{2y}{1 + y^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2P} e^{-j\beta} + \frac{1}{2P} e^{-j\beta} \left(\frac{1 - y^2}{1 + y^2} - j \frac{2y}{1 + y^2} \right). \end{aligned}$$

Здесь в скобках каждый член или меньше единицы или равен ей при $y = 0$ или $y = 1$. Сумма квадратов обоих членов равна единице, поэтому можно положить

$$\frac{1 - y^2}{1 + y^2} = \cos \varphi$$

и

$$\frac{2y}{1 + y^2} = \sin \varphi,$$

где φ будет изменяться в зависимости от y так:

$$y = -\infty, \quad \varphi = \pi;$$

$$y = -1, \quad \varphi = \frac{3}{2}\pi;$$

$$y = 0, \quad \varphi = 2\pi;$$

$$y = +1, \quad \varphi = \frac{\pi}{2};$$

$$y = +\infty, \quad \varphi = \pi.$$

Таким образом

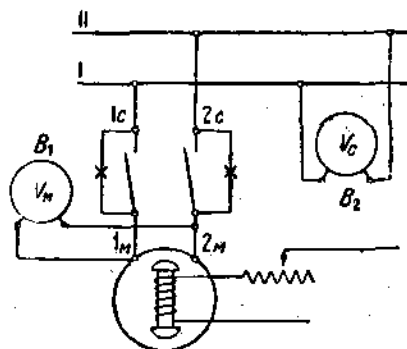
$$\dot{r} = \frac{1}{2P} e^{-j\beta} + \frac{1}{2P} e^{-j\beta} \cdot e^{-j\varphi} = \frac{1}{2P} e^{-j\beta} + \frac{1}{2P} e^{-j(\beta + \varphi)};$$

мы получили уравнение окружности.

Впоследствии мы увидим, что окружность можно выразить еще другим уравнением.

§ 54. Пуск в ход синхронной машины

Обратимся к исследованию работы синхронной машины и зададимся следующими условиями: пусть на ту же сеть работает параллельно с рассматриваемой машиной еще так много других синхронных генераторов, что наша машина никакого влияния на напряжение сети не оказывает; это напряжение можно, таким образом, принять постоянным. Говорят в таких случаях, что машина подключена к бесконечно сильной сети (если бы оказалось необходимым, поправку на колебания напряжения в окончательный наш результат мы сможем ввести после).

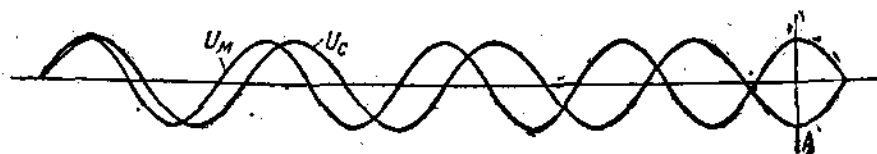


Фиг. 98а.

Сначала следует остановиться на пуске в ход синхронной машины. Этот пуск производится совершенно одинаково, предназначается ли пускаемая в ход синхронная машина для работы ее генератором или же она должна будет работать двигателем.

На фиг 98а дана схема однофазного генератора; через M обозначена обмотка его ротора, i_a ток в ней, иначе ток „возбуждения“; U есть двухполюсный рубильник, L_1 и L_2 — лампы накаливания, так называемые „фазовые лампы“, подключенные параллельно рубильнику, I и II — шины переменного тока, к которым присоединены другие, уже работающие синхронные машины, B_1 — вольтметр для измерения напряжения на зажимах пускаемой в ход машины, B_2 — то же на шинах.

Синхронная машина прежде всего приводится во вращение так называемым „первичным“ двигателем (паровой турбиной или другим двигателем), включается



Фиг. 98 б.

ток возбуждения, число оборотов ее, руководствуясь показаниями тахометра, доводится до требуемого

$$n_m = \frac{60f}{p},$$

а сила тока i_a в цепи возбуждения (в обмотке ротора) регулируется реостатом, так чтобы вольтметр B_1 показывал такое же напряжение, что и вольтметр B_2 ; таким образом мы уравниваем напряжение машины U_m с напряжением сет. U_c , созданным всеми другими машинами.

Теперь надо, во-первых, точнее отрегулировать число оборотов, уже не по тахометру, ибо он для этого недостаточно чувствителен, и, во-вторых, достичь того, чтобы знаки на зажимах машины и сети были одинаковы, и, в-третьих, одновременно, т. е. чтобы напряжения U_c и U_m были направлены все время друг другу навстречу; тогда включение нашей машины в сеть не вызовет токов короткого замыкания подобно параллельному включению двух аккумуляторов, которые тоже соединяются одноименными полюсами; в противоположном же случае машины друг через друга пошлют ток короткого замыкания, равный частному от деления $U_c + U_m$ (или суммы их э. д. с.) на сумму их внутренних сопротивлений (разумеется, э. д. с. уже параллельно работающих машин не суммируется).

Для такого более точного регулирования хода машины и служат фазовые лампы L_1 и L_2 .

Пока напряжения U_m и U_c направлены друг другу навстречу, эти лампы не горят, так как U_m приближенно уже равно U_c ; вследствие существования небольшой разницы в продолжительности периода сети и машины, однако, постепенно получается, что знаки у сети и у машины становятся разными на все большие и большие промежутки времени, как это показано на фиг. 98b, где одна синусоида дает ход изменений U_c , а другая — U_m . Как видим, в этом случае период U_m меньше периода U_c , машина идет слишком скоро. Лампы при этом понемногу накаливаются.

В момент А напряжения сети и машины прямо противоположны; около этого момента лампы горят ярко; затем они начинают тухнуть, ибо знаки U_m и U_c начинают на все большие промежутки времени делаться одинаковыми.

Мы должны изменять число оборотов первичного двигателя до тех пор, пока лампы не начнут потухать на долго, на несколько (10) секунд, и тогда в момент их потухания мы можем включить рубильник.

После этого машина оказывается присоединенной к сети, и небольшое оставшееся неурегулированным неравенство в числе периодов (лампы ведь загорелись бы, наконец, опять) выравнивается взаимодействием сети и самой машины, как именно показывають следующие параграфы.

Можно лампы L_1 и L_2 включить иначе, именно: одну между зажимами 1_c и 2_m , а другую — между 2_c и 1_m ; тогда, очевидно, включение рубильника надо производить в момент наиболее яркого горения ламп.

Если машина предназначена работать двигателем, то теперь тот первичный двигатель, который ее вращал (в этом случае чаще всего электрический небольшой двигатель), от нее отсоединяется, а синхронная машина нагружается механически, например, начинает вращать центробежный насос или воздуходувную машину.

Если же она должна работать генератором, т. е. должна быть нагружена электрически, мы должны приложить к ней увеличенную механическую мощность со стороны этого первичного двигателя.

Перейдем к разбору этого вопроса.

§ 55. Работа синхронной машины генератором на бесконечно сильную сеть

Обычно синхронный генератор работает продолжительно при одном и том же токе i_a в цепи возбуждения, т. е. при постоянной э. д. с., индуктируемой главным полем, полем ротора.

Иногда приходится возбуждение увеличивать, иногда — уменьшать, но эти „переходные процессы“ нас пока не интересуют, мы будем считать возбуждение и э. д. с. E постоянными; затем уже мы учтем, какое влияние производит изменение их.

Кроме возбуждения будем считать постоянным напряжение U машины, ибо, как сказано выше, будем полагать, что машина работает на бесконечно сильную сеть.

Для выводов воспользуемся векторной диаграммой фиг. 28, помня, что она точна только для машин без выступающих (или ясно выраженных) полюсов (фиг. 12). Но в теоретической электротехнике нам надо усвоить лишь общие теоретические подходы к изучению явлений в машинах, линиях передачи и т. д., детали же должны изучаться в специальных курсах.

Чтобы полнее уяснить себе, как синхронная машина может быть нагружена — как генератор или как двигатель, следует остановиться на выводе формулы для ее мощности.

Будем рассматривать сначала работу ее генератором.

Выражение $UI \cos \varphi_a$ представляет мощность, отдаваемую машиной в сеть. Назовем ее электрической и обозначим через P_e .

$$P_e = UI \cos \varphi_a. \quad (55,1)$$

Прибавим к этой мощности потери в обмотке машины $I^2 R_{\text{мн}}$, получим мощность, выражение которой

$$UI \cos \varphi_{\text{м}} + I^2 R_{\text{мн}}$$

преобразуем так:

$$I(U \cos \varphi_{\text{м}} + I R_{\text{мн}}).$$

Достаточно взглянуть на фиг. 28, чтобы увидеть, что выражение в скобках есть $E \cos \varphi_{\text{м}}$. Сумму $P_{\text{м}}$ и $I^2 R_{\text{мн}}$ назовем механической мощностью машины и обозначим через $P_{\text{м}}$; таким образом

$$P_{\text{м}} = EI \cos \varphi_{\text{м}} = P_{\text{э}} + I^2 R_{\text{мн}}. \quad (55,2)$$

Если к $P_{\text{м}}$ прибавить потери на трение в машине (вала в подшипниках, ротора о воздух и щеток о кольца) и потери на перемагничивание железа в статоре (отражающиеся в виде механического усилия, которое надо развить, чтобы электромагниты, когда в них есть ток, двигать мимо статора), то получим всю мощность того первичного двигателя (например, паровой турбины), который вращает наш синхронный генератор. Те и другие потери являются постоянными и от нагрузки, от электрической мощности генератора не зависящими. Их можно поэтому причислить к потерям в самом первичном двигателе и, таким образом, исключить из формул. Тогда можно сказать, что со стороны первичного двигателя к синхронной машине приложена механическая мощность $P_{\text{м}}$, которая в генераторе превращается в электрическую, и из последней часть ее $I^2 R_{\text{мн}}$ переходит в обмотке в тепло, а часть $UI \cos \varphi_{\text{м}}$ выходит из генератора в виде электрической мощности в сеть.

Будем считать возбуждение генератора постоянным, следовательно, постоянной и э. д. с. его E ; кроме того, постоянны U и f .

Для последующего полезно выразить механическую мощность машины $P_{\text{м}}$ в функции угла θ между э. д. с. генератора E и напряжением на зажимах U , т. е. в формуле

$$P_{\text{м}} = EI \cos \varphi_{\text{м}}$$

две переменные величины I и $\cos \varphi_{\text{м}}$ выразить в функции угла θ .

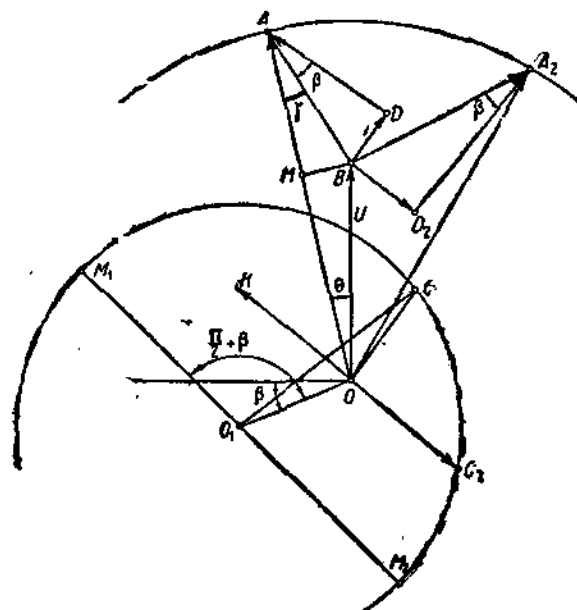
Для этого начертим диаграмму напряжений $OBDA$ (фиг. 99) и напомним следующие соотношения:

Очевидно, что $\vec{E}$ или $\vec{OA}$ равно сумме проекции на OA векторов составляющих, т. е. вектора OB и вектора $\vec{BA}$,

$$E = U \cos \theta + I Z_{\text{мн}} \cos \gamma. \quad (55,3)$$

С другой стороны, длина перпендикуляра BM на линию OA может быть выражена двояко — из $\triangle MOB$ и $\triangle MAB$, откуда и получаем

$$I \sin \theta = I Z_{\text{мн}} \sin \gamma. \quad (55,4)$$



Фиг. 99.

Далее

$$\gamma = \angle OAD - \beta = \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_e\right) - \beta,$$

поэтому уравнения (55,3) и (55,4) переписываются так:

$$E = U \cos \theta + I Z_{\text{вну}} \sin (\varphi_e + \beta), \quad (55,5)$$

$$U \sin \theta = I Z_{\text{вну}} \cos (\varphi_e + \beta). \quad (55,6)$$

Из этих уравнений мы можем определить $I \cos \varphi_e$ и поставить новое выражение вместо этой величины в формулу для P_m .

Для этого уравнения (55,5) и (55,6) преобразуем так:

$$I \sin (\varphi_e + \beta) = \frac{E - U \cos \theta}{Z_{\text{вну}}},$$

$$I \cos (\varphi_e + \beta) = \frac{U \sin \theta}{Z_{\text{вну}}},$$

или

$$I \sin \varphi_e \cos \beta + I \cos \varphi_e \sin \beta = \frac{E - U \cos \theta}{Z_{\text{вну}}},$$

$$I \cos \varphi_e \cos \beta - I \sin \varphi_e \sin \beta = \frac{U \sin \theta}{Z_{\text{вну}}}.$$

Если мы умножим первое уравнение на $\sin \beta$, а второе — на $\cos \beta$ и сложим их, то получим

$$I \cos \varphi_e = \frac{E \sin \beta + U \sin (\theta - \beta)}{Z_{\text{вну}}},$$

так что

$$P_m = \frac{E^2 \sin \beta + EU \sin (\theta - \beta)}{Z_{\text{вну}}}. \quad (55,7)$$

Эта важная формула выражает нам механическую мощность генератора в функции только одной переменной величины, именно угла θ .

С ростом θ увеличивается и $\sin (\theta - \beta)$ и растет P_m , пока $\sin (\theta - \beta)$ не достигает единицы; это будет при угле θ , равном

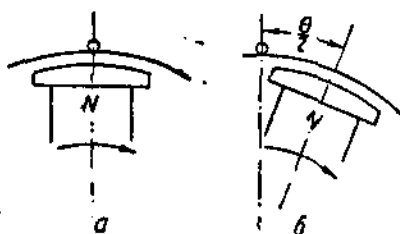
$$\theta_m = \frac{\pi}{2} + \beta. \quad (55,8)$$

Если угол θ увеличится еще больше, $\sin (\theta - \beta)$ уже уменьшится, уменьшится и P_m . Это надо понимать следующим образом:

Каков физический смысл угла θ ? Электродвигающая сила опережает в фазе на угол θ напряжение U ; последнее запаздывает на него.

На фиг. 100а показано положение полюса в момент максимума э. д. с. в обмотке, которая для наглядности представлена одним проводником; на фиг. 100б показано положение полюса позднее на время $\tau = \frac{\theta}{2\pi} T$, т. е. именно в момент

максимума напряжения. Геометрический угол между осями полюса в обоих положениях равен $\frac{\theta}{p}$, ибо углу сдвига фаз в π соответствует не полуокружность статора, а только $\frac{1}{p}$ часть полуокружности.



Фиг. 100а и б.

Если мы желаем, чтобы генератор отдавал в сеть мощность, большую прежней, мы должны подвести к нему механическую мощность $P'_м$, большую прежней $P_м$.

Физико-механический процесс при этом следующий:

Мы воздействуем на приток пара в паровую турбину, именно увеличиваем его; от этого растет приложенная к генератору механическая мощность; избыток ее $P'_м - P_м$ еще не превращается в электрическую по формуле (55,7), так как угол θ еще прежний, а идет на увеличение кинетической энергии ротора, так что вырастает его линейная скорость; вследствие роста скорости в следующие периоды тока окажется, что в те моменты, когда напряжение сети U имеет максимум, полюса оказываются продвинувшимися уже на угол θ' , больший прежнего θ , а это обозначает, что и на векторной диаграмме и в формуле (55,7) надо вместо θ подставить больший угол θ' ; но большему θ' соответствует по формуле (55,7) и большее $P'_м$ и, как будет сказано далее, также и большее $P'_э$, т. е. большая отдаваемая в сеть мощность. Если новое $P'_м$, определяемое в функции θ формулой (55,7), еще не сравнялось с подведенной от паровой турбины мощностью, рост угла θ , т. е. рост скорости, будет продолжаться и следующие несколько периодов, пока этот угол θ' и определяемая им мощность $P'_м$ не сравняются с подведенной к генератору мощностью; как только они сравняются, тогда генератор оказывается способным превратить всю подведенную к нему механическую мощность в электрическую по соотношениям (55,7) и (55,2), и на прирост кинетической энергии ротора не остается ничего; ротор, опередив, так сказать, свои прежние положения в те же моменты периода, увеличив угол θ , возвращается теперь опять с постоянной, синхронной, прежней скоростью.

Ротор при увеличении подведенной к нему механической мощности делает как бы скачок, опережает те свои положения, которые он занимал бы в последующие моменты, если бы мощность не увеличивалась, и затем работает с увеличенным θ и с прежней скоростью.

Угол θ носит название угла опережения.

Таким же образом мы можем, увеличивая еще больше приток пара в паровую турбину, увеличивать и далее отдаваемую в сеть мощность; пределом для такого увеличения явится достижение углом θ его наибольшей величины $\theta_m = \frac{\pi}{2} + \beta$ [формула (55,8)].

Когда $\theta = \theta_m$, то $\sin(\theta - \beta)$ в формуле (55,7) равен единице. Всякое дальнейшее увеличение приложенной или подведенной к ротору механической мощности, вызывая стремление ротора к увеличению кинетической энергии, ведет к росту θ беспрежнему, но за этим увеличением θ не следует уже увеличение $P_м$ генератора, так как $\sin(\theta - \beta)$ в формуле (55,7) будет теперь уменьшаться и будет уменьшаться и $P_э$ и связанная с ним электрическая отдаваемая в сеть мощность $P'_э$. Таким образом избыток подведенной к ротору мощности не может генератором быть поглощен и превращен в электрическую, а превращается и далее в кинетическую мощность, отчего $\dot{\theta}$ растет дальше: $P_м$ при этом непрерывно с ростом θ убывает, а скорость растет, и генератор, наконец, как говорят, выпадает из синхронизма; число периодов его тока поднимается очень сильно, растет его э. д. с. со скоростью, растет сила тока и состояние его приближается быстро к короткому замыканию. Генератор должен быть возможно быстрее отключен от сети; для этой цели служат автоматы.

Докажем теперь оставшееся недоказанным утверждение, что с ростом θ растет не только $P_м$, но и $P'_э = UI \cos \varphi_э$.

Выразим $P'_э$ в функции только угла θ , как это мы сделали с $P_м$.

Для этого спроектируем векторы E , U и IZ_{syn} на направление вектора U и аналогично (55,3) и (55,5) получим

$$U = E \cos \theta - IZ_{syn} \sin(\varphi_э + \beta), \quad (55,9)$$

проектируя же на направление, перпендикулярное к U , будем иметь аналогично (55,4) и (55,6)

$$E \sin \theta = I Z_{\text{ану}} \cos (\varphi_n + \beta). \quad (55,10)$$

Преобразуя эти два уравнения аналогично преобразованиям уравнений (55,5) и (55,6) и решая их, мы найдем из них

$$I \cos \varphi_n = \frac{E \sin (\theta + \beta) - U \sin \beta}{Z_{\text{ану}}},$$

и следовательно,

$$P_s = UI \cos \varphi_n = \frac{UE \sin (\theta + \beta) - U^2 \sin \beta}{Z_{\text{ану}}}. \quad (55,11)$$

Отсюда следует, что с ростом θ отдаваемая в сеть мощность P_s тоже растет

Следует заметить, что перестает расти эта мощность при достижении углом $\theta + \beta$ значения $\frac{\pi}{2}$, или при

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \beta,$$

т. е. раньше, чем перестает расти

$$P_{\text{м}} = P_s + I^2 R_{\text{ану}};$$

при θ , большем $\frac{\pi}{2} - \beta$, но еще меньшем $\frac{\pi}{2} + \beta$, весь рост $P_{\text{м}}$ получается за счет роста потерь $I^2 R_{\text{ану}}$.

§ 56. Работа синхронной машины при переменном возбуждении на бесконечно сильную сеть

Если мы, не увеличивая приложенной к машине механической мощности, изменим, например, увеличим ее возбуждение, то в формуле (55,7) э. д. с. E станет больше, следовательно, должен соответственно уменьшиться угол θ , чтобы $P_{\text{м}}$ осталось прежним.

При этом изменится угол сдвига фаз φ_n между током I и напряжением U .

У читателя может явиться вопрос, как это может быть, если при этом не происходит соответствующих изменений с нагрузкой, т. е. если во внешней цепи не происходит замены индуктивности на емкость или наоборот, а нагрузка остается постоянной и, следовательно, постоянным остается и соотношение между активным и реактивным ее сопротивлениями.

Ответ на этот вопрос следующий: если все генераторы, работающие параллельно на сеть, одинаковы и нагружены и возбуждены одинаково, т. е. их мощности и э. д. с. равны, то $\cos \varphi_n$ для всех их один и тот же и зависит исключительно от отношения $X_{\text{вне}}$ и $R_{\text{вне}}$ (по формуле $\tan \varphi_n = \frac{X_{\text{вне}}}{R_{\text{вне}}}$; если же возбуждение и э. д. с. какой-нибудь машины изменяются, то изменяется и сдвиг фазы тока в этой машине относительно напряжения, причем оказывается, что часть этого тока не идет от собирательных шин во внешнюю цепь, а направляется в другие генераторы, там прикладывается геометрически к их току и затем возвращается в наш генератор.

Вопрос осложняется, когда генераторы неодинаковы, другими словами, когда их конструкции разнятся настолько между собой, что кривые э. д. с. получаются у них разные. Тогда вообще нельзя подобрать такого возбуждения у них, чтобы не было этих внутренних „уравнительных“ токов между самими машинами.

§ 57. Работа синхронной машины двигателем. Синхронный компенсатор

Если при постоянном возбуждении, следовательно, при постоянной э. д. с. E и постоянном U угол θ уменьшается, это означает, что уменьшается подводимая к машине механическая мощность P_m и отдаваемая в сеть электрическая мощность P_e .

При значении угла θ , равном нулю, имеем из формулы (55,7)

$$P_m = \frac{(E - U) E \sin \beta}{Z_{\sin \mu}} \quad (57,1)$$

и получаем диаграмму фиг. 101, если $E > U$.

Если же при этом $E < U$, то мощность получится из формулы (57,1) уже отрицательной, т. е. мы не подводим к машине механическую мощность P_m , а берем ее от машины, машина работает уже как двигатель.

То же будет и при $E > U$, если θ стало отрицательным и именно такой величины, что по формуле (55,7) мощность P_m получается отрицательной; заменим в формуле (55,7) θ через $(-\theta)$ и мы получим подводимую мощность

$$P_m = \frac{E^2 \sin \beta - EU \sin (\theta + \beta)}{Z_{\sin \mu}}$$

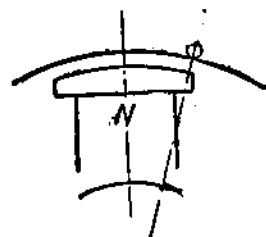
Фиг. 101.

или отдаваемую двигателем механическую мощность

$$P_{m.дв} = \frac{EU \sin (\theta + \beta) - E^2 \sin \beta}{Z_{\sin \mu}} \quad (57,2)$$

Нагружая двигатель механически, т. е. тормозя его, мы вызываем в нем как бы стремление остановиться; при этом (фиг. 99) растет в отрицательном направлении — в направлении отставания E от U — угол θ . На фиг. 102 изображен полюс двигателя в момент максимума напряжения.

Как только θ увеличивается, увеличивается по только что написанной формуле (57,2) механическая мощность двигателя $P_{m.дв}$, и если она сравнялась с тормозящей мощностью, двигатель с таким углом сдвига θ между U и E и будет работать дальше; если же еще не сравнялась, то θ будет расти далее, пока это равенство не будет достигнуто.



Фиг. 102.

Мощность $P_{m.дв}$ достигает максимума, очевидно, при $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$, т. е. при

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \beta.$$

Векторная диаграмма двигателя дана на фиг. 99. При этом ток — вектор OC_2 — имеет сдвиг фазы относительно напряжения, больший $\frac{\pi}{2}$. В последнем случае произведение $UI \cos \varphi_m$ отрицательно; это показывает, что теперь уже наша машина не посылает мощность в сеть, а берет ее из сети, т. е. она работает как синхронный двигатель. Что касается силы тока, то можно сказать, что машина посылает в сеть ток OC_2 или берет из сети ток $OK = -OC_2$. Этот ток опережает напряжение, значит, наша машина действует не просто как двигатель, но и оказывает влияние на сеть как конденсатор.

Читателю нетрудно заметить, перечерчивая четырехугольник $OBDA$ для разных величин э. д. с. OA_2 , что по мере увеличения ее и при уменьшении $\angle BOA_2$

Сравнивая это уравнение (а) с уравнением (53,V) и фиг. 97, видим, что уравнение (а) выражает окружность, причем в уравнении (53,V) надо принять

$$\dot{A} = -\frac{U}{Z_{\text{вну}}} e^{-j\varphi_0} = -\frac{U}{Z_{\text{вну}}} e^{-j\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)},$$

или, так как $-1 = \cos \pi + j \sin \pi = e^{j\pi}$,

$$\dot{A} = \frac{U}{Z_{\text{вну}}} e^{j(\pi - \varphi_0)} = \frac{U}{Z_{\text{вну}}} e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)},$$

и далее

$$B = \frac{E}{Z_{\text{вну}}}$$

есть радиус этой окружности, угол же $\theta - \varphi_0$ играет роль угла φ в уравнении (53,V).

Проводим на фиг. 99 линию OO_1 под углом β к горизонтали влево вниз, т. е. под углом $+\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)$ или $+(\pi - \varphi_0)$ к вертикали OB .

Наносим на ней отрезок $OO_1 = \frac{U}{Z_{\text{вну}}}$ и радиусом $O_1C = \frac{E}{Z_{\text{вну}}}$ из точки O_1 как из центра описываем окружность; она и будет геометрическим местом концов вектора силы тока при данном напряжении U , при данном возбуждении (э. д. с. E) и при переменной нагрузке.

Нетрудно видеть, что

$$\triangle O_1OC \sim \triangle OBA,$$

так как все стороны первого пропорциональны сторонам второго¹, так что

$$\angle OO_1C = \angle BOA = \theta,$$

отложим

$$\angle OO_1M_1 = \frac{\pi}{2} + \beta$$

и

$$\angle OO_1M_2 = \frac{\pi}{2} - \beta.$$

Очевидно, что точки M_1 и M_2 лежат на диаметре окружности. Эти точки и отмечают крайние теоретически возможные положения конца вектора тока OI , при работе генератором и OM_2 при работе двигателем.

Между этими двумя точками M_1 и M_2 перемещается конец вектора I с изменением нагрузки машины при постоянном возбуждении.

Другая половина окружности значения не имеет.

Эта окружность называется круговой диаграммой Blondela и в теории машин переменного тока играет важную роль.

Очевидно, что при изменении возбуждения и, следовательно, э. д. с. E мы получим другую окружность большего или меньшего радиуса, всегда равного $\frac{E}{Z_{\text{вну}}}$.

¹ Обозначим масштабы векторов на диаграмме

1 mm $\equiv m$ вольт и 1 mm $\equiv n$ ампер. Тогда $BA \cdot m = IZ$, а $OC \cdot n = I$; $BA = \frac{IZ}{m}$; $OC = \frac{I}{n}$ и $BA:OC = \frac{n}{m} Z_{\text{вну}}$ и т. д.

§ 59. Линии мощностей Гёрреса

Для представления различных режимов работы синхронной машины на сеть с постоянным напряжением чрезвычайно удобны также линии мощностей Гёрреса. Введем условие, что остается постоянной электрическая мощность машины

$$P_e = UI \cos \varphi_n = C. \quad (59,1)$$

В основание выводов положим опять соотношение

$$\dot{E} = \dot{U} + i \dot{Z}_{\text{вну}}. \quad (59,2)$$

Построим (фиг. 104) диаграмму напряжений для данной мощности и $\cos \varphi_n = 1$. Это будет четырехугольник OA_1D_1B , у которого $BD_1 = I_1 R_{\text{вну}}$ направлено по $\dot{U}$, так что он превратился в треугольник OA_1D_1 ; мощность при этом

$$P_e = C = UI_1.$$

Затем построим векторную диаграмму для $\cos \varphi_n$, не равного единице: это будет четырехугольник OA_1D_2B . Так как электрическая мощность при этом та же самая, то, очевидно,

$$I \cos \varphi_n = I_1.$$

Разложим силу тока I на два слагаемых и напишем

$$\dot{I} = I \cos \varphi_n - j I \sin \varphi_n = I_1 - j I \sin \varphi_n.$$

Далее из (59,1)

$$I = \frac{C}{U \cos \varphi_n},$$

следовательно,

$$\dot{I} = I_1 - j \frac{C}{U} \cdot \operatorname{tg} \varphi_n. \quad (59,3)$$

Подставляя выражение (59,3) вместо I в формулу (59,2), получаем

$$\dot{E} = \dot{U} + I_1 \dot{Z}_{\text{вну}} - j \frac{C}{U} \dot{Z}_{\text{вну}} \operatorname{tg} \varphi_n.$$

Здесь $\dot{E}$ получается как сумма двух векторов: вектора постоянного

$$\dot{U} + I_1 \dot{Z}_{\text{вну}},$$

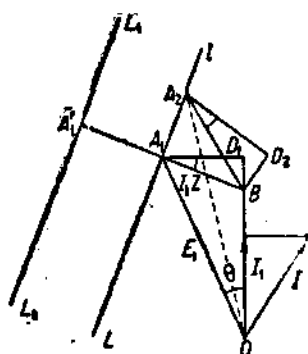
который есть вектор $\dot{E}_1 = \overline{OA_1}$, т. е. вектор э. д. с. при $\cos \varphi_n = 1$, и вектора

$$\dot{U}_0 = -j \frac{C}{U} \dot{Z}_{\text{вну}},$$

умноженного на переменный скаляр $\operatorname{tg} \varphi_n$; направление этого вектора $\dot{U}_0$, очевидно, перпендикулярно направлению вектора

$$I_1 \dot{Z}_{\text{вну}} = \overline{BA_1},$$

так как вектор $\dot{U}_0$ получается из вектора $\overline{BA_1}$ умножением последнего на $(-j)$ и на скаляр $\frac{C}{UI_1}$.



Фиг. 104.

Таким образом

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + U_0 \operatorname{tg} \varphi_a = \overline{OA_1} + \overline{A_1A_2},$$

где

$$\overline{A_1A_2} \perp \overline{BA_1}.$$

Сравнивая последнее выражение для $\vec{E}$ с уравнением (53,1) видим, что линия LL_1 , проходящая через точку A_1 и перпендикулярная к BA_1 , есть геометрическое место концов вектора $\vec{E}$ при переменном возбуждении и постоянной электрической мощности P_a .

Очевидно, что если P_a увеличится в m раз, то I_1 , сила тока при $\cos \varphi_a = 1$, увеличится тоже в m раз, и в m раз увеличится вектор $\overline{BA_1}$, т. е. расстояние линии мощности LL от точки B .

Если машина работает двигателем, то P_a отрицательно, I_1 , посылаемый в сеть, направлен под тупым углом к $\vec{U}$ и линии мощностей расположится параллельно прежним, но вправо от точки B (фиг. 105).

Задаваясь очень небольшой мощностью P_a , достаточной лишь для вращения двигателя без нагрузки и покрытия в нем всех потерь, мы проведем соответствующую ей линию мощности $L_0 - L_0$.

Точка A конца вектора $\vec{E}$ при перевозбуждении двигателя лежит высоко на этой линии.

Сила тока, который двигатель берет из сети, как уже нам известно, будет направлена параллельно DB и представится вектором I_{ck} ; регулируя возбуждение двигателя, можно увеличивать или уменьшать эту силу тока, опережающую напряжение на угол, весьма близкий к прямому.

Это есть работа синхронного двигателя в качестве синхронного компенсатора.

Точно прямого угла $\vec{I}_k$ и $\vec{U}$ нельзя получить, так как нужна некоторая мощность $UI_k \cos(U, I_k)$, чтобы вращать двигатель и покрыть в нем потери.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

МНОГОФАЗНЫЕ ТОКИ

§ 60. Двухфазный ток

По поводу фиг. 23 мы сказали, что в современных машинах сторона катушки обмотки статора занимает от трех до пяти пазов. При этом у нас оставались бы еще незанятые пазы. Поместим в них еще одну обмотку так, чтобы „стороны“ ее катушек пришлись как раз по середине между „сторонами“ катушек уже существующей обмотки. Таким образом, в то время как проводники одной обмотки находятся, например, все как раз под серединами полюсов и в них э. д. с. достигла максимума, — другая обмотка находится как раз на нейтральных линиях, и в ней э. д. с. равна нулю. Когда первая обмотка через четверть периода попадет в нейтральные линии и э. д. с. в ней будет равна нулю, тогда вторая обмотка будет находиться под серединами полюсов, и в ней э. д. с. достигнет максимума.

Обмотки эти всегда делаются совершенно одинаковыми, т. е. в сторонах их катушек имеется одинаковое число проводников, и размещены они в одинаковом числе пазов у обеих обмоток; поэтому амплитуды и, следовательно, эффективные значения э. д. с. обеих обмоток равны. Вследствие сдвига одной

обмотки относительно другой на половину полюсного деления будет существовать, таким образом, сдвиг в фазе в четверть периода между э. д. с. этих обмоток, по амплитуде равными.

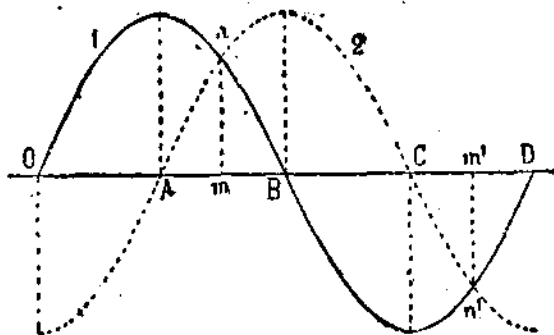
У статора теперь имеются четыре зажима: два — от концов одной обмотки и два другие — от концов другой обмотки. Каждую обмотку мы можем нагружать любым током независимо от того, какой ток берется от другой обмотки; единственным ограничивающим произвол обстоятельством при этом является нагревание машины. Нагрузив обе обмотки до наибольшей, допустимой из соображений о нагреве машины силы тока, мы получим от машины мощность, почти вдвое большую прежней, — при одной обмотке; мы говорим „почти“, так как при двух обмотках допустимая наибольшая сила тока получится для каждой обмотки меньше, чем при одной единственной обмотке, иначе в статоре выделится слишком много тепла и получится перегрев. Конечно, и машина, приводящая во вращение генератор переменного тока (т. е. вращающая его ротор), называемая „первичным двигателем“, должна быть теперь вдвое большей мощности.

Таким образом небольшим повышением стоимости генератора от наложения второй обмотки вдвое увеличивается мощность, которую можно получить от него.

К месту потребления электрической энергии идут от генератора четыре провода — по два от каждой обмотки; между концами проводов, принадлежащих одной и той же обмотке, и включается нагрузка. Заметим, что нельзя обе обмотки включить на одну и ту же нагрузку, например, группу ламп, потому что такое параллельное включение двух источников э. д. с. при переменном токе только в том случае не представляет опасности, если эти э. д. с. имеют не только равные амплитуды, но совершенно одинаковые фазы; при выполнении этого условия два источника тока в параллельном включении имеют э. д. с., направленные (внутри замкнутой цепи, состоящей из этих двух источников) во всякий момент навстречу одна другой; — ни одна из них не может послать тока через другую обмотку. В вышеописанном случае э. д. с. двух обмоток различаются в фазе на четверть периода; на фиг. 106 нанесены две соответствующие синусоиды 1 и 2; мы видим, что э. д. с. направлены будут друг по отношению к другу навстречу только в течение двух четвертей периода, AB и CD , причем равны они при этом только в моменты m и m' ; следовательно, за исключением этих моментов в течение всего периода в цепи из двух обмоток будет действовать переменная э. д. с. и будет циркулировать ток короткого замыкания.

Система двух токов, сдвинутых в фазе на четверть периода, называется двухфазным током, соответствующий генератор — генератором двухфазного тока.

В настоящее время двухфазный ток встречается крайне редко, а потому в дальнейшие подробности этой системы и ее видоизменения мы не будем входить.



Фиг. 106.

§ 61. Трехфазный ток

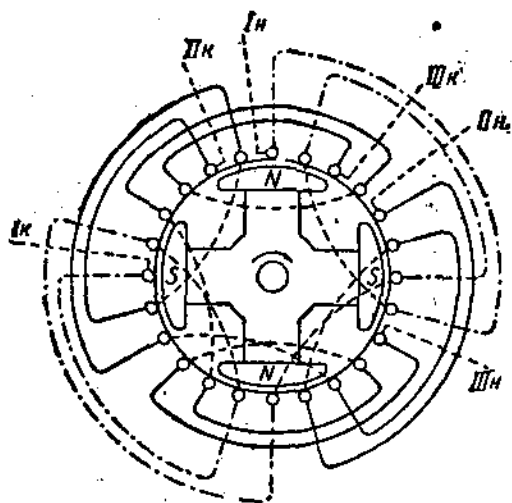
Переходим к получившей всеобщее распространение трехфазной системе, при которой генератор имеет на статоре три обмотки.

На фиг. 107 изображена схематично обмотка трехфазного тока, состоящая из трех одинаковых обмоток, сдвинутых по окружности статора, — вторая относительно первой и третья относительно второй, — на одну треть двойного полюс-

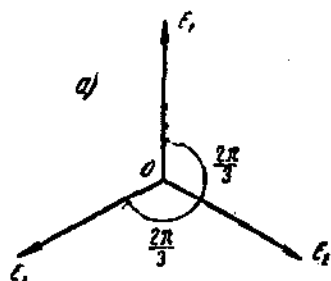
ного деления. Следствием этого сдвига является то, что э. д. с. во второй обмотке запаздывает относительно э. д. с. в первой на одну треть периода, а э. д. с. в третьей — на одну треть периода относительно э. д. с. во второй.

Векторы, изображающие эти три э. д. с., будут составлять углы в $\frac{2}{3}\pi$, или 120° .

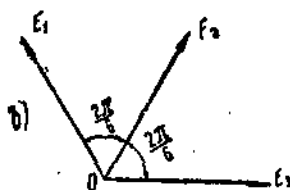
На фиг. 107 первая обмотка, или, как обыкновенно ее называют, хотя и не совсем правильно, „первая фаза“, начинается у верхнего северного полюса, и ее начало отмечено подходящим к нему от зажима проводом с буквой I_K („начало“). Обмотка, как и остальные, имеет два паза на каждый полюс, занятые



Фиг. 107.



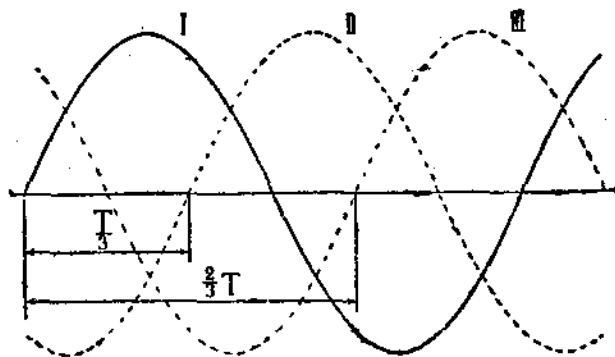
Фиг. 108a.



Фиг. 108b.

ее проводниками; это выражают словами: обмотка имеет два (или вообще q) паза на полюс и на фазу. Конец первой фазы присоединен к проводу I_K („конец“), идущему к другому зажиму.

Вторая фаза имеет начало II_K и конец II_K , и третья фаза — начало III_K и конец III_K .



Фиг. 109.

Электродвижущие силы всех фаз могут быть представлены векторами фиг. 108a. Заметим в предупреждение обычных ошибок начинающих, что если бы мы вторую и третью фазы передвинули из теперешнего положения на окружности статора и поместили начало второй фазы в паз, в котором сейчас лежит проводник, отмеченный через III_K (т. е. сдвинув относительно начала первой фазы лишь на одну треть полюсного деления про-

стого, не двойного), а начало третьей — соответственно в паз, где сейчас находятся II_K , то э. д. с. этих трех обмоток представились бы векторами фиг. 108b; такая система не употребляется. Если мы начертим синусоидальные кривые э. д. с. в трехфазной обмотке согласно фиг. 108a, то получим фиг. 109. Предлагаем чита-

тельно нарисовать синусоиды для неправильной обмотки, только что описанной и соответствующей фиг. 108b.

От машины трехфазного тока, таким образом, идут шесть проводов; мы имеем три независимые друг от друга цепи, в которых действуют э. д. с. с равными амплитудами:

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= E_m \sin(\omega t), \\ e_2 &= E_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right), \\ e_3 &= E_m \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right), \end{aligned} \right\} \quad (61,1)$$

отстающая каждая от предыдущей на одну треть периода.

Оказывается, что число проводов можно сократить по крайней мере до четырех, а в некоторых случаях и до трех. Почему это возможно, объясняется дальше.

Названия „конца“ и „начала“ у обмоток, конечно, условны, относительны; можно на фиг. 107 все „концы“ назвать „началами“, и наоборот.

§ 62. Соединение звездой

Разберем теперь случай, когда все три обмотки — все три фазы — нагружены одинаково, т. е. сила тока и сдвиг фаз между силой тока и э. д. с. во всех трех цепях одинаковы. Тогда силы токов могут быть выражены так:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= I_m \sin(\omega t + \varphi), \\ i_2 &= I_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} + \varphi\right), \\ i_3 &= I_m \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3} + \varphi\right), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Из тех шести проводов, которые идут от машины к месту потребления электрической энергии, выделим три провода „одноименных“, т. е. идущих от трех „начал“ или от трех „концов“ обмоток, и соединим их вместе в один провод; что от этого произойдет? Какова прежде всего будет сила тока в этом проводе? Ясно, что она будет равняться сумме трех токов в отдельных проводах. Чтобы найти ее, сложим эти токи, т. е. сложим уравнения (1). Легко доказать (предоставляем это проверить читателю самому), что в правой части мы получим нуль, ибо при всяком α

$$\sin \alpha + \sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha - \frac{4\pi}{3}\right) = 0.$$

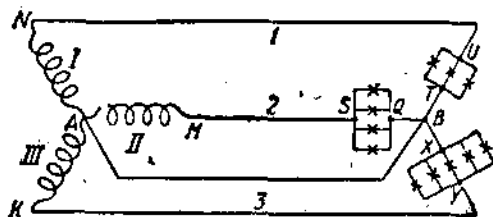
Итак при одинаковой нагрузке, т. е. одинаковой амплитуде силы тока, во всех трех фазах сумма мгновенных значений сил токов в них равна нулю.

Но если сила тока в этом проводе, сложенном из трех проводов, равна нулю всегда, то и провод этот не нужен, и его можно выбросить, оставив только соединение трех концов обмоток в одну точку у самого статора. Таким образом, когда можно иметь уверенность, что нагрузка всех трех фаз всегда будет одинакова, тогда можно обойтись при трехфазном токе только тремя проводами; когда же этой уверенности нет, четвертый провод надо оставить, чтобы по нему и шел ток, равный сумме трех токов в фазах.

Если мы в случае разной фазовой нагрузки попробуем обойтись без четвертого провода, то силы токов автоматически должны будут установиться такими, чтобы их сумма была равна нулю, а при этом, как будет ясно из дальнейшего, напряжения распределятся на фазы неодинаково, и нагрузка, например, лампы, будет находиться в разных фазах под разными напряжениями.

Четвертый провод называется „нулевым“, или „нейтральным“.

Описанное соединение фаз обмотки машины и нагрузки изображено схематически на фиг. 110. Здесь представлены условно три фазы обмотки машины переменного тока, концы которых присоединены к общему „нулевому“ проводу. Далее изображено включение ламп в сеть в разном числе на каждую фазу. Точка *A*, в которой соединяются все три фазы обмотки машины и нулевой провод, называется нулевой точкой, или нейтральной. Возможно, как увидим ниже, и иное соединение фаз для той же цели, чтобы сэкономить в количестве проводов; поэтому данное соединение носит особое название в отличие от другого — оно называется соединением фаз „звездой“.



Фиг. 110.

Рассматривая правую часть фиг. 110, мы видим, что она по способу включения нагрузки похожа на левую; точка *B* — место соединения всех трех „фаз“ нагрузки и подключения нулевого провода — называется нулевой точкой, а все соединение — соединением, или включением, нагрузки звездой.

Остановимся на некоторых обозначениях и соотношениях при этом включении фаз обмотки машины.

Прежде всего заметим, что справедливость того, что ток в нулевом проводе при одинаковой, или, как принято говорить, симметричной, нагрузке фаз равен нулю, мы можем доказать, пользуясь диаграммой векторов токов в фазах, а не тригонометрическими формулами (62, I). Каждый из этих токов сдвинут относительно своей э. д. с. в фазе на одну и ту же величину, следовательно, векторы этих токов составляют углы между собой $\frac{2\pi}{3}$. Геометрическая сумма таких векторов

равна нулю; эти векторы составляют замкнутый треугольник, следовательно, и сумма мгновенных значений этих токов, или ток в нулевом проводе равен всегда нулю.

Введем далее такие обозначения.

Силу тока в одной фазе обмотки машины обозначим через I_ϕ ; силу тока в проводах, идущих от машины к нагрузке, — через I_λ (ток в „линии“ передачи энергии); напряжение между началом и концом фазы — через U_ϕ ; напряжение между двумя проводами (исключая нулевой) у машины, — напряжение в линии, — через U_λ .

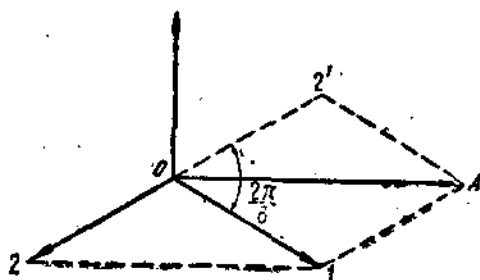
Для соединения звездой мы, очевидно, будем иметь

$$I_\phi = I_\lambda, \quad (II)$$

так как ток, идущий по „фазе“ машины, не разветвляясь, вступает в провод, в „линию“.

Каково будет напряжение U_λ , например, между проводами 1 и 2 фиг. 110 в точках *M* и *N*? Такую задачу мы уже решили в конце § 51 и нашли, что $U_{12} = 0I \cdot \sqrt{3}$; решим здесь ту же задачу несколько иным путем.

Мгновенная величина этого напряжения складывается из мгновенной разности потенциалов от точки *M* до точки *A*, т. е. от конца к началу фазы *II*, и мгновенной разности потенциалов от *A* до *N*, т. е. от начала к концу фазы *I*. Первое слагаемое есть мгновенное значение напряжения в фазе *II*, взятое с обратным знаком, второе слагаемое есть мгновенное значение напряжения в фазе *I* с неизменным знаком. Поэтому, чтобы получить вектор напряжения между точками *M* и *N*, или вектор U_λ , надо сложить геометрически вектор напряжения в фазе *I* и вектор,



Фиг. 111.

обратный по направлению вектору напряжения в фазе *II*. Это сложение произведено на фиг. 111, где вектор $O2' = -O2$. Складывая $O2'$ с $O1$, получаем вектор OA напряжения между точками *M* и *N*. Длина этого вектора из $\triangle OIA$ получается равной $O1 \cdot \sqrt{3}$.

Следовательно, при соединении звездой

$$U_A = U_\phi \sqrt{3}. \quad (III)$$

Напряжение U_A называется еще также „междуфазовым“, а U_ϕ — „фазовым“. Такое же соотношение существует и между напряжениями

$$U_{US} = U'_A \text{ и } U_{SQ} = U_{UT} = U'_\phi;$$

$$U_{US} = U_{SQ} \sqrt{3}.$$

§ 63. Соединение треугольником

Перейдем теперь к другому возможному соединению фаз обмотки генератора трехфазного тока.

Сложив уравнения (61,1), мы получим в сумме нуль. Следовательно, сумма мгновенных значений трех э. д. с. трехфазной обмотки всегда, во всякий момент, равна нулю. Поэтому все фазы можно соединить так: конец *I* с началом *II*, конец *II* с началом *III* и конец *III* с началом *I*. Такое соединение изображено на фиг. 112.

Здесь все три фазы соединены так, что каждая включена навстречу двум остальным; в этом треугольнике из трех „фаз“ сумма э. д. с. всегда равна нулю: поэтому это соединение подобно параллельному соединению источников тока; пока внешняя цепь не подключена к обмотке, тока в обмотке быть не может.

Нагрузка — лампы — изображена на фиг. 112 включенной тоже аналогичным образом.

Такое включение называется включением, или соединением, фаз „треугольником“.

При этом включении имеются только три провода, нулевого провода и нулевой точки совсем нет.

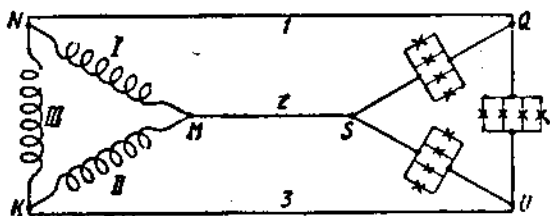
Рассмотрим соотношения напряжений и сил токов при включении фаз треугольником.

Напряжение между началом *M* и *N* двух проводов „линии“ 1 и 2 есть напряжение между началом и концом одной фазы — *I*; поэтому здесь

$$U_A = U_\phi. \quad (I)$$

Ток в линии, т. е., например, в проводе 2, складывается из двух токов: тока, текущего по одной фазе — по *I* — от начала *N* к концу *M* и дальше по проводу 2, и тока, текущего по другой фазе — по *II* — от конца *K* к началу *M* (в точке *M* мы имеем ведь конец одной фазы и начало другой), т. е. тока фазы *II*, взятого с обратным знаком. Такое сложение токов может быть представлено той же фиг. 111. Здесь $O2' = -O2$ представляет ток, обратный току в фазе *II*. OA есть ток в линии I_A . Таким образом для включения треугольником

$$I_A = I_\phi \sqrt{3}. \quad (II)$$



Фиг. 112.

Сравним теперь оба соединения — звезду и треугольник.

На фиг. 110 лампы в каждой фазе нагрузки присоединены нулевым проводом к концу одной фазы обмотки машины и соответствующим проводом, 2 и 3, к началу ее, так что, пренебрегая падением напряжения в проводах, можно считать, что лампы находятся под фазовым напряжением U_ϕ . Если мы отбросим нулевой провод, то напряжение на лампах не изменится только в том случае, когда общее сопротивление ламп в каждой фазе нагрузки одинаково для всех трех фаз, т. е. общее сопротивление ламп, включенных между S и Q такое же, как и между U и T и между X и Y . Рассматривая цепь, составленную из таких частей: фаза I — фаза II — провод 2 — лампы SQ — точка B — лампы TU — провод 1, мы найдем, что все напряжение U_A между M и N распределится при этом поровну между SQ и TU (разлагаясь на геометрические слагаемые $U_{SQ} = U_\phi$ и $U_{TU} = U_\phi$, по амплитуде равные, по фазе сдвинутые на $\frac{2\pi}{6}$).

Если же сопротивление ламп в SQ не равно сопротивлению их в TU , то это напряжение U_A разделится на два геометрических слагаемых уже не равных амплитуд, а пропорциональных общим сопротивлениям этих частей цепи.

В результате лампы в SQ окажутся под другим напряжением, чем лампы в TU , и горение тех и других будет неправильное.

При включении же как фаз обмотки машины, так и ламп треугольником (фиг. 112) лампы в каждой фазе нагрузки будут всегда находиться под фазовым напряжением, независимо от отношений между сопротивлениями отдельных фаз нагрузки. В этом отношении включение треугольником удобнее включения звездой — первое требует и при неравномерной нагрузке фаз всего трех проводов.

Преимуществом включения звездой является более высокое напряжение в линии. Для выяснения этого вопроса надо сначала определить величину мощности при трехфазном токе.

§ 64. Мощность трехфазного тока и измерение ее

Каково бы ни было соединение фаз, при симметричной нагрузке вся мощность машины P в три раза больше мощности одной фазы. Обозначим через φ_ϕ угол сдвига фаз между напряжением фазовым U_ϕ и силой тока через фазу I_ϕ . Тогда

$$P = 3 \cdot U_\phi I_\phi \cos \varphi_\phi. \quad (64,1)$$

В случае соединения звездой

$$U_A = U_\phi \sqrt{3} \text{ и } I_\phi = I_A,$$

следовательно,

$$P = \sqrt{3} U_A I_A \cos \varphi_\phi. \quad (64,2)$$

В случае соединения треугольником

$$U_A = U_\phi \text{ и } I_A = I_\phi \sqrt{3},$$

поэтому

$$P = \sqrt{3} U_A I_A \cos \varphi_\phi.$$

Таким образом, введя величины „линейного“ напряжения U_A и „линейной“ силы тока I_A , в обоих случаях мы получили одно и то же выражение для мощности (64,2).

Пусть мощность P и напряжение фазовое в машине U_ϕ даны. Определим силу тока в линии при передаче этой мощности в двух случаях — при включении фаз машины треугольником и звездой.

Из формулы (64,2) имеем

$$I_A = \frac{P}{\sqrt{3} U_A \cos \varphi_\phi};$$

при соединении треугольником

$$U_A = U_\phi$$

$$I_A = \frac{P}{\sqrt{3} U_\phi \cos \varphi_\phi}.$$

При соединении звездой

$$U_A = \sqrt{3} U_\phi$$

$$I_A = \frac{P}{3 U_\phi \cos \varphi_\phi}.$$

Таким образом при передаче одной и той же мощности сила тока в линии при соединении фаз машины звездой в $\sqrt{3}$ раз меньше, чем при соединении треугольником, следовательно, соответственно меньше потребуется и поперечное сечение проводов. Вот в каком отношении соединение звездой выгоднее соединения треугольником.

Следует заметить, что соединение обмотки в машине может быть одного рода, а соединение нагрузки — другого. Пусть, например, у нас имеются лампы накаливания на 220 В и генератор трехфазного тока, э. д. с. которого достигает в каждой фазе величины всего лишь в 130 В. Включим фазы обмотки машины звездой; тогда напряжение между проводами будет $U_A = 130 \cdot \sqrt{3} = 225 \text{ В}$ — величина, подходящая для ламп, принимая во внимание падение напряжения в проводах. Лампы включим треугольником; тогда все они будут находиться под напряжением приблизительно в 220 В.

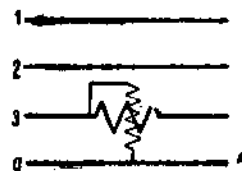
Для дальнейшего следует заметить, что вся изложенная в предыдущих главах теория переменного тока применяется к каждой фазе в отдельности. При симметричной нагрузке во всех фазах можно ограничиться построением векторных диаграмм только для одной фазы; для остальных фаз диаграммы получатся в точности такие же. Диаграммы трех фаз будут повернуты друг относительно друга на углы $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$. В случае же несимметричной нагрузки фаз, например, при разном сдвиге фаз между $\dot{U}_\phi$ и $\dot{I}_\phi$, необходимо вычерчивать диаграммы и вести расчеты для всех фаз в отдельности.

Теперь рассмотрим способы измерения ваттметрами мощности трехфазного тока; здесь могут быть разные случаи в зависимости от того, симметрична или нет нагрузка, имеется или нет, доступен или нет нулевой провод или нулевая точка.

Обратимся сначала к случаю, когда нагрузка симметрична.

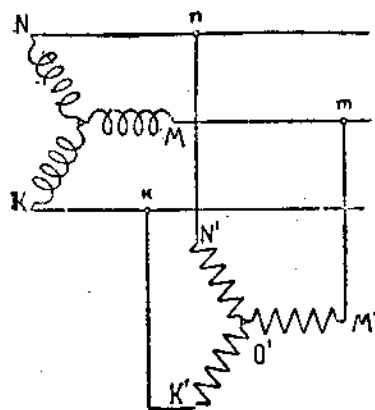
Тогда достаточно измерить мощность в одной фазе, чтобы простым умножением ее на три получить всю мощность трехфазного тока.

Если имеется нулевой провод или нулевая точка, тогда ваттметр включается так: толстая катушка (фиг. 113) включается в любой провод — кроме нулевого — последовательно; один зажим тонкой катушки присоединяется к этому же проводу, а другой зажим — к нулевому проводу или к нулевой точке; тогда тонкая катушка находится как раз под напряжением одной фазы, и ваттметр измеряет мощность $U_\phi I_\phi \cos \varphi_\phi$. Умножая его показание на три, получим всю мощность. Если нулевого провода нет, то можно искусственно создать нулевую точку на основании следующих соображений:



Фиг. 113.

Подключим к трем проводам трехфазного тока в точках $m-n-k$ (фиг. 114) три равных активных сопротивления: $O'N'$, $O'M'$ и $O'K'$ и соединим их друг с другом звездой. Так как сопротивления равны, то и токи по ним равны, мы имеем симметричную нагрузку фаз при включении звездой. Если мы нулевые точки генератора O и нагрузки O' соединим проводом, то этот провод и будет нулевым, ток в котором при данных условиях будет равен нулю. Если же ток в каком-либо



Фиг. 114.

проводе равен нулю, то потенциал вдоль этого провода не меняет своей величины, следовательно, потенциал в O' всегда равен потенциалу в O . При отсутствии провода OO' это равенство, очевидно, не нарушится. Отсюда и вытекает такое следствие: если мы к трем проводам трехфазного тока подключим звездой три равных активных сопротивления, то общая всем им точка будет обладать тем же потенциалом во всякий момент, что и нулевая точка. Включим тонкую катушку ваттметра вместо одного из этих сопротивлений, например, $O'M'$; уравнием два других сопротивления с сопротивлением этой катушки; если напряжение таково, что необходим реостат для включения тонкой катушки, то включим его и учтем его сопротивление. Цепь тонкой катушки теперь у нас будет включена между нулевой точкой и точкой m ; если мы толстую катушку включим в провод Mm , то мы измерим мощность фазы OMm ; утроив

ее, получим всю мощность трехфазного тока.

Заметим, что нельзя было бы тонкую катушку ваттметра включить между O' и m параллельно с включенным уже сопротивлением $O'M'$ равным сопротивлениям $O'N'$ и $O'K'$, так как тогда нагрузка фаз не была бы одинакова.

Перейдем к случаю, когда нагрузка фаз различна.

Если имеется нулевой провод, то включив три ваттметра толстыми катушками последовательно в три главных провода линии и присоединив тонкие катушки к нулевому и соответствующему главному проводу, мы сможем измерить все три фазовые мощности по отдельности и, сложив их, получим всю мощность.

Если нулевого провода нет, то можно измерить только всю мощность, а не отдельные фазовые мощности, и для этого достаточно только двух ваттметров. По первому закону Кирхгофа мы имеем и в общем случае при какой угодно нагрузке фаз в случае отсутствия нулевого провода

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0,$$

откуда

$$i_2 = -i_1 - i_3.$$

Величина мгновенной мощности во всех трех фазах такова:

$$p = i_1 u_1 + i_2 u_2 + i_3 u_3,$$

где u с индексами означают мгновенные значения фазовых напряжений; подставляя сюда вместо i_2 его последнее выражение, получаем

$$p = i_1(u_1 - u_2) + i_3(u_3 - u_2). \quad (64,3)$$

Один ваттметр включим так, чтобы он измерил среднюю за период величину первого слагаемого, для чего его тонкая катушка должна находиться под разностью напряжений двух фаз, первой и второй; другой ваттметр включим так, чтобы он измерил среднюю за период величину второго слагаемого, для чего его

тонкая катушка должна находиться под разностью напряжений третьей и второй фаз. Такое включение представлено на фиг. 115. Сложив показания обоих ваттметров, мы получим всю мощность всех трех фаз. Этот способ называется способом Арона.

Большей частью при этом обе слагаемые мощности положительны, но если нагрузка сильно индуктивная, хотя и не во всех фазах одинаковая, то возможен другой случай.

Представим себе, что на фиг. 111 векторы $O1$, $O2$, $O3$ представляют фазовые напряжения. При сильно индукционной нагрузке ток I_1 может отстать от своего фазового напряжения $O1$ на угол, больший 60° , и следовательно, от напряжения междуфазового $\dot{U}_1 - \dot{U}_2 = \vec{OA}$ (при неравномерной нагрузке фаз не составляющего уже впрочем с $O1$ угла равного 30°) на угол, больший 90° , или $\frac{\pi}{2}$, а тогда сред-

няя мощность этого тока I_1 с напряжением $\vec{OA} = \dot{U}_{1,2}$, равная $U_{1,2} I_1 \cos(I_1, \vec{OA})$, будет отрицательна; при этом другой важный нам [см. формулу (64,3)] вектор напряжения $\dot{U}_{2,2} = O3 + O2'$, наоборот, приблизится к вектору I_2 , в чем читатель легко убедится, начертив векторы токов для описываемого случая индукционной нагрузки, так что другая слагаемая мощность будет положительна (по абсолютной же величине больше первой).

Если одно из двух слагаемых делается при этом отрицательным, то ваттметр, показывающий отрицательную мощность, надо переключить, чтобы можно было эту отрицательную мощность отсчитывать (конечно, если у ваттметра нуль находится по середине шкалы, так что можно пользоваться отклонениями в обе стороны, то в переключении нет нужды), и затем его показания вычитают из показаний другого, чтобы получить всю мощность в цепи.

Начинающие часто думают, что в том случае, когда нулевого провода нет, а нагрузка фаз симметрична, можно узнать мощность, и не образуя искусственной нулевой точки, а включив один лишь ваттметр так, как включен любой из ваттметров на фиг. 115. Покажем, как при таком включении и упомянутых условиях величина всей мощности связана с показаниями ваттметра. Пусть тонкая катушка включена между проводами 1 и 2, а толстая включена в фазу 1, как на фиг. 115.

Очевидно, что при симметричной нагрузке фаз вектор $\dot{U}_{1,2} = \dot{U}_A$ составит угол в 30° с вектором $\dot{U}_1$ и что ваттметр измерит и покажет мощность

$$P = U_A I_1 \cos(\varphi_\phi + 30^\circ),$$

где φ_ϕ есть угол сдвига фаз между фазовым током $\dot{I}_1$ и фазовым напряжением $\dot{U}_1$.

Так как

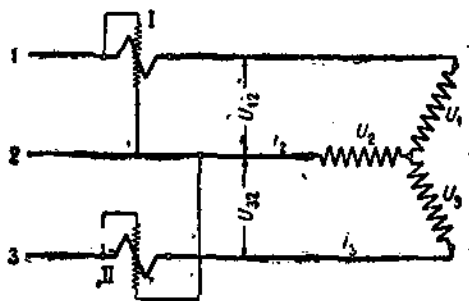
$$\cos(\varphi_\phi + 30^\circ) = \cos \varphi_\phi \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi_\phi \right),$$

то, принимая во внимание выражение (64,2) для мощности P трехфазного тока, имеем

$$P = \frac{P}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} (\sqrt{3} - \operatorname{tg} \varphi_\phi), \quad (A)$$

откуда, называя P показания ваттметра,

$$P = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \operatorname{tg} \varphi_\phi} \times (\text{показание ваттметра}).$$



Фиг. 115.

Так как в случае индукционной нагрузки при подобном измерении угол φ_ϕ неизвестен, то и узнать мощность P из показаний одного только ваттметра при такой нагрузке нельзя.

Читателю нетрудно будет вывести самому, что в случае подключения второго ваттметра его показания будут

$$P' = \frac{P}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} (\sqrt{3} + \operatorname{tg} \varphi_\phi). \quad (B)$$

Вычитая (A) из (B), имеем

$$P' - P = \frac{P}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \varphi_\phi,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \varphi_\phi = \frac{P' - P}{P' + P} \cdot \sqrt{3}. \quad (64,4)$$

Не забудем, что формула эта для определения угла φ_ϕ выведена для случая симметричной нагрузки трех фаз (например, трехфазными двигателями). При отступлении кривых тока или напряжения от синусоидальности она перестает быть точной.

Из выражения (A) для P' мы опять видим, что когда $\operatorname{tg} \varphi_\phi$ станет больше $\sqrt{3}$, т. е. когда φ_ϕ станет больше 60° , множитель в скобках станет отрицательным, и ваттметр надо будет переключить.

Описанное включение двух ваттметров неприменимо для цепи с нулевым проводом.

Остановимся еще на употреблении способа двух ваттметров в том случае, когда фазы нагрузки соединены треугольником.

Обозначив через i_1 , i_2 и i_3 мгновенные значения фазовых токов в нагрузке, через u_1 , u_2 и u_3 — напряжения

в фазах нагрузки, они же линейные напряжения в данном случае, мы будем иметь прежде всего

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0,$$

откуда

$$u_2 = -u_1 - u_3.$$

Преобразуем выражение мгновенной мощности:

$$i_1 u_1 + i_2 u_2 + i_3 u_3 = i_1 (i_1 - i_2) + u_3 (i_3 - i_2).$$

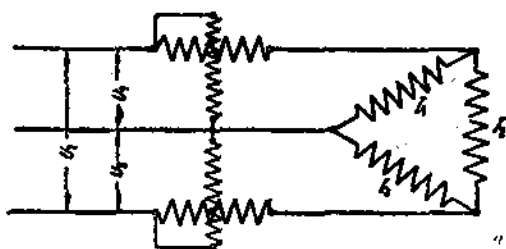
Подключив токовую катушку из первого ваттметра под напряжение u_1 , а толстую, как показано на фиг. 116, в линейный провод, подводящий ток к фазам 1 и 2, мы измерим первую слагаемую правой части последнего выражения.

Вторым ваттметром, показанным на фигуре, измерим вторую слагаемую.

§ 65. Общий случай многофазной системы

После изучения соединений звездой и треугольником трехфазной системы и соотношений мощности в ней читателю нетрудно будет и обобщить вопрос о многофазных системах и ввести здесь нижеследующие определения и подразделения.

Если мы на статоре поместим не три, а n независимых одинаковых обмоток, то мы получим n -фазную систему. Такая система называется симметричной, если э. д. с.



Фиг. 116.

в каждой обмотке, или в каждой „фазе“, сдвинута относительно предыдущей на один и тот же фазовый угол и равна ей по величине.

Общим выражением э. д. с. многофазной системы будет система уравнений, аналогичная (61,1):

$$\begin{aligned} e_1 &= E_m \sin(\omega t), \\ e_2 &= E_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{n}\right), \\ e_3 &= E_m \sin\left(\omega t - 2\frac{2\pi}{n}\right), \\ &\dots \dots \dots \\ e_n &= E_m \sin\left[\omega t - (n-1)\frac{2\pi}{n}\right]. \end{aligned}$$

Описанная в начале настоящей главы двухфазная система не является симметричной, а получаемая из последних уравнений симметричная двухфазная система обладает углом сдвига фаз $\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{2} = \pi$; обмотки должны быть сдвинуты в такой системе не на половину полного деления, как это было в упомянутой несимметричной двухфазной системе, а на целое полное деление. По существу это однофазная система, так как обе обмотки можно включить последовательно так, чтобы обе э. д. с. оказались в одной фазе, а не в противоположной. От точки соединения обеих обмоток можно притянуть нулевой провод.

Если в n -фазной системе каждая фаза работает на свою собственную цепь нагрузки, не связанную с другими фазами, то система называется *несвязанной* и требует $2n$ проводов.

Так как все n э. д. с. представляют систему равных векторов, сдвинутых на один и тот же угол $\frac{2\pi}{n}$ один от другого, то геометрическая сумма их равна нулю.

Поэтому все n обмоток можно соединить n -угольником (аналогично треугольнику) (иначе — в „кольцо“); тогда надо будет только n проводов.

Можно соединить обмотки все в звезду их одноименными концами, при этом надо будет тоже n проводов.

Обе системы будут связанными.

При соединении звездой, очевидно, линейное напряжение равняется геометрической разности двух фазовых напряжений в общем случае неодинаково для разных пар проводов.

Например, в пятифазной системе фиг. 117 между проводами A и B напряжение представляется вектором 1-2, а между A и C вектором 1-3.

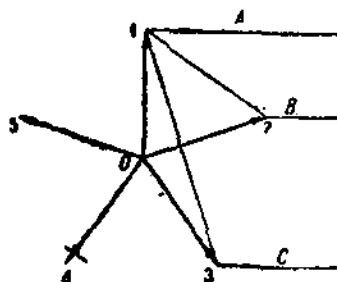
При симметричной нагрузке всех фаз в нулевом проводе сила тока равна нулю, и он может быть выпущен.

Многофазные системы называются *уравновешенными* или *неуравновешенными* в зависимости от того, остается ли сумма мгновенных мощностей всех n фаз постоянной в течение всего периода или она колеблется.

Представим себе n -фазную симметричную и симметрично нагруженную систему.

Мгновенная мощность каждой фазы изменяется с двойной частотой по формуле (20,8) и для некоторой k -й фазы выражается, очевидно, так,

$$p_k = EI \cos \varphi_e - EI \cos \left\{ 2 \left[\omega t - (k-1) \frac{2\pi}{n} \right] + \varphi_e \right\}$$



Фиг. 117.

Сложим все n таких фазовых мгновенных мощностей для одного того же момента времени. Вторые члены этих выражений представят косинусоидальные функции числом n , сдвинутые каждая относительно предыдущей на фазовый угол $\frac{2\pi}{n}$; поэтому сумма их дает нуль; сумма первых членов даст в n раз большую величину, так что

$$\sum_{k=1}^{k=n} p_k = nEI \cos \varphi_e,$$

т. е. величину, постоянную в каждый момент.

Таким образом такая система будет уравновешенной.

При неравномерной нагрузке фаз симметричная n -фазная система является неуравновешенной.

§ 66. Подключение на параллельную работу трехфазной синхронной машины

Пуск в ход трехфазной синхронной машины производится одинаково, будет ли она работать как генератор или как двигатель, и принципиально не отличается от пуска в ход однофазной машины, описанного ранее.

Схема включения фазовых ламп показана на фиг. 118.

Включение рубильника производится в момент погасания ламп.

Применяется включение ламп и иное, именно показанное на фиг. 119.

Разобрать при помощи векторной диаграммы, как будут загораться и потухать лампы, явится очень полезным упражнением. На фиг. 120 векторы $1_c, 2_c, 3_c$ означают фазовые напряжения сети, а векторы $1_m, 2_m, 3_m$ — машины.

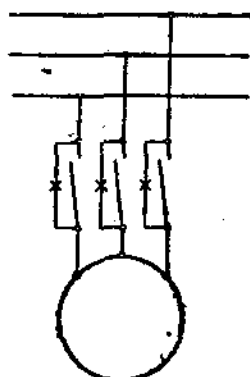
Допустим, что полного синхронизма еще нет и что машина

идет немного медленнее, чем нужно. Как это представить на векторной диаграмме?

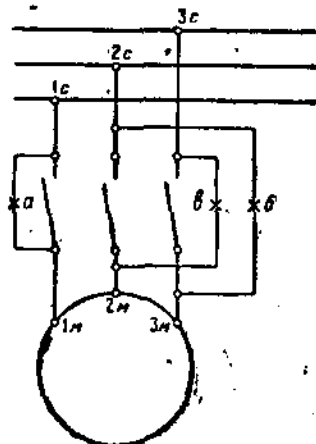
Для этого есть следующий простой способ:

Представим себе, что векторы напряжений сети, как всегда, неподвижны, а векторы напряжений машины вращаются по часовой стрелке, т. е. в ту же сторону, что и линия времени, но со скоростью, много меньшей. Тогда угол сдвига фаз, например, между 1_c и 1_m , с течением времени будет расти, что и выразит нам отставание машины от сети.

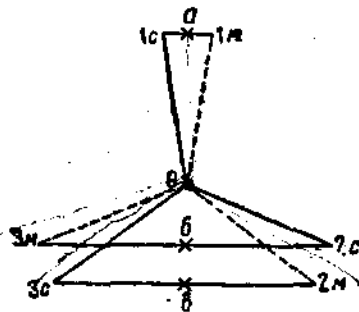
Пусть относительное положение векторов в некоторый момент таково, как на фиг. 120. Очевидно, что каждая лампа $a, б, в$ находится под разностью соответствующих напряжений; векторы этих разностей мы получим, соединив концы соответствующих векторов фазовых напряжений; для наглядности на них же показаны и лампы. В указанный момент лампа a гореть не будет, а $б, в$ будут гореть ярко.



Фиг. 118.



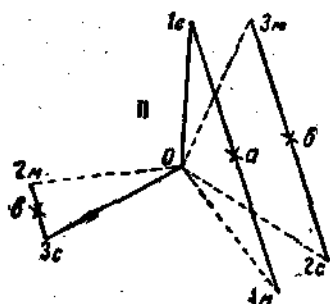
Фиг. 119.



Фиг. 1.0.

На фиг. 121 представлены векторы напряжений машины несколько позже, когда они отстали от напряжений сети больше. Теперь не будет гореть лампа *в*. Пусть читатель сам нарисует векторную диаграмму для того момента, когда напряжения машины отстают еще на одну треть периода от напряжений сети; при этом он увидит, что не будет гореть лампа *б*.

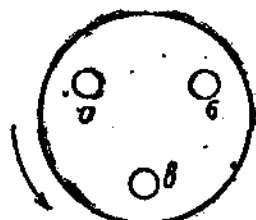
Таким образом, если лампы расположить в особом приборе так, как показано на фиг. 122, то темное пятно, образуемое потухнувшей лампой, будет вращаться против часовой стрелки (при другом расположении ламп — иначе).



Фиг. 121.

Читатель должен разобрать сам тот случай, когда машина идет скорее чем надо, и доказать, что в этом случае темное пятно будет вращаться в противоположном направлении.

Таким образом такой прибор с лампами указывает нам не только, что синхронизма нет, но и как именно надо изменить число оборотов машины, повысить или понизить.



Фиг. 122.

Включение надо производить в тот момент, когда темное пятно остановится, но не где-то вообще, а на лампе *а*, ибо только тогда есть и синхронизм (пятно не двигается) и знаки у соответствующих зажимов одинаковы (лампа *а* не горит).

Развитая прежде теория работы синхронной машины, круговая диаграмма Blondela, линии мощностей Гергеса и пр. теперь относятся к каждой отдельной фазе трехфазного генератора.

Очевидно, что трехфазная машина работает синхронным двигателем по тем же самым законам, что развиты ранее.

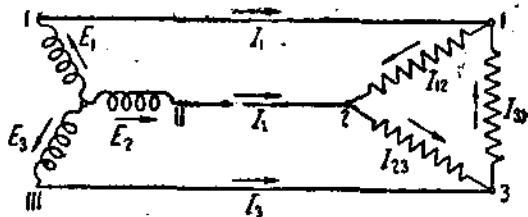
Вследствие симметричности трех обмоток угол β , входящий в различные формулы этой теории, для всех трех фаз одинаков.

§ 67. Применение топографического метода — включение нагрузки треугольником

Для представления соотношений в цепи многофазного тока посредством векторных диаграмм очень удобен топографический метод. Мы поясним его приложение на примере трехфазной цепи, нагруженной несимметрично.

Пусть фазы генератора включены звездой, а фазы нагрузки треугольником, как изображено на фиг. 123, причем нагрузка несимметрична. Силам токов в линии и в треугольнике нагрузки придадим обозначения, указанные на чертеже.

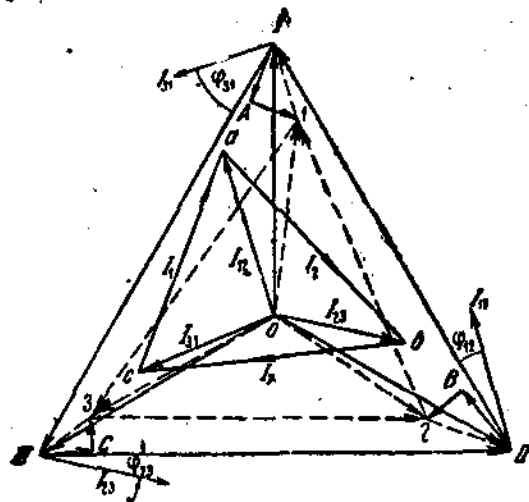
Фиг. 124 представляет векторную диаграмму для э. д. с., напряжений и сил токов в этой трехфазной цепи; э. д. с. трех фаз генератора представлены векторами *ОI*, *ОII* и *ОIII* соответственно обозначениям самих фаз генератора. Вернувшись к фиг. 111, мы видим, что вектор *ОА*, результирующий из *ОI* и *О2'* = $-O2$, мы могли получить,



Фиг. 123.

просто соединив точки 2 и 1, так как $\overline{OA} = 2I$. Поэтому на фиг. 124 вектор (*II*, *I*) есть результирующий из *ОI* и $-OII$; он представит э. д. с., действующую в контуре *О-1-1-2-II-О* (фиг. 123); подобным же образом (*III*, *II*) есть вектор э. д. с. в контуре *О-II-2-3-III-О*; (*I*, *III*) есть вектор э. д. с. в контуре *О-III-3-1-I-О*.

Далее, на фиг. 124 начерчены векторы I_{12} , I_{23} и I_{31} сил токов в сторонах треугольника нагрузки; силы этих токов различны и составляют разные углы сдвига фаз с э. д. с. контуров, в которые входят эти стороны треугольника. По этим силам токов можно найти и силы токов в линии I_1 , I_2 и I_3 . Перенесем все три вектора I_{12} , I_{23} и I_{31} параллельно самим себе в центр фигуры O , так что $\overline{Oa} = I_{12}$, $\overline{Ob} = I_{23}$ и $\overline{Oc} = I_{31}$. Тогда вектор $\overline{ab} = \overline{Ob} - \overline{Oa} = I_{23} - I_{12} = I_2$ (I_{12} входит здесь в левой части с минусом, так как мы силы токов считаем положительными, когда они текут в фазе нагрузки от „начала“ к „концу“, а при треугольнике „начало“ одной фазы соединено с „концом“ другой; хотя для нагрузки понятие „начала“ фазы и „конца“ еще более условно и произвольно, чем для обмотки генератора, но оно необходимо, чтобы считать, что три тока в сторонах треугольника сдвинуты друг относительно друга в фазе в среднем приблизительно на



Фиг. 124.

$\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$); далее, получаем $\overline{bc} = I_3$ и $\overline{ca} = I_1$. Силы токов в фазах генератора составляют, как видим, разные углы сдвига фаз с э. д. с. в фазах генератора OI , OII и $OIII$.

Мы можем теперь получить напряжения, под которыми находятся стороны треугольника нагрузки.

Вычтем из э. д. с. I фазы OI вектор падения напряжения в активном сопротивлении как самой фазы, так и провода $I-I$, при силе тока $\overline{ca} = I_1$, именно вектор $\overline{AI} = I_1 R_1$, и прибавим э. д. с. самоиндукции фазы и провода $\overline{AI} = I_1 X_1$, причем $\overline{AI} \perp \overline{ca}$, и мы получим вектор $\overline{OI}$ напряжения между точками O и I фиг. 123. Проделав то же с другими фазами, найдем векторы

$\overline{O2} \rightarrow$ напряжения между точками O и 2 и $\overline{O3}$ — напряжения между точками O и 3 (фиг. 123). Соединяя точки 1 и 2 , мы получим вектор $\overline{21}$, представляющий напряжение U_{12} от точки 1 до точки 2 по фазе $1-2$ нагрузки; аналогично $3-2$ есть U_{23} — напряжение от 2 до 3 и $1-3$ есть U_{31} — напряжение от 3 до 1 .

Если сопротивления проводов и фаз и их индуктивности одинаковы, что и нормально, то треугольники $1-A-I$, $2-B-II$ и $3-C-III$ подобны.

Заметим теперь следующее: допустим, что потенциал точки O фиг. 123 равен нулю. Изобразим его на фиг. 124 точкой O . В фазе OI действует э. д. с. OI . Чертим на фиг. 124 вектор OI и считаем, что конец фазы OI в отсутствие тока имеет потенциал, изображаемый точкой I , т. е. его потенциал отличается от нуля — потенциала точки O — на величину OI фиг. 124; то же самое имеет место относительно фазы OII и вектора э. д. с. OII . Концы фаз I и II фиг. 123 имеют разность потенциалов, представленную на фиг. 124 вектором $II-I$; вообще расстояния между двумя точками фиг. 124 представляют собой разности потенциалов между двумя соответствующими точками фиг. 123. В этом и заключается, как было уже сказано, идея топографического метода.

§ 68. Применение топографического метода — включение нагрузки звездой

Рассмотрим другой пример.

Пусть нам подано напряжение трехфазного тока от мощной станции по достаточно толстым проводам, так что нагрузки, подключаемые нами к сети, не изменяют заметно линейных напряжений, как бы несимметрична нагрузка ни была.

Треугольник линейных напряжений 1-2-3 фиг. 124 повторен на фиг. 125 и 126.

Для последующего очень важно раз навсегда заметить, что векторы трех линейных напряжений всегда составляют замкнутый треугольник, если мы их начертим не из одной точки, а приложим один к другому последовательно, причем совершенно безразлично, как включен генератор и как — нагрузка.

Доказательство этого весьма просто.

Обозначим буквой $\dot{U}$ с точкой и штрихом потенциал одного из проводов или зажимов трехфазного тока (например, относительно земли), через $\dot{U}''$ потенциал другого провода или зажима и $\dot{U}'''$ — третьего; тогда, очевидно, линейное напряжение между проводом или зажимом первым и вторым равно

$$\dot{U}_{12} = \dot{U}' - \dot{U}'',$$

между вторым и третьим —

$$\dot{U}_{23} = \dot{U}'' - \dot{U}'''$$

и между третьим и первым —

$$\dot{U}_{31} = \dot{U}''' - \dot{U}'.$$

Складывая эти три равенства, мы в правой части получим нуль, а следовательно,

$$\dot{U}_{12} + \dot{U}_{23} + \dot{U}_{31} = 0;$$

если сумма векторов равна нулю, это значит, что многоугольник их замыкается, результирующая его сторона равна нулю.

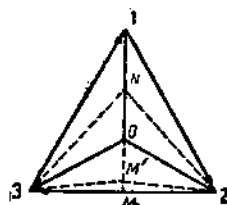
В дальнейшем мы не раз будем говорить о замкнутости или незамкнутости треугольника, составленного из тех или иных векторов.

Включим (фиг. 125) между тремя зажимами 1, 2 и 3 симметричную нагрузку звездой, например, в виде трех реостатов без нулевого провода. Из предыдущего ясно, что напряжения в каждой фазе или „луче“ звезды нагрузки выразятся векторами $O1$, $O2$ и $O3$; они в $\sqrt{3}$ раз меньше линейных напряжений и составляют друг с другом углы 120° .

Будем теперь изменять нагрузку в одной из фаз, например, уменьшать сопротивление в луче $O1$. Тогда и векторы фазовых напряжений будут изменяться по величине и направлению. Геометрическая разность двух векторов должна быть при этом прежней, должна выражать по величине и фазе все то же линейное напряжение, т. е. концы векторов фазовых напряжений остаются попрежнему в точках 1, 2, 3, а общее начало их перемещается.

Так как нагрузка в фазе $O2$ остается равной нагрузке в фазе $O3$, то и напряжения на этих фазах равны по величине; поэтому при изменении нагрузки в луче $O1$ общее начало векторов перемещается по перпендикуляру $1-M$, опущенному на сторону 23 ; при этом напряжение в первой фазе может принимать весьма разные значения. При некотором уменьшенном сопротивлении напряжение в первой фазе равно $N1$, причем два других фазовых напряжения будут $N2$ и $N3$.

Если сопротивление в первой фазе равно нулю, т. е. между нулевой точкой O нагрузки и проводом или зажимом 1 имеется короткое замыкание, то напряжение в этой фазе равно нулю; точка N теперь находится в точке 1; две другие



Фиг. 125.

фазы нагрузки, естественно, попадают под полное линейное напряжение каждая; напряжения на фазах нагрузки будут теперь вместо $N3$ вектор $I3$ и вместо $N2$ вектор $I2$.

Состояния симметричной нагрузки мы теперь можем охарактеризовать или символизировать нахождением точки общего начала векторов фазовых напряжений как раз в центре тяжести O треугольника линейных напряжений $1-2-3$.

Будем теперь сопротивление в луче $O1$ увеличивать, тогда точка O будет перемещаться вниз, например, в положение M' .

Разомкнем фазу $O1$; тогда у нас нагрузка будет состоять из двух равных сопротивлений, включенных последовательно одно за другим между зажимами 2 и 3.

Подходя к этому состоянию как к пределу, мы можем считать за среднюю точку нагрузки точку M и за фазовое напряжение в фазе первой, теперь разомкнутой, — вектор $M1$.

Если мы между зажимом 1 и точкой соединения двух упомянутых равных сопротивлений включим электростатический вольтметр, он покажет напряжение, по величине равное $M1$, т. е. в $\sqrt{3}$ раз большее, чем напряжение $M2$ или $M3$ на каждом из двух сопротивлений, так как

$$M1 = M2 \cdot \sqrt{3}.$$

Если мы подключим не электростатический вольтметр, а какой-нибудь другой, то этим самым между серединой нагрузки и точкой 1 мы включим некоторое, хотя и большее, но все же не равное бесконечности сопротивление, и средняя точка нагрузки будет символизироваться точкой M' ; напряжения будут $M'2$ и $M'3$ на двух сопротивлениях и $M'1$ — на вольтметре.

Теперь представим себе, что все три сопротивления различны; тогда и все три фазовых напряжения тоже будут различны и по величине и по фазе и изобразятся векторами $P1$, $P2$ и $P3$ (фиг. 126).

Конечно, если сопротивления безиндукционны, то те же векторы представят в другом масштабе и силы токов в фазах нагрузки. Очевидно, что, подбирая различные величины фазовых сопротивлений, мы можем точку P общего начала векторов фазовых напряжений перенести в любую точку внутри треугольника $1-2-3$.

Точка P своим положением дает уже потенциал средней точки нагрузки, и мы теперь каждой точке внутри треугольника $1-2-3$ приписываем потенциал, различающийся от потенциалов зажимов 1, 2, 3 на разности потенциалов, или на напряжения, представляемые вектором из P в точку 1, 2 или 3.

Это и есть то дальнейшее развитие идеи топографического метода, о котором было упомянуто в § 51.

Выразим рассматриваемые соотношения аналитически, остановившись в этом параграфе на том частном случае, когда отношение сопротивлений $\dot{Z}_1$ и $\dot{Z}_2$ в фазах $O1$ и $O2$ (или $P1$ и $P2$) есть число действительное, т. е. оба сопротивления вызывают одинаковый сдвиг фаз тока от напряжения и в одинаковом направлении.

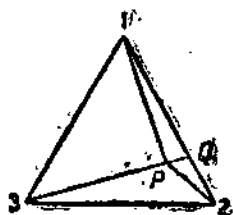
Итак,

$$\dot{Z}_1 = m\dot{Z}_2.$$

Тогда обозначая фазовые напряжения в нагрузке через $\dot{U}_1$, $\dot{U}_2$ и $\dot{U}_3$, по первому закону Кирхгофа имеем, что

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{Z}_1} + \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_2} + \frac{\dot{U}_3}{\dot{Z}_3} = 0$$

(сумма фазовых токов равна нулю, следовательно, их векторы составляют замкнутый треугольник).



Подставляя выражение $\dot{Z}_1$, имеем

$$\frac{1}{\dot{Z}_2} \left(\frac{\dot{U}_1}{m} + \dot{U}_2 \right) + \frac{\dot{U}_3}{\dot{Z}_3} = 0,$$

откуда

$$\frac{1}{m} \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = -\frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_3} \dot{U}_3.$$

Если фаза третья разомкнута, то $\dot{Z}_3 = \infty$ и

$$\frac{1}{m} \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 0,$$

следовательно,

$$\dot{U}_1 = -\dot{U}_2 m,$$

т. е. $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$ прямо противоположны по направлению, так как m — число действительное, или, иначе, лежат на одной прямой; а так как концы их 1 и 2 даны, то, очевидно, они лежат на прямой 1-2, и

$$\overline{Q1} = \dot{U}_1, \text{ а } \overline{Q2} = \dot{U}_2 = -\frac{1}{m} \dot{U}_1,$$

при этом

$$2\overline{1} = \overline{Q1} + \overline{Q2} = \overline{Q1} - \overline{Q2} = \dot{U}_1 - \dot{U}_2 = \dot{U}_{12}.$$

Далее длины $Q1$ и $Q2$ относятся как m к 1:

$$\frac{Q1}{Q2} = m.$$

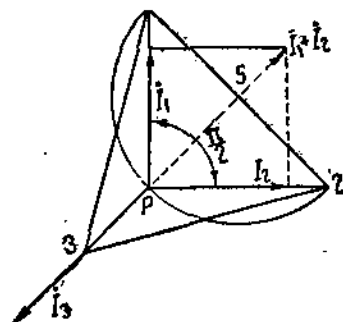
Напряжение $\overline{Q3}$ между точкой Q и 3 есть напряжение на третьей разомкнутой фазе. Однако такое определение имеет смысл только при подходе к точке Q ; после того как фаза третья стала разомкнутой, точка соединения фаз первой и второй теряется, любую точку на всем том сопротивлении, которое включено между зажимами 2 и 1, можно считать за точку, бывшую раньше средней точкой нагрузки, а потому вектор из любой точки стороны 2-1 до точки 3 может быть рассматриваем как вектор напряжения между зажимом 3 и этой точкой.

В § 79 мы продолжим это исследование и увидим, что точка P может и выйти за пределы треугольника.

Решим задачу, предложенную в свое время Кенелли, о получении из трехфазной системы двухфазной, т. е. двух напряжений, сдвинутых на четверть периода. Как мы видели на фиг. 125, вектор MI перпендикулярен к векторам $M3$ и $M2$, но лишь в отсутствии тока в фазе MI , т. е. когда $\dot{Z}_1 = \infty$.

На фиг. 127 величина $\dot{Z}_3$ такова, что при равенстве $\dot{Z}_1 = \dot{Z}_2$ имеем $U_1 = U_2$ и $\dot{U}_1 \perp \dot{U}_2$. Во все три фазы предполагаем включенными только активные сопротивления, так что токи совпадают с напряжениями; на фиг. 127 нанесены токи

$$i_1 = \frac{\dot{U}_1}{R_1}, \quad i_2 = \frac{\dot{U}_2}{R_2} \text{ и } i_3 = \frac{\dot{U}_3}{R_3}, \quad (A)$$



Фиг. 127.

причем

$$R_1 = R_2,$$

так что

$$I_1 = I_2;$$

далее,

$$\dot{I}_3 = -\dot{I}_1 - \dot{I}_2$$

по первому закону Кирхгофа.

Из чертежа ясно, что вектор $\dot{I}_1 + \dot{I}_2$ по величине равен $I_1 \sqrt{2}$, следовательно, и $I_3 = I_1 \sqrt{2}$; далее,

$$U_1 = U_2 = \frac{U_{21}}{\sqrt{2}}, \text{ или } U_1 = U_2 = U_* \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$PS = 2S = \frac{U_*}{2}; P_3 = S_3 - PS = U_* \frac{\sqrt{3}}{2} - U_* \frac{1}{2} = U_* \frac{\sqrt{3} - 1}{2},$$

или

$$U_3 = 0,365 U_*.$$

Подставляем эти величины I_3 и U_3 в третью формулу (А):

$$I_1 \sqrt{2} = \frac{0,365}{R_3} U_*,$$

из первой же формулы (А) имеем

$$I_1 = \frac{U_*}{R_1 \sqrt{2}}.$$

Деля последние полученные равенства одно на другое, получаем

$$\sqrt{2} = \frac{0,365 R_1 \sqrt{2}}{R_3},$$

откуда

$$R_1 : R_3 = 2,73.$$

§ 69. Применение символического метода к трехфазному току

Обратимся к тому, как применить метод комплексных величин для выражения трех э. д. с. трехфазного тока (фиг. 108а). Вектор E_1 направим по оси действительных величин, поэтому его выражение будет $\dot{E}_1 = E$. Для вектора E_2 , составляющего угол в 30° вниз с отрицательной осью мнимых величин, выражение, очевидно, будет таково:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_2 &= -\frac{1}{2} E - jE \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-1 - j\sqrt{3}}{2} E, \\ \dot{E}_3 &= -\frac{1}{2} E + jE \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-1 + j\sqrt{3}}{2} E. \end{aligned} \right\} \quad (69,1)$$

Отметим, что комплекс

$$\frac{-1 - j\sqrt{3}}{2} = -0,5 - j0,866,$$

имеющий модуль, равный единице, выражает поворот вектора $\dot{E}_2$ относительно вектора $\dot{E}_1$. Если мы, далее, умножим вектор $\dot{E}_2$ на этот же комплекс, то получим вектор $\dot{E}_3$, так как

$$\left(\frac{-1 - j\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{-1 + j\sqrt{3}}{2}.$$

По общему правилу символического изображения комплексов

$$\frac{-1-j\sqrt{3}}{2} = e^{-j\frac{2\pi}{3}}.$$

Эти выражения нам известны уже из примера 15, стр. 99.

Таково выражение множителя, поворачивающего векторы на 120° по направлению вращения линии времени. Итак,

$$\dot{E}_1 = E, \quad \dot{E}_2 = E e^{-j\frac{2\pi}{3}} \quad \text{и} \quad \dot{E}_3 = E e^{-j\frac{4\pi}{3}}.$$

Такие же выражение для напряжений можно написать, очевидно, только для случая симметричной нагрузки; при несимметричной — падения напряжений будут для разных фаз разные, и напряжения будут по величине отличаться друг от друга и по фазе будут сдвинуты друг относительно друга не на $\frac{2\pi}{3}$, как это показано на фиг. 124.

Множителю $e^{+j\frac{2\pi}{3}}$, поворачивающему векторы на 120° , навстречу линии времени, т. е. $\dot{E}_3$ в положение $\dot{E}_2$ и $\dot{E}_2$ в положение $\dot{E}_1$, присвоено в литературе особое обозначение — буквой a , так что

$$a = e^{+j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} = -0,5 + j0,866. \quad (69,2)$$

Точки над буквой a не будем ставить ввиду полной определенности значения этого символа.

Примеры 44 и 45. Чему равно a^3 и $1 + a + a^2$ и какой геометрический смысл имеют тот и другой результаты?

§ 70. Определение сил токов и напряжений при включении фаз генератора и нагрузки звездой

Рассмотрим тот случай, когда генератор и нагрузка включены звездой (фиг. 128) но без нулевого провода, и составим уравнения, выражающие соотношения между всеми величинами в такой цепи.

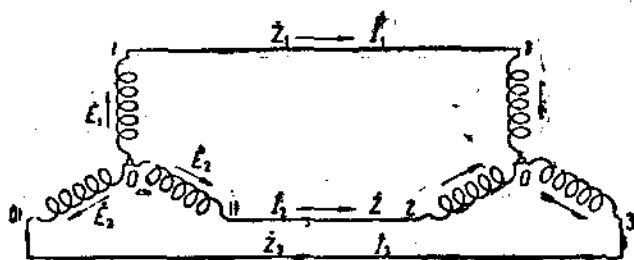
Обозначим силы токов в фазах через I_1, I_2, I_3 ; за положительные направления их возьмем направления, совпадающие с э. д. с.; полные сопротивления каждой фазы генератора — через $\dot{Z}_1, \dot{Z}_2, \dot{Z}_3$ (обыкновенно $\dot{Z}_1 = \dot{Z}_2 = \dot{Z}_3$)

и фаз нагрузки — $\dot{Z}_{1n}, \dot{Z}_{2n}, \dot{Z}_{3n}$; э. д. с., как обычно, — $\dot{E}_1, \dot{E}_2, \dot{E}_3$.

Применим второй закон Кирхгофа поочередно к контурам $O-I-I'-O'-2-II-O$, $O-II-2-O'-3-III-O$ и $O-III-3-O'-1-I-O$ и мы получим уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_1 - \dot{E}_2 &= \dot{I}_1 \dot{Z}_2 + \dot{I}_1 \dot{Z}_1 + \dot{I}_3 \dot{Z}_{1n} - \dot{I}_2 \dot{Z}_{2n} - \dot{I}_2 \dot{Z}_3 - \dot{I}_3 \dot{Z}_2, \\ \dot{E}_2 - \dot{E}_3 &= \dot{I}_2 \dot{Z}_3 + \dot{I}_2 \dot{Z}_2 + \dot{I}_3 \dot{Z}_{2n} - \dot{I}_3 \dot{Z}_{3n} - \dot{I}_3 \dot{Z}_1 - \dot{I}_1 \dot{Z}_3, \\ \dot{E}_3 - \dot{E}_1 &= \dot{I}_3 \dot{Z}_1 + \dot{I}_3 \dot{Z}_3 + \dot{I}_1 \dot{Z}_{3n} - \dot{I}_1 \dot{Z}_{1n} - \dot{I}_1 \dot{Z}_2 - \dot{I}_2 \dot{Z}_1. \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

Здесь одно из уравнений есть следствие двух других.



Фиг. 128.

Эти уравнения можно упростить, положив

$$\dot{Z}_2 + \dot{Z}_1 = \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 = \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 = \dot{Z}'$$

и заметив, что

$$\left. \begin{aligned} i_1 \dot{Z}_{1n} &= \dot{U}_{10}', \\ i_2 \dot{Z}_{2n} &= \dot{U}_{20}', \\ i_3 \dot{Z}_{3n} &= \dot{U}_{30}', \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

или

$$\left. \begin{aligned} i_1 \dot{Z}_{1n} - i_2 \dot{Z}_{2n} &= \dot{U}_{12}, \\ i_2 \dot{Z}_{2n} - i_3 \dot{Z}_{3n} &= \dot{U}_{23}, \\ i_3 \dot{Z}_{3n} - i_1 \dot{Z}_{3n} &= \dot{U}_{31}, \end{aligned} \right\} \quad (C)$$

где $\dot{U}_{12}$, $\dot{U}_{23}$ и $\dot{U}_{31}$ — линейные или междуфазовые напряжения. Таким образом получаем:

$$\begin{aligned} \dot{E}_1 - \dot{E}_2 &= i_1 \dot{Z} - i_2 \dot{Z} + \dot{U}_{12}, \\ \dot{E}_2 - \dot{E}_3 &= i_2 \dot{Z} - i_3 \dot{Z} + \dot{U}_{23}, \\ \dot{E}_3 - \dot{E}_1 &= i_1 \dot{Z} - i_1 \dot{Z} + \dot{U}_{31}. \end{aligned}$$

Кроме того, имеем еще уравнение

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0. \quad (D)$$

Два из уравнений (A) и уравнение (D) составляют систему трех уравнений с тремя неизвестными токами, которые из уравнений и определяются.

Могут быть, конечно, неизвестны и три сопротивления нагрузки $\dot{Z}_{1n}$, $\dot{Z}_{2n}$, $\dot{Z}_{3n}$, когда известны три тока. Последние должны непременно удовлетворять уравнению (D), но при решении задачи об определении сопротивлений нагрузки уравнение (D) бесполезно, оно есть условие правильности задания трех токов. Поэтому кроме двух уравнений (A) нужно еще третье уравнение, которое может быть разной формы, например, может быть дано одно из фазовых напряжений в звезде нагрузки (B).

ПРИМЕР 46. Даны: величина э. д. с. $E = 130$ V;

$$\dot{Z} = 3 + j0,4; \quad \dot{Z}_{1n} = 4 + j2; \quad \dot{Z}_{2n} = 3 + j2; \quad \dot{Z}_{3n} = 3 + j.$$

Вычисляем отдельные выражения в уравнении (A):

$$\begin{aligned} \dot{E}_1 - \dot{E}_2 &= E + E \cdot \frac{1 + j\sqrt{3}}{2} = E \cdot \frac{3 + j\sqrt{3}}{2} = 195 + j65\sqrt{3} = \\ &= 130\sqrt{3} e^{j\frac{\pi}{6}} = 225 e^{j30^\circ}, \\ \dot{E}_2 - \dot{E}_1 &= -E \cdot \frac{1 + j\sqrt{3}}{2} = E \cdot \frac{-1 + j\sqrt{3}}{2} = -Ej\sqrt{3} = -j130\sqrt{3} = \\ &= 225 e^{-j\frac{\pi}{2}} = 225 e^{-j90^\circ}. \end{aligned}$$

Решим систему уравнений (A) и (D) в общем виде и найдем, например, i_1 . Из (D)

$$-i_3 = i_1 + i_2.$$

Преобразуя несколько первое уравнение (A) и подставляя во второе вместо $-i_3$ его выражение, имеем

$$\begin{aligned} \dot{E}_1 - \dot{E}_2 &= (i_1 - i_3) \dot{Z} + i_1 \dot{Z}_{1n} - i_2 \dot{Z}_{2n}, \\ \dot{E}_1 - \dot{E}_2 &= (i_1 + 2i_2) \dot{Z} + i_2 \dot{Z}_{2n} + (i_1 + i_2) \dot{Z}_{3n} = i_1 (\dot{Z} + \dot{Z}_{3n}) + i_2 (2\dot{Z} + \dot{Z}_{2n} + \dot{Z}_{3n}). \end{aligned}$$

Из первого

$$I_2 = \frac{I_1 (\dot{Z} + \dot{Z}_{1N}) - (\dot{E}_1 - \dot{E}_2)}{\dot{Z} + \dot{Z}_{2N}}$$

подставляем во второе и получаем

$$\dot{E}_1 - \dot{E}_2 = I_1 (\dot{Z} + \dot{Z}_{3N}) + I_2 \frac{(\dot{Z} + \dot{Z}_{1N}) (2\dot{Z} + \dot{Z}_{2N} + \dot{Z}_{3N})}{\dot{Z} + \dot{Z}_{2N}} - (\dot{E}_1 - \dot{E}_2) \frac{(2\dot{Z} + \dot{Z}_{2N} + \dot{Z}_{3N})}{\dot{Z} + \dot{Z}_{2N}}$$

$$I_1 = \frac{(\dot{E}_2 - \dot{E}_1) (\dot{Z} + \dot{Z}_{2N}) + (\dot{E}_1 - \dot{E}_2) (2\dot{Z} + \dot{Z}_{2N} + \dot{Z}_{3N})}{(\dot{Z} + \dot{Z}_{3N}) (\dot{Z} + \dot{Z}_{2N}) + (\dot{Z} + \dot{Z}_{1N}) (2\dot{Z} + \dot{Z}_{2N}) + \dot{Z}_{3N}}$$

Проводим необходимые вычисления:

$$\dot{Z} + \dot{Z}_{2N} = 6 + j2,4 = 6,5e^{j21^\circ 50'}$$

$$2\dot{Z} + \dot{Z}_{2N} + \dot{Z}_{3N} = 12 + j3,8 = 12,6e^{j17^\circ 23'}$$

$$\dot{Z} + \dot{Z}_{3N} = 6 + j1,4 = 6,2e^{j13^\circ 10'}$$

$$\dot{Z} + \dot{Z}_{1N} = 7 + j2,4 = 7,5e^{j18^\circ 37'}$$

$$(\dot{E}_2 - \dot{E}_1) (\dot{Z} + \dot{Z}_{2N}) = 225 \cdot 6,5e^{-j80^\circ 10'} = 1462e^{-j80^\circ 10'} = 544 - j1357,$$

$$(\dot{E}_1 - \dot{E}_2) (2\dot{Z} + \dot{Z}_{2N} + \dot{Z}_{3N}) = 225 \cdot 12,6e^{j47^\circ 23'} = 2835e^{j47^\circ 23'} = 1900 + j2070,$$

$$(\dot{Z} + \dot{Z}_{2N}) (\dot{Z} + \dot{Z}_{3N}) = 40,3e^{j35^\circ} = 33 + j22,3 \text{ (ибо } \cos 35^\circ = 0,820),$$

$$(\dot{Z} + \dot{Z}_{1N}) (2\dot{Z} + \dot{Z}_{2N} + \dot{Z}_{3N}) = 94,5e^{j80^\circ 28'} = 75,6 + j55,$$

Знаменатель равен

$$108,6 + j77,3 = 133e^{j33^\circ 25'}$$

Числитель равен

$$2444 + j715 = 2540e^{j16^\circ 10'}$$

Проводим деление, получаем

$$I_1 = 19,8e^{-j19^\circ 15'}$$

Далее для вычисления I_2 узнаем

$$I_1 (\dot{Z} + \dot{Z}_{1N}) = 19,8e^{-j19^\circ 15'} \cdot 7,5e^{j18^\circ 37'} = 148,5e^{-j6^\circ 28'} = 148 - j0,9.$$

Числитель в выражении

$$I_2 = -195 - j112,45 + 148 - j0,9 = -47 - j113 = 123e^{j87^\circ 23' + 180^\circ},$$

$$I_2 = \frac{123e^{j(87^\circ 23' + 180^\circ)}}{6,5e^{j21^\circ 50'}} = 18,9e^{j(45^\circ 45' + 180^\circ)}.$$

Разложив I_1 и I_2 в комплексные двучлены и взяв сумму их с обратным знаком, получим I_3 .

§ 71. Определение сил токов и напряжений при нагрузке треугольником (Способ непосредственный)

1. Для того случая, когда фазы генератора включены звездой, а нагрузка треугольником (фиг. 129), определим теперь аналитически силы токов и напряжения.

Даны: три э. д. с. генератора $\dot{E}_1$, $\dot{E}_2$ и $\dot{E}_3$; полные сопротивления каждого провода линии вместе с той фазой генератора, к которой провод подключен, $\dot{Z}_1$, $\dot{Z}_2$ и $\dot{Z}_3$; полные проводимости каждой стороны треугольника нагрузки (если известны сопротивления их, переходим к проводимостям) $\dot{Y}_{12}$, $\dot{Y}_{23}$, $\dot{Y}_{31}$.

Тогда

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= I_{12} - I_{31}, \\ I_2 &= I_{23} - I_{12}, \\ I_3 &= I_{31} - I_{23} \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

составят первые три уравнения из нужных нам.

Заметим, что, сложив их, получим

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0.$$

Для напряжений на нагрузке имеем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{12} &= \dot{E}_1 - \dot{E}_2 - \dot{I}_1 \dot{Z}_1 + \dot{I}_2 \dot{Z}_2, \\ \dot{U}_{23} &= \dot{E}_2 - \dot{E}_3 - \dot{I}_2 \dot{Z}_2 + \dot{I}_3 \dot{Z}_3, \\ \dot{U}_{31} &= \dot{E}_3 - \dot{E}_1 - \dot{I}_3 \dot{Z}_3 + \dot{I}_1 \dot{Z}_1. \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

Эти уравнения есть не что иное, как алгебраическое выражение геометрического определения напряжений, сделанного на фиг. 124, именно вычитания вектора $\dot{E}_2 - \dot{I}_2 \dot{Z}_2$ из вектора $\dot{E}_1 - \dot{I}_1 \dot{Z}_1$ и т. д. Уравнения (B) получаются так же легко и применением второго закона Кирхгофа.

Последними необходимыми нам для решения являются уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_{12} &= \dot{U}_{12} \dot{Y}_{12}, \\ \dot{I}_{23} &= \dot{U}_{23} \dot{Y}_{23}, \\ \dot{I}_{31} &= \dot{U}_{31} \dot{Y}_{31}. \end{aligned} \right\} \quad (C)$$

В девяти уравнениях (A), (B) и (C) содержится девять неизвестных $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3, \dot{I}_{12}, \dot{I}_{23}, \dot{I}_{31}, \dot{U}_{12}, \dot{U}_{23}, \dot{U}_{31}$.

Так как все они имеют комплексные выражения и всякое уравнение распадается поэтому на два уравнения, выражающие равенства действительных членов в правой части действительными членами в левой и тоже относительно мнимых членов, то можно говорить и о 18 неизвестных и 18 уравнениях.

Можно решать эту систему уравнений в общем виде, причем получаются чрезвычайно длинные формулы, можно вести решение уравнений в каждом частном случае, когда „данные“ ($\dot{E}_1, \dot{E}_2, \dots, \dot{Z}_1, \dot{Z}_2, \dots$) известны в числах, производя все необходимые переделки и сокращения с самого начала.

Определим прежде всего напряжения на нагрузке.

Подставляем из (C) в (A):

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{U}_{12} \dot{Y}_{12} - \dot{U}_{31} \dot{Y}_{31}, \\ \dot{I}_2 &= \dot{U}_{23} \dot{Y}_{23} - \dot{U}_{12} \dot{Y}_{12}, \\ \dot{I}_3 &= \dot{U}_{31} \dot{Y}_{31} - \dot{U}_{23} \dot{Y}_{23}. \end{aligned} \right\} \quad (D)$$

Полученные выражения подставляем в (B):

$$\begin{aligned} \dot{U}_{12} &= \dot{E}_1 - \dot{E}_2 - \dot{U}_{12} \dot{Y}_{12} \dot{Z}_1 + \dot{U}_{31} \dot{Y}_{31} \dot{Z}_1 + \dot{U}_{23} \dot{Y}_{23} \dot{Z}_2 - \dot{U}_{12} \dot{Y}_{12} \dot{Z}_2, \\ \dot{U}_{23} &= \dot{E}_2 - \dot{E}_3 - \dot{U}_{23} \dot{Y}_{23} \dot{Z}_2 + \dot{U}_{12} \dot{Y}_{12} \dot{Z}_2 + \dot{U}_{31} \dot{Y}_{31} \dot{Z}_3 - \dot{U}_{23} \dot{Y}_{23} \dot{Z}_3, \\ \dot{U}_{31} &= \dot{E}_3 - \dot{E}_1 - \dot{U}_{31} \dot{Y}_{31} \dot{Z}_3 + \dot{U}_{23} \dot{Y}_{23} \dot{Z}_3 + \dot{U}_{12} \dot{Y}_{12} \dot{Z}_1 - \dot{U}_{31} \dot{Y}_{31} \dot{Z}_1. \end{aligned}$$

Решив эти уравнения и найдя напряжения $\dot{U}_{12}, \dot{U}_{23}$ и $\dot{U}_{31}$, вычисляем затем по (D) силы линейных токов.

ПРИМЕР 47. Даны:

$$\begin{aligned} E &= 240 \text{ В}; \quad \dot{Z}_{\text{про}} = 1,7 + j0,2; \quad \dot{Z}_1 = 0,3 + j; \\ \dot{Z}_{12} &= 10 + j6; \quad \dot{Z}_{23} = 5 + j4; \quad \dot{Z}_{31} = 8 + j5. \end{aligned}$$

Из этих данных находим:

$$\dot{E}_1 = 240; \quad \dot{E}_2 = 120(1 + j\sqrt{3}); \quad \dot{E}_3 = 120(-1 + j\sqrt{3}).$$

$$\dot{Z} = \dot{Z}_1 = \dot{Z}_2 = \dot{Z}_3 = 2 + j1,2;$$

$$\dot{Y}_{12} = 0,0735 - j0,0441; \quad \dot{Y}_{23} = 0,1220 - j0,0975; \quad \dot{Y}_{31} = 0,0899 - j0,0552;$$

$$\dot{Y}_{12} = 0,0868e^{-j41^\circ}; \quad \dot{Y}_{23} = 0,1601e^{-j38^\circ 40'}; \quad \dot{Y}_{31} = 0,106e^{-j33^\circ};$$

так как $\dot{Z}_1 = \dot{Z}_2 = \dot{Z}_3 = \dot{Z}$, то уравнения для напряжений на нагрузке запишутся следующим образом:

$$\dot{U}_{12} = \dot{E}_1 - \dot{E}_2 - \dot{U}_{12} \dot{Y}_{12} \dot{Z} + \dot{U}_{31} \dot{Y}_{31} \dot{Z} + \dot{U}_{23} \dot{Y}_{23} \dot{Z} - \dot{U}_{12} \dot{Y}_{12} \dot{Z}.$$

Преобразуя, получим следующее:

$$\dot{U}_{12}(1 + 2\dot{Y}_{12}Z) - \dot{U}_{23}\dot{Y}_{23}Z - \dot{U}_{31}\dot{Y}_{31}Z - \dot{E}_1 + \dot{E}_2 = 0 \quad (1)$$

и аналогично два других уравнения:

$$-\dot{U}_{12}\dot{Y}_{12}Z + \dot{U}_{23}(1 + 2\dot{Y}_{23}Z) - \dot{U}_{31}\dot{Y}_{31}Z - \dot{E}_2 + \dot{E}_3 = 0, \quad (2)$$

$$-\dot{U}_{12}\dot{Y}_{12}Z - \dot{U}_{23}\dot{Y}_{23}Z + \dot{U}_{31}(1 + 2\dot{Y}_{31}Z) - \dot{E}_3 + \dot{E}_1 = 0. \quad (3)$$

Вычитая уравнение (3) из уравнения (1), получаем

$$\dot{U}_{12}(1 + 3\dot{Y}_{12}Z) - \dot{U}_{31}(1 + 3\dot{Y}_{31}Z) - 2\dot{E}_1 + \dot{E}_2 + \dot{E}_3 = 0,$$

а так как $\dot{E}_2 + \dot{E}_3 = -\dot{E}_1$, то

$$\dot{U}_{12} = \frac{\dot{U}_{31}(1 + 3\dot{Y}_{31}Z) + 3\dot{E}_1}{1 + 3\dot{Y}_{12}Z}.$$

Вычитая уравнение (3) из уравнения (2) и преобразуя, получаем

$$\dot{U}_{23} = \frac{\dot{U}_{31}(1 + 3\dot{Y}_{31}Z) - 3\dot{E}_3}{1 + 3\dot{Y}_{23}Z}.$$

Складывая оба последних уравнения и замечая, что $\dot{U}_{12} + \dot{U}_{23} = -\dot{U}_{31}$, получим

$$-\dot{U}_{31} = \frac{\dot{U}_{31}(1 + 3\dot{Y}_{31}Z) + 3\dot{E}_1}{1 + 3\dot{Y}_{12}Z} + \frac{\dot{U}_{31}(1 + 3\dot{Y}_{31}Z) - 3\dot{E}_3}{1 + 3\dot{Y}_{23}Z}.$$

Отсюда по упрощении

$$\dot{U}_{31} = \frac{-\dot{E}_1(1 + 3\dot{Y}_{23}Z) + \dot{E}_2(1 + 3\dot{Y}_{12}Z)}{1 + 2Z(\dot{Y}_{12} + \dot{Y}_{23} + \dot{Y}_{31}) + 3Z^2(\dot{Y}_{12}\dot{Y}_{23} + \dot{Y}_{23}\dot{Y}_{31} + \dot{Y}_{31}\dot{Y}_{12})}.$$

Разделим числитель и знаменатель на Z и обозначим $\frac{1}{Z}$ через $\dot{Y}$, тогда

$$\dot{U}_{31} = \frac{\dot{E}_2(\dot{Y} + 3\dot{Y}_{12}) - \dot{E}_1(\dot{Y} + 3\dot{Y}_{23})}{\dot{Y} + 2(\dot{Y}_{12} + \dot{Y}_{23} + \dot{Y}_{31}) + 3Z(\dot{Y}_{12}\dot{Y}_{23} + \dot{Y}_{23}\dot{Y}_{31} + \dot{Y}_{31}\dot{Y}_{12})};$$

аналогично

$$\dot{U}_{12} = \frac{\dot{E}_1(\dot{Y} + 3\dot{Y}_{23}) - \dot{E}_2(\dot{Y} + 3\dot{Y}_{31})}{\dot{Y} + 2(\dot{Y}_{12} + \dot{Y}_{23} + \dot{Y}_{31}) + 3Z(\dot{Y}_{12}\dot{Y}_{23} + \dot{Y}_{23}\dot{Y}_{31} + \dot{Y}_{31}\dot{Y}_{12})};$$

$$\dot{U}_{23} = \frac{\dot{E}_2(\dot{Y} + 3\dot{Y}_{31}) - \dot{E}_3(\dot{Y} + 3\dot{Y}_{12})}{\dot{Y} + 2(\dot{Y}_{12} + \dot{Y}_{23} + \dot{Y}_{31}) + 3Z(\dot{Y}_{12}\dot{Y}_{23} + \dot{Y}_{23}\dot{Y}_{31} + \dot{Y}_{31}\dot{Y}_{12})}.$$

Вычислим знаменатель

$$\dot{Y} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{2 + j1,2} = \frac{2 - j1,2}{5,44} = 0,368 - j0,221.$$

$$2(\dot{Y}_{12} + \dot{Y}_{23} + \dot{Y}_{31}) = 2(0,0735 - j0,0441 + 0,1220 - j0,0975 + 0,0899 - j0,0562) = \\ = 2(0,2854 - j0,1978) = 0,5708 - j0,3956.$$

$$\dot{Y}_{12}\dot{Y}_{23} = (0,0735 - j0,0441)(0,1220 - j0,0975) = 0,00467 - j0,01255.$$

$$\dot{Y}_{23}\dot{Y}_{31} = (0,1220 - j0,0975)(0,0899 - j0,0562) = 0,00549 - j0,01427.$$

$$\dot{Y}_{31}\dot{Y}_{12} = (0,0899 - j0,0562)(0,0735 - j0,0441) = 0,00413 - j0,00810.$$

$$\dot{Y}_{12}\dot{Y}_{23} + \dot{Y}_{23}\dot{Y}_{31} + \dot{Y}_{31}\dot{Y}_{12} = 0,01429 - j0,03492.$$

$$3Z(\dot{Y}_{12}\dot{Y}_{23} + \dot{Y}_{23}\dot{Y}_{31} + \dot{Y}_{31}\dot{Y}_{12}) = 3(2 + j1,2)(0,01429 - j0,03492) = 0,2115 - j0,158.$$

$$\text{Знаменатель равен: } 0,368 - j0,221 + 0,5708 - j0,3956 + 0,2115 - j0,158 = 1,15 - j0,775 = \\ = 1,387e^{-j34^\circ}.$$

$$\dot{E}_1(\dot{Y} + 3\dot{Y}_{23}) = 240(0,368 - j0,221 + 0,3650 - j0,2925) = 240(0,734 - j0,5135) = 176 - j123.$$

$$\dot{E}_2(\dot{Y} + 3\dot{Y}_{31}) = (-120 - j208)(0,368 - j0,221 + 0,2697 - j0,1682) = \\ = (-120 - j208)(0,6377 - j0,3892) = -157,5 - j86.$$

$$\dot{E}_3(\dot{Y} + 3\dot{Y}_{12}) = (-120 + j208)(0,368 - j0,221 + 0,2205 - j0,1323) = \\ = (-120 + j208)(0,5885 - 0,3533j) = 3 + j164,7.$$

$$\dot{U}_{12} = \frac{175 - j123 + 157,5 + j86}{1,15 - j0,775} = \frac{332,5 - j37}{1,15 - j0,775} =$$

$$= \frac{335,7 \cdot e^{-j6^\circ 20'}}{1,387 e^{-j34^\circ}} = 242 \cdot e^{j27^\circ 40'}.$$

$$\dot{U}_{23} = \frac{-157,5 - j86 - 3 - j164,7}{1,387 e^{-j34^\circ}} = \frac{-160,5 - j250,7}{1,387 e^{-j34^\circ}} =$$

$$= \frac{297,7 e^{-j124^\circ}}{1,387 e^{-j34^\circ}} = 215 \cdot e^{-j90^\circ 30'}.$$

$$\dot{U}_{31} = \frac{3 + j164,7 - 176 + j123}{1,387 e^{-j34^\circ}} = \frac{-173 + j287,7}{1,387 e^{-j34^\circ}} =$$

$$= \frac{335,7 e^{j124^\circ}}{1,387 e^{-j34^\circ}} = 242 \cdot e^{j158^\circ}.$$

$$I_{12} = \dot{U}_{12} \cdot \dot{Y}_{12} = 242 \cdot e^{j27^\circ 40'} \cdot 0,0868 e^{-j31^\circ} = 20,75 e^{-j3^\circ 20'} = 20,73 - j1,17.$$

$$I_{23} = \dot{U}_{23} \cdot \dot{Y}_{23} = 215 \cdot e^{-j90^\circ 30'} \cdot 0,160 \cdot e^{-j35^\circ 40'} = 34,4 e^{-j126^\circ 10'} = -20,76 - j27,4.$$

$$I_{31} = \dot{U}_{31} \cdot \dot{Y}_{31} = 242 \cdot e^{j158^\circ} \cdot 0,106 e^{-32^\circ} = 25,62 e^{j126^\circ} = -13,95 + j21,5.$$

$$I_1 = I_{12} - I_{31} = 20,73 - j1,17 + 13,95 - j21,5 = 34,68 - j22,67 = 41,5 e^{-j33^\circ 13'}.$$

$$I_2 = I_{23} - I_{12} = -20,76 - j27,4 - 20,73 + j1,17 = -41,49 - j26,27 = 53,7 e^{-j154^\circ 30'}.$$

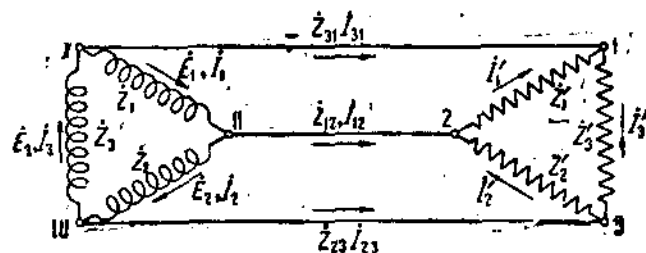
$$I_3 = I_{31} - I_{23} = -13,95 + j21,5 + 20,76 + j27,4 = 6,81 + j48,9 = 49,4 e^{j82^\circ 6'}.$$

II. Включение фаз генератора треугольником встречается крайне редко, а по-

тому в курсах, посвященных теории переменных токов, обычно не содержится. Дадим здесь для полноты представления соотношений в трехфазных цепях теорию и этого случая.

На фиг. 129 дана схема включения треугольником и генератора и нагрузки.

Обозначения ясны из чертежа.



Фиг. 129.

Применяя второй закон Кирхгофа поочередно к контурам I-II-2-1-I, II-III-3-2-II и III-I-1-3-III, получаем уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_1 &= i_1 \dot{Z}_1 + i_{12} \dot{Z}_{12} + i'_{12} \dot{Z}'_{12} - i_{31} \dot{Z}_{31}, \\ \dot{E}_2 &= i_2 \dot{Z}_2 + i_{23} \dot{Z}_{23} + i'_{23} \dot{Z}'_{23} - i_{12} \dot{Z}_{12}, \\ \dot{E}_3 &= i_3 \dot{Z}_3 + i_{31} \dot{Z}_{31} + i'_{31} \dot{Z}'_{31} - i_{23} \dot{Z}_{23}. \end{aligned} \right\} \quad (M)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} i'_{12} \dot{Z}'_{12} &= \dot{U}'_1 = \dot{U}_{31}, \\ i'_{23} \dot{Z}'_{23} &= \dot{U}'_2 = \dot{U}_{12}, \\ i'_{31} \dot{Z}'_{31} &= \dot{U}'_3 = \dot{U}_{23} \end{aligned} \right\} \quad (N)$$

$\dot{U}'_1, \dot{U}'_2, \dot{U}'_3$ — напряжения на сторонах треугольника нагрузки.

Далее,

$$\left. \begin{aligned} i_{12} &= i_1 - i_2 = i'_1 - i'_2, \\ i_{23} &= i_2 - i_3 = i'_2 - i'_3, \\ i_{31} &= i_3 - i_1 = i'_3 - i'_1, \end{aligned} \right\} \quad (P)$$

откуда

$$i_{12} + i_{23} + i_{31} = 0,$$

т. е. силы токов в линейных проводах составляют замкнутый треугольник.

Напряжения

$$\dot{U}_{21}, \dot{U}_{32} \text{ и } \dot{U}_{13}$$

на нагрузке, очевидно, тоже составляют замкнутый треугольник; тот же результат получается и применением второго закона Кирхгофа к контуру нагрузки 2-1-3.

$$\dot{I}_1 \dot{Z}'_1 + \dot{I}_2 \dot{Z}'_2 + \dot{I}_3 \dot{Z}'_3 = 0. \quad (Q)$$

Так как э. д. с. в генераторе тоже составляют замкнутый треугольник

$$\dot{E}_1 + \dot{E}_2 + \dot{E}_3 = 0,$$

то, сложив уравнения (M), получим, как легко видеть,

$$\dot{I}_1 \dot{Z}_1 + \dot{I}_2 \dot{Z}_2 + \dot{I}_3 \dot{Z}_3 = 0,$$

т. е. падения напряжений внутри генератора составляют замкнутый треугольник.

Но в генераторе

$$Z_1 = Z_2 = Z_3,$$

поэтому, вынося $\dot{Z}_1$ за скобки, получаем

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0,$$

т. е. силы токов в генераторе, соединенном треугольником, составляют замкнутый треугольник.

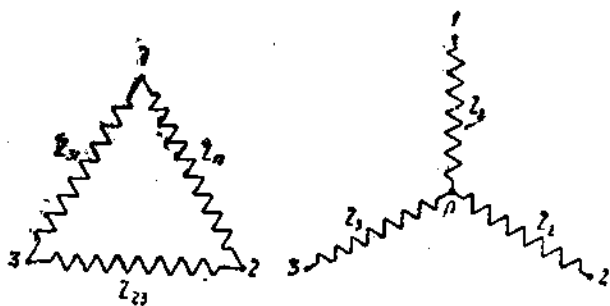
Читателю следует особенно заметить, что силы токов в треугольнике нагрузки не составляют в общем случае замкнутого треугольника, ибо из уравнения (Q) следует, что равенство

$$\dot{I}'_1 + \dot{I}'_2 + \dot{I}'_3 = 0$$

возможно не при всяких значениях сопротивлений нагрузки.

§ 72. Эквивалентные звезда и треугольник

Итак, если нагрузка включена треугольником, то при расчете линейные токи приходится вводить в виде разностей фазовых токов, что делает расчет длинным и не наглядным. А. Е. Кенелли показал, что с большим удобством можно нагрузку, включенную треугольником, заменить нагрузкой, включенной звездой, причем все токи и напряжения в линии остаются теми же, что были при треугольнике. Такая замена называется переходом с треугольника на эквивалентную звезду. Выведем формулы для определения полных сопротивлений „лучей“ звезды, т. е. трех ее фаз, если даны полные сопротивления „сторон“ треугольника, т. е. трех фаз действительной нагрузки (фиг. 130).



Фиг. 130.

Эквивалентность, очевидно, требует, чтобы полное сопротивление между каждыми двумя зажимами было в обоих включениях одно и то же. Между зажимами 1 и 2 в звезде сопротивление равно $\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2$; в треугольнике надо взять результирующее сопротивление двух ветвей 1-2 и 1-3-2.

Поэтому

$$\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 = \frac{1}{\frac{1}{\dot{Z}_{12}} + \frac{1}{\dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}}},$$

откуда получаем

$$\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 = \frac{\dot{Z}_{12} (\dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31})}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}};$$

аналогично

$$\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 = \frac{\dot{Z}_{23} (\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{31})}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}};$$

$$\dot{Z}_3 + \dot{Z}_1 = \frac{\dot{Z}_{31} (\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23})}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}}.$$

Складывая эти уравнения по два и вычитая третье, найдем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{Z}_1 &= \frac{\dot{Z}_{12} \dot{Z}_{31}}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}}, \\ \dot{Z}_2 &= \frac{\dot{Z}_{23} \dot{Z}_{12}}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}}, \\ \dot{Z}_3 &= \frac{\dot{Z}_{31} \dot{Z}_{23}}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}}. \end{aligned} \right\} \quad (72,1)$$

Эти формулы дают возможность от данного треугольника перейти к эквивалентной звезде.

Если сопротивления сторон треугольника равны друг другу:

$$\dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{23} = \dot{Z}_{31} = \dot{Z},$$

то

$$\dot{Z}_1 = \dot{Z}_2 = \dot{Z}_3 = \frac{1}{3} \dot{Z}.$$

Если, наоборот, требуется перейти от данной звезды к эквивалентному треугольнику, то математически задача сводится к определению $\dot{Z}_{12}$, $\dot{Z}_{23}$ и $\dot{Z}_{31}$ из вышеприведенной системы уравнений, т. е. к выражению их через $\dot{Z}_1$, $\dot{Z}_2$ и $\dot{Z}_3$. Однако в таком виде решение привело бы к неудобным по сложности их алгебраическим выкладкам.

Последние очень упрощаются, если мы перейдем во всех уравнениях от сопротивлений к проводимостям. Первая из вышеприведенных систем напишется в проводимостях так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\dot{Y}_1} + \frac{1}{\dot{Y}_2} &= \frac{1}{\dot{Y}_{12} + \frac{1}{\frac{1}{\dot{Y}_{23}} + \frac{1}{\dot{Y}_{31}}}} = \frac{\dot{Y}_{23} + \dot{Y}_{31}}{\dot{Y}_{12} \dot{Y}_{23} + \dot{Y}_{23} \dot{Y}_{31} + \dot{Y}_{31} \dot{Y}_{12}} = \\ &= \frac{\dot{Y}_{23} + \dot{Y}_{31}}{\dot{X}}; \\ \frac{1}{\dot{Y}_2} + \frac{1}{\dot{Y}_3} &= \frac{\dot{Y}_{12} + \dot{Y}_{31}}{\dot{X}}; \\ \frac{1}{\dot{Y}_3} + \frac{1}{\dot{Y}_1} &= \frac{\dot{Y}_{23} + \dot{Y}_{12}}{\dot{X}}, \end{aligned}$$

где

$$\dot{X} = \dot{Y}_{12} \dot{Y}_{23} + \dot{Y}_{23} \dot{Y}_{31} + \dot{Y}_{31} \dot{Y}_{12}. \quad (A)$$

По умножении на $\dot{X}$ уравнения эти напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \dot{Y}_{23} + \dot{Y}_{31} &= \dot{X} \left(\frac{1}{\dot{Y}_1} + \frac{1}{\dot{Y}_2} \right), \\ \dot{Y}_{12} + \dot{Y}_{31} &= \dot{X} \left(\frac{1}{\dot{Y}_2} + \frac{1}{\dot{Y}_3} \right), \\ \dot{Y}_{23} + \dot{Y}_{12} &= \dot{X} \left(\frac{1}{\dot{Y}_3} + \frac{1}{\dot{Y}_1} \right). \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

Сложим их и разделим на 2:

$$\dot{Y}_{12} + \dot{Y}_{23} + \dot{Y}_{31} = \dot{X} \left(\frac{1}{\dot{Y}_1} + \frac{1}{\dot{Y}_2} + \frac{1}{\dot{Y}_3} \right).$$

Вычитая из этого уравнения каждое из трех последних (B) поочередно, получим

$$\dot{Y}_{12} = \dot{X} \frac{1}{\dot{Y}_3}; \quad \dot{Y}_{23} = \dot{X} \frac{1}{\dot{Y}_1}; \quad \dot{Y}_{31} = \dot{X} \frac{1}{\dot{Y}_2}. \quad (C)$$

Подставим эти выражения $\dot{Y}_{12}$, $\dot{Y}_{23}$ и $\dot{Y}_{31}$ в выражение (A) для $\dot{X}$ и мы получим, вынося в правой части $\dot{X}$ за скобки:

$$\dot{X} = \dot{X}^2 \left(\frac{1}{\dot{Y}_3 \dot{Y}_1} + \frac{1}{\dot{Y}_2 \dot{Y}_3} + \frac{1}{\dot{Y}_1 \dot{Y}_2} \right) = \dot{X}^2 \cdot \frac{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3}{\dot{Y}_1 \dot{Y}_2 \dot{Y}_3},$$

откуда

$$\dot{X} = \frac{\dot{Y}_1 \dot{Y}_2 \dot{Y}_3}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3},$$

и вследствие соотношений (C)

$$\left. \begin{aligned} \dot{Y}_{12} &= \frac{\dot{Y}_1 \dot{Y}_2}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3}, \\ \dot{Y}_{23} &= \frac{\dot{Y}_2 \dot{Y}_3}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3}, \\ \dot{Y}_{31} &= \frac{\dot{Y}_3 \dot{Y}_1}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3}. \end{aligned} \right\} \quad (72, II)$$

Формулы эти совершенно аналогичны формулам, выражающим сопротивления.

В § 76 будет объяснено, почему нам важно уметь совершать переход не только от треугольника к звезде, но и обратно.

§ 73. Графический способ перехода от треугольника к звезде и наоборот

Графические способы значительно облегчают работу, так как сводят вычисления к минимуму.

Графический метод перехода от треугольника к звезде и наоборот настолько прост, что мы поясним его прямо на числовом примере.

Пусть даны в треугольнике

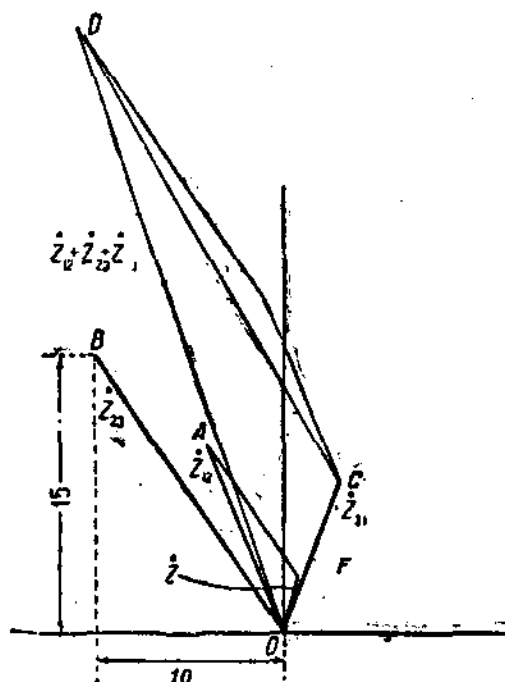
$$\dot{Z}_{12} = 10 + j4, \quad \dot{Z}_{23} = 15 + j10, \quad \dot{Z}_{31} = 8 - j3.$$

Строим эти три вектора (фиг. 131)

$$\overline{OA} = \dot{Z}_{12}, \quad \overline{OB} = \dot{Z}_{23} \text{ и } \overline{OC} = \dot{Z}_{31}$$

и затем строим их результирующий вектор

$$\overline{OD} = \dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}.$$



Фиг. 131.

Из формул (72, 1) имеем

$$\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_{12}} = \frac{\dot{Z}_{31}}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}}.$$

Соединяя D с C , получаем $\triangle DOC$, затем на OA строим подобный ему $\triangle AOF$, по углам: $\angle AOF = \angle DOC$ и $\angle OAF = \angle ODC$; сторона OF удовлетворяет пропорции

$$\frac{OF}{\dot{Z}_{12}} = \frac{\dot{Z}_{31}}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}},$$

следовательно, $OF = \dot{Z}_1$ и в принятом масштабе

$$\dot{Z}_1 = 2,5 - j0,75.$$

Совершенно аналогично решается задача и о нахождении проводимостей сторон треугольника по данным проводимостям звезды.

§ 74. Определение напряжений и сил токов при включении нагрузки звездой

(Второй способ)

Представим себе теперь, что генератор, фазы которого соединены звездой, как это обыкновенно и делается, нагружен несимметрично, причем нагрузка включена звездой.

В таком случае между его нулевой точкой и нулевой точкой нагрузки существует разность потенциалов, которую мы обозначим вектором $\dot{U}_0$.

Далее, обозначим через $\dot{Z}_0$ полное сопротивление нулевого провода, если таковой имеется, от нулевой точки генератора до нулевой точки нагрузки; через $\dot{Z}_1$, $\dot{Z}_2$ и $\dot{Z}_3$ обозначим полные сопротивления каждой фазы, т. е. суммы сопротивлений одной фазы нагрузки, одного линейного провода и соответствующей фазы генератора. Линейные токи пусть будут $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_3$ и в нулевом проводе $\dot{I}_0$; пишем закон Ома для каждой фазы и нулевого провода:

$$\begin{aligned} \dot{E}_1 - \dot{U}_0 &= \dot{I}_1 \dot{Z}_1, \\ \dot{E}_2 - \dot{U}_0 &= \dot{I}_2 \dot{Z}_2, \\ \dot{E}_3 - \dot{U}_0 &= \dot{I}_3 \dot{Z}_3, \\ 0 - \dot{U}_0 &= \dot{I}_0 \dot{Z}_0, \end{aligned}$$

или, вводя проводимости,

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= (\dot{E}_1 - \dot{U}_0) \dot{Y}_1, \\ \dot{I}_2 &= (\dot{E}_2 - \dot{U}_0) \dot{Y}_2, \\ \dot{I}_3 &= (\dot{E}_3 - \dot{U}_0) \dot{Y}_3, \\ \dot{I}_0 &= -\dot{U}_0 \dot{Y}_0. \end{aligned} \right\} \quad (74, 1)$$

Сложив эти уравнения, в левой части получим нуль; затем определим $\dot{U}_0$:

$$\dot{U}_0 = \frac{\dot{E}_1 \dot{Y}_1 + \dot{E}_2 \dot{Y}_2 + \dot{E}_3 \dot{Y}_3}{\dot{Y}_0 + \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3}. \quad (74, 2)$$

Подставляя $\dot{U}_0$ в уравнение (74,1), найдем все четыре тока. Если нулевого провода нет, то надо положить

$$\dot{Y}_0 = 0.$$

В этом выводе совершенно не предполагается, что $\dot{E}_1$, $\dot{E}_2$ и $\dot{E}_3$ должны иметь одинаковые амплитуды и быть сдвинуты в фазе на $\frac{2\pi}{3}$, поэтому весь вывод приложим и к тому случаю, когда нам даны три фазовых напряжения генератора, уже нагруженного несимметрично, $\dot{U}_1$, $\dot{U}_2$ и $\dot{U}_3$, не равные по амплитуде (фиг. 132), причем нагрузка включена звездой и нулевая точка ее соединена особым нейтральным проводом с нулевой точкой генератора.

Если выполняется условие, что три напряжения генератора не изменяются заметно нашей новой нагрузкой, то можно для расчета применить только что выведенные формулы, подставив в них вместо э. д. с. $\dot{E}$ напряжения $\dot{U}$, т. е.

$$\dot{U}_0 = \frac{\dot{U}_1 \dot{Y}_1 + \dot{U}_2 \dot{Y}_2 + \dot{U}_3 \dot{Y}_3}{\dot{Y}_0 + \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3}, \quad (74, 3)$$

$$\dot{I}_1 = (\dot{U}_1 - \dot{U}_0) \dot{Y}_1$$

и т. д.

Конечно, в этих формулах $\dot{Y}_1$, $\dot{Y}_2$ и $\dot{Y}_3$ не те, что были в предыдущем случае, ибо в соответствующие сопротивления

$$\dot{Z}_1 = \frac{1}{\dot{Y}_1}, \quad \dot{Z}_2 = \frac{1}{\dot{Y}_2}, \quad \dot{Z}_3 = \frac{1}{\dot{Y}_3}$$

теперь не входят сопротивления фаз генератора.

Прделаем следующий пример:

Пример 48.

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= 240 \text{ V}, & \dot{U}_2 &= 230e^{-j0,7\pi}, & \dot{U}_3 &= 210e^{+j0,6\pi}; \\ \dot{Z}_1 &= 10 + j5\Omega, & \dot{Z}_2 &= 8 + j6, & \dot{Z}_3 &= 10 - j4; \\ \dot{Z}_0 &= 10 + j. \end{aligned}$$

По данным сопротивлениям вычислим проводимости лучей звезды:

$$\dot{Y}_1 = \frac{1}{\dot{Z}_1} = \frac{1}{10 + j5} = \frac{10 - j5}{10^2 + 5^2} = \frac{10 - j5}{125} = 0,08 - j0,04 = 0,0895e^{-j26^\circ 32'}.$$

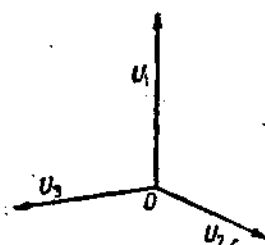
$$\dot{Y}_2 = \frac{1}{\dot{Z}_2} = \frac{1}{8 + j6} = \frac{8 - j6}{8^2 + 6^2} = \frac{8 - j6}{100} = 0,08 - j0,06 = 0,10e^{-j36^\circ 87'}.$$

$$\dot{Y}_3 = \frac{1}{\dot{Z}_3} = \frac{1}{10 - j4} = \frac{10 + j4}{10^2 + 4^2} = \frac{10 + j4}{116} = 0,0862 + j0,0345 = 0,0928e^{j21^\circ 48'}.$$

$$\dot{Y}_0 = \frac{1}{\dot{Z}_0} = \frac{1}{10 + j1} = \frac{10 - j1}{10^2 + 1^2} = \frac{10 - j1}{101} = 0,099 - j0,0099 = 0,0996e^{-j5^\circ 43'}.$$

$$\sum \dot{Y} = \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3 + \dot{Y}_0 = 0,08 - j0,04 + 0,08 - j0,06 + 0,0862 + j0,0345 + 0,099 - j0,0099 = 0,3452 - j0,0754 = 0,3539e^{-j12^\circ 15'},$$

это будет знаменатель выражения для $\dot{U}_0$.



Фиг. 132.

Теперь вычислим числитель:

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 \cdot \dot{Y}_1 &= 240 \cdot 0,0895e^{-j36^\circ 33'} = 21,45 \cdot e^{-j36^\circ 33'} = 19,2 - j9,6, \\ \dot{U}_2 \cdot \dot{Y}_2 &= 230e^{-j0,7\pi} \cdot 0,10e^{-j36^\circ 33'} = 230 \cdot e^{-j126^\circ} \cdot 0,10e^{-j36^\circ 33'} = \\ &= 3e^{-j162^\circ 33'} = -21,97 - j6,78, \\ \dot{U}_3 \cdot \dot{Y}_3 &= 210e^{j0,6\pi} \cdot 0,0928e^{j31^\circ 48'} = 19,49e^{j129^\circ 48'} = -12,48 + j14,96, \\ \dot{U}_1 \cdot \dot{Y}_1 + \dot{U}_2 \cdot \dot{Y}_2 + \dot{U}_3 \cdot \dot{Y}_3 &= 19,2 - j9,6 - 21,97 - j6,78 - 12,48 + \\ &+ j14,96 = -15,25 - j1,42 = 15,32e^{-j174^\circ 41'}.\end{aligned}$$

Найдем $\dot{U}_0$:

$$\dot{U}_0 = \frac{\dot{U}_1 \dot{Y}_1 + \dot{U}_2 \dot{Y}_2 + \dot{U}_3 \dot{Y}_3}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3 + \dot{Y}_0} = \frac{15,32e^{-j174^\circ 41'}}{0,3539e^{-j12^\circ 38'}} = 43,3e^{-j162^\circ 38'} = -41,3 - j13,1.$$

Зная $\dot{U}_0$, найдем токи в каждой фазе по формуле

$$\begin{aligned}\dot{I}_1 &= (\dot{U}_1 - \dot{U}_0) \cdot \dot{Y}_1 = (240 + 41,3 + j13,1) \cdot 0,0895e^{-j36^\circ 33'} = (281,3 + \\ &+ j13,1) \cdot 0,0895e^{-j36^\circ 33'} = 251,5e^{-j36^\circ 33'} \cdot 0,0895e^{-j36^\circ 33'} = 25,2e^{-j72^\circ 66'} \\ \dot{I}_2 &= (\dot{U}_2 - \dot{U}_0) \cdot \dot{Y}_2 = (230e^{-j0,7\pi} + 41,3 + j13,1) \cdot 0,1e^{-j36^\circ 33'} = \\ &= (-135 - j186,1 + 41,3 + j13,1) \cdot 0,1e^{-j36^\circ 33'} = \\ &= (-93,7 - j173) \cdot 0,1e^{-j36^\circ 33'} = 196,8e^{-j118^\circ 34'} \cdot 0,1e^{-j36^\circ 33'} = 19,7e^{-j155^\circ 16'} \\ \dot{I}_3 &= (\dot{U}_3 - \dot{U}_0) \cdot \dot{Y}_3 = (210e^{j0,6\pi} + 41,3 + j13,1) \cdot 0,0928e^{j31^\circ 48'} = \\ &= (-65 + j99,5 + 41,3 + j13,1) \cdot 0,0928e^{j31^\circ 48'} = \\ &= (-23,7 + j126,6) \cdot 0,0928e^{j31^\circ 48'} = 214 \cdot e^{j91^\circ 26'} \cdot 0,0928e^{j31^\circ 48'} = 19,9e^{j122^\circ 74'} \\ \dot{I}_0 &= (0 - \dot{U}_0) \dot{Y}_0 = -43,3e^{-j162^\circ 38'} \cdot 0,0996e^{-j5^\circ 43'} = -4,3e^{-j168^\circ 8'} = 4,3e^{j118^\circ 24'}.\end{aligned}$$

§ 75. Графический способ решения той же задачи

Графический способ может быть применен здесь различными приемами; наиболее простым является представление $\dot{U}_0$ [формула (74,3)] как суммы трех векторов:

$$\dot{X}_1 = \frac{\dot{U}_1 \dot{Y}_1}{\dot{Y}_0 + \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3}, \quad \dot{X}_2 = \frac{\dot{U}_2 \dot{Y}_2}{\dot{Y}_0 + \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3}$$

и

$$\dot{X}_3 = \frac{\dot{U}_3 \dot{Y}_3}{\dot{Y}_0 + \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3},$$

каждый из которых строится как четвертый пропорциональный к трем данным векторам, например,

$$\frac{\dot{X}_1}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{Y}_1}{\dot{Y}_0 + \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3}$$

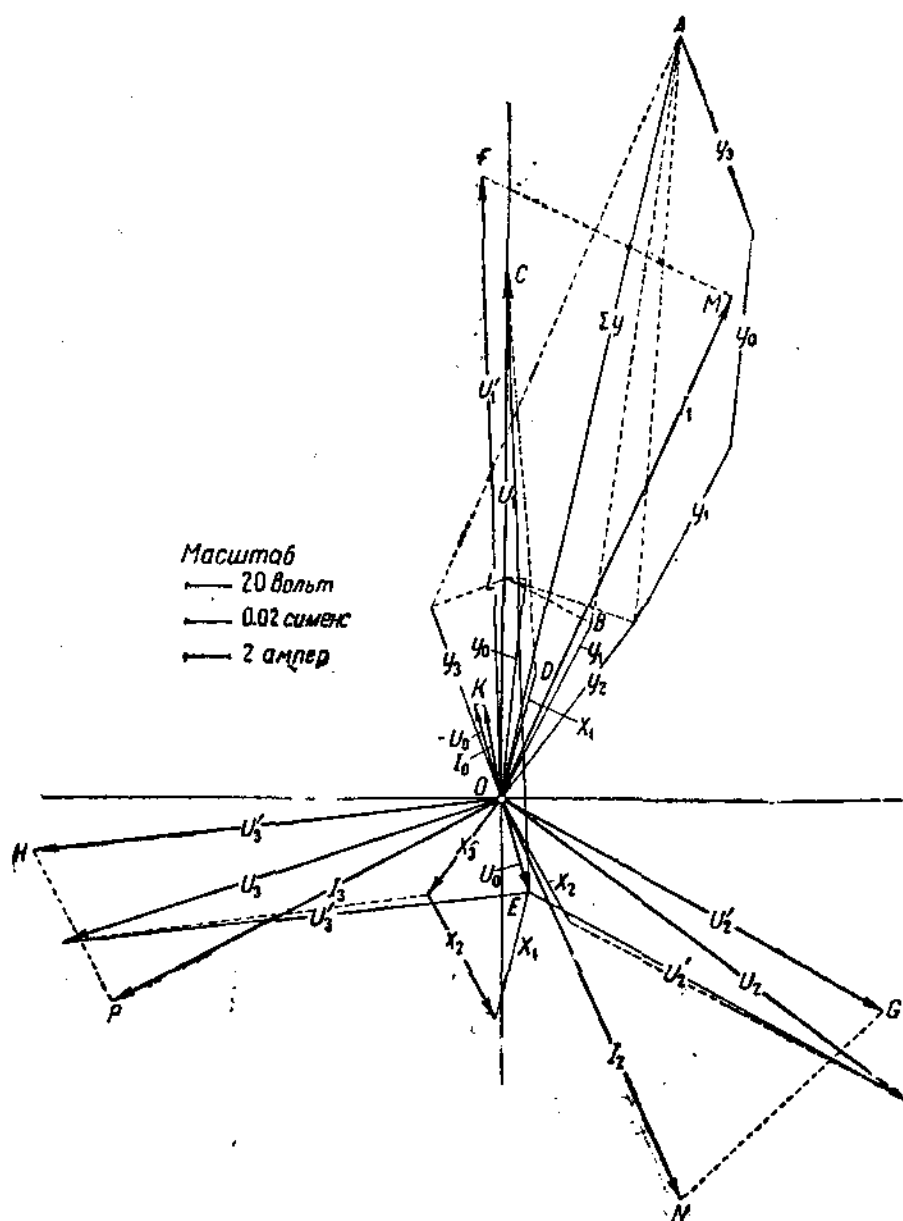
и т. д.

На фиг. 133 представлено графическое решение числовой задачи предыдущего параграфа.

После того как построены векторы $\dot{X}_1$, $\dot{X}_2$, $\dot{X}_3$ и их геометрическая сумма $\dot{U}_0$, мы находим векторы $\dot{U}_1 - \dot{U}_0$, $\dot{U}_2 - \dot{U}_0$ и т. д. и затем силы токов $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_3$ подобным же построением, например,

$$\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1 - \dot{U}_0} = \frac{\dot{Y}_1}{1},$$

где вектор $+1$ откладывается по вертикали.



Фиг. 133.

Графическое решение примера предыдущего параграфа. Выбираем подходящие масштабы для проводимостей напряжений, в нашем примере $1 \text{ мм} \equiv \frac{1}{500} \text{ S}$ и $1 \text{ мм} \equiv 2 \text{ V}$, и строим в этих масштабах векторы заданных проводимостей $\dot{Y}_0$, $\dot{Y}_1$, $\dot{Y}_2$ и $\dot{Y}_3$ и напряжений $\dot{U}_1$, $\dot{U}_2$ и $\dot{U}_3$ (фиг. 133).

Затем строим вектор $\overline{OA}$, результирующий всех векторов проводимостей.

$$\overline{OA} = \dot{Y}_0 + \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3.$$

Соединяем точку A с концами векторов $\dot{Y}_1$, $\dot{Y}_2$ и $\dot{Y}_3$.

На векторе $\dot{U}_1$ строим треугольник OCD , подобный треугольнику OAB по углам: $\angle OCD = \angle OAB$ и $\angle DOC = \angle BOA$; из этих подобных треугольников получаем

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}, \quad \overline{OD} = \frac{\overline{OC} \cdot \overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\dot{U}_1 \dot{Y}_1}{\dot{Y}_0 + \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3},$$

следовательно, вектор OD в масштабе напряжений изображает $\dot{X}_1$.

Аналогично найдем и векторы, изображающие $\dot{X}_2$ и $\dot{X}_3$, строя подобные треугольники на векторах $\dot{U}_2$ и $\dot{U}_3$.

Складывая графически $\dot{X}_1$, $\dot{X}_2$ и $\dot{X}_3$, получаем вектор $\overline{OE}$, изображающий потенциал нулевой точки нагрузки. Соединяя концы векторов $\dot{U}_1$, $\dot{U}_2$ и $\dot{U}_3$ с точкой E , получаем векторы

$$\dot{U}'_1 = \dot{U}_1 - \dot{U}_0, \\ \dot{U}'_2 = \dot{U}_2 - \dot{U}_0 \text{ и } \dot{U}'_3 = \dot{U}_3 - \dot{U}_0$$

и перемещаем их параллельно самим себе таким образом, чтобы их начала попали в точку O .

Следовательно $\overline{OF} = \dot{U}_1 - \dot{U}_0$, $\overline{OG} = \dot{U}_2 - \dot{U}_0$, $\overline{OH} = \dot{U}_3 - \dot{U}_0$

и $\overline{OK} = O - \dot{U}_0$.

Для определения токов по вертикали откладываем вспомогательный единичный вектор $\overline{OL}$ такой длины, чтобы получился удобный масштаб для силы тока.

Так как

$$i = \frac{(\dot{U}_1 - U_0) Y_1}{1},$$

то, подставляя $I_1 = 1 \text{ A}$, $\dot{U}_1 - \dot{U}_0 = 1 \text{ V} \equiv 0,5 \text{ mm}$ и $Y_1 = 1 \text{ S} \equiv 500 \text{ mm}$ и единица в знаменателе $\equiv 50 \text{ mm}$, получаем

$$1 \text{ A} = \frac{0,5 \cdot 500}{50} \equiv 5 \text{ mm}.$$

или

$$1 \text{ mm} \equiv 0,2 \text{ A}.$$

Точку L соединим с концами векторов проводимостей. На векторе OF построим треугольник OFM , подобный треугольнику OLB по углам:

$$\angle FOM = \angle LOB \text{ и } \angle OFM = \angle OLB;$$

тогда

$$\frac{OM}{OF} = \frac{OB}{OL};$$

следовательно, вектор OM в масштабе $1 \text{ mm} \equiv 0,2 \text{ A}$ изображает по величине и фазе ток $\dot{I}_1$. Таким же образом найдем и токи $\dot{I}_2$, $\dot{I}_3$ и $\dot{I}_0$.

Измеряя длины векторов $\overline{OM}$, $\overline{ON}$ и $\overline{OP}$ и углы их с вертикалью, получаем, что

$$\overline{OM} \approx 126 \text{ mm}, \quad \angle MOL \approx -24^\circ,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= 25,2e^{-j24^\circ}, \\ \overline{ON} &= 98,5 \text{ mm}, \quad \angle NOL \approx -155^\circ 15', \\ \dot{I}_2 &= 19,7e^{-j155^\circ 15'}, \\ OP &= 99,5 \text{ mm}, \quad \angle POL \approx 118^\circ 10', \\ \dot{I}_3 &= 19,9e^{+j118^\circ 10'}. \end{aligned}$$

т. е. результаты вполне совпадают с аналитическим решением.

§ 76. Наиболее общий случай расчета трехфазной цепи

Чаще всего задача расчета трехфазной цепи встречается в следующем виде.

Представим себе, что генератор нагружен несимметрично. Часть нагрузки включена в виде нескольких треугольников, а часть — в виде нескольких звезд без нейтрального провода.

Для того чтобы воспользоваться только что выведенными формулами, надо всю нагрузку привести к одной звезде.

У нас имеется в нагрузке несколько параллельно подключенных звезд; если бы они были совершенно симметричны, то потенциалы их нулевых точек были бы равны, и все эти звезды можно было бы привести к одной звезде простым алгебраическим сложением полных (комплексных) проводимостей соответствующих лучей как параллельных ветвей, находящихся под одним и тем же напряжением; но в общем случае звезды несимметричны, и нам задано, что нулевого провода нет; мы должны поэтому каждую звезду превратить в эквивалентный треугольник, пользуясь формулами (72, II), затем комплексные проводимости соответствующих, т. е. соединяющих одни и те же линейные провода, сторон в всех треугольниках, — т. е. не только полученных из звезд, но и заданных непосредственно, как часть нагрузки, — сложить и получить, таким образом, один единственный треугольник нагрузки, эквивалентный прежде заданным звездам и треугольникам всем вместе.

После этого, пользуясь формулами (72, I), мы должны перейти к эквивалентной звезде и определить по формулам (74, 1) и (74, 2) $\dot{U}_0$ и все токи, после чего будет уже крайне просто найти, например, падения напряжения в генераторе и в линии, мощности и т. д.

При подобных расчетах в практике чаще бывает, что заданы не э. д. с. генератора, а три линейных напряжения у места подключения нагрузки, причем в общем случае эти напряжения уже несимметричны, т. е. по величине не равны и в фазе сдвинуты друг относительно друга не на $\frac{2\pi}{3}$.

Решение задачи и в этом случае очень несложно, если допустить, что вновь подключаемая нагрузка не увеличит несимметричности напряжений.

Итак, пусть нам даны линейные напряжения $\dot{U}_{12}$, $\dot{U}_{23}$ и $\dot{U}_{31}$ и сопротивления нагрузки $\dot{Z}_1$, $\dot{Z}_2$, и $\dot{Z}_3$, включенные звездой без нулевого провода.

Обозначим через $\dot{U}_1$, $\dot{U}_2$ и $\dot{U}_3$ фазовые напряжения в нагрузке. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 - \dot{U}_2 &= \dot{U}_{12}, \\ \dot{U}_2 - \dot{U}_3 &= \dot{U}_{23}, \\ \dot{U}_3 - \dot{U}_1 &= \dot{U}_{31}. \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

Сложив эти три уравнения, получим, что векторная сумма трех линейных напряжений равна нулю, что, как известно, означает, что эти векторы составляют замкнутый треугольник.

Так как нулевого провода нет, то сумма трех фазовых токов нагрузки равна нулю, т. е.

$$\dot{U}_1 \dot{Y}_1 + \dot{U}_2 \dot{Y}_2 + \dot{U}_3 \dot{Y}_3 = 0.$$

Выразим $\dot{U}_2$ и $\dot{U}_3$ через данные линейные напряжения и $\dot{U}_1$, и мы получим уравнение с одним неизвестным $\dot{U}_1$, которое и определим из него. Имеем, что

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_2 &= \dot{U}_{12} - \dot{U}_1, \\ \dot{U}_3 &= \dot{U}_{31} + \dot{U}_1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{В})$$

поэтому

$$\dot{U}_1 \dot{Y}_1 + (\dot{U}_{12} - \dot{U}_1) \dot{Y}_2 + (\dot{U}_{31} + \dot{U}_1) \dot{Y}_3 = 0,$$

откуда

$$\dot{U}_1 = \frac{\dot{U}_{12} \dot{Y}_2 - \dot{U}_{31} \dot{Y}_3}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3}, \quad (\text{С})$$

а затем по формулам (В) определяем $\dot{U}_2$ и $\dot{U}_3$.

Пример 49.

$$\dot{U}_{12} = 120 \text{ В}; \quad \dot{U}_{31} = 150e^{-j0,7\pi}; \quad \dot{U}_{21} = 105e^{+j\frac{\pi}{2}} = j105.$$

$$\dot{Y}_1 = 0,1 - j0,05; \quad \dot{Y}_2 = 0,2 + j0,08; \quad \dot{Y}_3 = 0,3 - j0,1.$$

$$\dot{U}_{12} \cdot \dot{Y}_2 = 120 \cdot (0,2 + j0,08) = 24 + j9,6.$$

$$\dot{U}_{31} \cdot \dot{Y}_3 = j105 \cdot (0,3 - j0,1) = 10,5 + j31,5.$$

$$\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3 = 0,1 - j0,05 + 0,2 + j0,08 + 0,3 - j0,1 = 0,6 - j0,07.$$

Подставляя в формулу, (С) определяем $\dot{U}_1$:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \frac{24 + j9,6 - 10,5 - j31,5}{0,6 - j0,07} = \frac{(13,5 - j21,9)(0,6 + j0,07)}{0,6^2 + 0,07^2} = \frac{8,1 - j13,14 + j0,945 + 1,533}{0,365} = \\ &= \frac{9,633 - j12,185}{0,365} = 26,4 - j33,4 = 42,6e^{-j51^\circ 10'}. \end{aligned}$$

$\dot{U}_2$ и $\dot{U}_3$ находим по формулам (В):

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 - \dot{U}_{12} = 26,4 - j33,4 - 120 = -93,6 - j33,4 = 99,4e^{-j100^\circ 20'},$$

$$\dot{U}_3 = \dot{U}_{31} + \dot{U}_1 = j105 + 26,4 - j33,4 = 26,4 + j71,6 = 76,3e^{j69^\circ 40'}.$$

Умножая фазовые напряжения на соответствующие проводимости, получим линейные токи:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_1 \cdot \dot{Y}_1 = 42,6e^{-j51^\circ 10'} \cdot (0,1 - j0,05) = 42,6e^{-j51^\circ 10'} \cdot 0,112e^{-j26^\circ 34'} = 4,77e^{-j78^\circ 44'},$$

$$\dot{I}_2 = \dot{U}_2 \cdot \dot{Y}_2 = 99,4e^{-j100^\circ 20'} \cdot (0,2 + j0,08) = 99,4e^{-j100^\circ 20'} \cdot 0,216e^{j21^\circ 48'} = 21,5e^{-j78^\circ 32'},$$

$$\dot{I}_3 = \dot{U}_3 \cdot \dot{Y}_3 = 76,3e^{j69^\circ 40'} \cdot (0,3 - j0,1) = 24,1e^{j34^\circ 30'}.$$

§ 77. Графический способ решения задачи, когда даны три линейных напряжения

Величины $\dot{U}_1$, $\dot{U}_2$ и $\dot{U}_3$ строятся графически на основании определяющих их формул (С) и (В) предыдущего параграфа.

Вектор $\dot{U}_1$ строится как разность двух векторов:

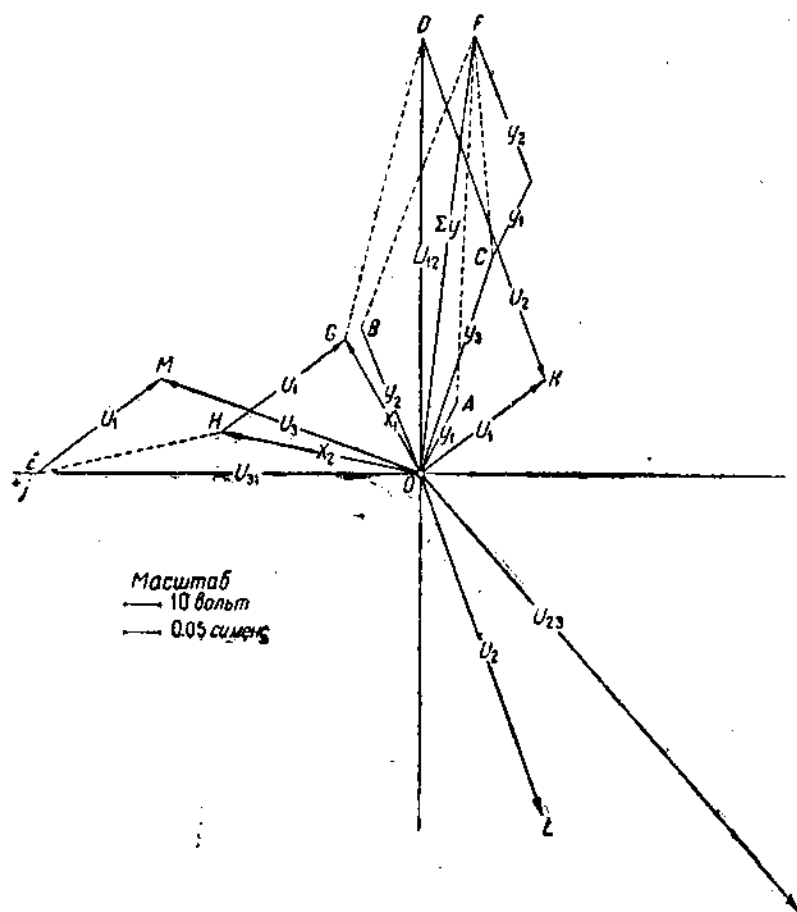
$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{12} \frac{\dot{Y}_2}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3} - \dot{U}_{31} \frac{\dot{Y}_3}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3}.$$

Сначала найдем вектор $\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3$, затем найдем вектор $\dot{X}$ такой, что

$$\frac{\dot{X}}{\dot{U}_{12}} = \frac{\dot{Y}_2}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3}.$$

Так же найден и второй вектор и, наконец, взята их разность.

Графическое решение предыдущей задачи (фиг. 134). Берем масштаб для проводимостей $1 \text{ мм} \equiv 0,005 \text{ S}$, строим в этом масштабе векторы проводимостей $\overline{OA} = \dot{Y}_1 = 0,1 - j0,05$; $\overline{OB} = \dot{Y}_2 = 0,2 + j0,08$ и $\overline{OC} = \dot{Y}_3 = 0,3 - j0,1$.



Фиг. 134.

Затем в масштабе $1 \text{ В} \equiv 1 \text{ мм}$ строим векторы напряжений: $\overline{OD} = \dot{U}_{12} = 120 \text{ В}$ и $\overline{OE} = \dot{U}_{31} = j105$.

Складывая $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$, получаем вектор $\overline{OF} = \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3$. При точке O строим $\angle DOG = \angle FOB$, а при точке D — $\angle ODG = \angle OFB$. Полученный $\triangle ODG$, очевидно, подобен $\triangle OFB$, и следовательно,

$$\frac{\overline{OG}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OF}}; \quad \overline{OG} = \dot{X}_1 = \dot{U}_{12} \cdot \frac{\dot{Y}_2}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3}.$$

Аналогично построим $\triangle OEH$ подобный $\triangle OFC$, из которых получаем

$$\overline{OH} = \dot{X}_3 = \dot{U}_{31} \cdot \frac{\dot{Y}_3}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3}.$$

Вектор $\overline{HG}$ в принятом масштабе изобразит напряжение $\dot{U}_1$; действительно,

$$\overline{HG} = \overline{OG} - \overline{OH} = \dot{U}_{12} \frac{\dot{Y}_2}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3} - \dot{U}_{31} \frac{\dot{Y}_3}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3} = \dot{U}_1.$$

Построим при точке O вектор $\overline{OK} = \overline{HG} = \dot{U}_1$; $OK = 43$ мм, а $\angle DOK = 52,7^\circ$, следовательно,

$$\dot{U}_1 = 43e^{-j52,7^\circ}.$$

Вычитая из вектора $\overline{OK}$ вектор $\overline{OD}$, получим вектор $\overline{DK}$ или равный ему $\overline{OL}$, который и изобразит напряжение $\dot{U}_2$. Измеряя $\overline{OL}$, находим, что

$$\dot{U}_2 = 99,5e^{-j160,20^\circ}.$$

Складывая векторы $\overline{OE}$ и $\overline{EM} = \overline{OK}$, получим вектор $\overline{OM}$, очевидно, изображающий напряжение $\dot{U}_3$.

Измеряя длину OM и $\angle DOM$, найдем, что

$$\dot{U}_3 = 76,5 \cdot e^{j69,45^\circ}.$$

§ 78. Пример (50) аналитического и графического расчета трехфазной системы

Нам заданы линейные напряжения:

$$\dot{U}_{12} = 240 \text{ В}, \quad \dot{U}_{23} = 220e^{-j\frac{3}{4}\pi}, \quad \dot{U}_{31} = 177e^{j0,68\pi}$$

и нагрузка в виде одного треугольника с сопротивлениями.

$$\dot{Z}_{12} = 20 + j10, \quad \dot{Z}_{23} = 30 + j8, \quad \dot{Z}_{31} = 30 - j10$$

и двух звезд с сопротивлениями

$$\dot{Z}'_1 = 10 + j4, \quad \dot{Z}'_2 = 8 + j3, \quad \dot{Z}'_3 = 10 + j5$$

и

$$\dot{Z}''_1 = 20 + j8, \quad \dot{Z}''_2 = 12 - j5, \quad \dot{Z}''_3 = 12 + j4.$$

Требуется найти три линейных тока, результирующих для всей нагрузки.

Приведем всю нагрузку к одному эквивалентному треугольнику. Для этого обе звезды приведем к эквивалентным треугольникам, а затем проводимости одинаковых фаз всех нагрузок сложим. Для приведения звезд к треугольникам воспользуемся ранее выведенной формулой, преобразовав ее следующим образом: ввиду того, что даны сопротивления лучей звезды,

$$\dot{Y}_{12}^* = \frac{\dot{Y}_1 \dot{Y}_2}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3} = \frac{\frac{1}{\dot{Z}_1} \cdot \frac{1}{\dot{Z}_2}}{\frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_3}} = \frac{\dot{Z}_3}{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_3 + \dot{Z}_3 \dot{Z}_1},$$

и аналогично

$$\dot{Y}_{23} = \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_3 + \dot{Z}_3 \dot{Z}_1}; \quad \dot{Y}_{31} = \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_3 + \dot{Z}_3 \dot{Z}_1}.$$

Вычислим проводимости треугольника, эквивалентного первой звезде.

Для простоты расчета вычислим знаменатель формул отдельно:

$$\dot{Z}'_1 \dot{Z}'_2 + \dot{Z}'_2 \dot{Z}'_3 + \dot{Z}'_3 \dot{Z}'_1 = (10 + j4)(8 + j3) + (8 + j3)(10 + j5) + (10 + j5)(10 + j4) = 80 + j32 + j30 - 12 + 80 + j30 + j40 - 15 + 100 + j50 + j40 - 20 = 213 + j222,$$

$$\dot{Y}'_{12} = \frac{10 - j5}{213 + j222} = \frac{(10 + j5)(213 - j222)}{213^2 + 222^2} = \frac{3240 - j1155}{94653} = 0,0342 - j0,0122,$$

$$\dot{Y}'_{23} = \frac{10 + j4}{213 + j222} = 0,0319 - j0,0145,$$

$$\dot{Y}'_{31} = \frac{8 + j3}{213 + j222} = 0,0250 - j0,0120.$$

Таким же образом приведем вторую звезду:

$$\dot{Z}''_1 \dot{Z}''_2 + \dot{Z}''_2 \dot{Z}''_3 + \dot{Z}''_3 \dot{Z}''_1 = (20 + j8)(12 - j5) + (12 - j5)(12 + j4) + (12 + j4)(20 + j8) = 652 + j160,$$

$$\dot{Y}''_{12} = \frac{12 + j4}{652 + j160} = 0,0188 + j0,0015,$$

$$\dot{Y}''_{23} = \frac{20 + j8}{652 + j160} = 0,0318 + j0,0045,$$

$$\dot{Y}''_{31} = \frac{12 - j5}{652 + j160} = 0,0156 - j0,0115.$$

Вычислим проводимости треугольника:

$$\dot{Y}_{12} = \frac{1}{\dot{Z}_{12}} = \frac{1}{20 + j10} = 0,0400 - j0,0200,$$

$$\dot{Y}_{23} = \frac{1}{\dot{Z}_{23}} = \frac{1}{30 + j8} = 0,0311 - j0,0083,$$

$$\dot{Y}_{31} = \frac{1}{\dot{Z}_{31}} = \frac{1}{30 - j10} = 0,0333 + j0,0100.$$

Треугольник, эквивалентный всей нагрузке, должен иметь следующие проводимости:

$$\dot{Y}_{12'} = \dot{Y}_{12} + \dot{Y}'_{12} + \dot{Y}''_{12} = 0,0930 - j0,0307,$$

$$\dot{Y}_{23'} = \dot{Y}_{23} + \dot{Y}'_{23} + \dot{Y}''_{23} = 0,0948 - j0,0183,$$

$$\dot{Y}_{31'} = \dot{Y}_{31} + \dot{Y}'_{31} + \dot{Y}''_{31} = 0,0706 - j0,0135.$$

Теперь можем вычислить линейные токи, придав выражения напряжений такой вид:

$$\dot{U}_{12} = 240; \quad \dot{U}_{23} = 220e^{-j\frac{3}{4}\pi} = 220e^{-j135^\circ} = -155,5 - j155,5;$$

$$\dot{U}_{31} = 177e^{j0,83\pi} = 177e^{j113^\circ 48'} = -84,5 + j155,5.$$

В данном случае нет необходимости переходить к общей эквивалентной звезде, ибо известны напряжения у самой нагрузки. Поэтому уравнения (А) § 71:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{I}_{12} - \dot{I}_{31} = \dot{U}_{12} \dot{Y}_{12} - \dot{U}_{31} \dot{Y}_{31} = 240(0,0930 - j0,0307) - \\ &- (-84,5 + j155,5)(0,0706 - j0,0135) = 22,32 - j7,37 + 5,96 - j1,15 = \\ &= 26,18 - j19,50 = 32,64e^{-j36^\circ 45'}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_2 &= i_{23} - i_{12} = \dot{U}_{23} \dot{Y}_{23} - \dot{U}_{12} \dot{Y}_{12} = (-155,5 - j155,5)(0,0948 - j0,0183) - \\ &- 240(0,0930 - j0,0307) = -39,91 - j4,54 = 40,1e^{-j17,3^\circ}; \\ i_3 &= -i_1 - i_2 = 13,73 + j24,04 = 27,68e^{j60,15^\circ}. \end{aligned}$$

Графическое решение. Прежде всего произведем графическое приведение звезд к эквивалентным треугольникам. Для этого (фиг. 135, см. вклейку) построим векторы: $\overline{OA}$ — изображающий проводимость

$$\dot{Y}'_1 = \frac{1}{\dot{Z}'_1} = 0,0862 - j0,0345;$$

$$\overline{OB} = \dot{Y}'_2 = \frac{1}{\dot{Z}'_2} = 0,1095 - j0,0412$$

и

$$\overline{OC} = \dot{Y}'_3 = \frac{1}{\dot{Z}'_3} = 0,0800 - j0,0400.$$

Масштаб для проводимостей выбираем $1 \text{ мм} = 0,001 \text{ S}$. Суммируя векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$, получаем вектор $\overline{OD}$, в принятом масштабе представляющий $\dot{Y}'_1 + \dot{Y}'_2 + \dot{Y}'_3$.

Далее поступаем, как было показано в § 73. Соединяем точку D с точками A , B и C и строим подобные треугольники:

$$\triangle OAG \sim \triangle ODB, \triangle OBE \sim \triangle ODC \text{ и } \triangle OCF \sim \triangle ODA.$$

Как было доказано ранее, векторы $\overline{OG}$, $\overline{OE}$ и $\overline{OF}$ в принятом масштабе по величине и фазе изобразят проводимости сторон эквивалентного треугольника; измеряя их проекции на оси, находим:

$$\begin{aligned} \overline{OG} = \dot{Y}_{12} &= 0,0342 - j0,0122; \quad \overline{OE} = \dot{Y}_{23} = 0,0319 - j0,0145; \\ \overline{OF} = \dot{Y}_{31} &= 0,0250 - j0,0120. \end{aligned}$$

Совершенно так же находим проводимости треугольника, эквивалентного второй звезде.

Построив векторы $\overline{OK}$, $\overline{OL}$ и $\overline{OM}$, имеем, измеряя составляющие:

$$\begin{aligned} \overline{OK} = \dot{Y}''_{12} &= 0,0180 + j0,015; \quad \overline{OL} = \dot{Y}''_{23} = 0,0318 + j0,0045 \text{ и } \overline{OM} = \dot{Y}''_{31} = \\ &= 0,0156 - j0,0115. \end{aligned}$$

Для нахождения проводимостей между фазами суммируем соответствующие проводимости всех трех треугольников: одного данного и двух эквивалентных. Чтобы не загромождать чертежа, сложение проводимостей произведено отдельно (фиг. 136, см. вклейку).

Из диаграммы находим, что

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{12} &= \dot{Y}_{12} + \dot{Y}'_{12} + \dot{Y}''_{12} = 0,0930 - j0,0307, \\ \dot{Y}_{23} &= \dot{Y}_{23} + \dot{Y}'_{23} + \dot{Y}''_{23} = 0,0948 - j0,0183, \\ \dot{Y}_{31} &= \dot{Y}_{31} + \dot{Y}'_{31} + \dot{Y}''_{31} = 0,0176 - j0,0135. \end{aligned}$$

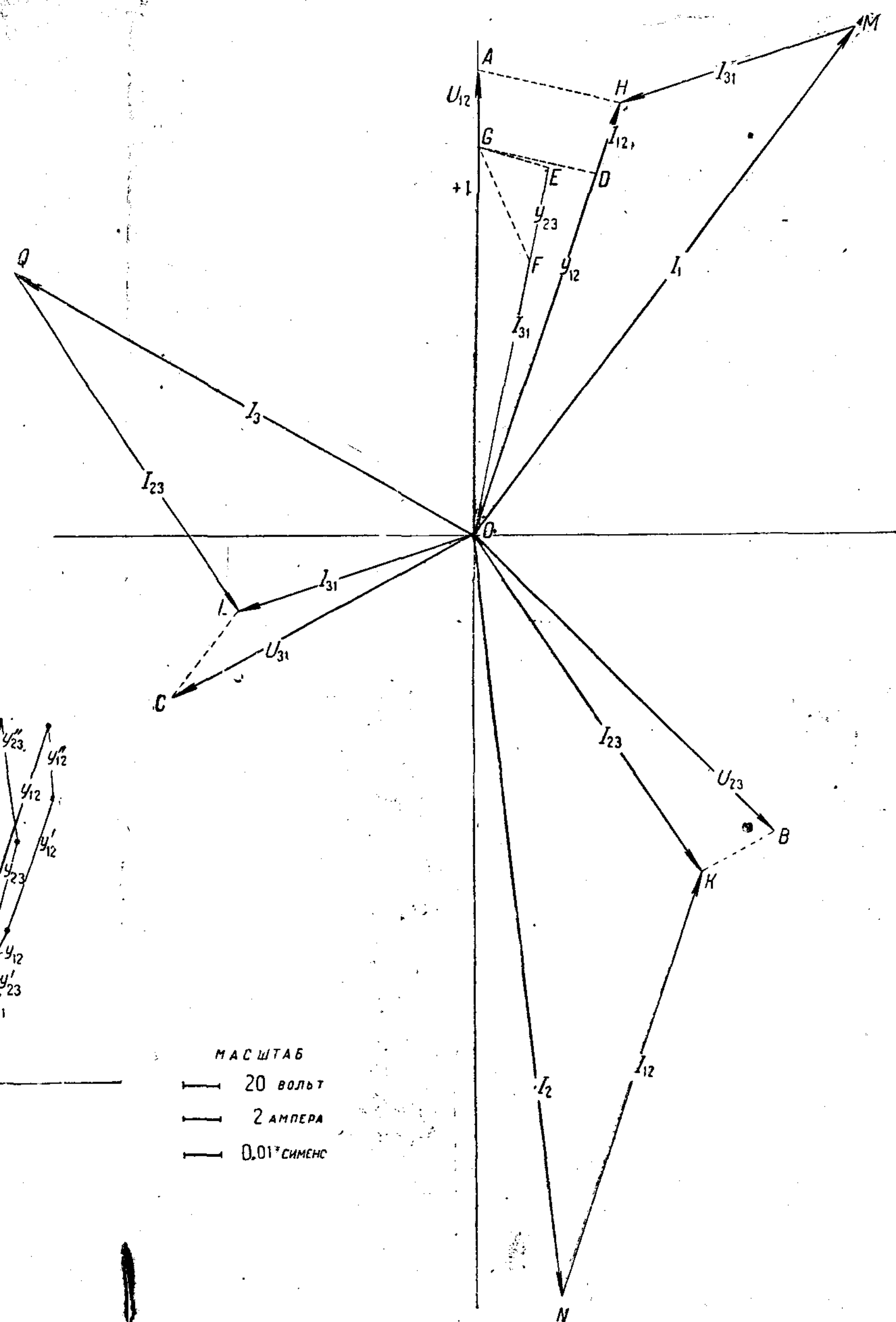
Для определения линейных токов находим сначала произведения

$$\dot{U}_{12} \dot{Y}_{12} = i_{12}, \quad \dot{U}_{23} \dot{Y}_{23} = i_{23}, \quad \dot{U}_{31} \dot{Y}_{31} = i_{31},$$

т. е. токи в сторонах эквивалентного треугольника.

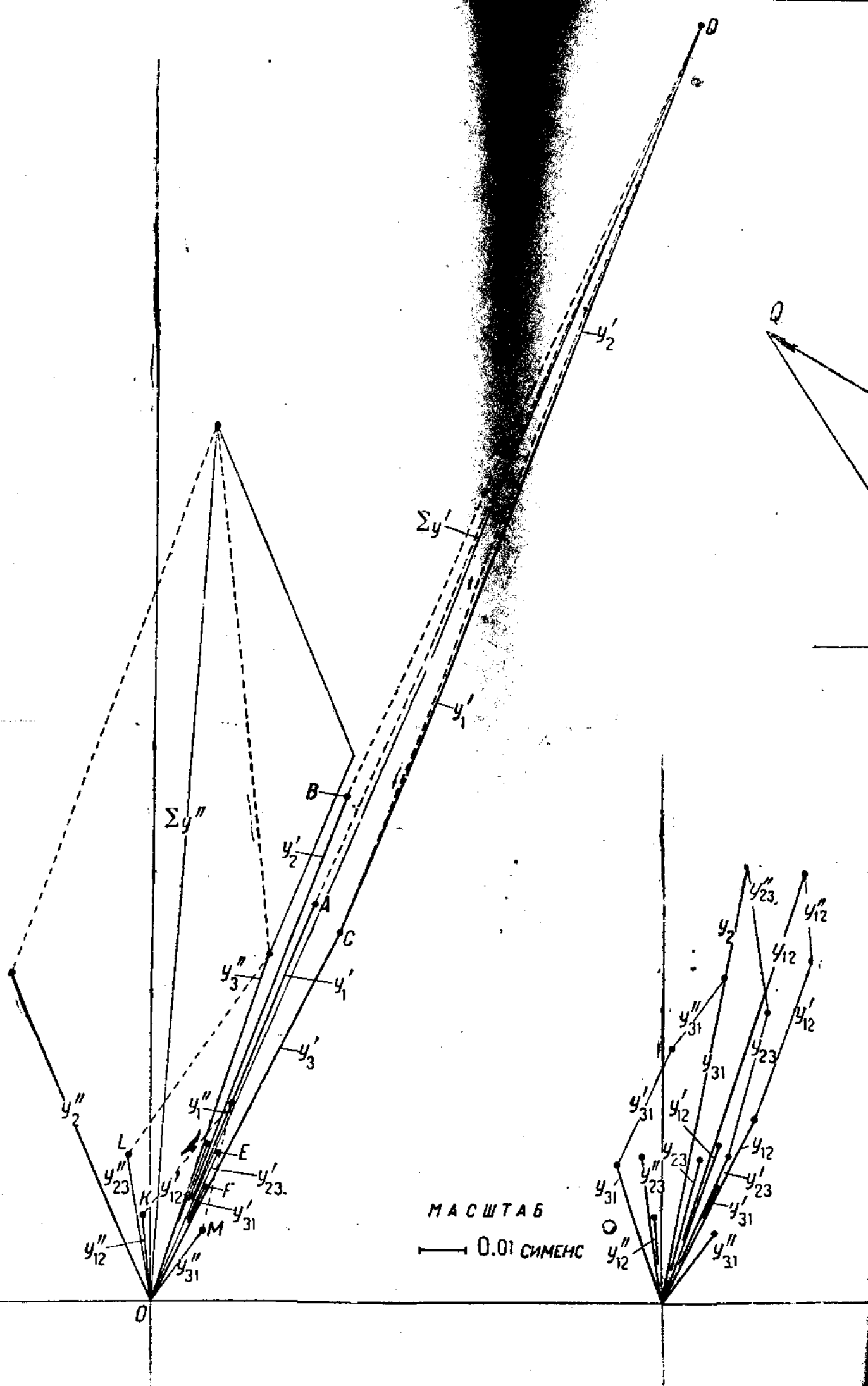
Строим (фиг. 137, см. вклейку) векторы напряжений в масштабе $1 \text{ мм} = 2 \text{ В}$

$$\overline{OA} = \dot{U}_{12}, \quad \overline{OB} = \dot{U}_{23} \text{ и } \overline{OC} = \dot{U}_{31},$$



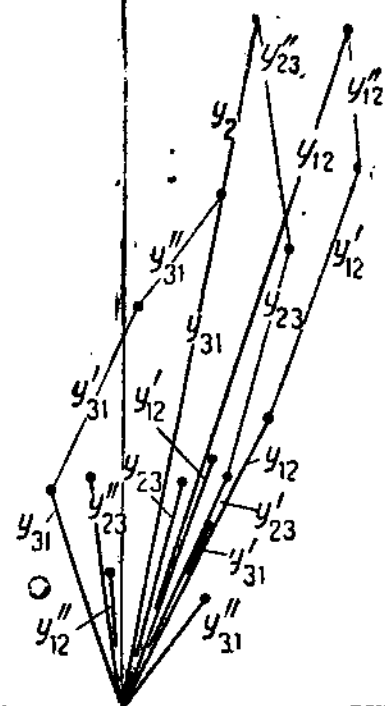
Фиг. 137.

МАСШТАБ
— 0.01 СИМЕНС



Фиг. 136.

МАСШТАБ
— 0.01 СИМЕНС



Фиг. 136.

и переносим на эту диаграмму в прежнем масштабе найденные значения проводимостей сторон треугольника

$$\overline{OD} = \dot{Y}_{12}, \quad \overline{OE} = \dot{Y}_{23} \text{ и } \overline{OF} = \dot{Y}_{31}.$$

Строим вспомогательный единичный вектор $OG = +1$.

Точку G соединяем с точками D , E и F . На векторе OA строим $\triangle OAH \sim \triangle OGD$ по углам: $\angle OGD = \angle OAH$ и $\angle AOH = \angle GOD$, из подобных треугольников находим

$$\frac{\overline{OH}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OG}}; \quad \overline{OH} = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OD}}{\overline{OG}}.$$

Так как $\overline{OA} = \dot{U}_{12} \cdot 0,5 \text{ мм}$; $\overline{OD} = \dot{Y}_{12} \cdot 1000 \text{ мм}$ и $OG = 1 \cdot 100 \text{ мм}$, то

$$\overline{OH} = \frac{\dot{U}_{12} \cdot 0,5 \cdot \dot{Y}_{12} \cdot 1000}{1 \cdot 100} = \dot{I}_{12} \cdot 5 \text{ мм},$$

следовательно OH изображает ток в масштабе $1 \text{ мм} \approx 0,2$ ампера.

Строя $\triangle OBK \sim \triangle OGE$, находим вектор OK , изображающий ток $\dot{I}_{23}$, и из $\triangle OCL$, подобного $\triangle OGF$, находим вектор OL , соответствующий току $\dot{I}_{31}$. Вычитая из вектора $\overline{OH}$ вектор $\overline{OL}$ (или равный ему $\overline{MH}$), находим вектор $\overline{OM}$, соответствующий току $\dot{I}_1$. Соответственно ток $\dot{I}_2$ изобразится вектором $\overline{ON} = \overline{OK} - \overline{OH}$ и $\dot{I}_3$ — вектором $\overline{OQ} = \overline{OL} - \overline{OK}$.

Измеряя векторы $\overline{OM}$, $\overline{ON}$ и $\overline{OQ}$, находим, что

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= 32,64 e^{-j36^\circ 43'}, \\ \dot{I}_2 &= 40,1 e^{-j173^\circ 71'}, \\ \dot{I}_3 &= 27,68 e^{j60^\circ 15'}. \end{aligned}$$

Определять углы при графическом решении можно с достаточной точностью хорошим транспортиром, позволяющим отсчитать четверть градуса или $15'$.

§ 79. Нулевая точка нагрузки и ее потенциал

В этом параграфе остановимся подробнее на исследовании вопроса о потенциале нулевой точки нагрузки, включенной звездой, без нулевого провода.

Рассмотрим сначала частный случай, когда

$$\dot{Z}_1 = \dot{Z}_2 = \dot{Z}_3,$$

как это бывает при включении в виде нагрузки трехфазных двигателей.

Так как сумма трех токов в звезде без нулевого провода равна нулю, то

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{Z}_1} + \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_2} + \frac{\dot{U}_3}{\dot{Z}_3} = 0, \quad (\text{A})$$

а вследствие равенства Z -ов, и

$$\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_3 = 0. \quad (\text{B})$$

Из уравнений (76, А) мы имеем

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_2 + \dot{U}_3, \\ \dot{U}_1 &= \dot{U}_3 - \dot{U}_{31}, \\ \dot{U}_1 &= \dot{U}_1. \end{aligned}$$

Сложив и приняв во внимание уравнение (В), получим

и аналогично

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \frac{1}{3} (\dot{U}_{12} - \dot{U}_{31}) \\ \dot{U}_2 &= \frac{1}{3} (\dot{U}_{23} - \dot{U}_{12}) \\ \dot{U}_3 &= \frac{1}{3} (\dot{U}_{31} - \dot{U}_{23}) \end{aligned} \right\} \quad (C)$$

Последние два соотношения читатель должен для упражнения вывести сам.

Отложим на фиг. 138 $\overline{AD} = -\dot{U}_{31} = -\overline{AC}$; тогда на основании первой из формул (C) получаем, что

$$\overline{OA} = \frac{1}{3} \cdot \overline{BD},$$

т. е. $OA \parallel BD$ и $OA = \frac{1}{3} \cdot BD$;

а в таком случае, продолжив AO до пересечения в M с BC , имеем

$$BM = MC \text{ и } AO = \frac{2}{3} AM;$$

аналогично — и для других векторов.

Следовательно, точка O есть центр тяжести треугольника линейных напряжений ABC .

Фиг. 133.

Перейдем к общему случаю, когда $\dot{Z}_1$, $\dot{Z}_2$ и $\dot{Z}_3$ не равны.

Вычисление и в этом случае надо начать с определения $\dot{U}'_1$, $\dot{U}'_2$ и $\dot{U}'_3$ для одинаковых $\dot{Z}$ во всех фазах. Действительно, существующие при заданных Z -х напряжения обозначим через

$$\dot{U}_1, \dot{U}_2 \text{ и } \dot{U}_3.$$

На основании уравнений (76, А) все напряжения объединены в векторной диаграмме фиг. 139.

Между нулевой точкой O действительной нагрузки и нулевой точкой O_1 нагрузки при равных $\dot{Z}$ существует равенство потенциалов $\overline{O_1O} = \dot{U}_0$, и мы можем написать:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_0 &= \dot{U}'_1 - \dot{U}_1, \\ \dot{U}_0 &= \dot{U}'_2 - \dot{U}_2, \\ \dot{U}_0 &= \dot{U}'_3 - \dot{U}_3. \end{aligned} \right\} \quad (D)$$

Читатель не должен смешивать это $\dot{U}_0$ с разностью потенциалов между нулевой точкой нагрузки и нулевой точкой генератора в § 74.

Умножим каждое из этих уравнений на проводимость соответствующей фазы нагрузки и сложим; так как сумма трех фазовых токов нагрузки без нулевого провода равна нулю, то

$$\dot{U}_1 \dot{Y}_1 + \dot{U}_2 \dot{Y}_2 + \dot{U}_3 \dot{Y}_3 = 0,$$

ются координатами точки O в той же системе осей действительной и мнимой, к которой мы относим все наши векторы.

Итак,

$$X + jV = \frac{c + jd}{a + m + j(b + n)}, \quad (F)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} (a + m)X - (b + n)V &= c, \\ (b + n)X + (a + m)V &= d. \end{aligned} \right\} \quad (H)$$

Из этой системы уравнений следует, что каждому $Y_1 = m + jn$ соответствует свой комплекс $X + jV$, ибо X и V определяются из этих уравнений по данным m и n ; а, наоборот, задаваясь положением точки O на плоскости, т. е. задаваясь величинами X и V , мы можем определить m и n , т. е. узнать, каковы должны быть активная и реактивная проводимости в фазе I , чтобы напряжение в ней было заданным по величине и по фазе.

Однако последняя задача не всегда возможна. Разберем этот вопрос.

Определим из уравнений (H) m и n , считая X и V данными:

$$\begin{aligned} m &= \frac{cX - aX^2 + dV - aV^2}{X^2 + V^2}, \\ n &= \frac{dX - bX^2 + cV - bV^2}{X^2 + V^2}. \end{aligned}$$

Так как m должно быть положительным, то должно выполняться условие этого:

$$cX + dV \geq a(X^2 + V^2);$$

так как, как указано выше, a тоже положительно, то

$$\frac{c}{a}X + \frac{d}{a}V \geq X^2 + V^2. \quad (K)$$

Обратимся к числовому примеру.

Пример 51. Пусть даны три симметричных линейных напряжения:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{12} &= 60\sqrt{3} + j60 = 103,8 + j60, \\ \dot{U}_{23} &= -j120, \\ \dot{U}_{31} &= -103,8 + j60. \end{aligned}$$

Далее задано $\dot{Z}_2 = \dot{Z}_3 = 100$; следовательно, $\dot{Y}_2 = \dot{Y}_3 = 0,01$; вычисляем

$$\dot{U}_{12}\dot{Y}_2 - \dot{U}_{31}\dot{Y}_3 = c + jd = \frac{2 \cdot 60 \cdot \sqrt{3}}{100} = 2,076,$$

откуда

$$c = 2,076; d = 0.$$

откуда

$$\dot{Y}_2 + \dot{Y}_3 = a + jb = 0,02,$$

$$a = 0,02; b = 0.$$

Условие (K) принимает теперь вид:

$$60\sqrt{3}X \geq X^2 + V^2.$$

Так как правая часть есть сумма квадратов, а потому всегда положительна, то и левая часть положительна, это значит, что X отрицательно быть не может, т. е. точка O не может лежать выше горизонтальной оси $+jIN$; не забудем, что координаты точки O нами представлены как $(-X)$ и $(-V)$, так что если $X < 0$, то эта ордината положительна.

Положим, что мы ищем, куда может удалиться точка O вниз по вертикальной оси $I - M$; для этой оси $V = 0$, и неравенство (K) получает вид

$$103,8 \geq X.$$

Так как высота треугольника равна $60\sqrt{3} = 103,8$, то, следовательно, в этом направлении точка O не выходит из треугольника 1-2-3.

Возьмем точку S с координатами

$$Q = -X = -\frac{60\sqrt{3}}{2} \text{ и } QS = -V = -\frac{60\sqrt{3}}{2}.$$

Условие (K) при этом удовлетворяется, ибо

$$60\sqrt{3} \cdot \frac{60\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{60\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{60\sqrt{3}}{2}\right)^2;$$

при этом получается

$$m = 0, \\ n = +\frac{2}{100}.$$

Таким образом, чтобы точка O , нулевая точка звезды нагрузки, пришла в точку S , надо в фазу OI включить нагрузку чисто емкостную, на что указывает знак плюс у n .

Читателю предлагается проверить, что при чисто емкостной нагрузке в фазе OI точка O может занимать любое место на левой полуокружности, описанной на высоте треугольника IM как на диаметре, в зависимости от соотношений между величиной емкости и величиной сопротивлений в фазах 2 и 3.

Если переменить последовательность фаз 2 и 3, т. е. если переменить направление вращения линии времени, то точка O будет помещаться на правой половине окружности. На этом принципе основан один прибор — указатель последовательности фаз.

Таким образом точка O может выходить за границы площади треугольника 1-2-3.

Остановимся еще на одном примере.

Пусть $\dot{Y}_1$, $\dot{Y}_2$ и $\dot{Y}_3$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\dot{Y}_1 = \text{const}, \quad \dot{Y}_2 = \text{const}, \quad \dot{Y}_3 = \text{var};$$

их углы φ_1 , φ_2 и φ_3 равны всегда:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3.$$

Тогда из уравнений (B) и (D) имеем

$$\frac{b}{a} = \frac{n}{m},$$

или

$$n = m \frac{b}{a}.$$

Подставляем это выражение n в уравнение (F):

$$X + jV = \frac{c + jd}{a + m + j\left(b + m\frac{b}{a}\right)} = \frac{(c + jd)a}{(a + jb)(a + m)}.$$

Преобразуем:

$$\frac{(c + jd)a}{a + jb} = \frac{(c + jd)(a - jb)a}{a^2 + b^2} = h + jk,$$

и следовательно,

$$X + jV = \frac{h + jk}{a + m},$$

откуда

$$X = \frac{h}{a + m}, \quad V = \frac{k}{a + m};$$

поэтому

$$\frac{X}{h} = \frac{V}{k},$$

или

$$X = \frac{h}{k} V.$$

Это есть уравнение прямой линии (фиг. 140), проходящей через начало координат, т. е. точку I . Следовательно, при указанном изменении $\dot{Y}_3$ и равенстве фазовых углов точка O перемещается по указанной прямой.

Конечно, при этом должно выполняться условие, аналогичное (K), которое и ставит пределы изменению положения точки O .

В зависимости от знаков h и k величины X и V могут быть или одинакового знака или противоположного, и может быть несколько разных случаев в направлении этой прямой и пр.

Разобрать эти случаи на основании вышесказанного не может представить никаких трудностей для читателя, но явится весьма полезным упражнением.

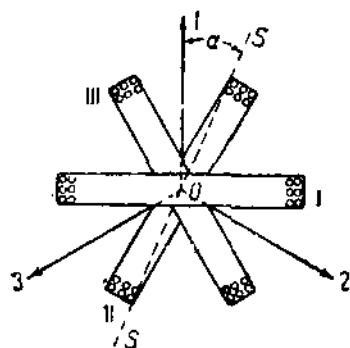
Пример 52. Доказать, что если

$$\dot{Y}_2 = \text{const}, \dot{Y}_3 = \text{const}, \varphi_1 = \text{const},$$

но φ_1 не равно φ_2 и φ_3 , а $\dot{Y}_1 = \text{var}$, то нулевая точка описывает окружность.

§ 80. Вращающееся магнитное поле. Случай 1: симметричные составляющие

С помощью многофазных токов можно получать вращающееся в пространстве магнитное поле и именно следующим способом.



Фиг. 141.

Возьмем столько одинаковых катушек, сколько фаз имеет многофазная система; расположим их под равными углами одна к другой (фиг. 141) (далее мы увидим, что можно катушки расположить и под неравными углами, что, однако, приведет к необходимости выполнить другие условия) и через каждую катушку пропустим ток соответствующей фазы одинаковой силы. В пространстве около катушек мы получим вращающееся магнитное поле.

Так как направление поля от катушки всего проще определяется около середины ее, где поле направлено по ее оси, то мы в дальнейшем и будем исследовать поле именно около точки O , являющейся для всех катушек общим центром.

На фиг. 141 цифрами I, II, III обозначены три одинаковых катушки, через которые идут токи

$$i_1 = I_m \sin(\omega t).$$

$$i_2 = I_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$i_3 = I_m \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right).$$

Векторы $\overline{OI}$, $\overline{OII}$ и $\overline{OIII}$ дают направления магнитных полей катушек.

Магнитодвижущие силы катушек имеют равные амплитуды (так как катушки одинаковы), обозначим их через F_m , и фазы, одинаковые с фазами токов в катушках.

Узнаем величину F_p — м. д. с. результирующей. Возьмем произвольное направление $S-S$ и вычислим, каково будет мгновенное значение f_p этой результирующей в этом направлении. Для этого надо сложить проекции всех трех м. д. с. на направление S , составляющее углы: с осью катушки I α , с осью катушки II $\frac{2\pi}{3} - \alpha$ и с осью катушки III $\frac{2\pi}{3} + \alpha$:

$$f_p = F_m \left[\sin(\omega t) \cos \alpha + \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) + \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) \right].$$

Преобразуя произведения синуса на косинус по формуле

$$\sin m + \sin n = 2 \sin \frac{m+n}{2} \cos \frac{m-n}{2},$$

получаем:

$$f_p = \frac{F_m}{2} \left[\sin(\omega t + \alpha) + \sin(\omega t - \alpha) + \sin(\omega t - \alpha) + \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{4\pi}{3}\right) + \right. \\ \left. + \sin(\omega t - \alpha) + \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \right].$$

Здесь в скобках члены первый, четвертый и шестой представляют сумму синусов трех углов, отличающихся на 120° друг от друга, а такая сумма равна нулю, как известно уже; суммируя остальные три члена, имеем

$$f_p = \frac{3}{2} F_m \sin(\omega t - \alpha).$$

Таким образом амплитуда результирующей м. д. с., а потому и магнитного потока (если он создается в железе, то последнее должно быть далеко от состояния насыщения), больше амплитуды составляющих в $\frac{3}{2}$ раза.

Рассмотрим изменение этого поля во времени и пространстве. Для одного и того же направления $S-S$, т. е. для одного и того же α , мгновенное значение f_p представляет синусоидальную функцию времени.

Далее замечаем, что для одного и того же момента времени t величина f_p по различным направлениям будет синусоидальной функцией угла α .

Для любого α , т. е. для любого направления, можно найти такое t , т. е. такой момент, что

$$\omega t - \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k,$$

где k — целое число; тогда

$$\sin(\omega t - \alpha) = \pm 1$$

и

$$f_p = \pm \frac{3}{2} F_m,$$

т. е. амплитуде.

Для

$$\alpha = 0 \quad \text{и в момент} \quad t = \frac{T}{4} \quad \omega t - \alpha = \frac{\pi}{2},$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{" " " " } t = \frac{T}{2} \quad \omega t - \alpha = \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{array}{lll}
 \alpha = \pi & \text{и в момент} & t = \frac{3}{4}T \quad \omega t - \alpha = \frac{\pi}{2}, \\
 \alpha = \frac{3}{2}\pi & \text{„ „ „} & t = T \quad \omega t - \alpha = \frac{\pi}{2}, \\
 \alpha = 2\pi & \text{„ „ „} & t = T + \frac{T}{4} \quad \omega t - \alpha = \frac{\pi}{2}
 \end{array}$$

и т. д.; с ростом α на $\frac{\pi}{2}$ возрастает необходимое для достижения в этом месте амплитуды у f_p время и именно возрастает на величину $\frac{T}{4}$.

Отсюда видно, что результирующее поле за время одного периода поворачивается на угол, равный 2π , т. е. делает один полный оборот.

Вращающееся в пространстве поле можно с большим удобством представить посредством вращающегося вектора

$$f_p = \frac{3}{2} F_m e^{j\omega t},$$

о котором было сказано в § 35, формула (35,1). При этом линии времени не нужно себе и представлять, а угол ωt отсчитывается от вертикальной оси при положительном значении ω в сторону против часовой стрелки.

Линию времени, впрочем, можно и здесь ввести, но представлять ее надо неподвижной и совпадающей с вертикальной осью.

Пусть нам даны два вектора: $F e^{j\omega t}$ и $F e^{-j\omega t}$; первый вращается против часовой стрелки согласно вышесказанному, второй — по часовой стрелке.

Сложим эти два вектора и применим формулу Эйлера:

$$e^{\pm j\omega t} = \cos(\omega t) \pm j \sin(\omega t);$$

получим

$$F e^{j\omega t} + F e^{-j\omega t} = 2F \cos(\omega t) = 2F \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Таким образом, если мы возьмем два поля, вращающиеся в разные стороны, но имеющие одинаковую величину, и сложим их действие, то получим просто переменное синусоидальное поле, или, как обычно говорят, пульсирующее поле, вдвое более сильное. Как оно будет направлено?

Из формулы видно, что направлено оно будет по действительной оси, иначе, по оси, от которой отсчитывается время для обоих вращающихся векторов; это есть направление, в котором совпадают на один момент оба вращающиеся вектора, или оба поля.

Разумеется, в прямо противоположном направлении оба поля тоже совпадут, когда придут туда через полпериода.

Для теории машин важен бывает обратный переход: когда дано пульсирующее в пространстве поле, его разлагают на два поля, вдвое меньшей силы каждое, вращающиеся в разные стороны с одинаковой скоростью, именно делающие один оборот за один период. Такое разложение было впервые введено Феррарисом, так же как и получение вращающегося поля с помощью многофазных токов.

§ 81. Вращающееся магнитное поле. Случай II: несимметричные составляющие

Рассмотрим теперь более общий случай сложения трех полей, именно, когда амплитуды их не равны, фазы не симметричны, т. е. сдвинуты эти поля в фазе друг относительно друга не на 120° , и в пространстве катушки составляют друг с другом углы тоже не в 120° .

Таким образом пусть нам даны три м. д. с. или три поля:

$$F_1 \sin(\omega t + \varphi_1), F_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \text{ и } F_3 \sin(\omega t + \varphi_3),$$

найдем их результирующую по некоторому направлению X , составляющему углы α_1, α_2 и α_3 с осями трех катушек. Обозначим эту результирующую через x . Задача сводится опять к преобразованию суммы:

$$x = F_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \cos \alpha_1 + F_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \cos \alpha_2 + F_3 \sin(\omega t + \varphi_3) \cos \alpha_3.$$

Каждый из членов этой суммы заменяем по следующей формуле двучленом:

$$F \sin(\omega t + \varphi) \cos \alpha = \frac{F}{2} \sin(\omega t + \varphi + \alpha) + \frac{F}{2} \sin(\omega t + \varphi - \alpha)$$

и получаем

$$x = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=3} F_n \sin(\omega t + \varphi_n + \alpha_n) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=3} F_n \sin(\omega t + \varphi_n - \alpha_n).$$

Вычислим теперь результирующую по направлению Y , перпендикулярному к X ; обозначим ее величину через y .

Очевидно,

$$y = F_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \sin \alpha_1 + F_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \sin \alpha_2 + F_3 \sin(\omega t + \varphi_3) \sin \alpha_3.$$

Преобразуем члены по формуле

$$F \sin(\omega t + \varphi) \sin \alpha = \frac{F}{2} \cos(\omega t + \varphi - \alpha) - \frac{F}{2} \cos(\omega t + \varphi + \alpha)$$

и получаем

$$y = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=3} F_n \cos(\omega t + \varphi_n - \alpha_n) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=3} F_n \cos(\omega t + \varphi_n + \alpha_n).$$

В выражениях для x и y разлагаем $\sin$ и $\cos$ суммы, выделяя $\sin(\omega t)$ и $\cos(\omega t)$, и получаем

$$\begin{aligned} x = & \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=3} F_n \sin(\omega t) \cos(\varphi_n + \alpha_n) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=3} F_n \cos(\omega t) \sin(\varphi_n + \alpha_n) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=3} F_n \sin(\omega t) \cos(\varphi_n - \alpha_n) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=3} F_n \cos(\omega t) \sin(\varphi_n - \alpha_n). \end{aligned}$$

Читатель должен написать сам соответствующее выражение для y и после нижеследующего преобразования этого выражения получить уравнение (B₂).

Обозначим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=3} F_n \cos(\varphi_n + \alpha_n) = m, & \quad \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=3} F_n \cos(\varphi_n - \alpha_n) = n, \\ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=3} F_n \sin(\varphi_n + \alpha_n) = p, & \quad \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=3} F_n \sin(\varphi_n - \alpha_n) = q. \end{aligned} \quad (A)$$

Величины m, n, p и q , как видим, постоянны.

Таким образом

$$x = (m + n) \sin(\omega t) + (p + q) \cos(\omega t), \quad (B_1)$$

$$y = (p - q) \sin(\omega t) - (m - n) \cos(\omega t). \quad (B_2)$$

В уравнениях (B) величины x и y дают сумму проекций всех составляющих на направления x и y , а потому являются проекциями всего результирующего поля на эти два перпендикулярных направления.

Все результирующее поле равно, очевидно, их геометрической сумме.

Следовательно, x и y можно рассматривать как координаты точки конца вектора результирующего поля F_p .

Если мы из уравнений (B) исключим время, то получим одно уравнение между x и y , дающее геометрическое место, по которому будет двигаться конец вектора результирующего поля при изменении x и y , т. е., другими словами, с течением времени.

Определим для этого из уравнений (B) $\sin(\omega t)$ и $\cos(\omega t)$:

$$\left. \begin{aligned} \sin(\omega t) &= \frac{(m-n)x + (p+q)y}{m^2 - n^2 + p^2 - q^2}, \\ \cos(\omega t) &= \frac{(p-q)x - (m+n)y}{m^2 - n^2 + p^2 - q^2}. \end{aligned} \right\} \quad (C)$$

Возведя правые и левые части обоих уравнений в квадрат и сложив, мы получим в левой части единицу и время, таким образом, исключим. После приведения к целому виду и соединив члены, содержащие x^2 , y^2 и xy , получим

$$[(m-n)^2 + (p-q)^2]x^2 + 2[(m-n)(p+q) - (m+n)(p-q)]xy + [(m+n)^2 + (p+q)^2]y^2 = (m^2 - n^2 + p^2 - q^2)^2. \quad (D)$$

Таково уравнение искомого геометрического места в общем случае. Оно может представлять окружность с центром в начале координат, что будет означать, что результирующее поле вращается и сохраняет при этом постоянную величину, равную радиусу круга $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Это уравнение может представлять и эллипс, что в свою очередь будет означать, что результирующее вращающееся поле в разных направлениях имеет разную величину и в одном направлении наименьшую, а в другом, перпендикулярном первому, наибольшую величину. Такое поле называется эллиптическим.

В машинах стараются всегда получать круговое вращающееся поле. Выведем условия получения его, т. е. условия того, чтобы уравнение (D) представляло окружность с центром в начале координат.

Для этого, как известно, необходимо, чтобы коэффициенты при x^2 и y^2 были равны, а коэффициент при xy был равен нулю, т. е.

$$\begin{aligned} (m-n)^2 + (p-q)^2 &= (m+n)^2 + (p+q)^2, \\ (m-n)(p+q) &= (m+n)(p-q). \end{aligned}$$

Из этих уравнений легко получается

$$\begin{aligned} mn &= -pq, \\ mq &= np. \end{aligned}$$

Если мы попробуем разделить полученные теперь уравнения одно на другое, то получим результат

$$\frac{n}{q} = \sqrt{-1} = -\frac{p}{m},$$

что, очевидно, невозможно, так как ни одна из четырех величин m , n , p и q не может быть мнимой по самому определению их.

Остается предположить, что некоторые из них равны нулю. Уравнения удовлетворяются, если

$$m = p = 0$$

или если

$$n = q = 0.$$

Второе условие по существу ведет к тем же результатам, что и первое, а потому остановимся только на первом.

Оно означает, что

$$\left. \begin{aligned} F_1 \sin(\varphi_1 + \alpha_1) + F_2 \sin(\varphi_2 + \alpha_2) + F_3 \sin(\varphi_3 + \alpha_3) &= 0 \\ F_1 \cos(\varphi_1 + \alpha_1) + F_2 \cos(\varphi_2 + \alpha_2) + F_3 \cos(\varphi_3 + \alpha_3) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (E)$$

Вернувшись к тому, что такое представляют собой углы α_n и φ_n , мы увидим, что всегда можем положить $\alpha_1 = 0$ и $\varphi_1 = 0$; первое будет обозначать, что мы находим результирующую x по направлению оси первой катушки, второе — изменение отсчета времени. Тогда вышеприведенные уравнения (E) упрощаются.

Рассмотрим пример. Пусть у нас будут две одинаковые катушки и мы имеем в распоряжении зажимы трехфазного тока, от которых можем взять два тока с разностью фаз в $\frac{2}{3}\pi$. Следовательно, мы имеем $\varphi_2 = \frac{2}{3}\pi$. Уравнения (E) дают нам:

$$\begin{aligned} F_3 &= 0, \\ F_2 \sin\left(\frac{2}{3}\pi + \alpha_2\right) &= 0, \\ F_1 + F_2 \cos\left(\frac{2}{3}\pi + \alpha_2\right) &= 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\sin\left(\frac{2}{3}\pi + \alpha_2\right) = 0,$$

т. е.

$$\alpha_2 + \frac{2}{3}\pi = \pi$$

и

$$\alpha_2 = \pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi = 60^\circ,$$

а также, что

$$F_2 = F_1.$$

Таким образом, расположив данные две катушки под углом в 60° друг к другу и пропустив по ним токи одинаковой силы (так как катушки одинаковы, т. е. имеют одно и то же число витков) от двух линейных напряжений трехфазной сети, мы получим круговое вращающееся поле.

Если у нас в распоряжении имеется двухфазный ток, т. е. если $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, то должно быть и $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, и катушки надо расположить под прямым углом друг к другу.

Таким именно способом впервые экспериментально и получили круговое вращающееся поле Н. Тесла и Г. Феррарис.

В заключение рассмотрим, что за поле получается, когда вышеуказанные условия (E) не соблюдаются; остановимся на одном частном примере.

Пусть даны два пульсирующих поля, сдвинутых в фазе на четверть периода и пространственно перпендикулярные друг к другу, по амплитудам неравные: по горизонтали

$$b_1 = B_1 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = B_1 \cos(\omega t)$$

и по вертикали

$$b_2 = B_2 \sin(\omega t),$$

причем

$$B_2 > B_1 \text{ (фиг. 142).}$$

Сначала учтем только часть поля b_2 , именно

$$b_2' = B_1 \sin(\omega t),$$

а остальную часть

$$b_2'' = (B_2 - B_1) \sin(\omega t) = m n$$

присоединим потом. Поля b_1 и b_2' дают вращающееся поле по формуле

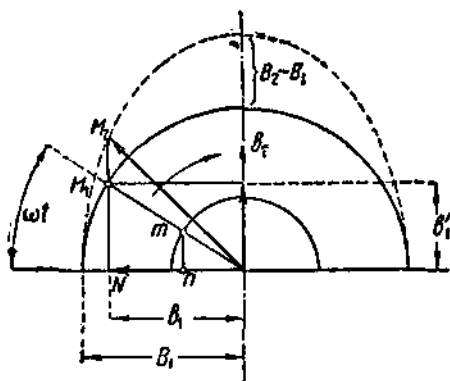
$$b = jB_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t) = jB_1 e^{-j\omega t} = B_1 e^{-j(\omega t - \frac{\pi}{2})},$$

вращающееся по часовой стрелке и постоянное по величине.

К этому полю во всяком его мгновенном положении OM_1 присоединяется пульсирующее поле

$$mn = M_1 M_2 = (B_2 - B_1) \sin(\omega t),$$

так что результирующее поле OM_2 не только растет по величине, но, как видим, и движется с переменной скоростью, ибо $\angle M_2 O X > \angle M_1 O X$; по мере приближения его оси к оси более сильного поля b_2 скорость результирующего поля уменьшается, и оси b_2 , т. е. вертикальной оси, оно достигает одновременно с полем OM_1 ; затем оно начинает уменьшаться и сначала отставать (в правом квадранте) от поля OM_1 , потом его догонять, так что горизонтальной оси (оси поля b_1) достигает одновременно с полем OM_1 вследствие уменьшения поля $b_2 - b_1$ к этому моменту до нуля. Таково эллиптическое поле в этом случае.



Фиг. 142.

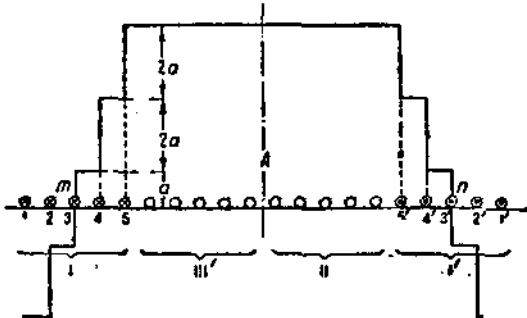
горизонтальной оси (оси поля b_1) достигает одновременно с полем OM_1 вследствие уменьшения поля $b_2 - b_1$ к этому моменту до нуля. Таково эллиптическое поле в этом случае.

§ 82. Многополюсное вращающееся поле

Перейдем к последнему вопросу, именно к многополюсным вращающимся полям.

Представим себе трехфазную обмотку статора машины переменного тока с несколькими пазами на полюс и фазу, например, с пятью (фиг. 143), где римскими цифрами I — I' обозначены провода первой фазы, II — II' — второй и III' — третьей; арабскими же цифрами 1, 2, 3, 4, 5, и I', 2', ... — провода первой фазы, лежащие в соседних пазах.

Нетрудно видеть, как будут суммироваться их м. д. с.: например, влево от провода 5 при заданном направлении мгновенного тока, именно от нас, м. д. с. провода 5 направлена вверх, т. е. в статоре получается полюс S; аправо от него — вниз, т. е. статор имеет полюс N. Соответственно этому, на протяжении N-полюса нанесем величины м. д. с. в виде ординат положительных, т. е. вверх; то же и относительно других проводов.



Фиг. 143.

Магнитодвижущая сила от одного провода пропорциональна мгновенной силе тока, обозначим ее через M . Таким образом по другую сторону проводника м. д. с. этого проводника меняет знак, следовательно, результирующая м. д. с. изменяется на $2M$, и кривая результирующей м. д. с. будет иметь ступенчатую форму, показанную на фиг. 143.

Далее следует учесть, что провода имеют ширину и что в железе поток распределится без резких скачков.

Кривая магнитной индукции отступит поэтому от формы фиг. 143 и примет вид, данный на фиг. 144.

В гл. 11 будет рассматриваться способ, как такую кривую представить в виде суммы синусоидальных кривых разных частот (f , $3f$, $5f$ и т. д.) согласно известному из курса анализа учению о ряде Фурье или о разложении всякой периодической функции на сумму составляющих ее гармонических функций разных порядков.

В § 99 будет показано, какое влияние оказывают на вращающееся магнитное поле высшие составляющие в кривой индукции фиг. 144. Пока же примем во внимание только основную синусоиду, которая может быть по излагающимся в упомянутой гл. 11 правилам подобрана, как наиболее близко подходящая к кривой фиг. 144.

Итак примем, что кривая распределения индукции от каждой фазы обмотки статора вдоль по дуге его есть синусоидальная функция расстояния точки от середины стороны катушки, т. е. от места прохождения ее через θ , на фиг. 143 и 144 — от центра провода.

Изменим начало отсчета, введем отсчет расстояний от середины A самой катушки $I-I'$ (а не от середины стороны $I-5$), т. е. от местонахождения амплитуды; тогда мы должны ввести косинусоидальную зависимость.

Таким образом если амплитуда этой кривой есть B_1 , то ордината ее B'_1 , определяемая расстоянием x от середины катушки $I-I'$, выразится как (фиг. 145)

$$B'_1 = B_1 \cos \left(\frac{x}{\tau} \pi \right), \quad (\alpha)$$

где τ обозначает длину одного полюсного деления.

Сама же амплитуда B_1 пропорциональна мгновенной силе тока в катушке и есть поэтому синусоидальная функция времени:

$$B_1 = C \sin (\omega t).$$

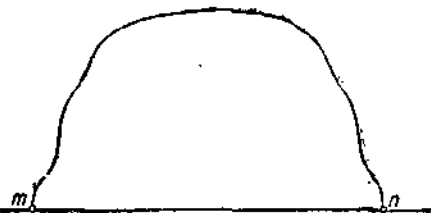
Для фаз II и III имеем

$$B_2 = C \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right), \quad B_3 = C \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right), \quad (\beta)$$

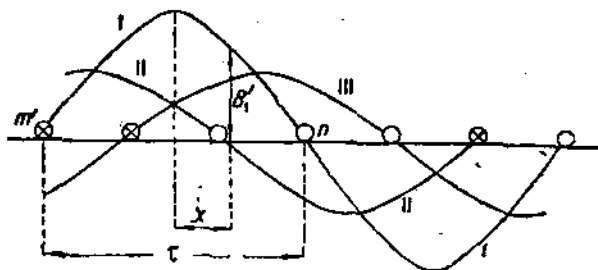
где постоянные C учитывают число витков в катушках и магнитное сопротивление пути потока индукции.

Ординаты кривых поля второй и третьей фаз выразятся так:

$$B'_2 = B_2 \cos \left(\frac{x}{\tau} \pi - \frac{2\pi}{3} \right), \quad B'_3 = B_3 \cos \left(\frac{x}{\tau} \pi - \frac{4\pi}{3} \right).$$



Фиг. 144.



Фиг. 145.

Результирующее поле от всех трех фаз будет

$$B' = B'_1 + B'_2 + B'_3,$$

или, подставляя вместо амплитуд их выражения (а),

$$B' = C \sin(\omega t) \cos\left(\frac{x}{\tau} \pi\right) + C \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{x}{\tau} \pi - \frac{2\pi}{3}\right) + \\ + C \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{x}{\tau} \pi - \frac{4\pi}{3}\right).$$

Преобразуя каждый член подобно тому, как это мы делали ранее, мы получаем

$$B' = \frac{C}{2} \left[\sin\left(\omega t + \frac{x}{\tau} \pi\right) + \sin\left(\omega t - \frac{x}{\tau} \pi\right) + \right. \\ \left. + \sin\left(\omega t + \frac{x}{\tau} \pi - \frac{4\pi}{3}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{x}{\tau} \pi\right) + \right. \\ \left. + \sin\left(\omega t + \frac{x}{\tau} \pi - \frac{8\pi}{3}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{x}{\tau} \pi\right) \right]. \quad (\gamma)$$

Здесь сумма первого, третьего и пятого членов равна нулю, как сумма синусов трех углов, разнящихся на 120° , и окончательно

$$B' = \frac{3}{2} C \sin\left(\omega t - \frac{x}{\tau} \pi\right). \quad (\delta)$$

Итак, и в общем случае амплитуда результирующего поля в $\frac{3}{2}$ раза больше амплитуды составляющих полей.

Мы видим из этой формулы, что результирующее поле синусоидально и в зависимости от времени в любом данном месте, т. е. при данном x , синусоидально для любого момента t вдоль по дуге окружности, т. е. в зависимости от переменного x .

Следовательно, в разные моменты времени в разных местах B' может иметь одно и то же значение. Исследуем этот вопрос подробнее.

Если в формуле (δ) t и x увеличатся так, что весь угол под знаком синуса останется той же самой величины, то и значение B' будет то же самое.

Возьмем момент времени Δt более поздний, чем какой-то момент t , тогда вместо x надо взять абсциссу, на какую-то величину Δx большую, чтобы угол остался прежним. Итак,

$$\omega t - \frac{x}{\tau} \pi = \omega(t + \Delta t) - \frac{x + \Delta x}{\tau} \pi,$$

откуда, перенося члены с t в одну часть, а с x — в другую, получаем

$$\frac{\Delta x}{\tau} \pi = \omega \cdot \Delta t,$$

или

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega \tau}{\pi} = \frac{2\tau}{T}.$$

Величина $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v$ есть скорость продвижения одинаковых значений B' вдоль дуги окружности, т. е. это есть скорость движения поля.

За период проходит путь

$$vT = 2\tau,$$

т. е. проходит двойное полюсное деление.

Таким образом по окружности статора движется, или вращается, поле, причем за один период оно передвигается на двойное полюсное деление.

Если таких делений на статоре p , то один полный оборот поле делает за p периодов, а не за один, как было в случае фиг. 141.

Следовательно, в секунду, т. е. за f периодов, поле сделает $\frac{f}{p}$ оборотов, а в минуту сделает

$$n_n = \frac{60f}{p}. \quad (82, A)$$

Следует заметить, что когда мы нагрузим симметрично трехфазный генератор и в трех фазах его обмотки потекут токи, мы получим как раз картину, изображенную на фиг. 145, — трехфазный ток в обмотке статора создаст вращающееся поле.

Так как ротор с электромагнитами постоянного тока, как нам уже известно из первых страниц курса, проходит за период тоже двойное полюсное деление (на этом было основано самое определение „период“), то получается, что поле от трехфазной обмотки статора вращается с той же самой скоростью, что и ротор, или, иначе, — синхронно с ним.

Если нагрузка генератора несимметрична, то амплитуда поля периодически изменяется.

Из фиг. 145 нетрудно понять следующее:

Если мы ток $I_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$ пустим не в обмотку 2, а в обмотку 3, ток же $I_m \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$ пустим в обмотку 2, то, продолжив чертеж налево, увидим, что последовательность фаз теперь получится обратная и поле будет двигаться в противоположном прежнему направлении.

Вообще, чтобы изменить направление вращения поля, надо переменить местами любые две фазы.

Изложенная теория многополюсного вращающегося поля легко обобщается на случай n -фазной системы, когда мы имеем n токов, сдвинутых в фазе на $\frac{2\pi}{n}$ друг относительно друга и текущих в n катушках на каждый полюс; оси катушек, следовательно, сдвинуты на $\frac{2\pi}{np}$ друг относительно друга в пространстве.

Так же, как в случае трехфазного тока, мы напишем выражение для мгновенного значения результирующего поля в виде

$$\begin{aligned} B' = & C \sin(\omega t) \cos\left(\frac{x}{\tau} \pi\right) + C \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{x}{\tau} \pi - \frac{2\pi}{n}\right) + \\ & + C \sin\left(\omega t - 2\frac{2\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{x}{\tau} \pi - 2\frac{2\pi}{n}\right) + \dots \\ & \dots + C \sin\left[\omega t - (n-1)\frac{2\pi}{n}\right] \cos\left[\frac{x}{\tau} \pi - (n-1)\frac{2\pi}{n}\right]. \end{aligned} \quad (E)$$

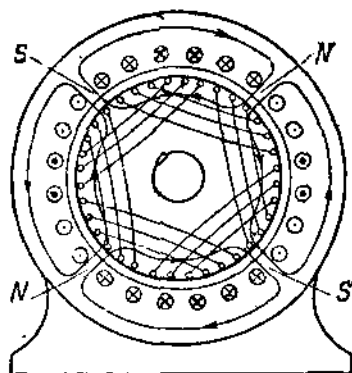
Производим такое же разложение каждого из членов, как и в случае трехфазного тока, что предлагаем читателю проделать самому. Сумма n синусоидальных функций, сдвинутых на $\frac{2\pi}{n}$ в фазе, равна нулю (что очевидно, если начертить n таких векторов), и результат получается в виде

$$B' = \frac{n}{2} C \sin\left(\omega t - \frac{x}{\tau} \pi\right).$$

§ 83. Принцип асинхронного двигателя

Если мы внутрь такого статора вставим ротор не с электромагнитами постоянного тока, как у генератора, а с какой-нибудь замкнутой обмоткой, то вращающееся поле будет пересекать проводники этой обмотки ротора и индуцировать в них э. д. с., а следовательно, при замкнутой обмотке — и токи, которые по закону Ленца всегда будут противодействовать причине, вызвавшей э. д. с., т. е. будут, взаимодействуя с полем, увлекать ротор с обмоткой за полем, как бы стремясь нагнать его, будут создавать вращающий ротор момент. Ротор будет вращаться всегда с несколько меньшим (на $1-3\%$) числом оборотов, чем поле, ибо поле должно пересекать обмотку, чтобы в ней появился ток.

Таков принцип асинхронного двигателя.



Фиг. 146.

Обмотка ротора бывает весьма разнообразных видов; для построения теории работы асинхронного двигателя вид ее принципиального значения не имеет.

Мы для дальнейшего предположим, что она выполнена в виде трехфазной обмотки, подобной обмотке статора с тем же числом полюсов, только число пазов на полюс и фазу берется не то, что в статоре, а обычно больше (часто, например, встречаются числа: 3 паз в статоре и 4 в роторе); такие обмотки изображены на фиг. 146.

Три обмотки статора могут быть соединены или звездой или треугольником; три обмотки ротора чаще соединяются звездой, а три свободных конца выводятся к трем кольцам, от которых через три щетки идут три провода к трем переменным сопротивлениям, включенным звездой.

Это есть так называемый пусковой реостат, назначение которого уменьшать силу тока в обмотке ротора в первый момент пуска в ход, когда ротор еще стоит или вращается с небольшой еще скоростью, так что вращающееся поле статора пересекает проводники ротора с большой скоростью, иначе магнитный поток этого поля сквозь витки обмотки ротора изменяется очень быстро и э. д. с. индукции в них велика, отчего мог бы быть и ток в роторе велик, если бы не было реостата.

Ток в роторе по закону Ленца противодействует в общем току в статоре и, как мы увидим в главах, посвященных трансформатору и „всеобщему трансформатору“, т. е. асинхронному двигателю, при большом токе в роторе достигает большой величины и ток, идущий из сети в статор.

Сейчас мы все эти явления только отметим, изучим же их позднее.

По формуле (82, А) вращающееся поле статора делает

$$n_n = \frac{60f}{p} \quad (A)$$

оборотов в минуту.

Ротор делает меньшее число оборотов, ибо если бы он вращался синхронно с полем, поток в его витках не изменялся бы и в нем не индуцировался бы ток, а тогда не было бы и сил, поворачивающих витки с ротором. Число оборотов ротора обозначим $n_{рот}$. Число

$$\frac{n_n - n_{рот}}{n_n} = s \quad (B)$$

называется „скольжением“.

Поле статора делает относительно вращающегося ротора

$$\frac{n_n - n_{рот}}{60}$$

оборотов в секунду, при этом поле проходит мимо витков ротора всеми своими $2p$ полюсами; за это время протекает, следовательно, несколько периодов индуктированного тока в роторе. Обозначим частоту его через $f_{\text{рот}}$. Если бы поле сделало относительно обмотки ротора один оборот в секунду, то частота была бы p , теперь же будет

$$f_{\text{рот}} = \frac{n_n - n_{\text{рот}}}{60} \cdot p. \quad (C)$$

Исключая из (A) и (C) число пар полюсов, получаем соотношение

$$f_{\text{рот}} = \frac{n_n - n_{\text{рот}}}{n_n} f,$$

или, принимая во внимание (B),

$$f_{\text{рот}} = sf.$$

Обычно s равно при полной нагрузке двигателя, т. е. когда „скольжение“ больше всего, 0,03—0,04; при холостом ходе s равно нескольким тысячным долям.

Будем, начиная от холостого хода, нагружать механически двигатель, т. е. прикладывать к его валу тормозящий момент $M_{\text{тор}}$; например, пустим его вращать вал токарного станка и будем обтачивать на станке какую-нибудь деталь, по временам переставляя резец так, что стружка будет сниматься все толще и толще; при этом сопротивление резанию будет возрастать и будет расти $M_{\text{тор}}$; при каждом увеличении $M_{\text{тор}}$ будет происходить следующее: в первое время по увеличении $M_{\text{тор}}$ он будет больше вращающего момента M_p , обусловленного, как известно, взаимодействием тока $I_{\text{рот}}$ в роторе и потока через витки ротора, поэтому двигатель приобретает отрицательное угловое ускорение, начнет понижать свою скорость или увеличивать скольжение s . От этого увеличится частота изменения потока поля сквозь витки ротора, возрастет э. д. с. индукции в этих витках, увеличится сила тока $I_{\text{рот}}$ в роторе и увеличится вращающий момент, пропорциональный произведению $I_{\text{рот}}$ и потока. Если величина $M_{\text{ар}}$ все еще не сравнялась с величиной $M_{\text{тор}}$, то понижение числа оборотов двигателя будет происходить и дальше, пока возрастающий с понижением скорости $M_{\text{ар}}$ сравняется с $M_{\text{тор}}$ на этом числе оборотов, с этим новым скольжением s двигатель и будет работать дальше, пока мы не изменим $M_{\text{тор}}$. Обратное, т. е. повышение числа оборотов, происходит при уменьшении нагрузки.

Процесс этого приспособления двигателя к изменившейся нагрузке протекает быстро, у двигателей средней мощности (10—20 kW) занимая только доли секунды и лишь у очень мощных (100 kW) продолжаясь одну-две-три секунды.

Цифры эти мы даем лишь для характеристики этого процесса; разумеется, они зависят от многих причин, например, и от рода нагрузки, и от момента инерции ротора, и пр.

При перегрузке $M_{\text{ар}}$ перестает расти с увеличением s , и двигатель останавливается.

Отметим, что если надо переменить направление вращения двигателя, то надо изменить направление вращения поля, а для этого, как сказано, надо переменить местами две фазы статора одну на место другой, т. е. из трех подходящих к статору проводов переменить местами два.

В дальнейшем нам потребуются вводить в векторные диаграммы токи и э. д. с. в роторе. Как это сделать на той же диаграмме, где нанесены токи и напряжения статора, если частота в роторе $f_{\text{рот}}$ не та, что в статоре?

Рассмотрим сначала соотношения в самой обмотке ротора.

Обозначим э. д. с. в роторе через $E_{\text{рот}}$, ток — $I_{\text{рот}}$, сопротивление — $R_{\text{рот}}$; индуктивность обмотки ротора — через $L_{\text{рот}}$ и положим $2\pi f_{\text{рот}} L_{\text{рот}} = \omega_{\text{рот}}$.

На фиг. 147 OA_1 есть вектор э. д. с. индукции в роторе $E_{ром}$; OB_1 — вектор $I_{ром}R_{ром}$ и B_1A_1 — вектор $\omega_{ром}L_{ром}I_{ром}$; далее $\angle A_1OB_1 = \varphi_{2e}$ и

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_{2e} &= \frac{\omega_{ром} L_{ром}}{R_{ром}} = \frac{2\pi f_{ром} L_{ром}}{R_{ром}} = \\ &= s \cdot \frac{2\pi f L_{ром}}{R_{ром}} = s \frac{\omega L_{ром}}{R_{ром}}. \end{aligned}$$

Мощность, переходящая в тепло в обмотке ротора, равна

$$P_{2ром} = E_{ром} I_{ром} \cos \varphi_{2e} = I_{ром}^2 R_{ром}.$$

Кроме того, ротор развивает механическую мощность, равную произведению $M_{ер}$ на его угловую скорость. Эту же мощность можно выразить иначе, как показано ниже.

Представим себе теперь, что мы ротор затормозили посторонней механической силой, т. е. посредством тормоза, так, что он стоит неподвижно, это означает, что $s=1$ и что частота тока в нем равна f .

Подключим заранее к его трем кольцам трехфазный реостат с сопротивлением на фазу R_x . Сопротивление это мы подберем так, чтобы сила тока в роторе осталась прежняя $I_{ром}$, несмотря на то, что э. д. с. индукции возрастет вследствие изменения частоты с $f_{ром}$ до f ; теперь э. д. с. равна E_2 ; очевидно, что

$$E_{ром} : E_2 = f_{ром} : f = s,$$

откуда

$$E_{ром} = sE_2.$$

На фиг. 147 вектор OA_2 есть E_2 ; OB_2A_2 есть новый треугольник напряжений, в нем

$$OB_2 = I_{ром}(R_{ром} + R_x) \text{ и } B_2A_2 = \omega L_{ром} I_{ром}.$$

Так как $\triangle A_1B_1O$ и $\triangle A_2B_2O$ прямоугольные и в них

$$\frac{OA_1}{OA_2} = \frac{E_{ром}}{E_2} = s = \frac{A_1B_1}{A_2B_2},$$

ибо

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{\omega_{ром} L_{ром} I_{ром}}{\omega L_{ром} I_{ром}} = s,$$

то они подобны, и угол при O у них общий, равный φ_{2e} .

Теперь мощность, переходящая в тепло во всей цепи ротора, равна

$$P_2 = E_2 I_{ром} \cos \varphi_{2e} = I_{ром}^2 R_{ром} + I_{ром}^2 R_x = P_{2ром} + I_{ром}^2 R_x.$$

Так как сила тока $I_{ром}$ в роторе по условию та же самая, что и прежде, то и воздействие по закону Ленца ротора на статор останется прежним — несколько дальше мы еще полнее обоснуем это положение, — и мощность, притекающая из сети в статор, и мощность, идущая на потери в статоре, будут прежние.

Очевидно, что при этом член $I_{ром}^2 R_x$ представляет мощность, теперь превращающуюся в тепло в реостате, а раньше переходившую в механическую мощность.

Таким образом мы свели работу вращающегося двигателя при механической нагрузке на работу его в покое при нагрузке электрической; он уподобляется

теперь трансформатору, только в трансформаторе мы имеем поле пульсирующее, а здесь вращающееся.

Далее, этим самым мы ввели ток $I_{ром}$ и э. д. с. E_2 в роторе в нашу векторную диаграмму при основной частоте f , так что в дальнейшем мы можем на одной диаграмме наносить величины, относящиеся и к статору и к ротору.

Из подобия $\triangle A_1B_1O$ и $\triangle A_2B_2O$ следует, что

$$\frac{OB_1}{OB_2} = \frac{IR_{ром}}{I(R_{ром} + R_x)} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2} = s,$$

откуда

$$\frac{R_{ром}}{R_{ром} + R_x} = s$$

и

$$R_x = \frac{1-s}{s} \cdot R_{ром}.$$

Так выражается величина того сопротивления, которое надо включить в за- торможенный ротор, чтобы получить ту силу тока $I_{ром}$ и все те же мощности, которые были, когда ротор вращался, развивая механическую мощность, с некоторым данным скольжением s .

Таким образом величина механической мощности, бывшей при этом скольжении, очевидно, равна

$$\frac{1-s}{s} I_{ром}^2 R_{ром}.$$

Затем остановимся еще на вопросе о собственном магнитном поле ротора, создаваемом трехфазным током, индуцируемым вращающимся полем в трехфазной обмотке ротора. Последовательность фаз в роторе такая же, как и в статоре, поэтому трехфазный ток в роторе создает вращающееся поле; число полюсов (или катушек в фазе) на роторе, как сказано, то же самое, что в статоре — $2p$, частота тока при вращении ротора — $f_{ром}$, поэтому это собственное поле делает относительно ротора число оборотов аналогично формуле (82, А):

$$n_{пр} = \frac{60 \cdot f_{ром}}{p}.$$

Подставляя сюда из (С) выражение

$$\frac{60f_{ром}}{p} = n_n - n_{ром},$$

получаем

$$n_{пр} = n_n - n_{ром}.$$

Таким образом, поле ротора относительно ротора делает $n_n - n_{ром}$ оборотов в ту же сторону, куда вращается и поле статора; ротор же делает сам, т. е. относительно неподвижного статора, $n_{ром}$ оборотов; следовательно, поле ротора относительно статора делает суммарное число оборотов

$$(n_n - n_{ром}) + n_{ром} = n_n,$$

т. е. поле ротора в пространстве вращается синхронно с полем статора.

Таким образом как в синхронной, так и в асинхронной машине мы имеем по два поля, вращающихся синхронно, хотя ротор асинхронной машины сам вращается не синхронно.

Поэтому мы впоследствии и сможем наносить на одной диаграмме векторы ампервитков статора и ротора и складывать их геометрически, находя результирующие ампервитки, чему в действительности будет соответствовать сложение двух синхронно вращающихся полей в одно результирующее вращающееся поле.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

РАЗЛОЖЕНИЕ НЕСИММЕТРИЧНОЙ МНОГОФАЗНОЙ СИСТЕМЫ НА СИММЕТРИЧНЫЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ

§ 84. Разложение несимметричной трехфазной системы на симметричные составляющие

В предыдущих параграфах были изложены методы аналитического и графического расчетов трехфазных систем также и в том случае, когда система токов и напряжений несимметрична.

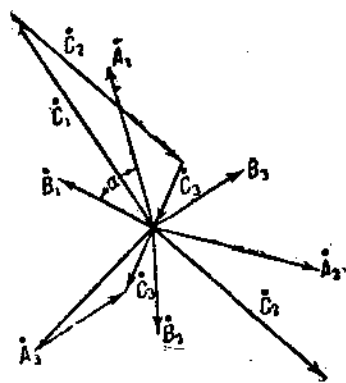
Однако в случае несимметричности вышеизложенными способами трудно получить суждение о влиянии самой этой несимметричности на явления в трехфазной цепи. Кроме того, расчеты всех трех фаз часто могут быть длинны.

В последние годы весьма развились такие специальные отрасли электротехники, как, например, расчет токов коротких замыканий трехфазных систем, где мы можем сильно сэкономить работу, прилагая метод, принципы которого излагаются в этом параграфе и который позволяет даже и при несимметричности токов и напряжений свести задачу к расчету только одной фазы.

В учении об электрических машинах метод этот чрезвычайно облегчает и ускоряет рассмотрение работы различных синхронных и асинхронных машин в случае несимметричности линейных напряжений и облегчает суждение о влиянии этой несимметричности на работу их.

Идея этого метода впервые была высказана американским ученым Фортестью.

Мы будем различать здесь два случая: первый, когда даны три вектора, составляющие замкнутый треугольник, например, векторы трех линейных напряжений или токов в системе без нейтрального провода, и второй, когда даны четыре вектора, составляющие замкнутый четырехугольник, например, три фазовых тока и ток в нейтральном проводе. Остановимся сначала на первом случае.



Фиг. 148.

Любую несимметричную систему трех замыкающихся в треугольник векторов можно разложить на две симметричные системы, причем у одной величина векторов будет меньше, чем у другой, и последовательность фаз у векторов будет обратная.

Сначала покажем, что сложением соответствующих векторов таких двух систем получается несимметричная система, образующая, однако, замкнутый треугольник.

На фиг. 148 A_1, A_2, A_3 — три симметричных вектора, относящиеся к трем фазам; B_1, B_2, B_3 — другие три симметричных вектора, однако с обратной последовательностью, именно вектор A_2 второй фазы отстает от A_1 — вектора первой фазы на $\frac{2\pi}{3}$, а вектор B_2 второй фазы опережает на $\frac{2\pi}{3}$ вектор B_1 первой фазы.

Эти системы векторов обычно называют так: систему A_1, A_2, A_3 — системой прямой или положительной последовательности векторов, а систему B_1, B_2, B_3 — системой обратной или отрицательной последовательности векторов (вместо слова „векторов“ здесь можно употребить и слово „фаз“).

Сложим геометрически векторы одних и тех же фаз, т. е. A_1 с B_1, A_2 с B_2 и A_3 с B_3 , и мы получим векторы C_1, C_2, C_3 , которые составят непременно замкнутый треугольник. Доказательство последнего утверждения очень просто,

именно мы имеем, что так как системы A_1 и т. д. и B_1 и т. д. — системы симметричные, то

$$\dot{A}_1 + \dot{A}_2 + \dot{A}_3 = 0$$

и

$$\dot{B}_1 + \dot{B}_2 + \dot{B}_3 = 0,$$

а следовательно, сложив эти два уравнения,

$$\dot{A}_1 + \dot{B}_1 + \dot{A}_2 + \dot{B}_2 + \dot{A}_3 + \dot{B}_3 = 0, \quad (1)$$

т. е.

$$\dot{C}_1 + \dot{C}_2 + \dot{C}_3 = 0,$$

т. е. треугольник векторов C_1 , C_2 и C_3 — замкнутый. Следует заметить, что многоугольник из этих шести векторов A и B замкнется при всяком порядке сложения их, ибо в уравнении (1), конечно, члены можно группировать и переставлять как угодно.

Система векторов C_1 , C_2 и C_3 несимметрична. Далее мы покажем, каким способом данную нам несимметричную систему можно разложить на две таких симметричных, т. е. при данных векторах системы C найти векторы системы A и B .

Физический смысл такого разложения тоже очень прост. Сравнивая, например, вектор C_1 и его составляющие с вектором C_2 и его составляющими, мы находим, что большая по величине составляющая A_1 вектора C_1 опережает равную ей составляющую A_2 вектора C_2 на $\frac{2\pi}{3}$, а меньшая составляющая B_1 вектора C_1 отстает на такой же угол от такой же составляющей второго вектора C_2 .

Таким образом векторы системы положительной или прямой последовательности по величине больше векторов системы отрицательной или обратной последовательности.

Применим символический метод для выражения всех векторов, имея в виду, что

$$e^{+j\frac{2\pi}{3}} = a \text{ и } a = a^{-2};$$

$$\dot{A}_1 = \dot{A}, \quad \dot{A}_2 = \dot{A}e^{-j\frac{2\pi}{3}} = \dot{A}a^{-1}, \quad \dot{A}_3 = \dot{A}a^{-2},$$

$$\dot{B}_1 = \dot{B}, \quad \dot{B}_2 = \dot{B}a^{-2}, \quad \dot{B}_3 = \dot{B}a^{-1},$$

$$\dot{C}_1 = \dot{A} + \dot{B},$$

$$\dot{C}_2 = a^{-1}\dot{A} + a^{-2}\dot{B}, \quad (II)$$

$$\dot{C}_3 = a^{-2}\dot{A} + a^{-1}\dot{B}.$$

Начнем с определения $\dot{A}$, для чего умножим второе уравнение на $e^{+j\frac{2\pi}{3}} = a$, а третье — на a^2 , тогда коэффициенты при $\dot{A}$ везде будут равны единице, а коэффициенты при $\dot{B}$ будут

$$e^{+j\frac{4\pi}{3}}, \quad e^{+j\left(1+\frac{4\pi}{3}\right)} \text{ и } e^{+j\left(2-\frac{4\pi}{3}\right)};$$

сумма их, как трех векторов, равных по величине, сдвинутых на 120° , равна нулю.

Поэтому, сложив три полученных из (II) уравнения, будем иметь

$$\dot{C}_1 + a\dot{C}_2 + a^2\dot{C}_3 = 3\dot{A}. \quad (III)$$

В этом уравнении умножение вектора $\dot{C}_2$ на a означает поворот вектора $\dot{C}_2$ на 120° против вращения линии времени или, иначе, в сторону возрастания положительных фазовых углов, а умножение вектора $\dot{C}_2$ на $a^2 \equiv a^{-1}$ означает поворот его в обратную сторону на 120° .

На фиг. 149 нам даны три вектора $\dot{C}_1$, $\dot{C}_2$ и $\dot{C}_3$, сумма которых равна нулю.

Производим построение, выраженное уравнением (III). Вектор $\dot{C}_2$ поворачиваем по часовой стрелке на 120° в положение Ok и, прикладывая к $\dot{C}_1$, получаем вектор $\overline{Ol}$.

Затем поворачиваем вектор $\dot{C}_3$ против часовой стрелки на 120° в положение Oh и, прикладывая к Ol , получаем вектор $\overline{OP} = 3\dot{A}$. Проводим линию Op под некоторым углом к OP , откладываем на ней три равных отрезка, соединяем последнюю точку p с P и проводим $mS \parallel pP$. Вектор $\overline{OS} = \dot{A}$.

Далее, вычитая из $\dot{C}_1$ вектор $\overline{OS}$, находим вектор $\dot{B}_1$. Угол между $\dot{B}_1$ и $\overline{OS}$ есть угол α .

На фиг. 150 данные векторы $\dot{C}_1$, $\dot{C}_2$ и $\dot{C}_3$ начерчены уже в виде треугольника. Тогда построение еще проще, нужно только $\dot{C}_2$ и $\dot{C}_3$ повернуть на 120° в разные стороны в положение $\dot{2P}$ и $\overline{Ol}$, и линия $\overline{OP}$ даст нам вектор $3\dot{A}$. Деля его на 3, получаем $\overline{OS} = \dot{A}$. Вычитая $\overline{OS}$ из $\dot{C}_1$, находим $\dot{B}_1$.

Можно вектор $\dot{B}_1$ найти путем, аналогичным нахождению вектора $\dot{A}$. Для этого умножим второе из уравнений (II) на $e^{-j\frac{2\pi}{3}}$, а третье — на $e^{+j\frac{2\pi}{3}}$ и, сложив, будем иметь

$$\dot{C}_1 + \dot{C}_2 e^{-j\frac{2\pi}{3}} + \dot{C}_3 e^{+j\frac{2\pi}{3}} = 3\dot{B}_1.$$

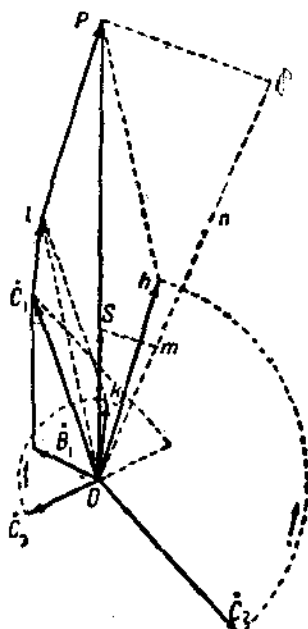
Для графического выполнения этой операции вектор $\dot{C}_2$ вращаем по линии времени или по часовой стрелке на 120° , а вектор $\dot{C}_3$ — в противоположном направлении, в остальном поступаем, как выше описано.

Остановимся теперь еще на том случае, когда векторы системы B отрицательной последовательности равны по величине векторам системы A положительной последовательности.

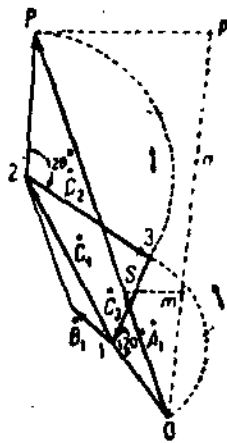
На фиг. 151 изображен этот случай.

Мы видим, что в этом случае векторы $\dot{C}_1$, $\dot{C}_2$ и $\dot{C}_3$ лежат на одной прямой, делящей углы между каждой парой слагающих векторов пополам. Сумма их равна нулю. Они представляют собой однофазную систему.

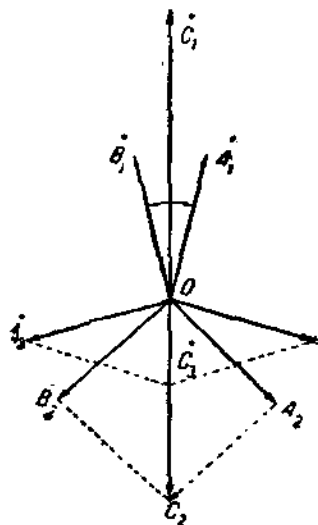
Если эти векторы пропорциональны полям трех обмоток, то их надо расположить пространствен-



Фиг. 149.



Фиг. 150.



Фиг. 151.

но по осям обмоток, тогда они дадут некоторое результирующее пульсирующее, а не вращающееся поле.

Таким образом мы опять приходим к результату, уже однажды нами полученному, именно, что пульсирующее поле можно разложить на два вращающиеся в противоположные стороны, равные по амплитуде друг другу.

Такие два поля дважды за оборот совпадают по своему направлению, причем амплитуды их складываются и дают амплитуду поля пульсирующего. Поэтому для представления таких полей надо положить

$$A_n = B_n = \frac{C_1}{2}$$

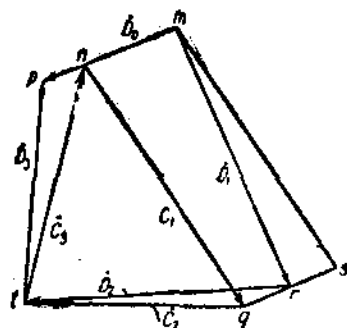
и угол

$$\alpha = 0.$$

Теперь перейдем к исследованию того случая, когда данные три вектора не составляют замкнутого треугольника, а дают геометрическую сумму, отличную от нуля.

На фиг. 152 мы имеем три вектора $\dot{D}_1$, $\dot{D}_2$ и $\dot{D}_3$, которые в сумме дают вектор $\dot{D}_0$, так что

$$\dot{D}_1 + \dot{D}_2 + \dot{D}_3 = \dot{D}_0.$$



Фиг. 152.

Разделим вектор $\dot{D}_0$ на три равные части по $\frac{1}{3} \dot{D}_0$ и, перенеся их в левую часть последнего уравнения, вычтем из каждого данного вектора по этой трети от $\dot{D}_0$, применив для наглядности скобки:

$$\left(\dot{D}_1 - \frac{1}{3} \dot{D}_0\right) + \left(\dot{D}_2 - \frac{1}{3} \dot{D}_0\right) + \left(\dot{D}_3 - \frac{1}{3} \dot{D}_0\right) = 0. \quad (\text{IV})$$

На чертеже векторы

$$\overline{sr} = \overline{rq} = \overline{np} = \frac{1}{3} \overline{mn} = \frac{1}{3} \dot{D}_0. \quad (\text{V})$$

Обозначим

$$\dot{D}_1 - \frac{1}{3} \dot{D}_0 = \dot{C}_1.$$

На фиг. 152 это есть вектор

$$\overline{mr} - \overline{sr} = \overline{ms} = \overline{nq};$$

далее

$$\dot{D}_2 - \frac{1}{3} \dot{D}_0 = \dot{C}_2,$$

на чертеже это есть вектор

$$\overline{rt} - \overline{rq} = \overline{qt};$$

и наконец,

$$\dot{D}_3 - \frac{1}{3} \dot{D}_0 = \dot{C}_3$$

на чертеже представляется как

$$\overline{tp} - \overline{np} = \overline{tp}.$$

Таким образом мы получили три новых вектора $\dot{C}_1$, $\dot{C}_2$ и $\dot{C}_3$, сумма которых равна нулю по (IV), которые, следовательно, составляют замкнутый треугольник. Систему векторов $\dot{C}_1$, $\dot{C}_2$ и $\dot{C}_3$ мы можем, как раньше показано, разложить на две симметричные системы: $\dot{A}_\Delta$ положительной и $\dot{B}_\Delta$ отрицательной последовательности.

Три равных вектора $\frac{1}{3} \dot{D}_0$ составляют так называемую систему нулевой последовательности.

В практике такими токами являются токи, текущие по нейтральному проводу, или если его нет, то в случае короткого замыкания двух фаз на землю — ток заземления, ток, идущий по земле от места короткого замыкания к другой заземленной точке линии.

Выразим аналитически разложение векторов $\dot{D}_1$, $\dot{D}_2$ и $\dot{D}_3$ на векторы $\dot{A}_1$, $\dot{B}_1$ и $\dot{D}_0$, для чего воспользуемся соотношениями (69,1) и (69,2) и применим их к фиг. 152:

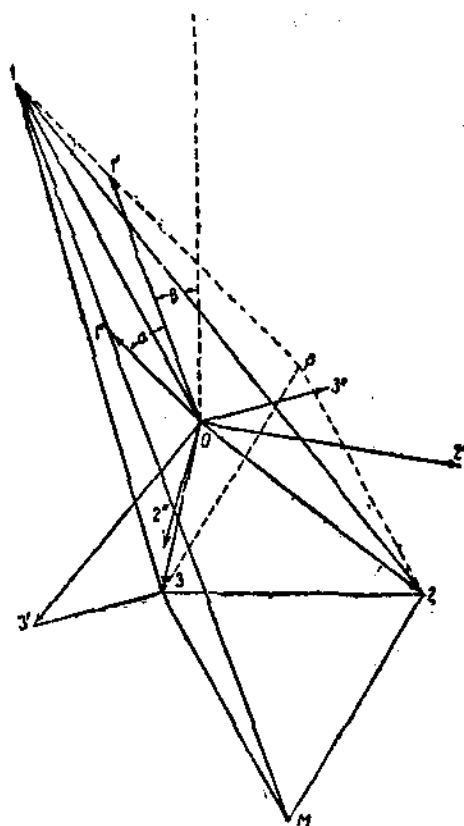
$$\dot{A}_2 = a\dot{A}_1, \dot{A}_3 = a^2\dot{A}_1; \quad \dot{B}_2 = a\dot{B}_1, \dot{B}_3 = a^2\dot{B}_1,$$

и далее из фиг. 148 и формул (IV), (V) и др.

$$\dot{D}_1 = \dot{A}_1 + \dot{B}_1 + \frac{1}{3} \dot{D}_0,$$

$$\dot{D}_2 = a^2\dot{A}_1 + a\dot{B}_1 + \frac{1}{3} \dot{D}_0,$$

$$\dot{D}_3 = a\dot{A}_1 + a^2\dot{B}_1 + \frac{1}{3} \dot{D}_0.$$



Фиг. 153.

Если нагрузка соединена звездой, то может оказаться необходимым разложить на две симметричные системы не только линейные напряжения, но и напряжения фазовые.

На фиг. 153 дано такое разложение: векторы $\overline{OI'}$, $\overline{OZ'}$ и $\overline{OZ''}$ представляют систему прямой последовательности, векторы $\overline{OI''}$, $\overline{OZ''}$ и $\overline{OZ''}$ — обратной последовательности. Из них получаются действительные фазовые напряжения $\overline{OI}$, $\overline{OZ}$, $\overline{OZ}$ и линейные $\overline{I-2}$, $\overline{2-3}$, $\overline{3-1}$.

Возьмем любой из векторов линейных напряжений, например, $\overline{2-3}$; построим на нем равносторонний $\triangle M2-3$ и соединим точку M с точкой I , т. е. с той вершиной треугольника напряжений, которая не вошла в равносторонний треугольник ($M2-3$). Оказывается, что $\overline{MI} = 3 \cdot \overline{OI'}$, что и дает возможность путем такого простого построения $\triangle M2-3$ из данных линейных напряжений находить векторы симметричных систем фазовых напряжений.

Докажем, что $\overline{MI} = 3 \cdot \overline{OI'}$. Имеем:

$$\overline{OI'} = \dot{U}_1 = U_1' e^{j\theta},$$

$$\overline{OZ'} = \dot{U}_2 = U_1' e^{j(\theta - \frac{2\pi}{3})},$$

$$\overline{OZ''} = \dot{U}_3 = U_1' e^{j(\theta + \frac{2\pi}{3})},$$

$$\overline{OI''} = \dot{U}_1' = U_1' e^{j(\theta + \beta)},$$

$$\overline{OZ''} = \dot{U}_2' = U_1' e^{j(\theta + \beta + \frac{2\pi}{3})},$$

$$\overline{OZ''} = \dot{U}_3' = U_1' e^{j(\theta + \beta - \frac{2\pi}{3})}.$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned}\overline{MI} &= \overline{3I} - \overline{3M}, \\ \overline{3I} &= \overline{OI'} + \overline{OI''} - \overline{O3'} - \overline{O3''} = U_1' e^{j\beta} + \\ &+ U_1'' e^{j(\alpha+\beta)} - U_1' e^{j(\beta+\frac{2\pi}{3})} - U_1'' e^{j(\alpha+\beta-\frac{2\pi}{3})}.\end{aligned}$$

Вектор $\overline{3M}$ получается из вектора $\overline{3-2}$ умножением его на $e^{-j\frac{\pi}{3}}$, т. е. поворотом на 60° , а вектор $\overline{3-2} = \overline{O2} - \overline{O3}$; поэтому

$$\begin{aligned}\overline{3M} &= \overline{3-2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}} = \\ &= [U_1' e^{j(\beta-\frac{2\pi}{3})} + U_1'' e^{j(\alpha+\beta+\frac{2\pi}{3})} - U_1' e^{j(\beta+\frac{2\pi}{3})} - \\ &- U_1'' e^{j(\alpha+\beta-\frac{2\pi}{3})}] \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}}.\end{aligned}$$

Выражая $\overline{MI}$ через все эти компоненты, сгруппируем их следующим образом:

$$\begin{aligned}\overline{MI} &= [U_1' e^{j\beta} - U_1' e^{j(\beta+\frac{2\pi}{3})} - U_1' e^{j(\beta-\pi)} + U_1' e^{j(\beta+\frac{\pi}{3})}] + \\ &+ [U_1'' e^{j(\alpha+\beta)} - U_1'' e^{j(\alpha+\beta-\frac{2\pi}{3})} - U_1'' e^{j(\alpha+\beta+\frac{\pi}{3})} + U_1'' e^{j(\alpha+\beta-\pi)}].\end{aligned}$$

В первых скобках стоят четыре вектора, которые дают

$$3U_1' e^{j\beta}, \text{ т. е. } 3 \cdot \overline{OI'}$$

(фиг. 154); четыре вектора во вторых скобках дают нуль, что читатель должен доказать сам, построив их, подобно фиг. 154.

Упражнение. Доказать, что, повернув $\triangle M2-3$ в положение $P2-3$, мы будем иметь

$$\overline{PI} = 3 \cdot \overline{OI''} = 3 \cdot \overline{U_1''}.$$

Прodelать графическое построение и проверку для других сторон.

В действительности может и не быть нагрузки, включенной звездой.

Построив вектор $\overline{MI}$, мы можем и не строя векторов $\overline{OI'}$, $\overline{O2'}$, $\overline{O3'}$, сразу узнать величину междофазового, или линейного, напряжения прямой системы, так как по величине

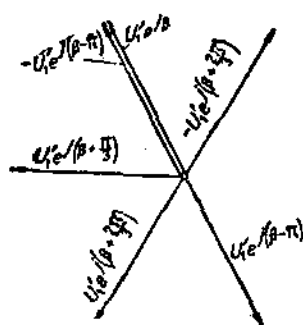
$$I'2' = OI' \cdot \sqrt{3} = \frac{MI}{\sqrt{3}} = 0,577 \cdot MI.$$

Узнать линейное напряжение обратной системы по формуле

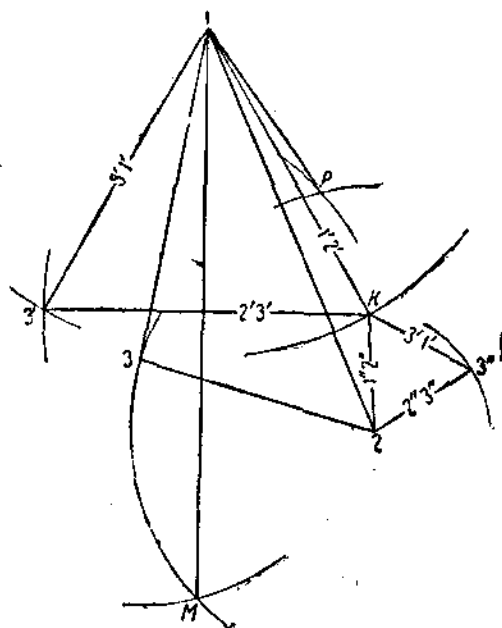
$$I''2'' = \overline{I-2} - \overline{I'2'}$$

мы, не построив векторов $\overline{OI'}$, $\overline{O2'}$, не можем, ибо неизвестна фаза вектора $I'2'$ относительно $\overline{I-2}$. Поэтому строим $\triangle P2-3$ и, измерив $\overline{PI}$, вычисляем $0,577 \cdot \overline{PI} = I''2''$ или $I'3''$.

Таким образом построением двух треугольников $M2-3$ и $P2-3$, точнее, только точек M и P и двумя умножениями на 0,577 мы узнали длины векторов $I'2'$ и $I''2''$.



Фиг. 154.



Фиг. 155.

В этом заключается главное достоинство изложенного способа.

Пример 53. На фиг. 155 проделано это построение: найдены точки M и P описыванием из точек 2 и 3 дуг радиусом, равным $2\cdot 3$; длины MI и PI умножены на 0,577; и из линий $1-2$, $1'2'$ и $1''2''$ построен треугольник $1-2K$. На стороне IK , как на большей, построен равносторонний треугольник с той же последовательностью фаз, что и $1-2-3$, а на стороне $K2$ построен треугольник с обратной последовательностью.

При этом мерилom точности вычерчивания служит проверка, выполняются ли равенства векторов (т. е. равны ли их длины и параллельны ли направления):

$$\overline{K3''} = \overline{3-3} \text{ и } \overline{K3'} = \overline{3''3}.$$

Следует заметить, что так как вектор $\overline{MI}$ параллелен фазовому вектору $\overline{OI'}$ (действительному или воображаемому), то $\overline{MI} \perp \overline{2'3'}$ на фиг. 153 и $\overline{MI} \perp \overline{K3'}$ на фиг. 155, т. е. $\angle MIK = 30^\circ$. Это замечание служит для того, чтобы построить $\triangle IK2$ фиг. 155 в правильном положении, ибо ведь дуги, описанные из точки 1 радиусом $1'2'$ и из точки 2 радиусом $1''2''$, пересекаются в двух точках.

§ 85. Примеры применения метода разложения на симметричные составляющие

Метод разложения несимметричной системы на симметричные составляющие системы позволяет быстро получать решение весьма сложных задач.

Как пример рассмотрим влияние несимметричности линейных напряжений на работу асинхронного двигателя.

Магнитодвижущие силы различных фаз обмотки статора пропорциональны силам токов, а потому при включении этих обмоток треугольником пропорциональны линейным напряжениям.

Разложим эти м. д. с. на две симметричные системы. Система положительной последовательности создает вращающееся магнитное поле, которое и увлечет ротор за собой.

В системе отрицательной последовательности ток в фазе второй опережает ток в фазе первой вместо того, чтобы отставать от него (фиг. 148), а ток в фазе третьей опережает ток во второй. Поэтому роли обмоток второй и третьей фаз переменялись, и в то время как в системе положительной последовательности магнитное поле перемещается вдоль обмоток в порядке номеров $1-2-3-1-2-3...$, в системе отрицательной последовательности поле перемещается по обмоткам в порядке $3-2-1-3-2-1...$, т. е. в порядке обратном. Это вращающееся магнитное поле вызовет и соответствующий вращающий момент, действующий на ротор, но так как это второе поле слабее первого (ибо векторы системы отрицательной последовательности меньше векторов положительной последовательности), то его вращающий момент будет только вычитаться из вращающего момента первого поля и уменьшать, таким образом, к. п. д. Исходя из векторной диаграммы, как на фиг. 148, можно всем этим соотношениям дать и аналитическое выражение.

Выше мы предположили, что фазы обмотки статора асинхронного двигателя включены треугольником.

Очевидно, что и при включении, более часто применяющемся, именно звездой, качественно влияние несимметричности линейных напряжений остается тем же.

В обоих случаях мы соответственно разложению линейных напряжений на две симметричные системы представляем вращающий момент разложенным на два, действующих в разные стороны.

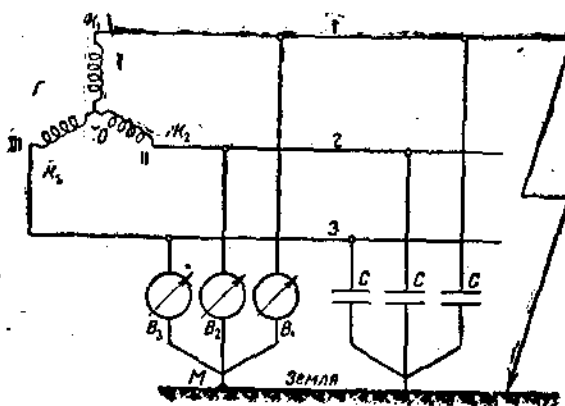
В этих примерах мы не имеем системы нулевой последовательности.

Выше уже было упомянуто, что в трехфазной линии с нулевым проводом мы имеем четыре тока, и разлагая несимметричную систему токов в этом случае, мы получим кроме векторов положительной и отрицательной также и вектора нулевой последовательности.

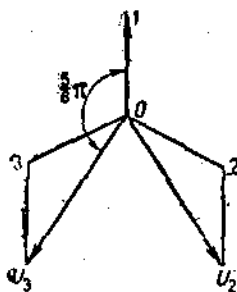
Приведем пример, когда в трехфазной линии без нулевого провода могут появиться составляющие напряжений нулевой последовательности.

На фиг. 156 представлена схема трехфазной линии без нулевого провода, питаемой трехфазным генератором G . Ко всем трем фазам присоединено по вольтметру B_1 , B_2 и B_3 , которые затем отведены к земле (заземлены).

Эти вольтметры служат для постоянного контроля над состоянием линии в отношении изоляции ее от земли.



Фиг. 156.



Фиг. 157.

Конденсаторы, показанные далее на схеме, символизируют емкости проводов линии относительно земли.

Зигзаг со стрелой справа является условным обозначением заземления, внезапно появившегося вследствие порчи изоляции.

Вследствие такого заземления провод 1 оказывается под потенциалом земли, и следовательно, вольтметр B_1 будет не под напряжением и станет показывать нуль.

Точка M_1 — заземления вольтметров — и точка K_1 — конец первой фазы генератора G — окажутся под одним потенциалом, и вольтметры B_2 и B_3 — под междуфазовым напряжением.

Строя векторы напряжений, под которыми находятся вольтметры, мы должны будем при этом отложить (фиг. 157) по вертикали вектор, дающий показание первого вольтметра $\dot{U}_1 = 0$, затем векторы

$$\dot{U}_2 = U_\phi \sqrt{3} e^{-j \frac{5}{6} \pi}$$

и

$$\dot{U}_3 = U_\phi \sqrt{3} e^{+j \frac{5}{6} \pi}.$$

Такая несимметричная система трех векторов может быть представлена как результирующая из симметричной системы положительной последовательности

$$\dot{U}'_1 = U_\phi, \quad \dot{U}'_2 = U_\phi e^{-j \frac{2}{3} \pi} \quad \text{и} \quad \dot{U}'_3 = U_\phi e^{+j \frac{2}{3} \pi}$$

и системы нулевой последовательности, состоящей из трех векторов

$$\dot{U}'' = U_{\phi} e^{j\theta}.$$

Представит полезное упражнение для читателя выразить через емкость C и напряжения те емкостные токи, которые при этом будут течь во всех трех проводах, и проанализировать их.

§ 86. Общий случай разложения многофазной несимметричной системы на симметричные составляющие

Пусть нам дана несимметричная система n -векторов, сумма которых равна нулю.

Обобщение предыдущей теории будет заключаться здесь в том, что такая система может быть разложена на $n-1$ систем симметричных.

Тут прежде всего является вопрос, какая разница имеется между этими системами кроме величины векторов. В трехфазной системе с 4-мя векторами мы отличали систему положительной, отрицательной и нулевой последовательности, или прямую, обратную и нулевую.

Как отличить системы, когда их не три, а $n-1$?

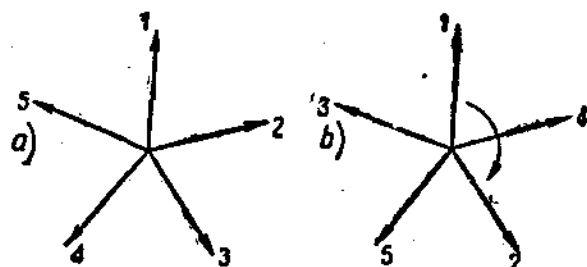
Чтобы подготовиться к пониманию принципа различения этих систем в общем случае, надо сначала вернуться к системе трехфазной и взглянуть на прямую, обратную и нулевую последовательности несколько с иной точки зрения.

В системе векторов A_1, A_2 и A_3 каждый вектор получается из предыдущего поворотом его на угол $\frac{2}{3}\pi$.

В системе векторов обратной последовательности B_1, B_2 и B_3 вектор B_2 получается из предыдущего B_1 поворотом его на угол $2 \cdot \frac{2\pi}{3}$; то же B_3 из B_2 и то же B_1 из B_3 .

Наконец, в системе нулевой последовательности каждый из трех векторов $\frac{1}{3}D_0$ получается из другого поворотом его на угол $3 \cdot \frac{2}{3}\pi = 2\pi$.

Таким образом все три системы отличаются друг от друга тем, что мы нумеруем векторы, изменяя для каждой системы угол, отделяющий два соседних по номеру вектора.



Фиг. 158 а.

Фиг. 158 б.

Очевидно, что если мы возьмем пятифазную систему, то таких возможностей будет еще больше.

На фиг. 158а представлена симметричная пятифазная система.

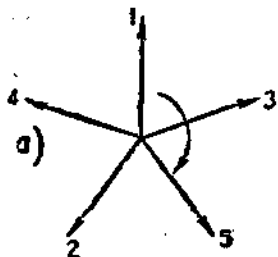
Угол между векторами, соседними по номеру, равен $\frac{2\pi}{5}$.

На фиг. 158б те же векторы перенумерованы в ином порядке; угол между двумя соседними номерами, например, первым и вторым, равен $2 \cdot \frac{2\pi}{5}$.

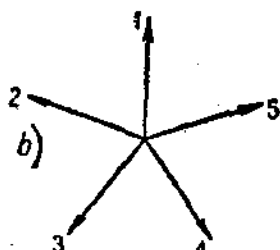
На фиг. 159а этот угол сделан равным $3 \cdot \frac{2\pi}{5}$ и на фиг. 159б равным $4 \cdot \frac{2\pi}{5}$.

Системы фиг. 158а и 159б представляют системы прямой и обратной последовательности.

Системы фиг. 158b и 159a назовем системами двукратно-угловыми прямой и обратной последовательности, ибо на фиг. 159a вектор 2 получается из вектора 1 поворотом последнего на угол $3 \cdot \frac{2\pi}{5}$ по вращению часовой стрелки или же на угол $2 \cdot \frac{2\pi}{5}$ против вращении часовой стрелки, т. е. обратно фиг. 158b.



Фиг. 159a.



Фиг. 159b.

Пусть читатель разберет и начертит все подобные варианты для семифазной системы; число их будет шесть; он убедится, что полученные системы могут быть сравнены попарно, причем получится: две системы — прямая и обратная — простые, т. е. с углом между векторами с соседними номерами в $\frac{2\pi}{7}$; затем две системы — прямая и обратная — двукратно-угловые, т. е. с углами в $2 \cdot \frac{2\pi}{7}$, и две системы — прямая и обратная — трехкратно-угловые, т. е. с углами в $3 \cdot \frac{2\pi}{7}$.

В общем случае n -фазной системы число таких вариантов-систем будет, очевидно, $(n-1)$, ибо угол между векторами в простой основной n -фазной системе равен $\frac{2\pi}{n}$, и последним вариантом будет система с углом в $(n-1) \cdot \frac{2\pi}{n}$ между векторами с соседними номерами.

На такие симметричные системы числом $(n-1)$ и разлагается n -фазная несимметричная система.

Следует не забывать, что мы условились рассматривать n векторов, дающих в сумме нуль; в этом случае и трехфазная несимметричная система разлагается на две: прямую и обратную.

Очевидно, что система n векторов, дающих в сумме некоторый вектор D , разложится на $n-1$ симметричных систем, в которых имеется n отличных друг от друга векторов, плюс вектор D .

Переходим к аналитическому выражению разложения n -фазной несимметричной системы.

Пусть нам даны n несимметричных векторов

$$\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_3, \dots, \dot{U}_{n-1}, \dot{U}_n$$

Аналогично тому, как мы это делали в трехфазной системе, обозначим (n) векторов в первой с углом $\frac{2\pi}{n}$ симметричной составляющей системе через $\dot{A}_1, \dot{A}_2,$

$\dot{A}_3, \dots, \dot{A}_{n-1}$; (n) векторов второй (с углом $2 \cdot \frac{2\pi}{n}$) системы — через

$$\dot{B}_1, \dot{B}_2, \dot{B}_3, \dots, \dot{B}_n$$

и т. д. до $(n-1)$ -й системы —

$$\dot{K}_1, \dot{K}_2, \dot{K}_3, \dots, \dot{K}_n$$

и полагаем

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{A}_1 + \dot{B}_1 + \dots + \dot{K}_1, \\ \dot{U}_2 &= \dot{A}_2 + \dot{B}_2 + \dots + \dot{K}_2, \\ &\vdots \\ \dot{U}_n &= \dot{A}_n + \dot{B}_n + \dots + \dot{K}_n, \end{aligned} \right\} \quad (86,1)$$

причем имеется еще условие

$$\sum_{m=1}^{m=n} U_m = 0. \quad (86,2)$$

Посредством поворачивающего множителя легко выразить векторы любой фазы или с любым номером какой-нибудь системы через первый вектор этой же системы совершенно аналогично тому, как мы выражали A_2 и A_3 через A_1 и поворачивающий множитель a в трехфазной системе.

В n -фазной системе вектор любой фазы первой основной системы можно выразить так:

$$\dot{A}_m = \dot{A}_1 e^{-j(m-1)\frac{2\pi}{n}}. \quad (86,3)$$

Обозначим аналогично трехфазному току

$$e^{+j\frac{2\pi}{n}} = a, \quad (86,4)$$

тогда

$$\dot{A}_m = \dot{A}_1 a^{-(m-1)}. \quad (86,5)$$

Для системы $\dot{B}$ поворачивающий множитель есть

$$e^{-j2\frac{2\pi}{n}} = a^{-2},$$

поэтому

$$\dot{B}_m = \dot{B}_1 e^{-j(m-1)2\frac{2\pi}{n}} = \dot{B}_1 a^{-2(m-1)} \quad (86,6)$$

и т. д.

Для $(n-1)$ -й системы $\dot{K}$ поворачивающий множитель есть

$$e^{-j(n-1)\frac{2\pi}{n}} = a^{-(n-1)},$$

так что

$$\dot{K}_m = \dot{K}_1 a^{-(m-1)(n-1)}. \quad (86,7)$$

Поэтому мы можем уравнение (86,1) переписать в такой форме:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{A}_1 + \dot{B}_1 + \dots + \dot{K}_1 \dots \dots \dots (n-1) \text{ членов,} \\ \dot{U}_2 &= a^{-1}\dot{A}_1 + a^{-2}\dot{B}_1 + \dots + a^{-(n-1)}\dot{K}_1, \\ \dot{U}_3 &= a^{-2}\dot{A}_1 + a^{-4}\dot{B}_1 + \dots + a^{-2(n-1)}\dot{K}_1, \\ &\vdots \\ \dot{U}_n &= a^{-(n-1)}\dot{A}_1 + a^{-2(n-1)}\dot{B}_1 + \dots + a^{-(n-1)(n-1)}\dot{K}_1. \end{aligned}$$

Так как на n векторов $\dot{U}$ наложено условие, что их сумма равна нулю, то любой вектор, например, последний, n -й, можно рассматривать, как определяемый остальными; поэтому у нас имеется $n-1$ независимых друг от друга таких линейных уравнений; в них находится $(n-1)$ неизвестных $A_1, B_1, \dots, K_1$, которые, таким образом, могут быть из этих уравнений однозначно определены.

Аналогично тому, как мы поступали при определении, например, A_1 в трехфазной системе, множим уравнения на соответствующие множители, уравнивая коэффициенты при определяемом векторе.

Для определения $\dot{A}_1$ умножаем второе уравнение на a , третье — на a^2 и т. д. — n -е на a^{n-1} и складываем их. В правой части по отдельности суммируем члены, содержащие $\dot{B}_1$, отдельно $\dot{C}_1$, и т. д.

Вынося $\dot{B}_1$ за скобки, в скобках находим сумму векторов

$$1 + a^{-1} + a^{-2} + \dots + a^{-(n-1)},$$

что, очевидно, представляет сумму n симметричных векторов и потому равно нулю.

На том же основании равны нулю и суммы при $\dot{C}_1$ и т. д. до $\dot{K}_1$, где сумма будет иметь вид

$$1 + a^{2-n} + a^{2(2-n)} + \dots + a^{(n-1)(2-n)},$$

что представляет сумму n симметричных векторов с углом $(2-n) \frac{2\pi}{n}$.

Таким образом получаем в правой части только $n\dot{A}_1$, и следовательно,

$$\dot{A}_1 = \frac{1}{n} (\dot{U}_1 + a\dot{U}_2 + a^2\dot{U}_3 + \dots + a^{n-1}\dot{U}_n).$$

Аналогично

$$\dot{B}_1 = \frac{1}{n} (\dot{U}_1 + a^2\dot{U}_2 + a^4\dot{U}_3 + \dots + a^{2(n-1)}\dot{U}_n)$$

.....

$$\dot{K}_1 = \frac{1}{n} (\dot{U}_1 + a^{n-1}\dot{U}_2 + a^{2(n-1)}\dot{U}_3 + \dots + a^{(n-1)(n-1)}\dot{U}_n).$$

Этим аналитическим выражениям легко дать и геометрическое толкование, помня, что, умножая вектор на a^m , мы его поворачиваем на угол $m \cdot \frac{2\pi}{n}$.

Если n векторов дают в сумме вектор $\dot{D}$, то мы сначала вычтем по $\frac{1}{n} \dot{D}$ от каждого из данных векторов; этим у нас получится система n векторов, дающих в сумме нуль, которую мы по предыдущему разложим на $(n-1)$ симметричных систем, так что в результате будем иметь уже n систем, считая за n -ю систему n векторов $\frac{1}{n} \dot{D}$; последняя и будет системой „нулевой“ последовательности в этом общем случае.

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

СЛОЖНАЯ ФОРМА КРИВЫХ Э. Д. С. И СИЛЫ ТОКА

§ 87. Основные понятия

Когда форма кривой э. д. с. отступает от синусоиды, расчет усложняется; теорией этого случая мы и займемся теперь; сначала остановимся на общем приеме для получения аналитического выражения э. д. с.

Если кривая э. д. с. и синусоида [формула (6,4)] не совпадают, то надо посмотреть, нельзя ли прибавлением к синусоиде других периодических функций получить функцию, кривая (график) которой будет ближе к кривой поля, чем чистая синусоида.

За такие функции возьмем синусы и косинусы с периодами в 2, 3, 4, ..., n раз меньшими, чем T — период функции (6,4) (тангенсы и котангенсы неудобны, так как принимают бесконечно большие значения при значениях аргумента $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3}{2}\pi$).

Сначала разберем несколько примеров.

Посмотрим, что за кривая получится от сложения с ординатами синусоиды (6,4) ординат синусоиды с периодом T_3 , в три раза меньшим, и с некоторой амплитудой a_3 . Знаками „три“ мы указываем условно, что у этой новой синусоиды период составляет одну треть прежнего, т. е. что

$$T_3 = \frac{1}{3} T. \quad (A)$$

Новую синусоиду мы можем выразить аналогично формуле (6,4), ее ординаты равны

$$y_3 = a_3 \cdot \sin \omega_3 t.$$

Здесь

$$\omega_3 = \frac{2\pi}{T_3} = 2\pi : \frac{1}{3} T = 3 \cdot \frac{2\pi}{T} = 3\omega,$$

и поэтому

$$y_3 = a_3 \cdot \sin 3\omega t. \quad (B)$$

Ординаты результирующей кривой выразятся уравнением

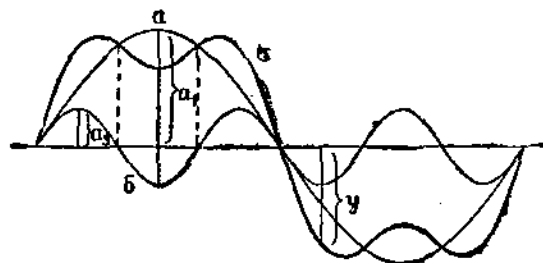
$$y = a_1 \sin \omega t + a_3 \sin 3\omega t. \quad (C)$$

Что касается величины a_3 , то она при решении конкретных задач определяется по тому же способу, изложенному далее, по которому определяется и a_1 .

Мы пойдем обратным порядком, именно зададимся величиной a_3 , например, положим

$$a_3 = \frac{1}{3} a_1$$

и построим кривую, выражаемую формулой (C), для чего построим сначала одну, потом другую синусоиды, а затем сложим их ординаты алгебраически и начертим по точкам результирующую кривую.



Фиг. 160.

На фиг. 160 все это построение и выполнено, причем здесь кривая б есть синусоида с амплитудой a_3 и с периодом в три раза меньше периода синусоиды а, а кривая в есть результирующая.

Можно было бы не складывать ординат кривых, а вычитать ординаты второй синусоиды из ординат синусоиды а; тогда получили

бы кривую, аналитическое выражение которой было бы таково:

$$y = a_1 \cdot \sin \omega t - a_3 \cdot \sin 3\omega t \quad (D)$$

и которая графически представлена кривой в на фиг. 161.

Построим теперь кривую, выражающуюся уравнением:

$$y = a_1 \cdot \sin \omega t + a_3 \cdot \sin 3\omega t + a_5 \cdot \sin 5\omega t, \quad (E)$$

в котором зададимся соотношениями:

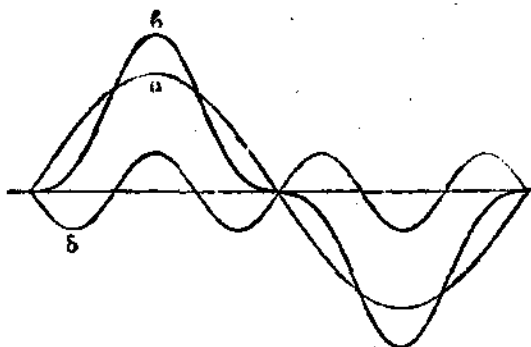
$$a_3 = \frac{1}{3} a_1, \quad a_5 = \frac{1}{5} a_1 \quad (F)$$

и где, очевидно, период функции

$$\sin 5\omega t = \sin \omega_5 t$$

по аналогии с (B) в пять раз меньше периода T .

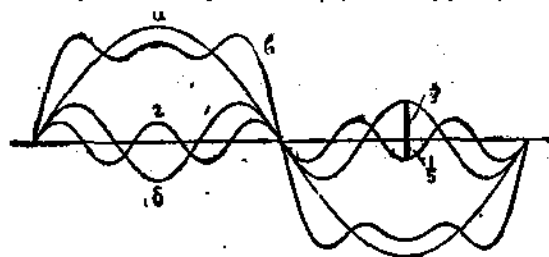
На фиг. 162 представлены все три синусоиды и кривая a , полученная алгебраическим сложением их ординат. Синусоиды, ординаты которых мы алгебраически складываем для получения результирующей кривой, называются „составляющими“ синусоидами для этой кривой, или просто „составляющими“. Коэффициент под знаком синуса при ωt называется „порядком“ синусоиды. „Составляющая n -го порядка“ означает синусоиду с периодом T_n в n раз меньшим, чем период T самой периодической функции или изображающей ее кривой, результирующей из нескольких синусоид. Амплитуду составляющей n -го порядка мы будем обозначать разными буквами с значком n , а аргумент ее — через $\omega_n t$, где



Фиг. 161.

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T_n} = 2\pi : \frac{1}{n} T = n \frac{2\pi}{T} = n\omega. \quad (G)$$

Может случиться, что, сложив с основной синусоидой или синусоидой первого порядка несколько синусоид высших порядков, мы получим кривую, которая очень близко подойдет к экспериментально полученной с машины кривой поля или э. д. с. Это будет означать, что вопрос об аналитическом выражении этой э. д. с. решен. Выражение (E) или другое, подобное, в котором будут содержаться члены, выражающие все составляющие, и будет требуемым аналитическим выражением.



Фиг. 162.

Заметим еще, что все полученные нами до сих пор от сложения различных синусоид кривые симметричны относительно оси абсцисс.

Поясним этот термин. Сдвинем одну половину кривой на полпериода и перегнем чертеж по оси абсцисс; симметрия отно-

сительно оси абсцисс означает, что обе половины при этом совпадут.

Может случиться, однако, что придется для подходящего представления кривой э. д. с. аналитическими периодическими кривыми привлечь еще и косинусоиды.

Сначала опять обратимся к примеру.

На фиг. 163 сложены ординаты синусоиды первого порядка и косинусоиды третьего порядка (применяя понятия „порядка“ к косинусоиде совершенно таким

же образом, как и к синусоиде), причем в нашем примере принято, что амплитуда косинусоиды

$$b_3 = \frac{1}{3} a_1,$$

и начерчена результирующая кривая.

Аналитически ординаты кривой выражаются так:

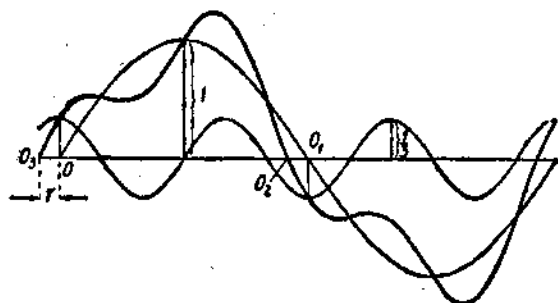
$$y = a_1 \cdot \sin \omega t + b_3 \cos 3\omega t, \quad (H)$$

или

$$y = a_1 \cdot \sin \omega t + b_3 \cdot \sin \left(3\omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Из фиг. 163 мы видим следующее:

Во-первых, первая и вторая четверти периода между собой не одинаковы, то же — третья и четвертая между собой, т. е. хотя кривая симметрична относительно оси абсцисс, но она несимметрична относительно точки перехода через нулевое значение. Взяв на одинаковом расстоянии от точки O_2 вправо и влево



Фиг. 163.

по ординате, мы увидим, что они по абсолютной величине неравны; отметим, что в предыдущих кривых этого не было; следовательно, вхождение в число составляющих косинусоиды влечет за собой асимметрию относительно точки перехода через нуль.

Во-вторых, если результирующая кривая подходит по форме к кривой э. д. с. достаточно, то из фиг. 163 видно, что, на-

писав выражения (H), мы тем самым счет времени ($t=0$) начинаем не с того момента, когда э. д. с. равна нулю, т. е. не с точки O_2 , а позднее на промежуток времени τ , с точки O .

Так как, однако, отсчет времени с момента нулевого значения э. д. с. часто бывает желательнее, то мы выражения (H) для составляющих должны изменить. Введем отсчет времени от точки O_3 ; тогда новое время

$$t' = t + \tau,$$

где τ — постоянная величина, равная OO_3 .

Подставив в уравнение (H) вместо t его выражение через новое время, т. е. величину $t' - \tau$, получим

$$y = a_1 \cdot \sin(\omega t' - \omega \tau) + b_3 \cdot \sin(3\omega t' - 3\omega \tau + \frac{\pi}{2})$$

Введя для постоянных величин сокращенные обозначения:

$$-\omega \tau = \varphi_1,$$

$$-3\omega \tau + \frac{\pi}{2} = \varphi_2,$$

мы имеем

$$y = a_1 \cdot \sin(\omega t' + \varphi_1) + b_3 \cdot \sin(3\omega t' + \varphi_2) \quad (K)$$

или же, преобразуя и развертывая,

$$y = a_1 \cos \varphi_1 \sin \omega t' + a_1 \sin \varphi_1 \cos \omega t' + b_3 \cos \varphi_2 \sin 3\omega t' + b_3 \sin \varphi_2 \cos 3\omega t'.$$

Произведя дальнейшее сокращение обозначений постоянных величин и положив

$$a_1 \cos \varphi_1 = A_1,$$

$$a_1 \sin \varphi_1 = B_1,$$

$$b_2 \cos \varphi_2 = A_2,$$

$$b_2 \sin \varphi_2 = B_2,$$

а также упразднив теперь значок при t , как уже ненужный, — раз другого счета времени кроме нового у нас нет, — получим окончательное выражение:

$$y = A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t + A_2 \sin 2\omega t + B_2 \cos 2\omega t. \quad (L)$$

После всех этих примеров нам нетрудно будет перейти и к более общему исследованию вопроса об аналитическом выражении э. д. с.

Фурье (Fourier) показал, что всякая периодическая функция может быть представлена аналогично L разложением в некоторый ряд, состоящий из отдельных синусоидальных (и „синусов“ и „косинусов“) функций с периодами, в 2, 3, 4, 5, ..., n раз меньшими основного периода T , и с амплитудами, определяемыми по особым правилам. Число членов этого ряда, называемого рядом Фурье, различно для различных видов периодических функций. В общем случае его можно считать бесконечным и представить поэтому периодическую функцию y так:

$$y = A_0 + A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t + A_2 \sin 2\omega t + B_2 \cos 2\omega t + \\ + A_3 \sin 3\omega t + B_3 \cos 3\omega t + \dots + A_n \sin n\omega t + \\ + B_n \cos n\omega t + \dots \quad (M)$$

Прежде чем перейти к изложению способа вычисления коэффициентов этого ряда, т. е. амплитуд отдельных составляющих, остановимся на двух общих свойствах этого ряда для того случая, когда $A_0 = 0$.

Во-первых, нетрудно видеть, что если кривая, изображающая рассматриваемую периодическую функцию, симметрична относительно точки перехода через нуль, то косинусоиды входить в число составляющих не могут, а потому все коэффициенты при них — $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ — равны нулю.

Во многих случаях практически кривая означенной симметрией не обладает; а потому будет иметь в числе составляющих косинусоиды различных порядков.

Обратимся ко второму свойству.

На фиг. 164 сложены: синусоида a основная, или первого порядка, и синусоида b второго порядка с некоторой амплитудой и получена кривая c , изображающая уравнение

$$y = A_1 \sin \omega t + A_2 \sin 2\omega t.$$

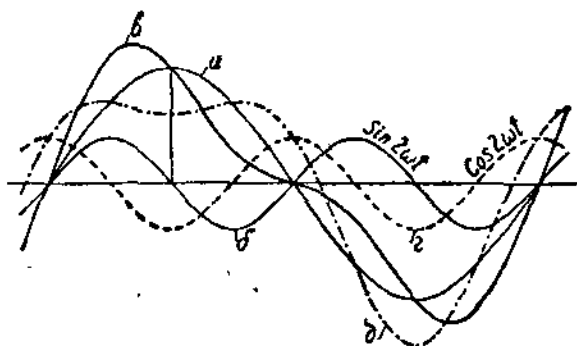
Мы видим, что кривая c несимметрична относительно оси абсцисс.

Далее, пунктиром g изображена косинусоида второго порядка, и сложением ее с a получается кривая d , изображающая уравнение

$$y = A_1 \sin \omega t + B_2 \cos 2\omega t.$$

Эта кривая тоже несимметрична относительно оси абсцисс.

Нетрудно видеть, что и вообще всякая составляющая четного порядка вводит нарушение такой симметрии, а потому кривая, симметричная относи-



Фиг. 164.

тельно оси абсцисс, не может иметь в числе составляющих таковые четного порядка. Так как кривая э. д. с. вследствие одинаковости полюсов большей частью обладает этой симметрией, то обыкновенно она не содержит четных составляющих.

При построении электрических машин идут таким путем. Получив экспериментально у построенной машины кривую э. д. с., исследуют, какие конструктивные и иные соотношения содействуют уменьшению амплитуд составляющих высших порядков, причем под словом „высший“ будем подразумевать всякий „большой единицы“ порядок, а затем строят согласно полученным результатам машины так, чтобы их э. д. с. была возможно ближе к чистой синусоиде.

Операция нахождения величины амплитуд всех отдельных составляющих какой-нибудь эмпирически данной периодической функции называется анализом ее. Для анализа э. д. с. служат особые методы: арифметические, когда кривая уже получена, и экспериментальные — без предварительного снятия самой кривой э. д. с., а также особые приборы — анализаторы, применяющиеся тоже при имеющейся уже кривой.

В современных машинах переменного тока кривая э. д. с. обыкновенно очень близка к синусоиде и содержит кроме основной синусоиды первого порядка синусоиды высших порядков только с очень малыми амплитудами.

§ 88. Разложение в ряд Фурье

Обратимся теперь к аналитическому определению коэффициентов в ряде Фурье (M):

$$y = A_0 + A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t + A_2 \sin 2\omega t + B_2 \cos 2\omega t + \dots \quad (M)$$

Будем производить следующие действия: сначала умножать обе части уравнения (M) на

$$\left. \begin{array}{l} \sin(n\omega t) \cdot d(\omega t) \\ \cos(n\omega t) \cdot d(\omega t), \end{array} \right\} \quad (a)$$

придавая n целые и положительные значения, начиная с единицы, и затем интегрировать обе части между пределами

$$t = 0 \text{ или } \omega t = 0$$

и

$$t = T \text{ или } \omega t = 2\pi.$$

При этих операциях у нас в правой части будут получаться от умножения членов правой части уравнения (M) на одно из выражений (a) члены следующего вида:

$$\left. \begin{array}{l} \int_0^{2\pi} \sin(m\omega t) \sin(n\omega t) \cdot d(\omega t), \\ \int_0^{2\pi} \sin(m\omega t) \cos(n\omega t) \cdot d(\omega t), \\ \int_0^{2\pi} \cos(m\omega t) \cos(n\omega t) \cdot d(\omega t), \end{array} \right\}$$

умноженные еще на амплитуды A_m или B_m и, кроме того, еще члены вида:

$$A_0 \int_0^{2\pi} \sin(n\omega t) d(\omega t) \text{ и } A_0 \int_0^{2\pi} \cos(n\omega t) d(\omega t).$$

Последние интегралы, как читателю нетрудно доказать самому, все равны нулю.

Переходим к первым трем.

Преобразуем первый интеграл, пользуясь соотношением

$$\cos y - \cos z = -2 \sin \frac{y+z}{2} \sin \frac{y-z}{2}. \quad (3)$$

Полагая

$$\frac{y+z}{2} = m\omega t \text{ и } \frac{y-z}{2} = n\omega t,$$

имеем

$$y = (m+n)\omega t, \quad z = (m-n)\omega t$$

и, подставляя в (3), получаем

$$\sin(m\omega t) \sin(n\omega t) = -\frac{1}{2} \{ \cos[(m+n)\omega t] - \cos[(m-n)\omega t] \}.$$

Подставляя это выражение в первый из трех вышенаписанных интегралов, получаем выражение

$$-\frac{1}{2} \left\{ \int_0^{2\pi} \cos[(m+n)\omega t] \cdot d(\omega t) - \int_0^{2\pi} \cos[(m-n)\omega t] \cdot d(\omega t) \right\}. \quad (I)$$

Далее, пользуясь формулой

$$\sin y + \sin z = 2 \sin \frac{y+z}{2} \cos \frac{y-z}{2},$$

найдем, что второй интеграл дает выражение

$$\frac{1}{2} \left\{ \int_0^{2\pi} \sin[(m+n)\omega t] d(\omega t) + \int_0^{2\pi} \sin[(m-n)\omega t] d(\omega t) \right\}; \quad (II)$$

наконец, на основании разложения

$$\cos y + \cos z = 2 \cos \frac{y+z}{2} \cos \frac{y-z}{2}$$

для третьего интеграла получаем выражение

$$\frac{1}{2} \left\{ \int_0^{2\pi} \cos[(m+n)\omega t] d(\omega t) + \int_0^{2\pi} \cos[(m-n)\omega t] d(\omega t) \right\}. \quad (III)$$

Интегралы (II) для всех значений m и n обращаются в нули; интегралы (I) и (III) обращаются в нули для $m \neq n$; только при $m = n$ второй член выражений (I), (III)

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos[(m-n)\omega t] d(\omega t)$$

дает величину, отличную от нуля, именно

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d(\omega t) = \pi. \quad (IV)$$

Таким образом после умножения уравнения (M) на то или другое из выражений (α) и интегрирования между указанными пределами в правой части останется только тот член, для которого $m=n$ и который получился или от перемножения синусов (I) или косинусов (III). Например, при умножении на

$$\sin(5\omega t) \cdot d(\omega t),$$

все кроме одного члены после интегрирования дадут нули, в том числе и член

$$B_5 \cos(5\omega t) \cdot \sin(5\omega t) \cdot d(\omega t),$$

и лишь член

$$A_5 \sin(5\omega t) \cdot \sin(5\omega t) \cdot d(\omega t)$$

даст после интегрирования величину согласно (IV)

$$A_5 \pi.$$

При умножении же ряда (M) на

$$\cos(5\omega t) \cdot d(\omega t)$$

не даст нуля после определенного интегрирования только член

$$B_5 \cos(5\omega t) \cos(5\omega t) \cdot d(\omega t),$$

от которого мы получим на основании (IV)

$$B_5 \pi.$$

В левой же части мы будем иметь определенные интегралы от произведения функции y на ту величину, на которую мы множили обе части; таким образом

$$\int_{\omega t=0}^{\omega t=2\pi} y \sin(m\omega t) \cdot d(\omega t) = A_m \pi \quad (N)$$

и

$$\int_{\omega t=0}^{\omega t=2\pi} y \cos(m\omega t) \cdot d(\omega t) = B_m \pi. \quad (P)$$

Что касается A_0 , то его мы определим так: умножим обе части ряда (M) на $d(\omega t)$ и проинтегрируем между пределами 0 и 2π . В правой части получим только $A_0 2\pi$, так как остальные интегралы будут равны нулю, а в левой части получим площадь между кривой y и осью абсцисс за период. Разделив обе части на 2π , будем иметь

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y \cdot d(\omega t) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^T y \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T y \cdot dt.$$

т. е. A_0 есть „среднее“ значение ординаты кривой за период.

В дальнейшем мы будем иметь в виду исключительно переменный ток, получающийся от описанных выше генераторов; среднее значение его за период равно всегда нулю, другими словами, для него $A_0=0$; читателю ясно, что это является следствием упомянутой уже не раз симметрии его кривой относительно оси абсцисс. Формулы (N) и (P) дают нам возможность вычислить значения всех коэффициентов ряда (M) и, кроме того, дают нам общие математические доказательства правильности тех соображений относительно составляющих четного и нечетного порядков, а также синусоид и косинусоид, которые были развиты выше и иллюстрированы фиг. 162 — 164.

Выразим аналитически условие симметрии кривой $y=f(t)$ относительно оси абсцисс.

Так как эта симметрия означает, что на фиг. 2

$$ab = -hg,$$

то, обозначая Oa через t , имеем, что $Oh = t + \frac{1}{2}T$, и следовательно, условие симметрии кривой относительно оси абсцисс выразится так:

$$f(t) = -f\left(t + \frac{1}{2}T\right). \quad (Q)$$

Введем это условие в выражения (N) и (P) путем следующего рассуждения:

Пусть кривая, выражающая функцию y , обладает этой симметрией, и для нее поэтому имеет место соотношение (Q). Подставим в уравнение (N) вместо буквы y выражение $f(t)$ и сгруппируем бесконечно малые слагаемые под интегралом для значений времени, отличающихся одно от другого на $\frac{1}{2}T$, попарно, после чего получим

$$A_m \cdot \pi = \int_{\omega t = 0}^{\omega t = \pi} \left\{ f(t) \sin(m\omega t) + f\left(t + \frac{1}{2}T\right) \sin\left[m\omega\left(t + \frac{1}{2}T\right)\right] \right\} d(\omega t).$$

Интегрирование теперь производим между пределами $\omega t = 0$ и $\omega t = \pi$, так как все бесконечно малые слагаемые второй половины периода, от $\omega t = \pi$ до $\omega t = 2\pi$, уже сами собой вошли в суммирование под знаком интеграла в виде второго члена в фигурных скобках; если бы мы не изменили пределов интегрирования, а оставили бы их старыми, нужно было бы перед интегралом поставить множителем $\frac{1}{2}$, чтобы не нарушить равенства.

В последнем выражении вынесем $f(t)$ за фигурные скобки, пользуясь соотношением (Q), тогда получим

$$A_m \cdot \pi = \int_{\omega t = 0}^{\omega t = \pi} f(t) \left\{ \sin(m\omega t) - \sin\left[m\omega\left(t + \frac{1}{2}T\right)\right] \right\} d(\omega t).$$

Раскрывая прямоугольные скобки под знаком синуса и помня, что $\frac{1}{2}\omega T = \pi$, получаем

$$A_m \cdot \pi = \int_{\omega t = 0}^{\omega t = \pi} f(t) \left\{ \sin(m\omega t) - \sin(m\omega t) \cos(m\pi) - \cos(m\omega t) \sin(m\pi) \right\} d(\omega t);$$

$\sin(m\pi) = 0$ для всякого целого m ; далее, для m четного имеем $\cos(m\pi) = +1$; выражение в скобках под интегралом обращается при этом в нуль, следовательно, и A_m для m четного равны нулю; сделав аналогичные подстановки и преобразования (P), убедимся, что B_m для m четного тоже равны нулю; следовательно, составляющие четных порядков не могут иметься (выражаясь математически: их амплитуды равны нулю), если кривая симметрична относительно оси абсцисс.

Выразим аналитически условие симметрии относительно точки перехода функции через нуль. Эта симметрия дает равенство $cd = -hg$ (фиг. 2); полагая $Os =$

$\Rightarrow t$, имеем $Ac = Ah$, $hB = Oc = t$, и $Oh = OB - hB = T - t$; поэтому условие означенной симметрии можно аналитически выразить так:

$$f(t) = -f(T - t). \quad (R)$$

Подставим это в уравнение (P) и сделаем преобразования, аналогичные предыдущему:

$$B_m \cdot \pi = \int_{\omega t = 0}^{\omega t = \pi} \left\{ f(t) \cos(m\omega t) + f(T - t) \cos[m\omega(T - t)] \right\} d(\omega t).$$

Так как

$$\cos[m\omega(T - t)] = \cos(m\omega T) \cos(m\omega t) + \sin(m\omega T) \sin(m\omega t) = + \cos(m\omega t)$$

для всякого целого m , ибо $\omega T = 2\pi$, то

$$B_m \cdot \pi = \int_{\omega t = 0}^{\omega t = \pi} [f(t) + f(T - t)] \cos(m\omega t) \cdot d(\omega t) = 0,$$

так как выражение в квадратных скобках под интегралом для всякого момента t согласно соотношению (R) равно нулю.

Подставив уравнение (R) в уравнение (N) и сделав преобразования, ничего нового не найдем.

Таким образом при симметрии относительно точки перехода функции через нуль косинусоиды в число составляющих входить не могут.

Во многих случаях амплитуды составляющих убывают с ростом порядка составляющей в разных случаях по разному закону. Далее мы встретим случаи, например, в кривой силы тока при включении емкости в цепь, когда амплитуды составляющих могут и расти с ростом порядка составляющей, что, вообще говоря, всегда представляется нежелательным и вызывает различные осложнения при работе цепи переменного тока.

Представить кривую в виде ряда (M) с известными уже коэффициентами — значит дать анализ ее.

Полученные экспериментально, например, с помощью осциллографа, кривые переменного тока не могут быть выражены аналитически даже по частям, как это было возможно в только что сделанном примере, вследствие их эмпирического происхождения: поэтому анализировать их посредством интегрирования левых частей уравнений (N) и (P) нельзя. В этих случаях приходится прибегать к другим способам определения коэффициентов ряда (M): или к арифметическому анализу путем замены интегрирования суммированием достаточного количества членов вида

$$y \cdot \sin(m\omega t)$$

и деления суммы уже не на π , как это следовало бы из формул (N) и (P), а на число слагаемых, или к чисто графическим методам, один из которых описан в § 91, или, наконец, к особым приборам — анализаторам*.

Остановимся еще на одном формальном преобразовании, которому можно подвергнуть ряд (M). Соединим попарно члены одинаковых порядков, синусы и косинусы, и преобразуем эти двучлены в одночлены, пользуясь тригонометрическими функциями. Например, возьмем двучлен

$$A_m \sin(m\omega t) + B_m \cos(m\omega t),$$

умножим его и разделим на

$$\sqrt{A_m^2 + B_m^2}.$$

* Описание этих способов читатель найдет в русском переводе (в дополнительной статье) книги Липкера, Электротехнические измерения, изд. Макиз, 1927.

получим

$$\sqrt{A_m^2 + B_m^2} \left[\frac{A_m}{\sqrt{A_m^2 + B_m^2}} \sin(m\omega t) + \frac{B_m}{\sqrt{A_m^2 + B_m^2}} \cos(m\omega t) \right].$$

Затем введем вспомогательный угол α_m такой, что

$$\frac{B_m}{\sqrt{A_m^2 + B_m^2}} = \sin \alpha_m$$

и

$$\frac{A_m}{\sqrt{A_m^2 + B_m^2}} = \cos \alpha_m, \quad (S)$$

или, что по существу то же самое,

$$\operatorname{tg} \alpha_m = \frac{B_m}{A_m}. \quad (T)$$

Тогда наш двучлен представится так:

$$\begin{aligned} \sqrt{A_m^2 + B_m^2} [\cos \alpha_m \sin(m\omega t) + \sin \alpha_m \cos(m\omega t)] = \\ = \sqrt{A_m^2 + B_m^2} \sin(m\omega t + \alpha_m). \end{aligned} \quad (U)$$

Положим

$$\sqrt{A_m^2 + B_m^2} = F_m,$$

и тогда ряд (M) можем представить в такой форме:

$$y = F_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + F_2 \sin(2\omega t + \alpha_2) + F_3 \sin(3\omega t + \alpha_3) + \dots \quad (Y)$$

В дальнейшем такая форма разложения периодической функции нам будет очень полезна.

Очевидно, что в разложении (Y) все углы α_m зависят от момента начала отсчета времени. Перенеся его, можно сделать $\alpha_1 = 0$. Это означает, что B_m и A_m по формуле (T) могут быть различны при разном выборе этого момента, а постоянна только величина

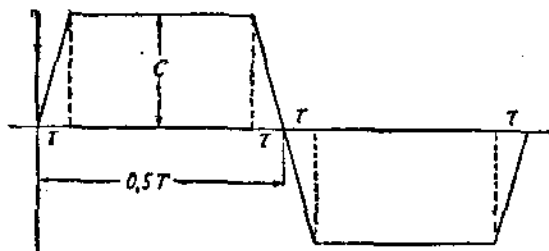
$$F_m = \sqrt{A_m^2 + B_m^2}.$$

Таким образом разложение (M) может быть произведено бесконечно большим количеством вариантов в зависимости от выбора момента начала отсчета времени.

§ 89. Разложение кривых трапециoidalной, прямоугольной и треугольной форм

Обратимся теперь к одному примеру вычисления коэффициентов в ряде Фурье для случая, когда кривая может быть хотя бы по частям выражена аналитически.

Пусть функция $y = f(t)$ представлена графически равнобокой трапецией (фиг. 165). В течение времени τ функция растет, в течение времени $\frac{1}{2}T - 2\tau$ — остается равной постоянной величине C , затем в течение времени τ — убывает до нуля и т. д. Так как кривая обладает обоими видами симметрии, то ряд Фурье должен содержать только синусы нечетных порядков. Интеграл (88, N) разобьем на шесть частей, от 0 до τ , от τ



Фиг. 165.

до $\frac{1}{2} T - \tau$ и от $\frac{1}{2} T - \tau$ до $\frac{1}{2} T$ и т. д., причем достаточно вычислить первые три и сумму их удвоить или приравнять $\frac{1}{2} A_m \cdot \pi$.

Для первой и третьей части имеем

$$f(t) = f\left(\frac{1}{2} T - t\right) \quad (\alpha)$$

и далее

$$\sin\left[m\omega\left(\frac{1}{2} T - t\right)\right] = \sin(m\pi - m\omega t) = -\sin(m\omega t) \cos(m\pi) = +\sin(m\omega t), \quad (\beta)$$

так как m нечетное и $\cos(m\pi) = -1$.

Таким образом интегралы вдоль первой части и вдоль третьей будут равны вследствие (α) и (β):

$$\int_0^{\frac{1}{2} T} f(t) \cdot \sin(m\omega t) \cdot d(\omega t) = \int_{\frac{1}{2} T - \tau}^{\frac{1}{2} T} f\left(\frac{1}{2} T - t\right) \sin\left[m\omega\left(\frac{1}{2} T - t\right)\right] \cdot d(\omega t).$$

Поэтому вместо (88, N) имеем

$$\frac{1}{2} A_m \pi = 2 \int_0^{\tau} f(t) \sin(m\omega t) \cdot d(\omega t) + \int_{\frac{1}{2} T - \tau}^{\frac{1}{2} T} f(t) \sin(m\omega t) \cdot d(\omega t). \quad (\alpha)$$

В первой части функция растет пропорционально времени:

$$f(t): C = t:\tau, \quad (\beta)$$

и поэтому, подставляя из (β), получаем

$$\int_0^{\tau} f(t) \sin(m\omega t) \cdot d(\omega t) = \frac{C}{\tau} \int_0^{\tau} t \sin(m\omega t) \cdot d(\omega t) = \frac{C}{\tau} \left[-\frac{\tau \cdot \cos(m\omega \tau)}{m} + \frac{\sin(m\omega \tau)}{m^2 \omega} \right]. \quad (\gamma)$$

Во второй части функция постоянна, и потому второй интеграл в (α) равен

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2} T - \tau}^{\frac{1}{2} T} C \sin(m\omega t) \cdot d(\omega t) &= -\frac{C}{m} \left\{ \cos\left[m\omega\left(\frac{1}{2} T - t\right)\right] - \cos(m\omega \tau) \right\} = \\ &= -\frac{C}{m} \left\{ \cos(m\pi - m\omega \tau) - \cos(m\omega \tau) \right\} = \frac{2C}{m} \cos(m\omega \tau), \end{aligned} \quad (\delta)$$

так как $\sin(m\pi) = 0$ и $\cos(m\pi) = -1$, ибо m нечетное.

Удвоив выражение (γ) и сложив с (δ), получим правую часть для (α):

$$\frac{1}{2} A_m \pi = -\frac{2C}{m} \cos(m\omega \tau) + \frac{2C}{\tau m^2 \omega} \sin(m\omega \tau) + \frac{2C}{m} \cos(m\omega \tau),$$

откуда

$$A_m = \frac{4C \sin(m\omega \tau)}{m^2 \omega \pi}. \quad (\epsilon)$$

Подставляя сюда вместо m нечетные числа, начиная с единицы, мы и вычислим все A_m . Конечно, для вычисления нужно знать еще и величину τ ; пусть, например, $\tau = \frac{1}{6} T$,

тогда $\{m\omega t\}$ приобретает для различных m величины $\frac{1}{3}\pi$ ($m=1$), π ($m=3$), $\frac{5}{3}\pi$ ($m=5$) и т. д.; $\omega t = \frac{1}{3}\pi$; вычислив синусы и затем все A_m , мы получим ряд

$$y = 6 \frac{\sqrt{3} \cdot C}{\pi^2} \left[\sin(\omega t) - \frac{1}{25} \sin(5\omega t) + \frac{1}{49} \sin(7\omega t) - \frac{1}{121} \sin(11\omega t) + \dots \right]. \quad (f)$$

Если $\tau = \frac{1}{4}T$, то трапеция превращается в равнобедренный треугольник с высотой C , при этом $\omega t = \frac{1}{2}\pi$ и

$$A_m = \frac{8C \sin\left(\frac{1}{2}m\pi\right)}{m^2\pi^2},$$

и далее

$$y = \frac{8C}{\pi^2} \left[\sin(\omega t) - \frac{1}{9} \sin(3\omega t) + \frac{1}{25} \sin(5\omega t) - \dots \right]. \quad (g)$$

Наконец при $\tau = 0$ трапеция превращается в прямоугольник; при этом

$$\frac{\sin(m\omega t)}{m\omega t} = 1$$

и

$$A_m = \frac{4C}{m\pi},$$

и ряд будет таков:

$$y = \frac{4C}{\pi} \left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots \right]. \quad (h)$$

Сравнивая ряды (f), (g) и (h), видим, что ряд (f) не содержит синусовы третьего порядка (и вообще кратного трем), и поэтому трапеция с $\tau = \frac{T}{6}$ ближе к чистой синусоиде, чем треугольник или прямоугольник или какова-нибудь другая трапеция, исключая трапецию с $\tau = \frac{T}{3}$.

Читателю предлагается вычислить ряд для $\tau = \frac{T}{3}$ и сравнить амплитуды его членов с амплитудами членов ряда (f).

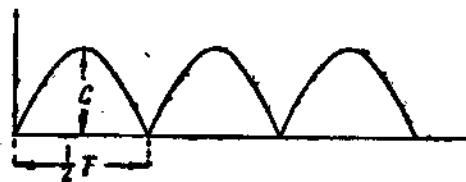
§ 90. Разложение коммутированного синусоидального тока

На фиг. 166 дана кривая, представляющая коммутированную синусоидальную кривую; такова, например, будет кривая напряжения, выпрямленного каким-нибудь выпрямителем.

Выразить ее аналитически можно, очевидно, только по частям, именно

$$y = C \sin(\omega t) \text{ от } t=0 \text{ до } t=\frac{T}{2},$$

$$y = -C \sin(\omega t) \text{ от } t=\frac{T}{2} \text{ до } t=T.$$



Фиг. 166.

Вычислим коэффициенты A_m и B_m на основании формул интегрального исчисления:

$$\int (\sin mx) \sin(nx) dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + C',$$

$$\int \sin(mx) \cos(nx) dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C'',$$

$$A_m = \frac{C}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \sin(\omega t) \sin(m\omega t) d(\omega t) - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(\omega t) \sin(m\omega t) d(\omega t) \right].$$

Каждый из этих двух интегралов дает неопределенный интеграл:

$$\frac{\sin(1-m)\omega t}{2(1-m)} - \frac{\sin(1+m)\omega t}{2(1+m)}.$$

Очевидно, что при подстановке пределов 0, π и 2π получаем для этого интеграла величину 0. Итак, любое

$$A_m = 0$$

и синусоиды в ряд не войдут.

$$B_m = \frac{C}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \sin(\omega t) \cos(m\omega t) d(\omega t) - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(\omega t) \cos(m\omega t) d(\omega t) \right].$$

Неопределенный интеграл здесь будет

$$-\frac{\cos(1+m)\omega t}{2(1+m)} - \frac{\cos(1-m)\omega t}{2(1-m)}. \quad (M)$$

При подстановке пределов результат зависит от того, четное или нечетное число m .

Если m четное, то будем иметь при $\omega t = \pi$ величину выражения (M) такую:

$$+\frac{1}{2(m+1)} - \frac{1}{2(m-1)}, \quad (N)$$

а при

$$\begin{aligned} &\omega t = 0 \text{ или } 2\pi \\ &-\frac{1}{2(m+1)} + \frac{1}{2(m-1)}. \end{aligned} \quad (P)$$

Величины (N) и (P) входят в выражение B_m дважды; поэтому удваивая (N) и вычитая удвоенное (P), получаем

$$B_m = \frac{C}{\pi} \left(\frac{2}{m+1} - \frac{2}{m-1} \right),$$

или

$$B_m = -\frac{4C}{\pi(m-1)(m+1)}$$

для m четного.

Когда же m нечетное, то при $\omega t = \pi$ получим под знаком косинуса целое число 2π или 0 (при $m=1$) и вместо (N) будем иметь

$$-\frac{1}{2(m+1)} + \frac{1}{2(m-1)}$$

и то же самое при $\omega t = 0$ и $\omega t = 2\pi$; поэтому в результате квадратные скобки выражения B_m дадут нуль.

Еще нужно ввести член A_0 , который, очевидно, равен среднему значению синусоидальной величины за полпериода:

$$A_0 = \frac{2}{\pi} C.$$

Таким образом окончательно, давая m только четные значения,

$$y = \frac{2C}{\pi} \left\{ 1 - \frac{2 \cos 2x}{1 \cdot 3} - \frac{2 \cos 4x}{3 \cdot 5} - \frac{2 \cos 6x}{5 \cdot 7} - \dots \right\}.$$

§ 91. Графический метод анализа кривых

Выведем некоторые соотношения между мгновенными значениями и суммами определенного числа их.

Возьмем несколько, например n , мгновенных значений синусоидальной величины, отделенных друг от друга во времени промежутком в $\frac{m}{n} T$, где m и n — целые числа, и сложим их, обозначив сумму через s :

$$s = A \sin(\omega t) + A \sin\left[\omega\left(t + \frac{m}{n} T\right)\right] + A \sin\left[\omega\left(t + 2 \frac{m}{n} T\right)\right] + \dots + \\ + A \sin\left[\omega\left(t + (n-1) \cdot \frac{m}{n} T\right)\right]$$

или символически

$$s = A \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left[\omega\left(t + k \frac{m}{n} T\right)\right].$$

Здесь может быть два случая. Первый случай, когда $\frac{m}{n} < 1$, — рассмотрим его.

Все члены суммы s можно рассматривать как проекции n векторов, сдвинутых в фазе на $\frac{m}{n} T$ друг относительно друга. Множитель, поворачивающий один вектор в положение другого, опережающего его, выразится как

$$e^{j \frac{2\pi m}{n}},$$

Геометрическая сумма n таких векторов равна нулю, т. е. многоугольник из них замыкается. Докажем это.

Эта геометрическая сумма, — обозначим ее через большое S , — выражается так:

$$S = A \left[1 + e^{j \frac{2\pi m}{n}} + e^{j 2 \frac{2\pi m}{n}} + e^{j 3 \frac{2\pi m}{n}} + \dots + e^{j (n-1) \frac{2\pi m}{n}} \right].$$

Выражение в скобках представляет сумму n членов геометрической прогрессии; эта сумма равна

$$\frac{e^{j (n-1) \frac{2\pi m}{n}} \cdot e^{j \frac{2\pi m}{n}} - 1}{e^{j \frac{2\pi m}{n}} - 1} = 0,$$

так как

$$e^{j 2\pi m} = 1.$$

Итак:

$$S = 0,$$

а потому равно нулю и s , мгновенное значение S или проекция его на линию времени:

$$s = A \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left[\omega\left(t + k \frac{m}{n} T\right)\right] = 0, \quad (a)$$

если $\frac{m}{n} < 1$.

Перейдем к тому случаю, когда $\frac{m}{n}$ равно целому числу. Тогда

$$\sin \left[\omega \left(t + k \frac{m}{n} T \right) \right] = \sin \omega t$$

и

$$s = nA \sin(\omega t). \quad (3)$$

Очевидно, что повернув все векторы навстречу линии времени на угол $\frac{\pi}{2}$, мы не изменим по существу соотношений (а), а потому можем написать, взяв для общности другую амплитуду:

$$s' = B \sum_{k=0}^{n-1} \cos \left[\omega \left(t + k \frac{m}{n} T \right) \right] = 0, \quad (a')$$

если $\frac{m}{n} < 1$ и

$$s' = nB \cos(\omega t), \quad (b')$$

когда $\frac{m}{n}$ равно целому числу.

В выражениях (3) и (3') величины $A \sin(\omega t)$ и $B \cos(\omega t)$ суть первые ординаты в ряду суммирующихся, иначе — начальные ординаты.

Соотношения (а) и (3) и положены в основу одного из самых простых графических методов анализа кривых — метода Фишер-Хиннена.

Обратимся к случаю кривых переменного тока, наиболее важному, именно, когда нет четных составляющих и постоянной составляющей, так что

$$y = A_1 \sin(\omega t) + B_1 \cos(\omega t) + A_3 \sin(3\omega t) + B_3 \cos(3\omega t) + \dots + A_{2k+1} \sin[(2k+1)\omega t] + \dots \quad (y)$$

На фиг. 167 изображена такая кривая, причем взят некоторый произвольный момент за начало O отсчета времени.

Если мы в формуле (y) положим $t=0$, то получим ординату $y=s_0$ в точке O ; при этом в правой части все синусы обратятся в нули, а косинусы в $+1$, и мы будем иметь

$$s_0 = B_1 + B_3 + \dots + B_{2k+1} + \dots; \quad (1)$$

таким образом эта начальная ордината дает нам сумму амплитуд всех косинусов.

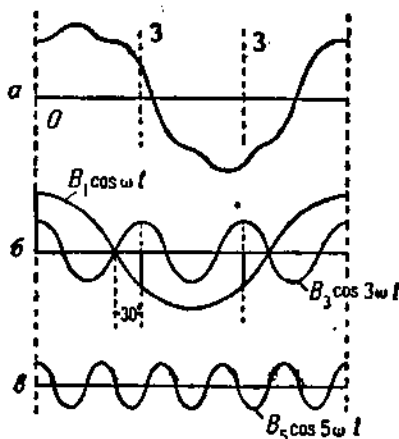
Теперь разделим основание кривой, т. е. длину, представляющую полный период T , на три равные части; построим ординаты в этих точках и сложим их, принимая во внимание их знаки; обозначим сумму через s_3 .

Разберем, что войдет в эту сумму, как в ней будут участвовать составляющие различных порядков.

Для синусоиды 1-го порядка в формуле (а) величина $\frac{m}{n}$ равна $\frac{1}{3}$, так как взят один период

($m=1$) и разделен на $n=3$ части. Поэтому алгеб-

раическая сумма ординат синусоиды 1-го порядка дает по (а) величину 0. Это, впрочем, ясно и из элементарных соображений: первая ордината равна нулю, а две остальные равны и по знаку противоположны, как $\sin 120^\circ$ и $\sin 240^\circ$. Далее, для синусоиды 3-го порядка $\frac{m}{n}$ равно 1, так как взят один период ($m=3$) и разделен на $n=3$ части. Поэтому алгеб-



Фиг. 167.

сина 5-го, 7-го, 11-го и т. д. порядков число $\frac{m}{n}$ будет хотя и больше единицы $\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{11}{3}\right)$, но дробным, так что, отделив целое число окружностей (или 2π или T) под знаком синуса в формуле (а), мы получим остаточный множитель $\frac{m'}{n}$ при kT , меньшем единицы, так что сумма s всегда будет равна 0.

Для синусов порядков 3-го, 9-го, 15-го и т. д., кратных трем, $\frac{m}{n}$ будет целым числом (1, 3, 5, ...), так что результат будет получаться по формуле (β), т. е. алгебраическая сумма ординат этих синусов даст трехкратную ($n=3$) начальную ординату; эти же ординаты для всех синусов равны нулю, поэтому и для этих порядков s равно нулю. Таким образом в сумме s_3 синусов не войдут совсем.

Обращаясь к косинусоидам, мы, повторяя предыдущие рассуждения, находим, что только косинусоиды порядков 3-го и кратных трем дадут в сумме по формуле (β) трехкратную начальную ординату; она для косинусоиды любого порядка равна амплитуде, поэтому окончательно для суммы всех косинусов

$$s_3 = 3(B_3 + B_9 + B_{15} + \dots). \quad (II)$$

Разделим теперь основание кривой на пять равных частей и сумму ординат в соответствующих точках обозначим через s_5 .

Рассуждения относительно синусов остаются прежними, с той разницей, что формулу (β) надо будет применить к синусоиде не 3-го, а 5-го порядка. Синусоиды не войдут в s_5 .

Косинусоиды войдут только порядков 5-го и кратных пяти и по формуле (β') дадут пятикратную сумму их амплитуд, так что

$$s_5 = 5(B_5 + B_{15} + B_{25} + \dots). \quad (III)$$

Аналогично, разделив на 7, 9 и 11 частей, получим суммы ординат, равные

$$s_7 = 7(B_7 + B_{21} + \dots), \quad (IV)$$

$$s_9 = 9(B_9 + B_{27} + \dots), \quad (V)$$

$$s_{11} = 11(B_{11} + B_{33} + \dots). \quad (VI)$$

Остановившись, например, на 11-м порядке при разложении кривой, мы будем иметь шесть уравнений с шестью неизвестными: B_1, B_3, B_5, B_7, B_9 и B_{11} , причем из (III) имеем

$$B_5 = \frac{s_5}{5},$$

из (IV)

$$B_7 = \frac{s_7}{7},$$

из (V) и (VI)

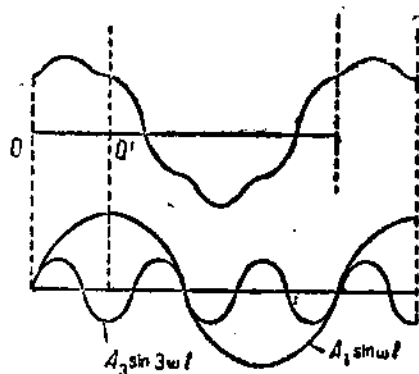
$$B_9 = \frac{s_9}{9} \text{ и } B_{11} = \frac{s_{11}}{11},$$

из (II)

$$B_3 + B_9 = \frac{s_3}{3}.$$

Вычитая отсюда B_0 , находим B_3 , и наконец, вычитая сумму найденных B_k из (1), найдем B_1 .

Чтобы определить амплитуды синусоид, передвинем начало координат из



Фиг. 168.

O в O' на четверть периода вперед (фиг. 168). При таком новом отсчете времени все синусоиды станут косинусоидами, хотя не все они будут находиться в одной и той же фазе, именно в начале координат O' будем иметь для 1-го, 5-го, 9-го и т. д. порядков положительные амплитуды (ибо синусы углов $\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2}, 9\frac{\pi}{2} \dots$ положительны) и для порядков 3-го, 7-го, 11-го — отрицательные амплитуды (синусы углов $3\frac{\pi}{2}, 7\frac{\pi}{2}, 11\frac{\pi}{2} \dots$ отрицательны); таким образом для $t' = 0$ для начала координат получим

$$s'_0 = A_1 - A_3 + A_5 - A_7 + A_9 + \dots$$

Разделив на три части основание кривой, начиная с нового начала координат O' , получим

$$s'_3 = 3(-A_3 + A_9 - A_{15} + \dots).$$

Разделив на 5, 7, 9 и 11 частей, получим совершенно аналогично:

$$s'_5 = 5(A_5 - A_{15} + \dots),$$

$$s'_7 = 7(-A_7 + A_{21} - \dots),$$

$$s'_9 = 9(A_9 - \dots),$$

$$s'_{11} = 11(-A_{11} + \dots).$$

Пример 54. На фиг. 169 дана кривая, которую надо анализировать.

На чертеже проведены все необходимые ординаты и получено:

$$s_0 = 36; s_3 = 36 + 60,5 - 68,9 = 27,6;$$

$$s_5 = 36 + 67,3 + 48 - 61 - 59,8 = 30,5;$$

$$s_7 = 36 + 68,5 + 59,9 + 29 - 53 - 65,4 - 58,5 = 16,5;$$

$$s_9 = 36 + 63,5 + 64,5 + 60,5 + 12,5 - 50 - (8,9 - 59,8 - 51,5) = 6,8;$$

$$s_{11} = 36 + 58,7 + 68,5 + 60 + 57,5 - 1,5 - 48,2 - 63 - 63,8 - 60,2 - 43,5 = -4,5.$$

Отсюда

$$B_{11} = \frac{s_{11}}{11} = -0,41; B_9 = \frac{s_9}{9} = 0,76; B_7 = \frac{s_7}{7} = 2,36;$$

$$B_5 = \frac{s_5}{5} = 6,1; B_3 = \frac{s_3}{3} - B_9 = 9,2 - 0,76 = 8,44;$$

$$B_1 = 36 - 8,44 - 6,1 - 2,36 - 0,76 + 0,41 = 18,75.$$

Передвинем начало координат O (фиг. 170).

$$s'_0 = 61,1; s'_3 = 61,1 - 55,2 - 39,0 = -34,1;$$

$$s'_5 = 61,1 + 5,6 - 68,6 + 59,4 + 49,0 = -12,3;$$

$$s'_7 = 61,1 + 51 - 47,0 - 68,5 - 60,5 + 12 + 62,9 = 11,0;$$

$$s'_9 = 61,1 + 58 - 18,1 - 56,2 - 67,8 - 60,0 - 39,0 + 45,3 + 68,0 = -8,7;$$

$$s'_{11} = 61,1 + 60,2 + 26,8 - 44,2 - 63,9 - 66,8 - 59,7 - 52,4 + 22,5 + 52,5 + 68,9 = 5;$$

откуда

$$A_{11} = -\frac{s'_{11}}{11} = -\frac{5}{11} = -0,45; \quad A_9 = \frac{s'_9}{9} = -0,97;$$

$$A_7 = -\frac{s'_7}{7} = -1,57; \quad A_5 = \frac{s'_5}{5} = -2,46; \quad A_3 = -\frac{s'_3}{3} + A_2 = \frac{34,1}{3} - 0,97 = 10,4;$$

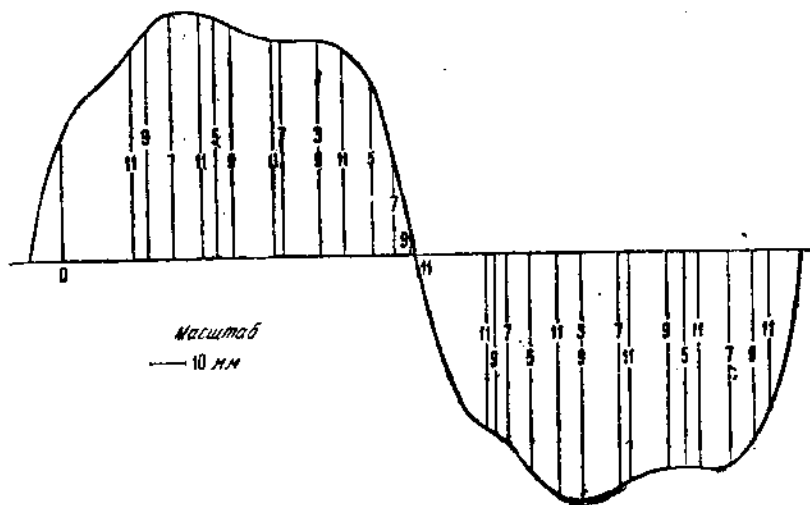
$$A_1 = 72,91.$$

Таким образом данная кривая может быть представлена аналитически следующим рядом:

$$y = 72,91 \sin(\omega t) + 18,75 \cos(\omega t) + 10,4 \sin(3\omega t) +$$

$$+ 8,44 \cos(3\omega t) - 2,46 \sin(5\omega t) + 6,1 \cos(5\omega t) - 1,57 \sin(7\omega t) +$$

$$+ 2,36 \cos(7\omega t) - 0,97 \sin(9\omega t) + 0,76 \cos(9\omega t) - 0,45 \sin(11\omega t) - 0,41 \cos(11\omega t).$$



Фиг. 160.

Предлагаем читателю переместить начало координат O в начало кривой, т. е. в точку прохождения ее через нуль, произвести снова разложение, затем привести оба разложения к форме (88.Y) и сравнить результаты.

§ 92. Сложная форма кривых э. д. с. и силы тока

Пусть э. д. с. разложена в ряд Фурье, причем члены четных порядков не будем писать, считая кривую э. д. с. симметричной относительно оси абсцисс:

$$e = E_{1m} \cdot \sin(\omega t + \alpha_1) + E_{3m} \cdot \sin(3\omega t + \alpha_3) + E_{5m} \cdot \sin(5\omega t + \alpha_5) + \dots \quad (1)$$

Действие такой э. д. с. в цепи равносильно с одновременным действием всех этих составляющих э. д. с., мгновенные значения которых мы будем обозначать буквой e со значком 1, 3, 5, ..., равным порядку составляющей.

Поэтому, если цепь представляет только активное сопротивление R , то сила тока в цепи будет

$$i = \frac{e}{R} = \frac{e_1}{R} + \frac{e_3}{R} + \frac{e_5}{R} + \dots = \frac{E_{1m}}{R} \cdot \sin(\omega t + \alpha_1) +$$

$$+ \frac{E_{3m}}{R} \cdot \sin(3\omega t + \alpha_3) + \dots = I_{1m} \cdot \sin(\omega t + \alpha_1) +$$

$$+ I_{3m} \cdot \sin(3\omega t + \alpha_3) + \dots,$$

где I_{1m} , I_{3m} , I_{nm} суть амплитуды составляющих силы тока различных порядков — 1-го, 3-го, n -го и т. д.

Если в цепи есть индуктивность, то появляется э. д. с. самоиндукции, каждая с частотой соответственно одному из токов; тогда

$$i = \frac{e_1 + e_{c1}}{R} + \frac{e_3 + e_{c3}}{R} + \frac{e_5 + e_{c5}}{R} + \dots$$

Здесь мгновенные значения составляющих силы тока суть:

$$i_1 = \frac{e_1 + e_{c1}}{R}, \quad i_3 = \frac{e_3 + e_{c3}}{R}, \quad i_5 = \frac{e_5 + e_{c5}}{R}, \dots$$

откуда мы получаем формулы для составляющих каждого порядка (8,1):

$$e_1 = i_1 \cdot R - e_{c1}, \quad e_3 = i_3 \cdot R - e_{c3}, \quad e_5 = i_5 \cdot R - e_{c5}, \dots$$

Все дальнейшие выводы из них таковы же, как и из формулы (8,1), и в результате мы получим для составляющей любого порядка n формулу, выражающую закон Ома для нее:

$$I_{nm} = \frac{E_{nm}}{\sqrt{R^2 + (\omega_n L)^2}}.$$

Принимая во внимание соотношение

$$\omega_n = n \cdot \omega,$$

мы перепишем предыдущую формулу так:

$$I_{nm} = \frac{E_{nm}}{\sqrt{R^2 + (n\omega L)^2}}. \quad (II)$$

Если в цепи есть и емкость, то для любой составляющей получим

$$I_{nm} = \frac{E_{nm}}{\sqrt{R^2 + \left(n\omega L - \frac{1}{n\omega C}\right)^2}}. \quad (III)$$

Сила тока I_n , составляющая силы тока n -го порядка, сдвинута в фазе относительно своей э. д. с. E_n , составляющей э. д. с. n -го порядка, на угол φ_n , который определяется из соотношения

$$\varphi_n = \arctg \frac{n\omega L - \frac{1}{n\omega C}}{R}. \quad (IV)$$

Вывод всех этих формул тождествен с выводом закона Ома в гл. II и далее.

Нужно теперь же заметить, что на одной векторной диаграмме не могут фигурировать величины, относящиеся к составляющим разных порядков, так как для каждого порядка синусоидальных величин продолжительность периода своя особая, в три, пять, n раз меньшая основного; следовательно, у нас векторных диаграмм должно быть столько (для каждого рассуждения о цепи), сколько различных порядков имеется составляющих э. д. с., причем на каждой диаграмме линия времени вращается с особой скоростью, в три, пять, n раз быстрее, чем на диаграмме составляющих первого порядка.

Таким образом сила тока теперь выразится рядом

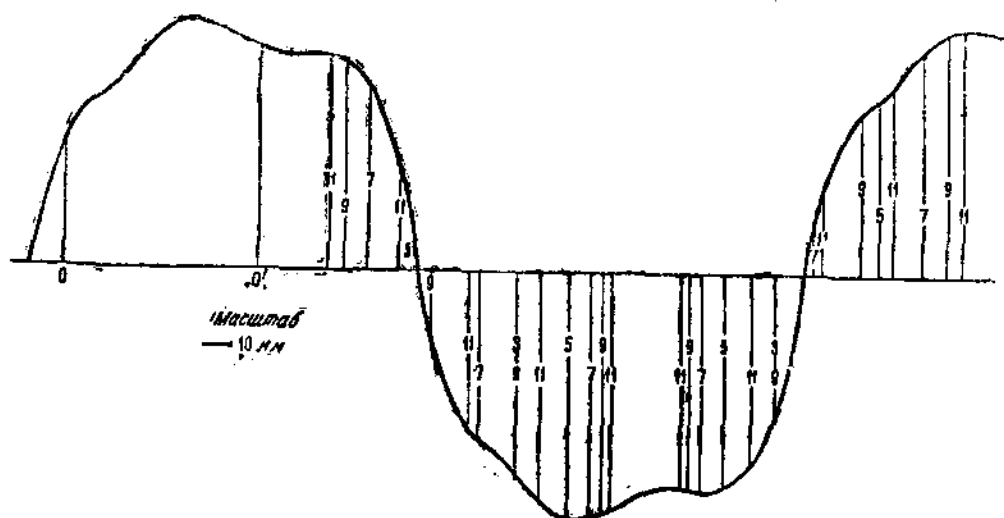
$$i = I_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1 + \varphi_1) + I_{3m} \sin(3\omega t + \alpha_3 + \varphi_3) + \dots + I_{nm} \sin(n\omega t + \alpha_n + \varphi_n) + \dots \quad (V)$$

Понятно, что в формулах (II) и (III) вместо э. д. с. можно поставить напряжения на участках цепи, и тогда R , I и S будут обозначать соответствующие величины на этих участках.

Перейдем теперь к вопросу, какие величины будут измеряться тепловыми амперметром и вольтметром и электродинамическим ваттметром при сложной форме кривых э. д. с. и силы тока.

Средняя мощность, переходящая в тепло в сопротивлении R , равна отношению всей электрической энергии, перешедшей в тепло в течение целого периода, к продолжительности периода:

$$\frac{R}{T} \int_0^T i^2 dt. \quad (A)$$



(Фиг. 170.)

Тепловой амперметр покажет величину I , которая попрежнему будет с этой средней тепловой мощностью связана соотношением

$$I^2 R_a = \frac{R_a}{T} \int_0^T i^2 dt,$$

или

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (B)$$

Средняя мощность в цепи и показание ваттметра выразятся, как и раньше:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T e i dt. \quad (C)$$

Подставим в (B) и (C) вместо e и i их выражения (I) и (V); тогда получим вместо (B)

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k,l} I_{km} I_{lm} \sin(k\omega t + \alpha_k + \varphi_k) \sin(l\omega t + \alpha_l + \varphi_l) dt}, \quad (D)$$

где стоящее под знаком суммы Σ выражение символизирует квадрат ряда (V). Индексам k и l (и множителям при ωt) нужно придать всевозможные имеющиеся в ряду (V) для порядков составляющих значения, например, 1, 3, 5 и т. д.

Вместо (C) мы будем иметь

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k,l} E_{km} I_{lm} \sin(k\omega t + \alpha_k) \sin(l\omega t + \alpha_l + \varphi_l) dt. \quad (E)$$

Выражение под знаком суммы Σ символизирует произведение ряда (I) на ряд (V) при тех же всех возможных значениях k и l .

Таким образом интегралы в (B) и (C) разбиваются на сумму интегралов вида: для (B)

$$\int_0^T I_{km} I_{lm} \sin(k\omega t + \alpha_k + \varphi_k) \sin(l\omega t + \alpha_l + \varphi_l) dt \quad (F)$$

и для (C)

$$\int_0^T E_{km} I_{lm} \sin(k\omega t + \alpha_k) \sin(l\omega t + \alpha_l + \varphi_l) dt, \quad (G)$$

что, ввиду того что E_{km} , I_{lm} и т. д. суть амплитуды, т. е. величины постоянные, сводится к нахождению ряда интегралов вида

$$\int_0^T \sin(k\omega t + \beta_k) \cdot \sin(l\omega t + \delta_l) \cdot dt. \quad (H)$$

Преобразуем подинтегральное выражение, пользуясь известными уже приемом и равенством:

$$\cos y - \cos z = -2 \sin \frac{y+z}{2} \cdot \sin \frac{y-z}{2}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} y &= (k+l)\omega t + \beta_k + \delta_l, \\ z &= (k-l)\omega t + \beta_k - \delta_l, \end{aligned}$$

интеграл (H) теперь преобразуется в

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \left\{ \int_0^T \cos[(k+l)\omega t + \beta_k + \delta_l] dt - \int_0^T \cos[(k-l)\omega t + \right. \\ & \left. + \beta_k - \delta_l] dt \right\} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\sin[(k+l)\omega t + \beta_k + \delta_l]}{(k+l)\omega} - \right. \\ & \left. - \frac{\sin[(k-l)\omega t + \beta_k - \delta_l]}{(k-l)\omega} \right]_0^T. \end{aligned}$$

Выражение в скобках при обоих пределах дает одну и ту же величину, если $k \neq l$, а потому интеграл (H) равен нулю во всех случаях, кроме того, когда $k=l$ и разность значений второго члена в скобках при пределах T и 0 отлична от нуля. Вычислим ее, для чего преобразуем выражение

$$+\frac{1}{2} \left[\frac{\sin[(k-l)\omega t + \beta_k - \delta_l]}{(k-l)\omega} \right]_0^T \quad (K)$$

следующим образом, беря разность значений его при пределах,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin[(k-l)\omega T + \beta_k - \delta_l] - \sin(\beta_k - \delta_l)}{(k-l)\omega} = \\ & = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \cos\left[(k-l)\omega \cdot \frac{T}{2} + \beta_k - \delta_l\right] \cdot \sin\left[(k-l)\omega \cdot \frac{T}{2}\right]}{(k-l)\omega} = \\ & = \frac{T}{2} \cdot \cos\left[(k-l)\omega \cdot \frac{T}{2} + \beta_k - \delta_l\right] \cdot \frac{\sin\left[(k-l)\omega \cdot \frac{T}{2}\right]}{(k-l)\omega \cdot \frac{T}{2}}. \end{aligned}$$

Теперь полагаем $k=l$, причем дробь на конце последнего выражения дает нам единицу по теореме о пределе отношения синуса бесконечно малого угла к этому углу, и все выражение (K) дает

$$\frac{T}{2} \cos(\beta_k - \delta_l) = \frac{T}{2} \cos(\beta_k - \delta_k). \quad (M)$$

Итак, интеграл (H) для тех случаев, когда $k=l$, дает величину (M), для всех остальных случаев он равен нулю. Что означает это условие равенства k и l ? Оно означает, что из интегралов (F) и (G), которые входят в величины I и P , только те не равны нулю, для которых k и l одинаковы, т. е., например,

$$\begin{aligned} & E_{1m} \cdot I_{1m} \int_0^T \sin(\omega t + \alpha_1) \cdot \sin(\omega t + \alpha_1 + \varphi_1) \cdot dt, \\ & I_{1m}^2 \cdot \int_0^T \sin^2(\omega t + \alpha_1 + \varphi_1) \cdot dt, \\ & E_{3m} \cdot I_{3m} \cdot \int_0^T \sin(3\omega t + \alpha_3) \cdot \sin(3\omega t + \alpha_3 + \varphi_3) \cdot dt, \\ & I_{3m}^2 \cdot \int_0^T \sin^2(3\omega t + \alpha_3 + \varphi_3) \cdot dt \end{aligned}$$

и т. д.

Для интегралов (F) при $k=l$ под знаком интеграла стоит квадрат синуса, т. е. в формулах (H) и (M) $\beta_k = \delta_k$ и $\cos(\beta_k - \delta_k) = 1$, а сами интегралы все равны произведению $\frac{T}{2}$ на квадрат амплитуды соответствующего порядка. Поэтому формула (B) превращается в

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \frac{T}{2} (I_{1m}^2 + I_{3m}^2 + \dots + I_{nm}^2 + \dots)} = \\ &= \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + \dots + I_n^2 + \dots} \end{aligned} \quad (VI)$$

после деления квадратов амплитуд на два и введения действующих значений.

Для формулы (C) мы имеем в формулах (G), (H) и (M): $\beta_k = \alpha_k$, $\delta_k = \alpha_k + \varphi_k$ и $\cos(\beta_k - \delta_k) = \cos \varphi_k$, а потому формула (C) принимает вид

$$P = \frac{1}{T} \cdot \frac{T}{2} (E_{1m} \cdot I_{1m} \cos \varphi_1 + E_{3m} \cdot I_{3m} \cos \varphi_3 + \dots + E_{nm} \cdot I_{nm} \cos \varphi_n + \dots),$$

или, произведя тот же переход к действующим значениям,

$$P = E_1 I_1 \cos \varphi_1 + E_3 I_3 \cos \varphi_3 + \dots + E_n I_n \cos \varphi_n + \dots \quad (VII)$$

Следует особенно подчеркнуть, что из вышесказанного и в особенности из формулы (VII) ясно, что составляющая силы тока некоторого порядка или некоторой частоты со всеми составляющими э. д. с. (или напряжения) других порядков или других частот дает среднюю за период мощность, равную нулю, и только с составляющей э. д. с. (или напряжения) той же самой частоты ($k=l$) дает среднюю мощность, величина которой отлична от нуля и определяется, как видим из формулы (M) или из (VII), той же формулой:

$$E_k I_k \cos \varphi_k.$$

Меряя напряжение тепловым вольтметром, мы получим показание U , которое равно произведению действующего значения силы тока через него I на его сопротивление; выражая I формулой (VI), умножая обе ее части на сопротивление и подводя последнее под корень, мы сможем написать, что

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2 + \dots} \quad (VIII)$$

§ 93. Эквивалентный синусоидальный ток

Производить различные расчеты, разлагая силу тока и напряжение на их составляющие и вычисляя мощность по формуле (92, VII), где различные φ_k определяются из формулы (92, IV), представляет много неудобства и сложно; поэтому введено понятие об эквивалентном синусоидальном токе, при котором действующие сила тока и напряжение такие же точно, как и существующего действительно тока сложной формы, т. е., значит, равны I и U [формулы (92, VI) и (92, VIII)], и мощность которого равна в точности мощности существующего тока, т. е. P в формуле (92, VII). Так как произведение U и I в общем случае отличается от P и именно больше его, то введено понятие о коэффициенте мощности, равном $\frac{P}{UI}$ и по аналогии с действительно синусоидальным током, называемым косинусом φ . Итак

$$P = IU \cos \varphi.$$

Таким эквивалентным синусоидальным током заменяют данный ток со сложной формой кривых напряжения и силы тока, с ним ведут расчеты и для него строят векторные диаграммы. Для такого тока применяют и все остальные известные уже нам формулы и соотношения.

Теперь же заметим, что есть много вопросов и задач, где отвлечься таким образом от действительной несинусоидальной формы кривых силы тока и напряжения нельзя, и тогда приходится оперировать с рядами, в которые эти величины можно разложить.

Для характеристики той или иной кривой иногда пользуются понятием о так называемом коэффициенте формы кривой (Formfactor); его определяют как отношение действующего значения к среднему.

Для чистой синусоиды он равен

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11,$$

для прямоугольника — 1 и для треугольника — 1,15.

Построив обычную диаграмму напряжений для эквивалентного тока, будем иметь величину коэффициента мощности

$$\cos \varphi = \frac{I \cdot R}{U}.$$

Подставим вместо I и U их выражения (92, VI) и (92, VIII) и преобразуем полученное:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \sqrt{\frac{(I_1 R)^2 + (I_2 R)^2 + \dots + (I_n R)^2 + \dots}{U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2 + \dots}} = \\ &= \sqrt{\frac{U_1^2 \cos^2 \varphi_1 + U_2^2 \cos^2 \varphi_2 + \dots + U_n^2 \cos^2 \varphi_n + \dots}{U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2 + \dots}}. \end{aligned}$$

Иногда бывает удобна еще следующая формула: так как $\cos \varphi_1 = \frac{I_1 R}{U_1}$, и следовательно, $R = \frac{U_1 \cos \varphi_1}{I_1}$, то, подставляя это выражение в формулу для $\cos \varphi$, получим

$$\cos \varphi = \frac{I U_1}{I_1 U} \cos \varphi_1.$$

В примере 12, § 28, мы считали, что вольтметр, присоединенный к зажимам катушки с ничтожным активным сопротивлением, покажет величину

$$U_L = \omega L I,$$

откуда можно очень просто определить индуктивность катушки, если она нам неизвестна, а известны U_L , I и частота по формуле

$$L = \frac{U_L}{\omega I}. \quad (\alpha)$$

При токе сложной формы последним соотношением пользоваться для определения L нельзя, величина L будет отличаться от правой части этого выражения некоторым множителем, который мы сейчас и определим. Для отдельных составляющих мы имеем:

$$I_1 = \frac{U_1}{\omega L}; \quad I_2 = \frac{U_2}{2\omega L}; \quad \dots \quad I_n = \frac{U_n}{n\omega L}; \quad \dots$$

подставим эти выражения вместо I_k в формулу (92, VI):

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{U_1^2}{(\omega L)^2} + \frac{U_2^2}{9(\omega L)^2} + \dots + \frac{U_n^2}{n^2(\omega L)^2} + \dots} = \\ &= \frac{1}{\omega L} \sqrt{U_1^2 + \frac{1}{9} U_2^2 + \dots + \frac{1}{n^2} U_n^2 + \dots} \end{aligned}$$

Умножим правую часть на U , разделим ее на правую часть формулы (92, VIII), от чего равенство не нарушится, и перенесем местами L и I , так как мы определяем L :

$$L = \frac{U}{\omega I} \sqrt{\frac{U_1^2 + \frac{1}{9} U_3^2 + \dots + \frac{1}{n^2} U_n^2 + \dots}{U_1^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2 + \dots}},$$

или, еще иначе,

$$L = \frac{U}{\omega I} \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{9} \left(\frac{U_3}{U_1}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n^2} \left(\frac{U_n}{U_1}\right)^2 + \dots}{1 + \left(\frac{U_3}{U_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{U_n}{U_1}\right)^2 + \dots}}.$$

Радикал и представляет искомый множитель; смотря по соотношениям между амплитудами высших порядков и 1-го, этот радикал может очень отступать от единицы, и следовательно, определение L по формуле (α) делается ошибочным. Если, например, мы имеем кроме составляющей 1-го порядка еще только составляющую 3-го, все же остальные отсутствуют, причем пусть $U_3 = \frac{1}{3} U_1$, то радикал равен 0,96, т. е., вычисляя L по формуле (α), мы сделаем ошибку в 4%.

Значительно больше будет ошибка, если мы станем определять величину емкости по показаниям вольтметра и амперметра и по формуле

$$I = U\omega C$$

и из нее следующей:

$$C = \frac{I}{U\omega}, \quad (3)$$

где U есть напряжение на конденсаторе. Именно для отдельных составляющих мы опять имеем:

$$I_1 = U_1\omega C, \quad I_3 = U_3\omega C, \quad \dots, \quad I_n = U_n\omega C, \quad \dots$$

и, вставляя в формулу (92, VI), получаем

$$I = \omega C \sqrt{U_1^2 + 9U_3^2 + \dots + n^2 U_n^2 + \dots}.$$

Отсюда определяем C , деля затем правую часть на U и умножая на правую часть формулы (92, VIII):

$$\begin{aligned} C &= \frac{I}{U\omega} \sqrt{\frac{U_1^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2 + \dots}{U_1^2 + 9U_3^2 + \dots + n^2 U_n^2 + \dots}} = \\ &= \frac{I}{U\omega} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{U_3}{U_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{U_n}{U_1}\right)^2 + \dots}{1 + 9\left(\frac{U_3}{U_1}\right)^2 + \dots + n^2 \left(\frac{U_n}{U_1}\right)^2 + \dots}}. \end{aligned}$$

Если мы теперь будем иметь опять только U_1 и U_3 , причем $U_3 = \frac{1}{3} U_1$, то радикал в последнем выражении будет равен 0,75; следовательно, определяя величину емкости из формулы (β), мы сделаем ошибку в 25%. Таким образом определение L по (α) много точнее, чем C по (β).

Эти результаты, между прочим, показывают, что самое применение векторных диаграмм к эквивалентному току очень условно и должно всегда производиться с известной осмотрительностью и что построение даже основного треугольника напряжений при сложной форме кривых тока является лишь приближенным решением.

§ 94. Резонанс для составляющих различных порядков

Далее, следует остановиться на явлениях резонанса.

Так как теперь кроме частоты основной f есть еще частоты $3f, 5f, \dots, nf, \dots$, то и резонанс может наступать при разных L и C , лишь бы выполнялось условие

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Таким образом могут возникнуть явления резонанса для такой составляющей, которая была очень слабо выявлена в кривой э. д. с. или силы тока, пока условия резонанса не выполнялись; при резонансе эта составляющая может выявиться более или менее в опасных формах.

Явление резонанса дает нам средство измерить емкость при помощи переменного тока, если имеется регулируемая индуктивность. Именно, устанавливают такую величину индуктивности, чтобы наступил резонанс напряжений (при последовательном включении емкости и индуктивности) для составляющей 1-го порядка; тогда будет

$$\omega L = \frac{1}{\omega C},$$

откуда определяем C через ω и L ; если L неизвестно, то мы его можем определить из формулы (а) и затем по нему вычислить C , что и будет много точнее, чем определение C по (б).

§ 95. Влияние индуктивности и емкости на форму кривой тока

Нужно заметить, что когда мы говорим о цепи тока сложной формы, то данной и от нас независимой является только форма кривой э. д. с. генератора; формы же кривой силы тока и напряжения на участках зависят от того, что мы в цепь вообще и в эти участки включим. Пусть нам дана э. д. с. с кривой сложной формы. Подключим цепь с ничтожно малым активным сопротивлением, которым пока и пренебрежем, и индуктивностью. Из формулы (92, II) следует, что составляющая силы тока любого n -го порядка определится при этом так:

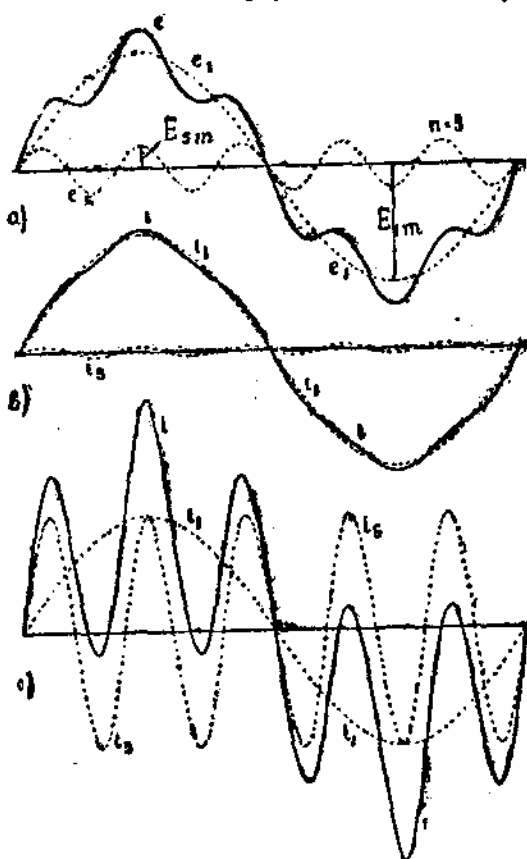
$$I_{nm} = \frac{E_{nm}}{n\omega L}. \quad (A)$$

Отсюда получается, что отношение амплитуды силы тока к амплитуде э. д. с., $I_{nm}:E_{nm} = \frac{1}{n\omega L}$, для различных составляющих различно: оно тем меньше, чем порядок n составляющей выше. Таким образом составляющие высших порядков в кривой силы тока выражены слабее (при индуктивности), чем в кривой э. д. с.; при включении индуктивности кривая силы тока становится ближе к чистой синусоиде, чем кривая э. д. с.

Теперь включим в цепь емкость, а индуктивность выключим. Полагая в формуле (92, III) $R=0$ и $L=0$, получаем, что составляющая любого n -го порядка силы тока определится так:

$$I_{nm} = n\omega C E_{nm}. \quad (B)$$

откуда следует обратное предыдущему: чем выше порядок составляющей, тем больше отношение амплитуды этой составляющей силы тока к амплитуде э. д. с., $E_{1m} : E_{5m} = n\omega C$. Таким образом при включении в цепь емкости кривая силы тока дальше отходит в форме от чистой синусоиды, чем кривая э. д. с.



Фиг. 171.

На фиг. 171, а представлена кривая э. д. с. e , состоящая из синусоид 1-го порядка и 5-го, причем

$$E_{5m} = \frac{1}{5} E_{1m}; \text{ на фиг. 171, б начер-}$$

чены составляющие кривой силы тока i_1 1-го порядка при самоиндукции в цепи, причем масштаб для силы тока для наглядности выбран такой, что отрезки, изображающие на фиг. 171, а E_{1m} и на фиг. 171, б i_{1m} равны; одна и та же синусоида изображает таким образом e_1 и i_1 ; согласно с формулой (А) амплитуда составляющей силы тока 5-го порядка взята в пять раз меньше отрезка, выражающего E_{5m} ; сложением получена кривая i , очень мало отступающая от синусоиды.

На фиг. 171, в при емкости в цепи начерчена та же самая синусоида для i_1 (что не обозначает, что сила тока i_1 в амперах теперь та же самая, что при самоиндукции, так как мы могли масштаб переменить и чертить одну и ту же синусоиду для наглядности) и синусоида i_5 с амплитудой согласно формуле (В), в пять раз большей, чем отрезок E_{5m} на фиг. 171, а. Сложением получена кривая сила тока i , не только далеко отступающая от синусоиды, но и обладающая тем очень интересным свойством,

что она несколько раз в течение периода пересекает ось абсцисс, т. е. сила тока i несколько раз за период делается равной нулю через разные промежутки времени.

Присутствие в цепи активного сопротивления умеряет эти влияния индуктивности и емкости, но качественно явления остаются теми же.

§ 96. Разветвление тока

Все это нам показывает, что формы кривых напряжений на разных участках цепи и сил токов в разных ветвях при разветвлении тока могут очень различаться между собой в зависимости от того, что в эти участки или ветви включено. Это иногда делает построение векторных диаграмм для эквивалентного тока неточным. Таким образом, например, следует прибегать к вычислению, а не к графическому построению при сложении разветвленных токов, когда ветви разным образом влияют на форму кривой тока, особенно, когда одни не содержат емкости, а другие содержат. При точном вычислении здесь нужно проделать сложение разветвленных токов сначала для каждого порядка составляющих, а затем уже переходить к эквивалентному току.

Относительно цепей с разветвлениями тока необходимо иметь в виду еще следующее:

Два или несколько токов с совершенно одинаковыми составляющими высших порядков, т. е. обладающие одинаковой формой, складываясь, могут дать один результирующий ток формы, отступающей от их формы, так как высшие составляющие будут суммироваться при разных для каждого порядка разностях фаз и некоторые могут усилиться, а некоторые ослабиться или дать в сумме даже нуль.

Например, два тока

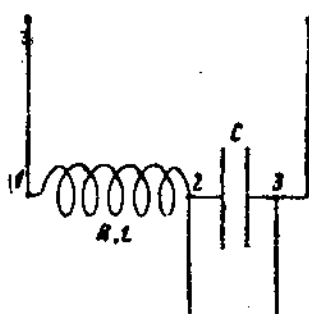
$$I_1 \sin(\omega t) + I_2 \sin(3\omega t)$$

$$I_1 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) + I_2 \sin(3\omega t + \pi)$$

одинаковой формы дадут ток, не содержащий третьей составляющей.

§ 97. Очищение тока

На аналогичных соображениях основано так называемое „очищение“ тока. Предположим, что нам для целей лабораторной измерительной практики необходимо иметь ток, по возможности более близкий к чистому синусоидальному. Тогда мы к источнику его подключаем, как показано на фиг. 172, индуктивность и емкость. При этом, обозначая через $U_{(1,2)n}$ и $U_{(2,3)n}$ напряжения между точками 1 и 2 или 2 и 3 соответственно для составляющей n -го порядка, имеем



Фиг. 172.

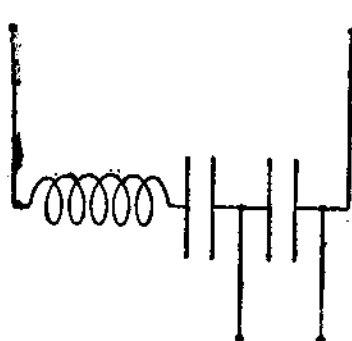
$$U_{(1,2)n} = I \sqrt{R^2 + n^2 \omega^2 L^2},$$

$$U_{(2,3)n} = I \cdot \frac{1}{n \omega C}.$$

Полагая $R = 0$, [получим отношение

$$\frac{U_{(2,3)n}}{U_{(1,2)n}} = \frac{1}{n^2 \omega^2 CL},$$

которое показывает, что составляющие высших порядков выражены в кривой напряжения на ем-



Фиг. 173.

кости слабее в $n^2 \omega^2 CL$ раз, чем в кривой напряжения на индуктивности.

Подключив к зажимам 2 и 3 снова индуктивность и емкость, можем еще более заглушить составляющие высших порядков и продолжать так и дальше, пока не получится ток, форма кривой которого будет для наших целей уже достаточно чистой.

Если кривая первоначального напряжения содержала составляющую постоянного тока A_0 в ряде Фурье, то при вышеизложенных включениях эта составляющая пройдет через подключенные нами индуктивности и появится в окончательном напряжении; поэтому, чтобы избавиться от нее, надо или пропустить ток сначала через трансформатор, а потом его очищать, или воспользоваться схемой фиг. 173.

§ 98. Составляющие высших порядков в трехфазном токе

Остановимся в кратких чертах на том случае, когда при трехфазном токе не выполняется условие, положенное нами в начале главы в основу наших рассуждений, именно условие строгой синусоидальности кривых э. д. с. Пусть эти кривые имеют сложную форму.

Оказывается, что при этом форма кривой напряжения (возьмем случай безиндукционной нагрузки, или холостой ход) будет разная для напряжений фазового и междупазового (при включении фаз генератора звездой).

Прежде всего заметим, что высшие составляющие э. д. с. порядка 3-го, 9-го и вообще $3k$ -го, где k — целое, нечетное число, будут во всех трех обмотках генератора в каждый момент иметь одинаковую величину, т. е. будут находиться в одной и той же фазе во всех трех обмотках, так как разность фаз в одну треть периода трех э. д. с. этих обмоток для упомянутых составляющих представляет или „период“, их собственный, или целое число периодов (для 9-го порядка и т. д.).

Поэтому при соединении фаз генератора звездой, когда э. д. с. одной фазы вычитаются из э. д. с. другой фазы, эти составляющие друг друга компенсируют, дают результирующую, равную нулю, по формуле

$$E_{3k} \sin(3k\omega t + \phi_{3k}) - E_{3k} \sin\left[3k\omega\left(t - \frac{T}{3}\right) + \phi_{3k}\right] = 0.$$

Таким образом в междупазном, или линейном, напряжении не будет составляющих синусоид порядков $3k$, тогда как фазовое напряжение, т. е. напряжение между одним из трех главных проводов и нулевым, будет их иметь.

Отсюда получается следующее соотношение:

Фазовое напряжение генератора равно

$$U_{\phi} = \sqrt{U_{1\phi}^2 + U_{3\phi}^2 + U_{5\phi}^2 + U_{7\phi}^2 + \dots},$$

линейное же при соединении фаз звездой не будет содержать третьей составляющей, но всякая другая составляющая линейного напряжения будет в $\sqrt{3}$ раз больше соответствующей составляющей фазовой, поэтому

$$U_{\lambda} = \sqrt{3} (U_{1\phi}^2 + U_{3\phi}^2 + U_{5\phi}^2 + \dots),$$

откуда следует, что отношение $U_{\lambda} : U_{\phi}$ не равно для этого случая $\sqrt{3}$, а несколько меньше; деля под корнем все члены на $U_{1\phi}^2$, получаем

$$\frac{U_{\lambda}}{U_{\phi}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{U_{3\phi}^2}{U_{1\phi}^2}\right) + \left(\frac{U_{5\phi}^2}{U_{1\phi}^2}\right) + \dots}{1 + \left(\frac{U_{3\phi}}{U_{1\phi}}\right)^2 + \left(\frac{U_{5\phi}}{U_{1\phi}}\right)^2 + \dots}}.$$

Далее, сила тока в нулевом проводе даже и при точно одинаковой нагрузке фаз будет теперь равна не нулю, а сумме всех токов высших составляющих 3-го, 9-го и т. д. порядков (составляющие, например, 9-го порядка для трех „фаз“ генератора будут отличаться друг от друга в фазе на три целых периода и суммироваться поэтому будут арифметически).

В случае соединения „фаз“ генератора треугольником мы будем иметь новое явление. Сумма э. д. с. внутри треугольника теперь уже не будет равной нулю, ибо теперь э. д. с. 3-го порядка будут суммироваться арифметически, как имеющие одну и ту же фазу; то же — э. д. с. 9-го и т. д. порядков, а потому в соединенных треугольником трех обмотках генератора будет течь ток даже и при разомкнутой внешней трехфазной цепи. Для этих э. д. с. генератор при соединении его „фаз“ треугольником явится замкнутым на короткое, и они не будут иметь никакого влияния на напряжение из зажимах генератора.

Если мы разомкнем треугольник, то вольтметром сможем измерить результирующую из этих э. д. с.

Измерение мощности трехфазного тока, например, двумя ваттметрами, остается правильным независимо от формы кривой, как показывает формула (64,3), в которую входят мгновенные значения.

§ 99. Составляющие высших порядков во вращающемся поле

В § 82 было указано, что кривая м. д. с. от обмотки, занимающей несколько пазов на полюс и фазу, имеет форму, показанную на фиг. 143, а кривая поля имеет форму, данную на фиг. 144, — причем ординаты этой кривой в определенной точке дуги пропорциональны мгновенным значениям силы тока. Примем последнюю за чисто синусоидальную.

Теперь на основании формул (88, N) и (88 P) мы кривую фиг. 143 можем разложить в ряд Фурье и, таким образом, узнать все составляющие ее высших порядков. Кривую фиг. 144 надо сначала на какой-нибудь существующей машине получить посредством, например, пропускания постоянного тока по обмотке и измерения магнитной индукции в воздушной прослойке вдоль дуги статора; затем и ее можно, например, методом графического анализа разложить в ряд Фурье. При этом, однако, надо иметь в виду, что при переменном токе кривая поля будет несколько отличаться от кривой поля при постоянном токе вследствие действия токов Фуко в массе железа, которые по закону Ленца будут в общем противодействовать изменениям намагничивающего тока; в конце концов это ведет к тому, что кривая поля становится еще более плавной.

Для общности результатов будем рассматривать n -фазную систему.

Итак, мы разлагаем в ряд Фурье каждое из n пульсирующих полей и исследуем поля, результирующие из полей всех n фаз одного и того же порядка. Обозначим порядок составляющей через k .

Посмотрим на фигуры § 87, в частности, например, на фиг. 162. Из них ясно, что для трехфазной системы сдвиг в пространстве составляющих полей двух соседних фаз составляет $\frac{2\pi}{3}$ для 1-го порядка, 2π — для 3-го, $\frac{5 \cdot 2\pi}{3}$ — для 5-го и т. д.,

или в общем случае n -фазной системы $\frac{2\pi}{n}$ — для 1-го порядка и $\frac{2\pi k}{n}$ — для k -го порядка.

Вдумываясь в смысл формул (а), (β), (γ), (δ) и заключительной (ε) § 82, мы видим, что для случая n -фазной системы и k -й составляющей, для которого вместо τ надо подставить $\frac{\tau}{k}$, мы должны написать аналогично (82, ε)

$$B_k' = C_k \left\{ \sin(\omega t) \cos\left(\frac{kx}{\tau} \pi\right) + \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{kx\pi}{\tau} - \frac{2\pi k}{n}\right) + \right. \\ \left. + \sin\left(\omega t - 2 \cdot \frac{2\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{kx\pi}{\tau} - 2 \cdot \frac{2\pi k}{n}\right) + \dots + \right. \\ \left. + \sin\left[\omega t - (n-1) \frac{2\pi}{n}\right] \cos\left[\frac{kx\pi}{\tau} - (n-1) \frac{2\pi k}{n}\right] \right\}.$$

Преобразуем, как и раньше, каждый член этого выражения в сумму двух аналогично (82, γ), принимая во внимание, что член, относящийся к фазе, номер которой m , представится так:

$$\sin\left[\omega t - (m-1) \frac{2\pi}{n}\right] \cos\left[\frac{kx\pi}{\tau} - (m-1) \frac{2\pi k}{n}\right] = \\ = \frac{1}{2} \sin\left[\omega t + \frac{kx\pi}{\tau} - (m-1) \cdot \frac{2\pi(k+1)}{n}\right] + \\ + \frac{1}{2} \sin\left[\omega t - \frac{kx\pi}{\tau} + (m-1) \cdot \frac{2\pi(k-1)}{n}\right].$$

Проделив это разложение для каждой фазы, получаем

$$B_k' = \frac{1}{2} C_k \left\{ \sin\left(\omega t + \frac{kx}{\tau} \pi\right) + \sin\left(\omega t - \frac{kx}{\tau} \pi\right) + \right. \\ \left. + \sin\left[\omega t + \frac{kx}{\tau} \pi - \frac{2\pi(k+1)}{n}\right] + \sin\left[\omega t - \frac{kx}{\tau} \pi + \frac{2\pi(k-1)}{n}\right] + \right. \\ \left. + \sin\left[\omega t + \frac{kx}{\tau} \pi - 2 \frac{2\pi(k+1)}{n}\right] + \sin\left[\omega t - \frac{kx}{\tau} \pi + 2 \cdot \frac{2\pi(k-1)}{n}\right] + \dots \right\}. \quad (A)$$

В зависимости от величины n и k здесь могут получиться существенно друг от друга отличающиеся результаты.

Перейдем к частному случаю трехфазной системы и произведем вычисление для составляющих 3-го и 5-го порядков. Имеем для 3-го порядка

$$\frac{2\pi(k+1)}{n} = \frac{4 \cdot 2\pi}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3}, \\ \frac{2\pi(k-1)}{n} = \frac{4\pi}{3}, \\ 2 \cdot \frac{2\pi(k-1)}{n} = 2\pi + \frac{2\pi}{3}.$$

Таким образом у нас получаются три члена с фазами, отличающимися на $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$, и еще другие три члена с фазами, тоже разняющимися на такие углы.

В сумме получается нуль.

Таким образом составляющие 3-го порядка никакого вращающегося поля не вызывают.

Понятно, что ряд (A) можно рассматривать как разложение пульсирующего поля каждой фазы на два вращающихся в противоположных направлениях поля: одно, например,

$$\frac{C}{2} \sin\left(\omega t + \frac{kx}{\tau} \pi\right),$$

и другое

$$\frac{C}{2} \sin\left(\omega t - \frac{kx}{\tau} \pi\right),$$

где разница в знаке перед вторым членом в скобках указывает на противоположные направления движения поля.

Перейдем к составляющей 5-го порядка.

Для $k=5$ имеем

$$\frac{2\pi(k+1)}{n} = \frac{2\pi \cdot 6}{3} = 4\pi; \quad 2 \cdot \frac{2\pi(k+1)}{n} = 8\pi$$

и

$$\frac{2\pi(k-1)}{n} = \frac{2\pi \cdot 4}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3}, \\ 2 \cdot \frac{2\pi(k-1)}{n} = \frac{4\pi \cdot 4}{3} = 4\pi + \frac{4\pi}{3}.$$

Таким образом три члена ряда (A), содержащие под знаком синуса выражения $\frac{kx}{\tau} \pi$ со знаком минус, дадут в сумме нуль; другие три члена оказываются

различимся в фазе на целое число окружностей, поэтому они сложатся арифметически и дадут

$$B'_5 = \frac{3}{2} C_5 \sin \left(\omega t + \frac{5x}{\tau} \pi \right),$$

что представляет вращающееся поле с направлением вращения навстречу полю составляющих 1-го порядка, данному формулой (82,б), ибо аналогично рассуждениям § 82 по поводу формулы (б), мы можем сказать, что то же самое значение B'_5 будет в момент t' , на Δt более поздний, чем t в месте, с абсциссой $x + \Delta x$, т. е.

$$\omega(t + \Delta t) + \frac{5(x + \Delta x)\pi}{\tau} = \omega t + \frac{5x\pi}{\tau},$$

откуда

$$\omega \Delta t + \frac{5 \cdot \Delta x}{\tau} \pi = 0,$$

или

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v_5 = - \frac{1}{5} \frac{\omega \tau}{\pi}.$$

Скорость движения поля v_5 отрицательна, следовательно, поле движется против основного поля; величина этой скорости в 5 раз меньше, что можно было бы и предвидеть, ибо полюсов у пятой составляющей в 5 раз больше, чем у первой.

Пусть читатель проделает подобные вычисления для следующих порядков, и он убедится, что поле составляющих 7-го порядка вращается в ту же сторону, что и основное поле; поле от составляющих 9-го порядка (и 15-го) исчезает подобно полю составляющих 3-го порядка; поле составляющих 11-го порядка вращается навстречу основному полю и т. д.

Вращающиеся навстречу поля тормозят движение ротора, но количественно это влияние оказывается очень слабым вследствие малости амплитуд этих полей даже при точно прямоугольной форме кривой м. д. с., а тем более при трапецидальной.

ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ

ВЛИЯНИЕ ЖЕЛЕЗА НА ЯВЛЕНИЯ В ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

§ 100. Переменный ток, намагничивающий железо. Потери в железе

В настоящей главе мы прежде всего исследуем одно явление, которое является следствием гистерезиса при намагничивании переменным током железа, именно искажение синусоидальной формы кривой намагничивающего тока.

Пусть к зажимам источника переменного тока с синусоидальным напряжением

$$u = U_m \sin(\omega t)$$

подключена катушка, которая намагничивает железный сердечник циклически, т. е. то в одну сторону, то в другую, при постепенном изменении силы тока в течение периода. Катушка с сердечником может иметь, например, форму цилиндрического кольца — тороида.

Если активное сопротивление катушки равно R , то

$$u = iR - e_c.$$

Всегда можно так подобрать поперечное сечение и длину проволоки катушки, чтобы R было мало и чтобы величиной iR можно было в сравнении с величиной e_c

пренебречь. Тогда $u = -e_c$; следовательно, э. д. с. самоиндукции будет синусоидальной функцией и выразится так:

$$e_c = -E_{cm} \sin(\omega t),$$

хотя, как увидим далее, сила тока i не будет синусоидальной функцией.

Так как при ω витках в катушке и мгновенном значении магнитного потока ϕ

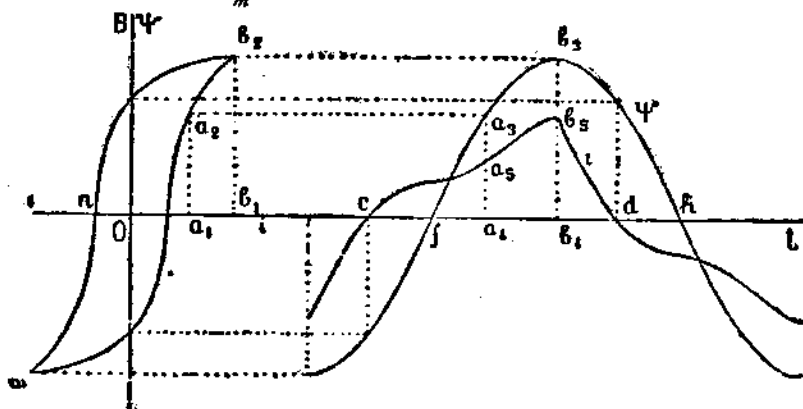
$$e_c = -\omega \frac{d\phi}{dt} 10^{-8} \text{ вольт,}$$

то мы имеем, что магнитный поток ϕ есть тоже синусоидальная функция, опережающая e_c на $\frac{\pi}{2}$:

$$\phi = \frac{10^8 \cdot E_{cm}}{\omega} \int \sin(\omega t) dt;$$

магнитный поток синусоидален, хотя сила тока не синусоидальна.

Нанесем на чертеж (фиг. 174) синусоиду ϕ с амплитудой, равной амплитуде магнитного потока Ψ_m .



Фиг. 174.

Затем начертим кривую силы тока i , причем строить ее придется по точкам, так как она уже не является синусоидой. Построим ее следующим образом:

Начертим кривую намагничивания для железа в катушке за полный цикл, т. е. так называемую петлю гистерезиса, причем масштаб для значений магнитной индукции B выберем такой, чтобы наибольшая ордината петли гистерезиса B_{max} на чертеже представлялась отрезком, равным амплитуде синусоиды магнитного потока. Обозначив через S площадь поперечного сечения железа мы имеем $\phi = B \cdot S$ и $\Psi_m = B_{max} \cdot S$; таким образом в новом в S раз меньшем масштабе ординаты петли гистерезиса представят значения потока ϕ в зависимости от намагничивающей силы H катушки; как известно

$$H = \frac{0,4 \pi \omega l}{l},$$

где l есть мгновенные значения силы намагничивающего тока, а l — средняя длина сердечника; в масштабе, в $\frac{0,4 \pi \omega}{l}$ раз большем, абсциссы петли гистерезиса представят нам уже не H , а самую силу тока i . Таким образом петля гистерезиса пред-

ставит нам зависимость потока ϕ от силы тока i . Пользуясь этой кривой и кривой ϕ в зависимости от времени (уже начерченная синусоида), мы и сможем начертить кривую i в зависимости от времени.

Возьмем на синусоиде ϕ точку, например, a_2 ; проведем прямую a_2a_2' , параллельную оси абсцисс, до пересечения с той ветвью петли, которая соответствует возрастанию потока, так как точка a_2 взята на части синусоиды при возрастании ϕ . Затем найдем соответствующее значению $\phi = a_2a_2' = a_1a_3$ значение силы тока $i = Oa_1$ и отложим на ординате $\phi = a_2a_2'$, т. е. для соответствующего момента времени t , это значение i как ординату кривой силы тока, так что $a_4a_5 = Oa_1$, и так поступим для возможно большего количества точек.

Таким образом мы по точкам построим кривую силы тока $ca_5b_5d...$.

Следовательно, если поток индукции в железе меняется с течением времени по синусоиде $fa_3b_3h...$, то сила тока, производящего этот поток, меняется по кривой ca_5b_5d . Эта кривая, во-первых, не является чистой синусоидой, а во-вторых, она сдвинута влево относительно кривой ϕ на $\overline{cf} = \overline{dh}$, следовательно,

сила тока i опережает поток ϕ на $\frac{\overline{cf}}{2 \cdot fh}$ долю периода (ординаты синусоиды ϕ в точках c и d равны между собой, так как они равны остаточному магнетизму, поэтому равны и промежутки времени $\overline{cf}$ и $\overline{dh}$).

Выделим из кривой силы тока синусоиду первого порядка с действующим значением I_1 ; остающаяся совокупность каких-то составляющих высших порядков будет иметь действующую величину I_a . Эти соответствующие силы тока высших порядков с чисто синусоидальным напряжением 1-го порядка u дадут мощность, равную нулю; мощность же в цепи выразится так:

$$U \cdot I_1 \cos \varphi = UI_{1a} = UI \cos \varphi,$$

где $\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\overline{cf}}{2 \cdot fh} \cdot 2\pi$ на основании того, что

$u = -e_c$ и что e_c отстает от ϕ на $\frac{\pi}{2}$ (фиг. 175).

На этой фигуре α — угол опережения током магнитного потока — равен $\frac{\overline{cf}}{2 \cdot fh} \cdot 2\pi$.

Следует особенно заметить, что кривая тока, намагничивающего железо, содержит в себе, главным образом, кроме первой составляющую 3-го порядка и значительно меньшую 5-го.

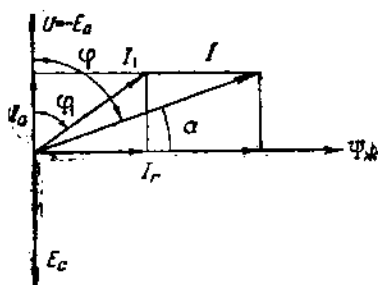
I_{1a} есть активная составляющая тока I_1 . Эта мощность превращается вся в тепло в железе, ибо $R=0$; мы будем обозначать ее через P_h , так что $P_h = U \cdot I_{1a}$; так как $U = E_c$ по абсолютной величине, то можно написать

$$P_h = E_c I_{1a}. \quad (A)$$

Мы вводим вместо U величину E_c потому, что если R не равно нулю, то в наши предыдущие рассуждения должна входить составляющая напряжения, равная и противоположная э. д. с. самоиндукции, а не все напряжение. Однако тогда и e_c уже не будет строго синусоидальной функцией, но будет отступать от синусоиды тем больше, чем больше R . Явление всегда сложно, и расчет здесь возможен всегда лишь с тем или иным приближением.

Мы можем заменить теперь несинусоидальный намагничивающий ток эквивалентным с составляющими — активной $I_a = I_{1a}$ и реактивной

$$I_r = \sqrt{I_{1r}^2 + I_2^2}$$



Фиг. 175.

На фиг. 175 изображены поток Ψ_m , э. д. с. самоиндукции E_c , напряжение $U = -E_c$, эквивалентный ток I и его составляющие.

Угол α , на который вектор тока опережает вектор потока, называется кратким углом гистерезиса.

Как только что упомянуто, когда R не равно нулю, явления усложняются.

Разберем этот случай.

Из обычного уравнения

$$u = -e_c + i \cdot R,$$

мы видим, что если u синусоидально, а i несинусоидально, то и e_c несинусоидально; из этого уравнения мы имеем, умножая все члены его на $i \cdot dt$ и интегрируя за целый период, соотношение для энергий или работ

$$\int_0^T u \cdot i \cdot dt = \int_0^T -e_c \cdot i \cdot dt + \int_0^T i^2 \cdot R \cdot dt.$$

В левой части здесь стоит вся энергия, полученная за период от источника тока; в правой части последний член выражает энергию, обратившуюся за период в тепло в сопротивлении R , а первый член — энергию, не возвратившуюся из магнитного поля, пошедшую на нагревание железа в магнитном поле через гистерезис. Если гистерезиса нет, то e_c и i синусоидальны (при синусоидальном u), сдвинуты в фазе на четверть периода, и первый член правой части равен нулю. Если имеется гистерезис, то e_c и i несинусоидальны, и за время убывания силы тока магнитный поток (фиг. 174) изменяется меньше, вообще говоря, иначе, чем за время его возрастания, а потому и э. д. с. e_c будет различна и $\int_0^T -e_c \cdot i \cdot dt$ будет иметь конечную величину.

Нужно заметить, что к гистерезису присоединятся еще токи Фуко в железе, и этот интеграл будет иметь, вообще говоря, величину большую, чем потери на гистерезис, вычисленные по площади кривой — петли гистерезиса.

Математическое решение вопроса здесь возможно лишь приближенное; один из способов такого решения изложен далее.

Нам нужно еще остановиться на вопросе об анализе кривой тока, намагничивающего железо, что он дает, каковы составляющие этого тока?

Главной после синусоиды 1-го порядка является в нем составляющая 3-го порядка, затем 5-го и очень слабая 7-го. Чтобы охарактеризовать влияние их в числах, можно указать такой пример: амплитуда магнитной индукции равнялась 14 000 G, и состав кривой тока, если принять амплитуду синусоиды 1-го порядка за 100, выражался формулой

$$i = 100 \sin(\omega t) - 30 \sin(3\omega t) + 10 \sin(5\omega t) - 2 \sin(7\omega t) + \dots$$

При насыщении большим третья составляющая стала бы еще больше, при насыщении меньшем — она несколько уменьшилась бы; тоже и составляющая 5-го порядка. Например, при индукции около 20 000 G третья составляющая достигла бы величины около 60—65% амплитуды 1-го порядка.

При индукции около 10 000 G третья составляющая имела бы величину 20% от составляющей 1-го порядка.

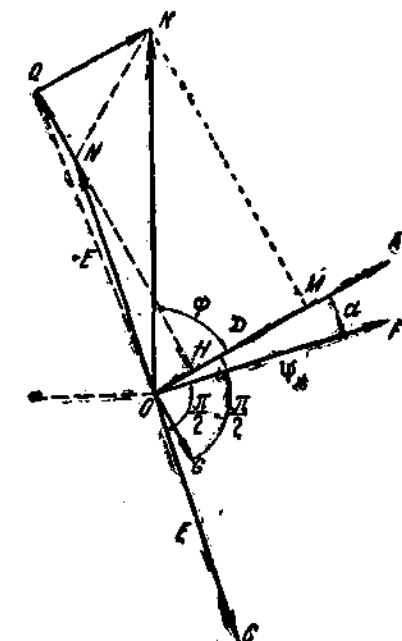
Эти числа являются лишь примерными и, разумеется, изменяются в зависимости от качества применяемого железа.

В кривой имеются составляющие и 9-го и выше порядков, но ими уже пренебрегают.

§ 101. Векторная диаграмма катушки с железным сердечником

Введем эквивалентные токи и построим векторную диаграмму, а затем исследуем соотношения мощностей для того случая, когда к зажимам с напряжением U приключена катушка с железным сердечником (фиг. 176) и с активным сопротивлением R , которым нельзя пренебречь. При построении векторной диаграммы мы заменяем намагничивающий ток эквивалентным синусоидальным, а следовательно, и э. д. с., индуцируемую в катушке, синусоидальной э. д. с., хотя теперь уже R не равно нулю, и для этих эквивалентных величин силы тока и э. д. с. и применяем формулы предыдущей теории.

Затем мы теперь введем в векторную диаграмму еще некоторое уточнение, именно мы разделим весь магнитный поток, все количество линий, создаваемых катушкой, на две части или два потока. Один поток пусть состоит из тех магнитных линий, которые весь свой путь проходят по железу (фиг. 176), назовем этот поток через $\Psi_{ж}$ — поток в железе, другой поток должен заключать в себе все остальные линии, из которых одна часть пути идет по железу, а часть — по воздуху, а другие весь свой путь совершают в воздухе; внутри катушки эти последние проходят в пространстве между сердечником и витками катушки; выходя из катушки, все они загибаются вокруг края катушки и идут по воздуху вне катушки к другому ее концу, где и входят в нее. Некоторые линии оцепляют не всю катушку, а только несколько витков и т. д.



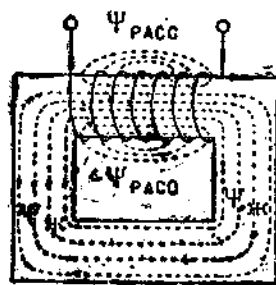
Фиг. 177.

Назовем этот поток потоком рассеяния и обозначим через $\Psi_{расс}$ все количество подобных линий, охватывающих, однако, все витки катушки. Поясним это примером. Пусть имеется в некотором месте, например, около середины катушки, сто линий, охватывающих пять витков, всех же витков у катушки пятьсот; тогда мы можем считать, что в отношении величины э. д. с., индуцируемой этими линиями в катушке, они эквивалентны одной линии, сцепляющейся со всеми пятьюстами витков; и таким образом включаем в число линий $\Psi_{расс}$ одну линию; так же поступаем и со всеми другими линиями; в результате получаем некоторое число линий $\Psi_{расс}$, которое индуцирует ту же самую э. д. с., что и действительные линии рассеяния.

Векторная диаграмма построена на фиг. 177. За длины векторов примем здесь, как обычно, действующие значения величин за исключением векторов магнитных потоков, для которых возьмем амплитуды. $\overline{OK}$ есть вектор напряжения U на зажимах; под углом $\angle KOA$,

равным φ , к нему проведен вектор $\overline{OA}$ силы тока I .

Магнитный поток в железе $\Psi_{ж}$ представлен вектором $\overline{OF}$, по величине равным амплитуде потока, по фазе отступающим на угол α от вектора силы тока согласно предыдущему. Поток рассеяния идет, главным образом, по воздуху, в поле этого потока нет явления гистерезиса, во всяком случае мы им пренебрегаем по незначительности самого объема железа, затрагиваемого этим потоком (фиг. 176);



Фиг. 176.

поэтому этот поток $\Psi_{\text{рас}}$ находится в фазе с производящим его током I ; на диаграмме поток рассеяния изображен вектором $\overline{OD}$. Поток в железе индуцирует в катушке э. д. с. E , представленную вектором $\overline{OC}$, отстающим на $\frac{\pi}{2}$ от вектора потока $\overline{OF}$; мы не будем называть эту э. д. с. электродвижущей силой самоиндукции, чтобы распространить наши рассуждения и на тот общий случай, когда поток в железе является результатом действия не одной рассматриваемой катушки, а также и других; с подобным случаем мы дальше встретимся при построении диаграммы трансформатора и тогда уясним необходимость отказа от слова „самоиндукция“ полнее. Мгновенные значения этой э. д. с. выразятся формулой

$$e = -w \frac{d[\Psi_{\text{ж}} \cdot \sin(\omega t)]}{dt} \cdot 10^{-8} = 2\pi f w \Psi_{\text{ж}} 10^{-8} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Действующее значение будет в $\sqrt{2}$ раз меньше амплитуды, а так как $2\pi : \sqrt{2} = 4,44$, то

$$E = 4,44 \cdot f \cdot w \cdot \Psi_{\text{ж}} \cdot 10^{-8} \text{ вольт.} \quad (101,1)$$

Это и есть формула э. д. с. трансформатора. Поток рассеяния индуцирует э. д. с., представленную вектором $\overline{OG}$, отстающим на $\frac{\pi}{2}$ от вектора потока $\overline{OD}$. Поток $\overline{OD}$ создается только рассматриваемой катушкой, а потому $\overline{OG}$ можно назвать э. д. с. самоиндукции, но лучше назвать ее э. д. с. от потока рассеяния, она пропорциональна силе тока: $\overline{OG} = I \cdot X$.

Вектор напряжения U должен разлагаться на три составляющие: $\overline{ON}$, равную по величине и противоположную по фазе э. д. с. $\overline{OC}$, затем $\overline{NQ}$, равную по величине и противоположную по фазе э. д. с. $\overline{OG}$, и, наконец, $\overline{OK} = I \cdot R$, тратящуюся на преодоление сопротивления R ; э. д. с. $\overline{OC}$ и $\overline{QN}$, а также и $\overline{NQ}$ и $\overline{OG}$ попарно уравниваются и дают в сумме нуль, остается лишь величина $\overline{QK}$, которая и прогоняет ток I через сопротивление R .

Если бы вектор напряжения не был начерчен, то построением трех его составляющих мы всегда могли бы получить его подобно построению его в основной диаграмме напряжений (фиг. 26 и 28).

Теперь, когда векторная диаграмма вся построена, перейдем к мощности. Вся мощность, берущаяся катушкой от зажимов, есть

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi;$$

это выражение мы преобразуем так:

$$\begin{aligned} P &= (U \cos \varphi) \cdot I = \overline{OM} \cdot I = (\overline{OH} + \overline{HM}) \cdot I = (\overline{ON} \cdot \cos \angle NOH + \overline{QK}) \cdot I = \\ &= \left[E \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + I \cdot R \right] I = E \cdot I \cdot \sin \alpha + P_R. \end{aligned} \quad (101,2)$$

Здесь буква E означает только величину вектора $\overline{ON}$.

Таким образом вся мощность представилась в виде суммы мощностей: одной P_R , идущей на нагревание проводников — меди, и другой $E \cdot I \cdot \sin \alpha = P_{\text{ж}}$, идущей на перемагничивание железа и переходящей в нем в тепло, идущее на нагревание железа.

Представим себе, что мы подходим к изучению катушки, отвлекаясь от присутствия железа, т. е. с той точки зрения, с которой подходили к построению диаграммы фиг. 26, 28, 39 и т. д.; однако величины, требуемые для диаграммы, берем прямо из опыта. Мы измеряем, следовательно, амперметром силу тока I , вольтметром — напряжение U и ваттметром — мощность P . Деля затем P на произведение U на I , мы получаем $\cos \varphi$ и строим векторы U и I под углом φ , как на фиг. 177. Затем, проводя $\overline{KM} \perp \overline{OA}$, находим активную составляющую напряжения $\overline{OM} = U \cos \varphi$ и полагаем ее равной произведению силы тока I на активное сопротивление цепи. Последняя величина есть в таком случае величина фиктивная, такой величиной должно было бы быть активное сопротивление катушки, чтобы, не учитывая потерь на перемагничивание железа, мы все же имели мощность в цепи равной P , тратящейся теперь. Обозначим это фиктивное „резльтирующее“ сопротивление через $R_{\text{рез}}$. Тогда

$$\overline{OM} = I \cdot R_{\text{рез}}.$$

Подставляя вместо $\overline{OM}$ его истинное выражение, как суммы $\overline{OH}$ и $\overline{HM}$, мы имеем

$$I \cdot R_{\text{рез}} = E \cdot \sin \alpha + I \cdot R,$$

откуда получаем

$$R_{\text{рез}} = R + \frac{E \cdot \sin \alpha}{I}. \quad (101,3)$$

Если мы не знаем, что у катушки есть сердечник, то мы и будем считать, что ее активное сопротивление есть это $R_{\text{рез}}$, и следовательно, преувеличим истинное активное сопротивление. „Индуктивность“ катушки (кажущуюся, если есть действие еще и других катушек, увеличивающих поток $\Psi_{\text{д}}$) мы получим, разделив вектор $\overline{KM}$ (измеренный в масштабе напряжений) на $\omega \cdot I$.

Вся векторная диаграмма представится тогда треугольником напряжений OMK ; две э. д. с. от потока — в железе $\overline{NO}$ и в воздухе $\overline{QN}$ — не будут в нашем представлении разделены, а заменятся вектором $\overline{KM}$, который есть реактивная составляющая вектора $\overline{QO}$ — суммы обеих э. д. с. Активная составляющая суммы э. д. с., вектор $\overline{OH} = E \sin \alpha$ — входит, таким образом, в вектор $I \cdot R_{\text{рез}} = \overline{OM}$; эта активная составляющая и вызывает увеличение активного сопротивления сравнительно с истинным его значением.

Не следует забывать, что разложение э. д. с. в катушке на две $\overline{OC}$ и $\overline{OQ}$ есть лишь метод представления или изображения явлений и что в действительности физически (поскольку представлению э. д. с. в действительности соответствует некоторое явление) существует в катушке во всякий момент лишь одна э. д. с., численно равная сумме мгновенных значений э. д. с., нами введенных, $\overline{OC}$ и $\overline{OQ}$.

Обратимся к экспериментальному построению этих э. д. с.

Когда мы, произведя действительно измерения с катушкой, узнаем, что она имеет железный сердечник, и хотим разложить э. д. с. $\overline{QO}$ на две слагаемые $\overline{QN}$ и $\overline{NO}$ ($\overline{OQ}$ и $\overline{OC}$), мы встречаем затруднение в том, что нельзя точно определить величину X , а потому и величину $I \cdot X = \overline{OQ} = \overline{QN}$.

Так как по предыдущему

$$P_h = P - I^2 R = E \cdot \sin \alpha \cdot I,$$

то

$$E \cdot \sin \alpha = \frac{P - I^2 R}{I}, \quad (101,4)$$

т. е. если мы отдельно измерим R (одним из способов измерения сопротивлений),

то из последней формулы мы будем знать проекцию э. д. с. E на одно направление (OA); но проекции $E \cdot \cos \alpha = \overline{NH}$ этой э. д. с. на другое, перпендикулярное к первому направлению, мы не можем определить из данных измерений (т. е. из величин P , U , I и R). Следует прибегнуть к другим методам; например, наведем на сердечник подалеже от катушки несколько витков проволоки — э. д. с. в них будет иметь ту же фазу, что и $E = \overline{OC}$ — и посредством двойного осциллографа определим затем разность фаз между силой тока I и э. д. с. в этих витках (поток рассеяния в них от их собственного тока — ср. работу трансформатора — мы при этом пренебрегаем), и следовательно, определим угол NOA , а тем самым и точку N на перпендикуляре, восстановленном в точке H к OA . Однако ввиду малости угла $AOF = \alpha$ и такие измерения лишь приближены.

Несмотря на то, что описанные трудности экспериментального построения диаграммы фиг. 177, она послужит нам в дальнейшем основой для изучения работы трансформатора.

Следует упомянуть о способе непосредственного измерения величины потерь в железе $E I \sin \alpha$.

На сердечник навивается вторая катушка с тем же точно числом витков, что у первой катушки. Очевидно, что в ней будет индуцироваться э. д. с.; если эта катушка помещена на сердечнике далеко от первой, то эта э. д. с. есть $E = \overline{ON}$; если она намотана вокруг первой, то э. д. с. есть вектор OQ или несколько меньший, но имеющий конец на линии NQ .

К зажимам этой катушки подключим катушку напряжения ваттметра, катушку тока которого включим в цепь тока I . Показания ваттметра и дадут нам $E I \cos (E_1 I) = E I \sin \alpha$.

Нужно заметить, что величина $P_h = E \cdot I \cdot \sin \alpha$ включает в себе не только мощность, тратящуюся на перемагничивание железа, но и мощность токов Фуко, индуцирующихся в железе при переменном магнитном потоке по этому железу. Таким образом и угол α получаемый на диаграмме фактический угол, есть угол не только гистерезиса, но и токов Фуко. Мощность и силу токов Фуко можно ослабить, утончая листы железа, и вместе с этим утончением листов будет уменьшаться и угол α между векторами I и Φ , стремясь к „истинному“ углу гистерезиса; при этом, чтобы величина потока не изменялась, нужно общую площадь поперечного сечения сердечника увеличивать, так как будет увеличиваться площадь, занятая немагнитными прослойками между листами железа. Это влияние токов Фуко в железе окончательно может быть выяснено лишь после рассмотрения работы трансформатора, так что мы к нему еще вернемся в следующей главе, посвященной диаграмме трансформатора.

В заключение введем несколько новых понятий и величин, которые впоследствии помогут упрощать математические выкладки, касающиеся цепей переменного тока, намагничивающих железо.

Обратимся к фиг. 177.

Вектор силы тока OA можно разложить на составляющие самыми разнообразными способами. Спроектируем OA на направления OK и к нему перпендикулярное. Проекция на OK равна $I \cdot \cos \varphi$; это есть активная составляющая силы тока по отношению к напряжению; реактивная составляющая равна проекции на второе направление $I \cdot \sin \varphi$. Полагая

$$\left. \begin{aligned} I \cdot \cos \varphi &= U \cdot g, \\ I \cdot \sin \varphi &= U \cdot b, \end{aligned} \right\} \quad (101,5)$$

как это было введено уже нами в § 30, и называем g активной проводимостью цепи, а b — реактивной проводимостью цепи. Возводя в квадрат, складывая и извлекая корень, имеем

$$I = U \cdot Y = U \cdot \sqrt{g^2 + b^2}, \quad (101,6)$$

где $Y = \sqrt{g^2 + b^2}$ назовем полной проводимостью цепи.

Из уравнений (101,6) и (101,5) имеем, что

$$g = Y \cos \varphi \text{ и } b = Y \sin \varphi. \quad (101,7)$$

Теперь проектируем вектор I на направление э. д. с. $\overline{ON}$ и к нему перпендикулярное. Проекция на $\overline{ON}$ равна $I \sin \alpha$; это есть активная составляющая силы тока по отношению к э. д. с. E ; реактивная составляющая равна проекции на направление $\overline{OF}$, перпендикулярное к $\overline{ON}$, и выражается через $I \cdot \cos \alpha$.

Полагая

$$\left. \begin{aligned} I \cdot \sin \alpha &= E \cdot g_{\mu}, \\ I \cdot \cos \alpha &= E \cdot b_{\mu}, \end{aligned} \right\} \quad (101,8)$$

и называем g_{μ} активной проводимостью „намагничивания“, подразумевая под этим то обстоятельство, что эта величина зависит исключительно от намагничивания железа и активное сопротивление цепи R в нее уже не входит; величину b_{μ} аналогично называем реактивной проводимостью „намагничивания“ и, наконец, величину

$$Y_{\mu} = \sqrt{g_{\mu}^2 + b_{\mu}^2}$$

называем полной проводимостью намагничивания данной цепи. Понятно, что

$$\left. \begin{aligned} I &= E \cdot Y_{\mu} = E \sqrt{g_{\mu}^2 + b_{\mu}^2} \\ g_{\mu} &= Y_{\mu} \sin \alpha \text{ и } b_{\mu} = Y_{\mu} \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (101,9)$$

и что

С помощью символического метода расчета явлений переменного тока мы сможем полнее выяснить соотношения между проводимостями всей цепи и проводимостями намагничивания.

Если при создании переменного магнитного поля током I нет гистерезиса, например, при отсутствии железа, и следовательно, активная относительно э. д. с. слагающая силы тока равна нулю, то из формулы (101, 8) вытекает, что $g_{\mu} = 0$.

Если есть потери на гистерезис, но максимальные значения (за каждый период) магнитной индукции невысоки, так что магнитного насыщения железа нет и коэффициент магнитной проницаемости μ — постоянная величина, можно считать, что, изменив реостатом силу тока I в катушке, мы изменим пропорционально ей

и магнитный поток (по известной формуле $\Phi_{\max} = \frac{0,4\pi \cdot \omega \cdot I_{\max} \cdot \mu \cdot S}{l}$) и э. д. с.

индукции E . При этом Y_{μ} в формуле (101,9) есть постоянный коэффициент пропорциональности между I и E , а g_{μ} и b_{μ} суть постоянные коэффициенты пропорциональности между составляющими силы тока и E по формуле (101,8). Однако и Y_{μ} и его составляющие g_{μ} и b_{μ} постоянны при этом лишь между некоторыми пределами измерения I , при сильном же изменении I скажется влияние насыщения в формуле для $\Phi_{\max}$ и изменения μ , отчего изменится и соотношение между I и E , т. е. величины Y_{μ} , g_{μ} и b_{μ} .

Воспользуемся введенным нами понятием проводимости намагничивания, чтобы дать иное выражение мощности, тратящейся на перемагничивание железа.

По формуле (100, А)

$$P_h = E \cdot I_a,$$

подставляя сюда выражение I_a из формулы (101,8), получаем

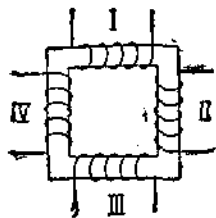
$$P_h = E^2 g_{\mu}. \quad (101,10)$$

важное соотношение, которое нам впоследствии будет полезно.

§ 102. Самоиндукция четырех катушек с общими или отдельными сердечниками

Рассмотрим следующую задачу:

Даны (фиг. 178) четыре одинаковые катушки, надетые на один общий железный сердечник, представляющий замкнутую магнитную цепь; требуется определить, как будет изменяться индуктивность L такого прибора при различных включениях катушек, а именно: во-первых, когда все катушки включены параллельно, во-вторых, когда они включены все последовательно, и в-третьих, когда катушки по две соединены последовательно, а обе пары между собой — параллельно.



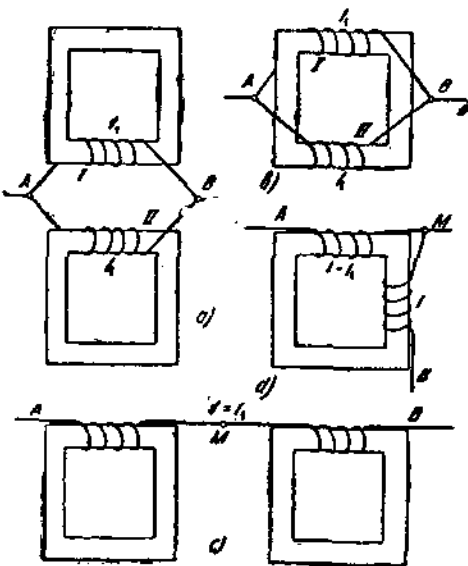
Фиг. 178.

При решении этой задачи нам придется прежде всего разобрать вопрос о разнице между включением в цепь двух катушек, не имеющих общего сердечника, т. е. не имеющих общей магнитной цепи, и катушек с общим сердечником, т. е. с общей магнитной цепью.

На фиг. 179,а изображены две параллельно включенные между точками A и B цепи катушки¹, каждая с своей собственной магнитной цепью и с индуктивностью L_1 . Если напряжение U_{AB} между точками A и B постоянно, то ясно, что если сила тока через катушку, когда она одна включена в цепь, равна I_1 , то сила тока в цепи, когда включены две катушки параллельно, равна $2I_1$, т. е. сила тока через каждую катушку такая, какая шла прежде через одну катушку. Сила тока через катушку не изменится, если мы подключим параллельно еще несколько катушек. Если их четыре, то сила тока в цепи $I = 4I_1$. Раз сила тока возросла в четыре раза, то, значит, полное сопротивление Z между A и B уменьшилось в четыре раза; а так как активное сопротивление при параллельном соединении четырех одинаковых катушек уменьшилось в четыре раза, то, значит, и реактивное уменьшилось тоже в четыре раза, следовательно, общая индуктивность четырех (n) параллельно включенных одинаковых катушек в четыре (n) раза меньше такового одной катушки:

$$L = \frac{1}{4} L_1.$$

Пусть теперь такие же точно параллельно включенные катушки навиты на общий сердечник (фиг. 179,б). Здесь могут быть два случая; рассмотрим сначала первый, когда катушки навиты так, что действуют навстречу друг другу при создании магнитного потока в сердечнике; вследствие одинаковости катушек их м. д. с. во всякий момент будут уравниваться для сердечника, и поэтому общего магнитного



Фиг. 179.

¹ Индуктивность катушки выражается так:

$$L = \frac{4\pi S w^2}{l} \cdot 10^{-9} \text{ генри,}$$

где w есть число витков катушки, μ — магнитная проницаемость сердечника, S — площадь поперечного сечения его в см², l — длина его в см — средняя — в случае замкнутого сердечника; при незамкнутом сердечнике, однако, и сама формула, только что написанная, перестает быть сколько-нибудь точной.

потока в сердечнике совсем не будет, а будут лишь потоки или поля, похожие на поля или потоки прямого соленоида, окружающие лишь одну катушку и часть пути, идущие по железу, а часть — по воздуху; из-за последнего обстоятельства эти потоки много слабее потока, создаваемого одной катушкой при том же токе и на том же сердечнике, т. е. на сердечнике, представляющем замкнутую магнитную цепь; раз магнитный поток слабее, значит, индуктивность каждой катушки стала меньше чем L_1 , через каждую катушку идет половина всего тока, т. е. обе они пропускают силу тока вдвое большую, чем каждая из них при этих условиях, следовательно, общая их индуктивность на основании рассуждения, подобного предыдущему, вдвое меньше индуктивности каждой из них при этих условиях, т. е. окончательно — она меньше половины L_1 .

Перейдем ко второму случаю, когда катушки навиты так, что их м. д. с. складываются и магнитный поток в сердечнике является результатом действия их обеих. Для упрощения рассуждений примем, что рассеяния магнитных линий нет и что все линии, создаваемые катушками, проходят весь путь по сердечнику, и отвлечемся от влияния магнитного насыщения железа, т. е. от переменности величины μ . Весь магнитный поток можно представить себе состоящим из двух половин, причем одна половина создается одной катушкой, другая — другой. При этом в каждой катушке будут индуцироваться две э. д. с.: одна e_{c1} — самоиндукции от потока, создаваемого этой катушкой, другая e_m — взаимной индукции — от потока, создаваемого другой; из сказанного следует, что $e_{c1} = e_m$. Обе эти э. д. с. в каждой катушке сложатся в одну э. д. с. e_c , отстающую от силы тока на $\frac{\pi}{2}$. Выразим соотношения во всей части цепи между A и B аналитически. Обозначим активное сопротивление одной катушки через R_1 ; две параллельно включенные катушки представят сопротивление $\frac{R_1}{2}$. Силу тока, текущего через прибор (т. е. обе катушки), как целое обозначим через I ; через каждую катушку течет, следовательно, $\frac{I}{2}$. Взаимную индукцию двух катушек обозначим через M . Тогда

$$e_c = e_m + e_{c1},$$

или, так как $e_m = e_{c1}$,

$$E_0 = \omega M \cdot \frac{I}{2} + \omega L_1 \cdot \frac{I}{2} = 2\omega L_1 \cdot \frac{I}{2} = \omega L_1 \cdot I,$$

и из закона Ома:

$$U_{AB}^2 = \left(I \cdot \frac{R_1}{2} \right)^2 + E_0^2.$$

Подставляя вместо E_0 его выражение, получаем

$$U_{AB}^2 = \frac{I^2 \cdot R_1^2}{4} + \omega^2 L_1^2 I^2 = \left[\left(\frac{R_1}{2} \right)^2 + (\omega L_1)^2 \right] I^2.$$

Отсюда видим, что прибор как целое представляет активное сопротивление $\frac{R_1}{2}$ и реактивное ωL_1 , т. е. обладает той же индуктивностью, что и каждая катушка в отдельности (на том же сердечнике).

Аналогично докажем, что если мы соединим параллельно все четыре катушки, то активное сопротивление прибора будет $\frac{R_1}{4}$, а индуктивность — попрежнему L_1 .

Посмотрим теперь, что будет, если мы будем соединять катушки последовательно. На фиг. 179, с представлено последовательное соединение двух катушек с независимыми магнитными потоками. Ясно, что э. д. с. самоиндукции обеих катушек сложатся, давая э. д. с. самоиндукции $E_0 = 2\omega L_1 I = \omega(2L_1)I$. Общая индук-

тивность, таким образом, $L = 2L_1$, как это нам уже известно из последовательного соединения индуктивностей в цепи переменного тока; для четырех катушек $L = 4L_1$.

Соединим теперь последовательно две катушки с общей магнитной цепью (фиг. 179, d).

Не будем останавливаться на том случае, когда катушки включены навстречу одна другой, индуктивность прибора тогда невелика, — а перейдем прямо к тому случаю, когда магнитный поток является общим и создается обеими катушками. Здесь в каждой катушке мы опять имеем по две э. д. с. e_{o1} и e_m , которые, слагаясь, дают e_c , причем $E_c = 2\omega L_1 I$, так как опять $e_{o1} = e_m$. Обе катушки, включенные последовательно, дают в цепи э. д. с. самоиндукции (и индукции), равную $2E_c = 4\omega L_1 I = \omega \cdot (4L_1) \cdot I$, т. е. прибор обладает индуктивностью $L = 4L_1$.

Этот же результат можно получить и проще, если заметить, что на фиг. 179, d две катушки, I и II, представляют собой просто одну катушку с вдвое большим числом витков, и вспомнить, что индуктивность катушки пропорциональна квадрату числа витков ее и, следовательно, при увеличении числа витков вдвое увеличится в четыре раза.

Аналогично докажем, что если мы соединим все четыре катушки последовательно, то получим

$$L = 16L_1.$$

Не следует забывать, что во всех предыдущих рассуждениях мы считали, что магнитная проницаемость μ железа сердечника — величина постоянная, что магнитного насыщения нет; поэтому в зависимости от большего или меньшего отступления от этого на практике могут получиться некоторые отступления в соотношениях между L и L_1 .

Третий из намеченных случаев, именно когда катушки включены по две последовательно, а обе пары параллельно, решается на основании предыдущего просто: индуктивность L при параллельном включении (с общим сердечником) не меняется, следовательно, она равна $4L_1$.

§ 103. Аналитические выражения соотношений в катушке

Применим символический метод для алгебраического выражения тех соотношений между различными электрическими величинами в цепи катушки, которые геометрически выражены векторной диаграммой фиг. 177; при этом нам понадобятся понятия о проводимости намагничения и проводимости всей цепи, введенные нами в § 101.

Прежде всего переведем на язык символического метода соотношение (101,9) $I = EY_p$. Это есть соотношение между величинами двух векторов $\dot{I}$ и $\dot{E}$ и модулем Y_p комплекса $\dot{Y}_p = g_p - jb_p$. Как написать соотношение между самими векторами и комплексом?

Разберем, что представит собой произведение $E\dot{Y}_p$.

По правилу, изложенному в главе VI, это произведение есть новый вектор, получающийся из вектора E так, как комплекс $\dot{Y}_p$ получается из положительной единицы; следовательно, новый вектор будет иметь величину EY_p и будет повернут относительно вектора E (вектор $\overline{OC}$ на фиг. 177) в сторону вращения часовой стрелки, так как комплекс $\dot{Y}_p$, обладающий отрицательной мнимой частью, изображается отрезком, повернутым в эту сторону относительно вертикальной оси, т. е. оси положительных действительных величин; угол поворота нового вектора относительно вектора $\dot{E}$ равен $\arctg \frac{g_p}{b_p}$; берем его абсолютную величину, ибо направление уже известно. На основании соотношений (101,9)

$$\frac{b_p}{g_p} = \operatorname{ctg} \alpha,$$

а потому

$$\arg \operatorname{tg} \frac{b_{\mu}}{g_{\mu}} = \frac{\pi}{2} - \alpha;$$

таким образом новый вектор, представляющий произведение $\dot{E} \dot{Y}_{\mu}$, займет на фиг. 177 положение в виде продолжения линии AO за точку O влево; он будет по величине равен вектору силы тока $\dot{I}$, ибо $\dot{I} = \dot{E} \cdot \dot{Y}_{\mu}$, а по направлению ему прямо противоположен; если мы возьмем его со знаком минус, т. е. два раза умножим на $\pm j$, то получим как раз вектор силы тока; следовательно, в векториальной форме, даваемой символическим методом, соотношение между всеми тремя рассматриваемыми величинами будет таково:

$$\dot{I} = -\dot{E} \dot{Y}_{\mu}. \quad (103,1)$$

Вводим вектор $\overline{ON} = -\dot{E}$ (фиг. 177) и обозначаем его через $\dot{E}'$; тогда

$$\dot{I} = \dot{E}' \dot{Y}_{\mu}. \quad (103,2)$$

Переходим к самой диаграмме фиг. 177.

Вектор $\overline{NK}$ выразится алгебраически

$$\overline{NK} = (R + jX) \dot{I} = \dot{Z} \dot{I}.$$

Таким образом то обстоятельство, что вектор напряжения на зажимах $\overline{OK} = \dot{U}$ является результирующим из $\overline{ON}$ и $\overline{NK}$, — равен их геометрической сумме, — алгебраически и в символической форме выразится соотношением:

$$\dot{U} = \dot{E}' + \dot{I} \dot{Z}. \quad (103,3)$$

Подставляя из формулы (103,2) сюда величину $\dot{E}'$, получаем

$$\dot{U} = \dot{I} \left(\frac{1}{\dot{Y}_{\mu}} + \dot{Z} \right). \quad (103,4)$$

С формальной математической стороны катушка согласно формуле (103,4) представляет собой просто сопротивление

$$\frac{1}{\dot{Y}_{\mu}} + \dot{Z};$$

мы будем обозначать это сопротивление через Z с индексом *все* или *рез* от слова результирующее:

$$\dot{Z}_{\text{рез}} \text{ или } \dot{Z}_{\text{все}} = \frac{1}{\dot{Y}_{\mu}} + \dot{Z}. \quad (103,5)$$

Это сопротивление имеет активную и реактивную части, или „составляющие“ (употребляем последний термин аналогично применению его к векторам), по формуле

$$\dot{Z}_{\text{рез}} = R_{\text{рез}} + jX_{\text{рез}}.$$

Определим $R_{\text{рез}}$ и $X_{\text{рез}}$. Для этого подставим в формулу (103,5) вместо $\dot{Y}_{\mu}$ и $\dot{Z}$ их выражения:

$$R_{\text{рез}} + jX_{\text{рез}} = \frac{1}{g_{\mu} - jb_{\mu}} + R + jX,$$

или

$$R_{\text{рез}} + jX_{\text{рез}} = \frac{g_{\mu}}{Y_{\mu}^2} + j \frac{b_{\mu}}{Y_{\mu}^2} + R + jX.$$

Чтобы это равенство было возможно, должны быть порознь равны действительные части между собой, и мнимые между собой, т. е.

$$\left. \begin{aligned} R_{рез} &= \frac{g_{\mu}}{Y_{\mu}^2} + R; \\ X_{рез} &= \frac{b_{\mu}}{Y_{\mu}^2} + X. \end{aligned} \right\} \quad (103,6)$$

Сравнивая выражение для $R_{рез}$ в формуле (103,6) с выражением (101,3), мы видим, что одно из них легко переходит в другое, так как

$$\frac{E \sin \alpha}{I} = \frac{E \sin \alpha}{E Y_{\mu}} = \frac{Y_{\mu} \sin \alpha}{Y_{\mu}^2} = \frac{g_{\mu}}{Y_{\mu}^2}.$$

Формулами (101,5) и (101,6) мы ввели понятие о проводимости цепи $\dot{Y} = g - jb$, очевидно, что это есть величина, обратная результирующему сопротивлению, так что

$$\dot{Y} = \frac{1}{Z_{рез}} = \dot{Y}_{рез} \text{ или } \dot{Y}_{св},$$

Найдем выражения для g , b и Y . Имеем

$$g - j \cdot b = \frac{1}{\left(\frac{g_{\mu}}{Y_{\mu}^2} + R \right) + j \left(\frac{b_{\mu}}{Y_{\mu}^2} + X \right)} = \frac{\frac{g_{\mu}}{Y_{\mu}^2} + R - j \left(\frac{b_{\mu}}{Y_{\mu}^2} + X \right)}{\left(\frac{g_{\mu}}{Y_{\mu}^2} + R \right)^2 + \left(\frac{b_{\mu}}{Y_{\mu}^2} + X \right)^2}.$$

Отсюда

$$g = \frac{\frac{g_{\mu}}{Y_{\mu}^2} + R}{\left(\frac{g_{\mu}}{Y_{\mu}^2} + R \right)^2 + \left(\frac{b_{\mu}}{Y_{\mu}^2} + X \right)^2} = \frac{g_{\mu} + R Y_{\mu}^2}{Z^2 Y_{\mu}^2 + 1 + 2(R g_{\mu} + X b_{\mu})},$$

$$b = \frac{\frac{b_{\mu}}{Y_{\mu}^2} + X}{\left(\frac{g_{\mu}}{Y_{\mu}^2} + R \right)^2 + \left(\frac{b_{\mu}}{Y_{\mu}^2} + X \right)^2} = \frac{b_{\mu} + X Y_{\mu}^2}{Z^2 Y_{\mu}^2 + 1 + 2(R g_{\mu} + X b_{\mu})},$$

и, наконец, на основании соотношения $Y^2 = g^2 + b^2$

$$Y = \frac{Y_{\mu}}{\sqrt{Z^2 Y_{\mu}^2 + 1 + 2(R g_{\mu} + X b_{\mu})}}.$$

Для упражнения применим формулу (30,7) для определения фиктивного активного сопротивления катушки; по этой формуле оно равно $\frac{g}{Y^2}$; подставляем вместо g и Y их значения:

$$\frac{g}{Y^2} = \frac{g_{\mu} + R \cdot Y_{\mu}^2}{Y_{\mu}^2} = \frac{g_{\mu}}{Y_{\mu}^2} + R;$$

таким образом опять получается выражение (103,6).

§ 104. Феррорезонанс. Опрокидывание фаз

Явления резонанса в цепи, где индуктивность представлена катушкой с железным сердечником, представляют весьма интересные особенности, хотя пока еще мало использованные практически, так что мы ограничимся здесь в описании их лишь самым существенным.

Пусть к цепи, содержащей конденсатор и такую катушку, приложено напряжение, которое мы можем изменять по произволу; частота же пусть будет постоянной; далее активным сопротивлением катушки, потерями в железе и искажением кривой тока пренебрежем — качественную сторону картины это не изменит, тогда как учет этих обстоятельств делает теорию в высшей степени сложной.

Резонансом мы называем то состояние, когда напряжение на катушке равно напряжению на конденсаторе, т. е.

$$\omega LI_m = \frac{I_m}{\omega C}.$$

В выражении напряжения на катушке L теперь, в присутствии железа, не будет величиной постоянной; произведение LI_m равно амплитуде потока Φ_m , умноженной на $\omega \cdot 10^{-8}$, где ω есть число витков; следовательно, если S есть площадь поперечного сечения железа сердечника,

$$E_{cm} = \omega LI_m = \omega \omega \Phi_m 10^{-8} = \omega \omega S 10^{-8} \cdot B_m.$$

Таким образом если мы возьмем кривую намагничения OP железного сердечника (фиг. 180) и применим к ней масштаб, в $\omega \cdot \omega \cdot S \cdot 10^{-8}$ раз меньший прежнего, то эта кривая даст нам напряжения на катушке в зависимости от силы тока, которую мы сможем изменять, меняя все приложенное к цепи напряжение.

Поведем на той же фигуре прямую OQ под углом

$$\angle QON = \arctg \frac{1}{\omega C}$$

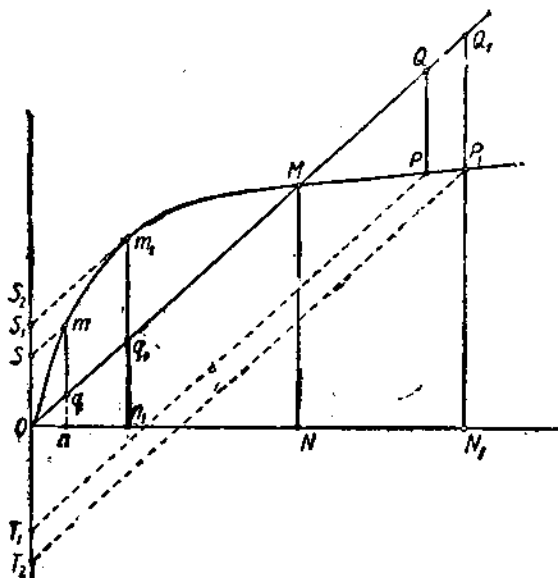
к оси абсцисс. Ее ординаты дадут нам напряжения на конденсаторе.

Прямая OQ и кривая OP пересекутся в точке M ; это и будет состояние резонанса при данной частоте, так как напряжения на катушке и на конденсаторе теперь равны.

Таким образом в нашей цепи наступление резонанса зависит от силы тока в цепи, т. е. от приложенного напряжения.

Однако экспериментально это состояние резонанса мы не сможем получить именно по следующим причинам.

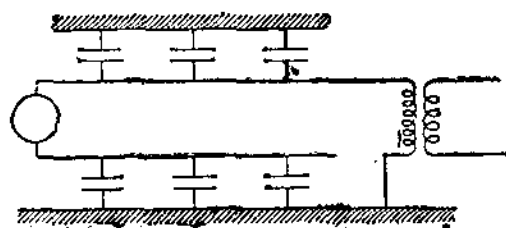
Представим себе, что мы увеличиваем приложенное к цепи напряжение, начиная от нуля. При условии, что активное сопротивление равно нулю, это напряжение будет все реактивно и равно разности напряжений на катушке и на конденсаторе. При какой-нибудь его величине OS в цепи будет течь ток Om , напряжение на катушке будет mt , на конденсаторе nq , причем $mt - nq = OS$. Ток при этом отстает от всего напряжения.



Фиг. 180.

Проводя касательную $S_1 m_1$ к кривой $O m m_1 M$, параллельную прямой $O q q_1 Q$, до пересечения с осью ординат, мы получим на последней отрезок $OS_1 = m_1 q_1$, который представит нам наибольшее напряжение, при котором еще возможно иметь в цепи отстающий ток, ибо малейшее повышение напряжения перенесет всю работу цепи на совсем другие части кривых.

Именно между точками O и M отрезок $m_1 q_1$ есть наибольшая разность ординат m и q , большую разность мы сможем иметь лишь на кривых вправо от точек Q и P , где точка P получается так: отложим $OT_1 = OS_1$ вниз по оси ординат и проведем прямую $T_1 P \parallel OQ$. Отрезок ординаты $QP = OT_1 = OS_1$; всякий отрезок ординаты между прямой OQ и кривой OMP вправо будет больше. При каком-



Фиг. 181.

нибудь напряжении $OS_2 > OS_1$, делая такое же построение, получим $OT_2 = OS_2 = Q_1 P_1$, и в цепи установится режим, характеризующийся точками N_1 , P_1 и Q_1 . Сила тока при этом будет ON_1 ; она будет опережать все напряжение $Q_1 P_1$, ибо теперь напряжение на конденсаторе стало больше напряжения на катушке.

Если сила тока изменила свою фазу относительно всего напряжения на π , то также изменяют свои фазы на прямо противоположные и напряжения на конденсаторе и катушке. Это явление часто называется опрокидыванием фаз. Сопровождается это явление ростом тока скачком от величины Op_1 до величины ON_1 и напряжения на конденсаторе от величины $n_1 q_1$ до величины $N_1 Q_1$, в то время как напряжение на катушке возрастет сравнительно немного вследствие влияния насыщения железа.

В практике подобные случаи наблюдались, например, при обрыве одного провода линии, ведущей к трансформатору, и заземлении конца его у трансформатора, как показано на фиг. 181. Так как провода линии обладают емкостью по отношению к земле, то у нас образуется цепь с последовательным соединением емкости и индуктивности, как описано выше, с большими перенапряжениями в линии относительно земли.

Опрокидывание фаз, как нетрудно видеть, можно получить и при постоянном напряжении и переменной частоте. При этом только, очевидно, после опрокидывания напряжение на катушке будет расти почти пропорционально частоте.

ГЛАВА ТРИНАДЦАТАЯ

ТРАНСФОРМАТОР

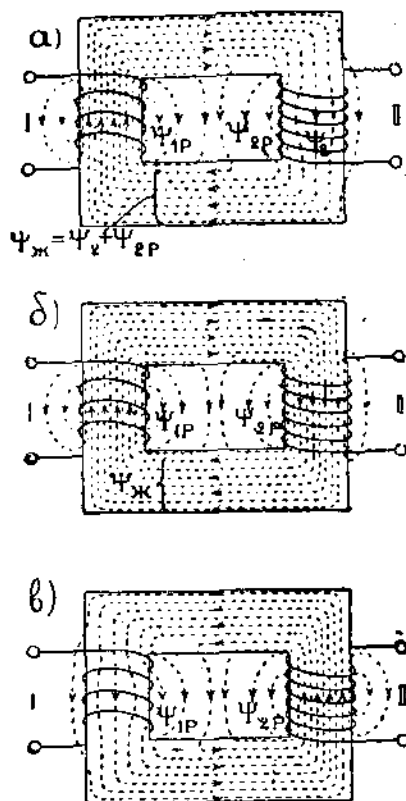
§ 105. Векторная диаграмма трансформатора

Если мы на замкнутый железный сердечник намотаем не одну, а две катушки, то при подключении одной из них, которую мы при этом назовем „первичной“, к зажимам переменного тока, в другой, которую мы назовем „вторичной“, будет индуцироваться переменная э. д. с. того же числа периодов, какое имеет ток в первичной катушке; от вторичной катушки мы можем взять переменный ток, как от обычного источника переменного тока — генератора. Такой прибор называется трансформатором, так как с помощью его можно изменить величину напряжения переменного тока, прежде чем приложить его к данной цепи. На фиг. 182 схематически представлен такой трансформатор. Цифрой *I* обозначена первичная катушка, цифрой *II* — вторичная.

В практике обе катушки, первичная и вторичная, находятся на одной и той же стороне сердечника, одна вокруг другой; расположение по фиг. 182 взято для первоначального ознакомления с физикой явлений в трансформаторе.

Обратимся прежде всего к рассмотрению магнитных потоков в трансформаторе и вызываемых этими потоками э. д. с.

Пока вторичная катушка не замкнута на какую-либо цепь (или на короткое), в ней тока нет, и она не оказывает никакого влияния на явления. Мы имеем при этом случай, рассмотренный в предыдущей главе.



Фиг. 182.

Состояние трансформатора, когда вторичная катушка не замкнута, называется „холостым ходом“, или „холостой работой“ его.

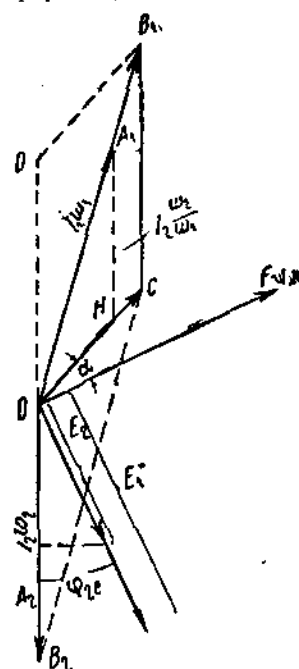
Диаграмма фиг. 177 есть векторная диаграмма холостой работы трансформатора

Предположим теперь, что вторичная катушка замкнута и сила тока в ней и в цепи, подключенной к ней, I_2 . Силу тока в первичной катушке обозначим через I_1 , мгновенные значения сил токов — через i_1 и i_2 .

Состояние трансформатора, когда от вторичной катушки берут ток, называется состоянием „нагрузки“, или просто „нагрузкой“ трансформатора.

Итак изучим его состояние при нагрузке.

В отличие от случая холостой работы (фиг. 177) здесь будут действовать м. д. с. двух катушек, и магнитный поток $\psi_{ж}$, идущий весь свой путь по железу и проходящий, таким образом, сквозь обе катушки, будет являться результатом действия обеих катушек.



Фиг. 183.

Магнитодвижущая сила первичной катушки теперь должна преодолевать не только магнитное сопротивление пути магнитного потока в железе, но и м. д. с. вторичной катушки, так как ток, индуцирующийся в последней, хотя в фазе своей и зависит от соотношений активного и реактивного сопротивлений, подключенных ко вторичной катушке, в общем по закону Ленца противодействует вызвавшей его причине, и общее действие вторичной катушки будет противоположно действию первичной.

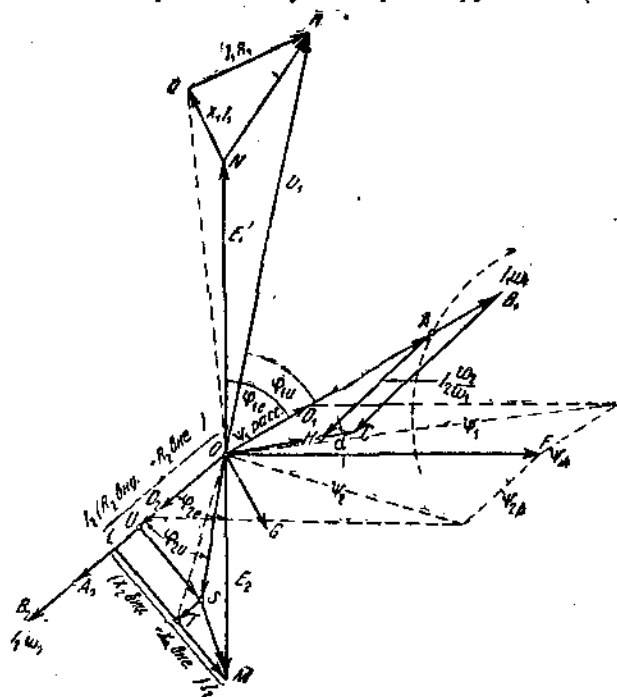
Пусть на фиг. 183 вектор $\overline{OF}$ есть вектор потока $\psi_{ж}$, общего обеим катушкам. В первичной катушке этим потоком индуцируется э. д. с. E_1 , во вторичной — э. д. с. E_2 . Эти э. д. с. относятся, как числа витков w_1 и w_2 первичной и вторичной катушек:

$$E_1 : E_2 = w_1 : w_2,$$

или $\frac{E_2}{E_1} = \frac{w_2}{w_1} = k$, где k называется коэффициентом трансформации.

E_1 есть для нас противоэлектродвижущая сила в первичной катушке, а E_2 есть э. д. с. „источника“ — нового — для получения переменного тока. В зависимости от соотношений активного и реактивного сопротивлений цепи, подключенной к этой э. д. с. E_2 , сила тока I_2 в этой „вторичной цепи“ будет более или менее сдвинута в фазе относительно E_2 . Нанесем I_2 на чертеж в виде вектора $\overline{OA_2}$, отстающего на угла φ_{2e} от вектора E_2 . Умножив I_2 на w_2 , получим вектор $\overline{OB_2}$ м. д. с. вторичной катушки.

„Первичную“ силу тока мы получим из того соображения, что первичная м. д. с. должна складываться из двух составляющих: первой, — равной и противоположной $I_2 w_2$, т. е. вектора $\overline{OD}$, уравнивающего м. д. с., или лучше сказать, размагничивающее действие вторичной катушки при нагрузке ее (т. е. когда от нее берем ток), и



Фиг. 184.

второй составляющей, создающей магнитный поток $\Psi_{ж}$; как увидим далее, этот поток не постоянен при разных нагрузках трансформатора, т. е. при разных силах тока I_2 , а меняется при малых нагрузках мало, а при больших — сильно. Магнитодвижущая сила, необходимая для создания потока $\overline{OF}$, пусть будет $\overline{OC}$, так что, разделив $\overline{OC}$ на число витков в первичной катушке w_1 , мы получим вектор $\overline{OH}$ той силы тока, которая должна была бы течь в первичной катушке, чтобы при холостом ходе, т. е. когда во вторичной катушке тока нет, создать такой же поток в железе $\overline{OF}$, какой создается теперь.

Этот ток $\overline{OH}$ называется намагничивающим током.

Так как теперь есть размагничивающее действие вторичной катушки, то первичная м. д. с. должна быть представлена суммой $\overline{OD}$ и $\overline{OC}$, т. е. вектором $\overline{OB_1}$.

Разделив $\overline{OB_1}$ на w_1 , получим вектор $\overline{OA_1}$ „первичной“ силы тока I_1 .

Заметим, что треугольник OA_1H подобен треугольнику OB_1C , стороны первого в w_1 раз менее сторон второго, а потому

$$\overline{A_1H} = \overline{B_1C} : w_1 = I_2 \cdot \frac{w_2}{w_1}.$$

Далее, естественно, в соответствии с изложенным в предыдущей главе угол $\angle COF$ равен углу α гистерезиса (и токов Фуко).

Теперь следует уяснить себе, пока без особых математических выкладок, характер физического процесса при нагрузке трансформатора, особенно при ее росте, т. е. при росте тока I_2 .

Увеличим сравнительно с предыдущим состоянием силу тока I_2 (уменьшив сопротивления, подключенные к зажимам вторичной катушки). При этом увеличится размагничивающее действие вторичной катушки, ослабнет поток $\Psi_{ж}$, умень-

шится от ослабления потока противоэлектродвижущая сила первичной катушки E_1 (вектор $\overline{ON}$ на фиг. 177), увеличится разность между U_1 и E_1 , т. е. вектор $\overline{NK}$ на фиг. 177, а так как $\overline{NK} = I_1 \cdot \sqrt{R_1^2 + X_1^2}$, причем R_1 и L_1 постоянны, то увеличится сила тока I_1 до такой величины, чтобы $\Psi_{ж}$ стало почти прежней величины. Однако $\Psi_{ж}$ не сможет стать в точности равным своему прежнему значению, ибо тогда E_1 было бы прежним, и разность между U_1 и E_1 не была бы больше прежней, следовательно, и ток I_1 не мог бы быть больше. В этом объяснении процесса при росте нагрузки мы не учитываем влияния изменения сдвига фаз различных векторов друг относительно друга, но это влияние качественной стороны вопроса не меняет, а в дальнейшем мы найдем и математические выражения для всех этих только что описанных зависимостей.

Итак с ростом нагрузки, т. е. силы тока I_2 , растет соответственно и I_1 и уменьшается общий поток $\Psi_{ж}$.

Ток холостого хода есть поэтому обыкновенно наименьший ток в первичной катушке, хотя строгое математическое исследование показывает, что могут быть такие соотношения в величинах, характеризующих трансформатор (все сопротивления и проводимости намагничения), что при малых нагрузках, т. е. при малом I_2 , первичный ток I_1 сначала немного уменьшается, а потом уже начинает расти.

Теперь обратимся к магнитным потокам (фиг. 182) и построению векторной диаграммы (фиг. 184).

Так же, как в обыкновенной катушке (фиг. 182, а), здесь будет существовать поток рассеяния около первичной катушки, пропорциональный первичной силе тока i_1 и находящийся в фазе с ней; мгновенную величину этого потока обозначим через ϕ_{1p} и назовем его первичным потоком рассеяния. Введя в рассмотрение э. д. с., индуцируемую этим потоком в первичной катушке, мы можем теперь построить диаграмму напряжений первичной катушки.

Начертим (фиг. 183) по образцу фиг. 183 снова векторы:

$$\overline{OF} = \Psi_{ж}, \overline{OM} = E_2, \overline{OB_2} = I_2 \omega_2, \overline{OB_1} = I_1 \omega_1, \overline{OH}, \overline{OC}, \overline{OA_1} = I_1, \overline{A_1H} = I_2 \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

и, наконец, вектор $\overline{ON} = -E_1$, подобно вектору $\overline{ON}$ на фиг. 177. Затем отложим $\overline{OD} = \Psi_{1p}$ — амплитуде первичного потока рассеяния, и $\overline{OG}$ — вектор, равный э. д. с. от этого потока.

Так как вектор ϕ_{1p} пропорционален току i_1 и фазе с ним, то можно положить

$$\phi_{1p} = i_1 \times (\text{постоянная величина}),$$

и э. д. с. от него

$$e_{1p} = -\omega_1 \cdot \frac{d\phi_{1p}}{dt} 10^{-8} = -(\omega_1 \times \text{пост. вел.}) \cdot \frac{di_1}{dt} = -S_1 \cdot \frac{di_1}{dt}.$$

Здесь коэффициент S_1 не есть величина индуктивности первичной катушки, так как им учитывается только поток рассеяния, а не весь поток, производимый первичным током. S_1 правильнее называть здесь величиной рассеяния или другим подобным названием.

Таким образом вектор $\overline{OG}$ представляет э. д. с. с действующим значением $E_{1p} = \omega S_1 I_1 = I_1 X_1$.

Приложив к вектору $\overline{ON}$ вектор $\overline{NQ} = -\overline{OG}$ и вектор $\overline{QK} = I_1 \cdot R_1$, мы получаем $\overline{OK}$ — вектор всего напряжения U_1 , приложенного к первичной катушке трансформатора.

Можно сложить векторы $\overline{OD_1}$ и $\overline{OF}$ и получить вектор Ψ_1 всего первичного потока, которому соответствует вся первичная э. д. с. $\overline{QO}$, причем вектор $\overline{QO}$ перпендикулярен к вектору Ψ_1 .

Так как векторы E_2 и I_2 у нас уже на чертеже есть, то очень просто теперь достроить диаграмму для вторичной цепи. Треугольник OLM есть обычный треугольник напряжений; в нем $OM = E_2$, $OL = I_2 R_2 = I_2 (R_{2\text{вну}} + R_{2\text{вне}})$ и $LM = \omega S_2 I_2 = \omega (S_{2\text{вну}} + L_{2\text{вне}}) I_2 = X_2 I_2 = (X_{2\text{вну}} + X_{2\text{вне}}) I_2$; здесь R со значками означают активные сопротивления самой вторичной катушки ($R_{2\text{вну}}$) и цепи нагрузки, подключенной к ней ($R_{2\text{вне}}$); $L_{2\text{вне}}$ означают индуктивность этой цепи нагрузки, т. е. внешней части вторичной цепи, а $S_{2\text{вну}}$ есть величина рассеяния вторичной катушки, совершенно аналогичная по своему значению и происхождению коэффициенту S_1 , только что нами введенному. Остановимся на этом вопросе подробнее и обратимся опять к магнитным потокам (фиг. 182).

Кроме потока $\Psi_{\text{ж}}$, общего обоим катушкам, во вторичной катушке около витков ее будет существовать еще вторичный поток рассеяния $\overline{OD_2} = \Psi_{2p}$ (фиг. 184), производимый током I_2 и находящийся с ним в одной фазе, как идущий в воздухе (фиг. 182, б). Так как ток I_2 вообще противодействует току I_1 , то и Ψ_{2p} внутри катушки направлено навстречу $\Psi_{\text{ж}}$; но в одном месте не могут существовать два разных потока, а потому потоки $\Psi_{\text{ж}}$ и Ψ_{2p} сложатся внутри катушки в результирующий вторичный поток Φ_2 (фиг. 184), а вне катушки в воздухе поток Φ_{2p} останется (фиг. 182, а). Введем коэффициент $S_{2\text{вну}}$ и э. д. с. от потока Φ_{2p} выразим так:

$$e_{2p} = -w_2 \frac{d\Phi_{2p}}{dt} 10^{-8} = -S_{2\text{вну}} \frac{di_2}{dt}.$$

Откладываем на линии LM отрезок $TM = \omega S_{2\text{вну}} \cdot I_2 = I_2 \cdot X_{2\text{вну}}$. Тогда вектор $\overline{OT}$ представит всю э. д. с. во вторичной катушке от всего вторичного потока Φ_2 и, следовательно, будет перпендикулярен к вектору Ψ_2 .

Можно представить себе дело и так, что из всего потока $\Phi_{\text{ж}}$ только часть Φ_2 проходит сквозь вторичную катушку, а часть — Φ_{2p} (прямо противоположная по фазе току I_2 и мгновенному значению $\overline{OD_2} = \Psi_{2p}$) вследствие противодействия вторичных ампервитков оттесняется и огибает вторичную катушку по воздуху, как изображено на фиг. 182, а. При таком представлении и вторичный поток рассеяния создается первичной катушкой, но находится он в фазе не с первичным, а со вторичным током; чем мгновенное i_2 больше, тем (в этот момент) большее число линий Φ_{2p} оттесняется из катушки наружу.

Конечно не следует упускать из виду, что будет промежуток времени (пока линия времени близка к направлению, перпендикулярному к I_1), когда будет в магнитной цепи доминировать вторичная м. д. с. Тогда все потоки создаются вторичным током, в том числе и первичный поток рассеяния Φ_{1p} (фиг. 182, в) создается током I_2 , хотя находится в фазе с током I_1 .

На основании вышеизложенных соображений определяются э. д. с. от потоков рассеяния и вводятся в векторную диаграмму напряжений первичной и вторичной катушек трансформатора. Эту диаграмму можно назвать „классической“, ибо это была первая продуманная диаграмма напряжений в трансформаторе, послужившая основой для теории работы трансформатора.

Однако следует теперь же заметить, что изложенные выше представления о потоках рассеяния не являются строгими; очевидно, что как первичный поток рассеяния, так и вторичный зависят и от первичных ампервитков и от вторичных, ибо во всех точках пространства поле определяется совместным действием обеих катушек с токами. Поэтому часто и с большим основанием потоки рассеяния принимают находящимися в фазе с „результатирующими ампервитками“.

Чтобы закончить построение диаграммы, надо получить вектор напряжения на зажимах вторичной катушки, или „вторичного напряжения“. Для этого из вектора полной э. д. с. $\overline{OT}$ вычтем вектор падения напряжения в активном сопротивлении катушки $\overline{ST} = I_2 R_{2\text{вну}}$ и получим вектор $\overline{OS} = U_2$ вторичного напряже-

ния. Угол между $E_2 = \overline{OM}$ и $I_2 = \overline{OA_2}$ обозначим через φ_{2e} , а угол между $U_2 = \overline{OS}$ и I_2 — через φ_{2u} . Далее, $\overline{UL} = \overline{ST} = I_2 R_{2\text{вну}}$, $\overline{OU} = I_2 R_{2\text{вне}}$ и $\overline{US} = \omega L_{2\text{вне}} I_2 = I_2 \cdot X_{2\text{вне}}$.

§ 106. Баланс мощностей

Перейдем теперь к соотношениям мощностей в трансформаторе, причем введем предварительно обозначения: угол NOB_1 между E_1 и I_1 обозначим через φ_{1e} , а угол KOB_1 между U_1 и I_1 обозначим через φ_{1u} .

Обозначим далее мощность, получаемую первичной катушкой от зажимов с напряжением U_1 , через P_1 . Она равна

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_{1u}. \quad (A)$$

Отнеся здесь косинус множителем к U_1 , заменяя проекцию вектора U_1 на вектор тока через сумму проекции векторов, составляющих U_1 и приняв во внимание, что один из составляющих векторов, именно $\overline{NQ}$, перпендикулярен к вектору тока, мы получим

$$\begin{aligned} P_1 &= I_1 (U_1 \cos \varphi_{1u}) = I_1 (E_1 \cos \varphi_{1e} + I_1 \cdot R_1) = \\ &= I_1 E_1 \cos \varphi_{1e} + I_1^2 \cdot R_1. \end{aligned} \quad (B)$$

Здесь $I_1^2 R_1$ есть потеря на джоулев эффект в первичной катушке, а $I_1 \cdot E_1 \cos \varphi_{1e}$ представляет мощность, передающуюся из первичной катушки в магнитное поле посредством противоэлектродвижущей силы $-E_1$. Выражение мощности, передаваемой в магнитное поле P_m , можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} P_m &= I_1 \cdot E_1 \cos \varphi_{1e} = E_1 \cdot (I_1 \cos \varphi_{1e}) = E_1 \cdot (\overline{OA_1} \cos \varphi_{1e}) = \\ &= E_1 \cdot [\overline{OH} \cos (\angle NOH) + \overline{HA_1} \cdot \cos (\angle B_2 OM)], \end{aligned}$$

принимая во внимание, что $HA_1 \parallel OB_2$.

Далее, так как $\angle NOH = \frac{\pi}{2} - \alpha$, то, обозначая величину $\overline{OH}$ через I_μ , получаем

$$\begin{aligned} P_m &= E_1 \cdot (I_\mu \sin \alpha + I_2 \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \varphi_{2e}) = \\ &= E_1 \cdot I_\mu \sin \alpha + E_1 \cdot I_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \varphi_{2e}. \end{aligned} \quad (C)$$

Здесь первый член в правой части представляет потери на гистерезис в железе (и токи Фуко) при потоке Ψ_m данной величины (амплитуды), так как I_μ есть, как выше было указано, та сила тока, которая должна иметь место в первичной катушке при холостом ходе, чтобы поток этот был такой же точно, как и теперь.

Итак $E_1 I_\mu \sin \alpha = P_h$.

Второй член представляет мощность, обозначим ее через P_2 , передающуюся из магнитного поля во вторичную катушку, что ясно обнаруживается, если множитель $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ отнести не к силе тока, а к э. д. с.; тогда мы будем иметь

$$E_1 I_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \varphi_{2e} = \left(E_1 \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) I_2 \cos \varphi_{2e} = E_2 \cdot I_2 \cos \varphi_{2e}, \quad (D)$$

так как $E_1 : E_2 = \omega_1 : \omega_2$, как было указано в начале этой главы.

Последнее выражение может быть опять представлено в виде суммы, именно следующим образом:

$$\begin{aligned} E_2 I_2 \cos \varphi_{2a} &= I_2 (E_2 \cos \varphi_{2a}) = I_2 (\overline{OM} \cdot \cos \varphi_{2a}) = \\ &= I_2 (\overline{ST} + \overline{OS} \cdot \cos \varphi_{2a}) = I_2 (I_2 R_{2\text{эну}} + U_2 \cdot \cos \varphi_{2a}) = \\ &= I_2^2 R_{2\text{эну}} + U_2 I_2 \cos \varphi_{2a}. \end{aligned} \quad (H)$$

Первый член в правой части $I_2^2 R_{2\text{эну}}$ представляет потери на джаулев эффект во вторичной катушке, а второй

$$P_2 = U_2 I_2 \cos \varphi_{2a}$$

уже полезную вторичную мощность — мощность, тратящуюся во внешней части вторичной цепи.

Сопоставляя теперь формулы (A), (B), (C), (D) и (H), мы имеем

$$P_1 = I_1^2 R_1 + E_1 I_1 \sin \alpha + I_2^2 R_{2\text{эну}} + U_2 I_2 \cos \varphi_{2a},$$

или

$$P_1 = I_1^2 R_1 + P_h + I_2^2 R_{2\text{эну}} + P_2.$$

Отношение P_2 к P_1 есть к. п. д. трансформатора.

Если при всевозможных изменениях нагрузки трансформатора угол φ_{2a} сдвига фаз между током и напряжением во вторичной цепи остается постоянным, то вектор первичной силы тока I_1 изменяется с нагрузкой по величине и фазе (углу φ_{1a} с вектором U_1) так, что его конец A_1 описывает окружность; центр этой окружности лежит вправо от O несколько выше линии OF . Такая окружность называется круговой диаграммой тока. Доказывается то положение, что A_1 описывает окружность различными способами. С двумя из них мы ознакомимся ниже. Особенно интересен тот случай, когда $\varphi_{2a} = 0$, т. е. когда $X_{2\text{эне}} = 0$, так как тогда одна и та же векторная диаграмма и одна и та же круговая диаграмма тока получаются и для трансформатора и для асинхронного двигателя.

От холостого хода, когда вектор I_1 мал и составляет с U_1 большой угол, до полной нагрузки вектор тока I_1 все время растет и поворачивается к вектору U_1 , так что угол φ_{1a} все время уменьшается.

Добавим, что трансформаторы и асинхронные двигатели обыкновенно рассчитываются так, что при полной их нагрузке вектор тока I_1 является касательной к окружности. При перегрузке вектор I_1 растет далее, но поворачивается понемногу в сторону к OF , т. е. при этом угол φ_{1a} растет. Таким образом при полной нагрузке этот угол наименьший, а $\cos \varphi_{1a}$ наибольший — при полной нагрузке машина или трансформатор работает при этом с наилучшим коэффициентом мощности, наилучшим $\cos \varphi$.

Обратимся теперь к вопросу, намеченному нами в § 101, именно к вопросу о токах Фуко в железе.

Если бы токов Фуко в железе не было, то при холостом ходе угол α между векторами тока и потока был бы чистым углом гистерезиса.

Токи Фуко в железе являются по существу вторичными токами. Можно заменить в расчетах токи Фуко в железе током в некоторой обмотке с подходящим числом витков и активным сопротивлением.

При нагрузке трансформатора токи Фуко будут, таким образом, увеличивать действие вторичного тока I_2 . Так как мы из диаграммы фиг. 184 видели, что с ростом нагрузки угол $B_1 OF$ растет (до полной нагрузки), то ясно, что и действие токов Фуко при холостой работе трансформатора скажется так же. Чем толще листы железа, тем сильнее эти токи, тем больше их размагничивающее действие, тем больше мощность их, переходящее в тепло, и т. д. и тем больше угол COF на фиг. 184 или AOF на фиг. 177.

С этой точки зрения вообще чисто холостого хода трансформатора не может быть, ибо всегда есть токи Фуко, по существу являющиеся вторичными токами, но условно мы считаем холостым ходом состояние трансформатора до тех пор, пока нет тока в его вторичной катушке.

Этим мы и закончим пока изучение явлений в нагруженном трансформаторе, чтобы позднее вернуться лишь к чисто математической обработке результатов, в частности, к выводу круговой диаграммы тока.

§ 107. Изображение соотношений в цепи переменного магнитного потока посредством векторов

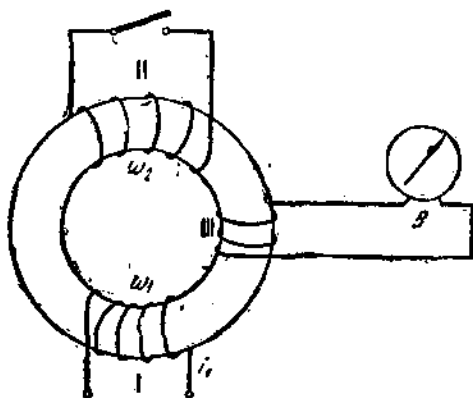
Мы уже и раньше, например, на векторной диаграмме трансформатора, вводили векторы м. д. с. и магнитных потоков. В настоящем параграфе мы несколько расширим область применения векторов к изображению соотношений между величинами в цепи переменного тока.

Рассмотрим магнитную цепь, изображенную на фиг. 185а. Железное кольцо намагничивается переменным током i_1 , текущим через катушку I с числом витков w_1 . Переменную м. д. с. этой катушки обозначим буквой M_1 , ее амплитуду — через M_{1m} , так что

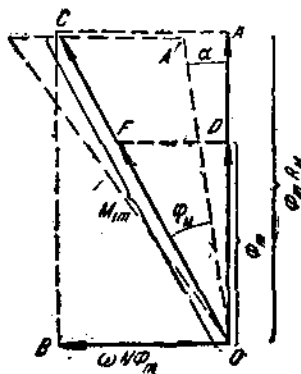
$$M_1 = 0,4\pi w_1 i_1 = k w_1 i_1,$$

$$M_{1m} = 0,4\pi w_1 I_{1m} = k w_1 I_{1m}.$$

Кроме катушки I на кольцо есть еще катушка II с числом витков w_2 и катушка III , к которой подключен вольтметр с очень большим сопротивлением, или, еще лучше, электростатический. Переменный магнитный поток Φ_1 , амплитуду которого мы обозначим через Φ_{1m} , индуцирует в катушке III э. д. с., измеряемую вольтметром. Так как ток через вольтметр или очень мал или при электростатическом вольтметре практически равен нулю, то м. д. с. катушки III мы можем положить равной нулю. Опыт показывает, что э. д. с. катушки III , даваемая показа-



Фиг. 185а.



Фиг. 185б.

ниями вольтметра, много больше в том случае, когда катушка II разомкнута, чем в том, когда катушка II замкнута на короткое. Объяснение этого факта после ознакомления с теорией трансформатора легко. В короткозамкнутой катушке II индуцируется э. д. с. и течет большой силы ток короткого замыкания; поэтому м. д. с. ее велика, но направлена почти прямо противоположно м. д. с. катушки I ; результирующая м. д. с. теперь меньше, чем при незамкнутой катушке II , магнитный поток в железе меньше, меньше и э. д. с. катушки III .

Переведем это объяснение на язык математики.

Обозначим магнитное сопротивление пути магнитного потока по кольцу через R_{μ} , причем

$$R_{\mu} = \frac{l}{\mu S},$$

где l — длина магнитных линий, S — площадь поперечного сечения желез, а μ — магнитная проницаемость железа.

Как известно, между постоянной м. д. с. M от постоянного тока, постоянным магнитным потоком Φ и магнитным сопротивлением R_{μ} существует соотношение, в котором видят некоторую аналогию с законом Ома для тока:

$$\Phi = \frac{M}{R_{\mu}}.$$

Для переменного потока Φ_1 и для переменной м. д. с. M_1 от переменного тока такое соотношение мы можем принять, лишь пренебрегая тем, что Φ_1 отстает в фазе от M_1 на угол α гистерезиса.

Итак, с этим приближением пусть пока для мгновенных значений

$$\Phi_1 = \frac{M_1}{R_{\mu}}, \text{ или } M_1 = \Phi_1 R_{\mu}, \quad (A)$$

и для амплитуд

$$M_{1m} = \Phi_{1m} R_{\mu}. \quad (B)$$

Подобное же соотношение будет существовать и для результирующей м. д. с. $M_1 + M_2$ двух катушек I и II и результирующего магнитного потока Φ в том случае, когда катушка II замкнута на короткое; э. д. с., индуцируемая общим или результирующим потоком Φ в этой катушке, равна

$$e_2 = -w_2 \cdot \frac{d\Phi}{dt} \cdot 10^{-8} \text{ вольт};$$

если активное сопротивление катушки II равно R_2 , то сила тока в ней

$$i_2 = \frac{e_2}{R_2} = - \frac{w_2 \cdot 10^{-8}}{R_2} \cdot \frac{d\Phi}{dt} \text{ ампер};$$

м. д. с. катушки II равна

$$M_2 = kw_2 i_2 = - \frac{k w_2^2 \cdot 10^{-8}}{R_2} \cdot \frac{d\Phi}{dt} = - N \frac{d\Phi}{dt}, \quad (C)$$

причем

$$N = \frac{k w_2^2 \cdot 10^{-8}}{R_2} = \frac{0,4\pi w_2^2 \cdot 10^{-8}}{R_2}. \quad (D)$$

Применяя формулу (A) для результирующих величин при действии двух катушек, имеем для мгновенных значений

$$M_1 + M_2 = \Phi \cdot R_{\mu},$$

но для амплитуд этих величин такого уравнения, аналогичного соотношению (B), мы, однако, не можем написать, так как M_1 и M_2 сдвинуты в фазе. Вставив в последнее уравнение вместо M_2 его величину (C), получим

$$M_1 - N \frac{d\Phi}{dt} = \Phi \cdot R_{\mu}.$$

откуда

$$M_1 = \Phi R_{\mu} + N \frac{d\Phi}{dt}. \quad (E)$$

Если мы в параллель к (E) напишем уравнение (8, 1) в таком виде:

$$e = iR + L \frac{di}{dt},$$

то сразу увидим полную аналогию (E) и (8, 1).

Если мы примем для простоты, что магнитный поток изменяется как синусоидальная функция времени, то можем написать

$$\Phi = \Phi_m \sin(\omega t),$$

и, вставив это выражение потока в (E), получим

$$M_1 = \Phi_m R_m \sin(\omega t) + \omega N \Phi_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (F)$$

Из этого уравнения вытекает, что M_1 изменяется тоже синусоидально и всякий момент может быть разложено на две составляющие величины. Уравнение (F) можно представить векторно, как это сделано на фиг. 185b.

Здесь вектор $\overline{OA} = \Phi_m R_m$; проекция его на линию времени даст первое слагаемое в правой части уравнения (F); вектор $\overline{OB} = \omega N \Phi_m$ опережает на четверть периода первый вектор, его проекция на линию времени даст второе слагаемое в правой части уравнения (F). Результирующий из $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ вектор $\overline{OC}$ представит м. д. с. M_{1m} , которую надо иметь катушке I, чтобы в цепи с данным железом, т. е. величиной R_m , и данной катушкой II, т. е. величиной N , создать магнитный поток с амплитудой Φ_m . Очевидно, что из треугольника AOC мы имеем

$$M_{1m}^2 = \Phi_m^2 R_m^2 + \omega^2 N^2 \Phi_m^2$$

и далее

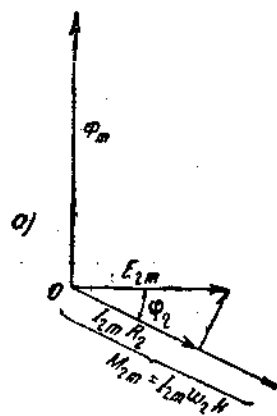
$$\Phi_m = \frac{M_{1m}}{\sqrt{R_m^2 + \omega^2 N^2}}.$$

Последняя формула напоминает по форме закон Ома для переменного тока. Так как токи Фуко в железе, как было указано в конце предыдущего параграфа, подобны току во вторичной катушке, то ясно, что их влияние можно учесть коэффициентом N .

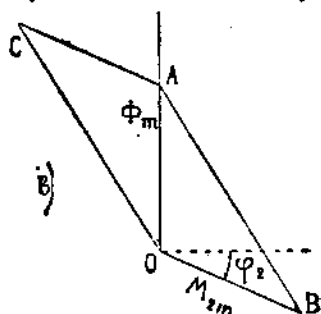
Из фиг. 185b имеем, что угол запаздывания в фазе потока Φ относительно м. д. с. M_1 равен:

$$\varphi_m = \operatorname{arctg} \frac{\omega N}{R_m}.$$

Так как гистерезис действует в том же смысле, что и коэффициент N , т. е. сдвигая Φ относительно M_1 в сторону запаздывания, то и его можно учесть коэффициентом N или следующим образом:



Фиг. 186a.



Фиг. 186b.

Разделив вектор $\overline{OA}$ на R_m , получим вектор $\overline{OD} = \Phi_m$ магнитного потока. Теперь повернем вектор $\overline{OA}$ на угол α гистерезиса влево относительно вектора $\overline{OD}$ в положение $\overline{OA'}$. Вектор $\overline{OA'}$ есть вектор м. д. с., необходимой для того, чтобы создать в магнитной цепи с сопротивлением R_m поток Φ_m при отсутствии вто-

получить действительные значения активных сопротивлений обмоток при переменном токе.

Остается определить экспериментально лишь X_1 и $X_{2\text{вну}}$, для чего мы применим следующий приближенный способ:

Замкнем вторичную катушку на короткое. Так как I_2 при этом будет иметь наибольшее значение, то и вектор $\overline{MT}$ (фиг. 184), равный $I_2 \cdot X_{2\text{вну}}$, где $X_{2\text{вну}}$ есть постоянная величина, тоже получит наибольшее значение и превратится в вектор $\overline{ML}$ (фиг. 187); э. д. с. E_2 разложится на две составляющие $\overline{OL} = I_2 \cdot R_{2\text{вну}}$, и $\overline{LM} = I_2 \cdot X_{2\text{вну}}$, перпендикулярные друг другу. Треугольник ампервитков OB_1C примет вид, изображенный на фиг. 187. Чтобы не перегрелись от больших сил токов I_2 и I_1 обмотки, первичное напряжение U_1 при этом понижают, доводя его приблизительно до трети или четверти от первоначальной величины, причем руководствуются именно тем, чтобы силы токов I_2 и I_1 были приблизительно таковы по величине, какими они должны быть при нормальной, полной нагрузке трансформатора. При этом векторы $\overline{OB_1}$ и $\overline{B_1C}$ (фиг. 187) имеют ту же длину, что и на фиг. 184, если предположить, что фиг. 184 начерчена для нормальной нагрузки, но направление их на фиг. 187 не то, что на фиг. 184, при коротком замыкании они почти совсем противоположны друг другу; вектор $\overline{OC}$ равнодействующих ампервитков поэтому получается небольшим, небольшими будут и поток Ψ_m и э. д. с. E_1 и E_2 (несколько процентов от прежних значений).

Примем приближенно, что $OB_1 \parallel B_1C$ и что $OB_1 = B_1C$, т. е. что

$$I_1 \cdot w_1 = I_2 \cdot w_2. \quad (A)$$

Построить по вектору $I_1 = \frac{\overline{OB_1}}{w_1}$ треугольник NQK мы еще не можем, ибо не знаем

X_1 , но пока допустим, что этот треугольник и вектор $E_1 = \overline{ON} = E_2 \cdot \frac{w_1}{w_2}$ у нас на

чертеже уже имеются. Увеличим треугольник OLM в $\frac{w_1}{w_2}$ раз линейно, отчего его

гипотенуза $\overline{OM}$ переводится в $\overline{OM} \cdot \frac{w_1}{w_2} = E_2 \cdot \frac{w_1}{w_2}$, т. е. станет равной $\overline{ON}$, и пе-

ренесем его в положение OpN так, чтобы гипотенуза его совпала с $\overline{ON}$. Так как мы приняли, что $I_1 \parallel I_2$, то имеем, что и $\overline{pN} \parallel \overline{QK}$ и $\overline{Op} \parallel \overline{NQ}$. Продолжим $\overline{Op}$ и $\overline{QK}$ до пересечения их в точке q . Тогда вектор U_1 первичного (пониженного) напряжения представится в виде геометрической суммы двух векторов Oq и qK , причем величины этих двух катетов прямоугольного треугольника OqK таковы:

$$\overline{qK} = I_1 R_1 + I_2 R_{2\text{вну}} \cdot \frac{w_1}{w_2},$$

$$\overline{Oq} = I_1 X_1 + I_2 X_{2\text{вну}} \cdot \frac{w_1}{w_2}.$$

При помощи соотношения (A) преобразуем эти выражения так:

$$\overline{qK} = I_1 \left[R_1 + R_{2\text{вну}} \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 \right],$$

$$\overline{Oq} = I_1 \left[X_1 + X_{2\text{вну}} \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 \right].$$

Величина

$$R_{2\text{вну}} \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 = \frac{R_{2\text{вну}}}{\left(\frac{w_2}{w_1} \right)^2} = \frac{R_{2\text{вну}}}{k^2}$$

называется вторичным сопротивлением, приведенным к первичной цепи, т. е. перевычисленным для случая, когда $w_2 = w_1$; обозначается эта величина через $R'_{2\text{вну}}$.

Не раз встречавшаяся нам величина $I_2 \frac{w_2}{w_1} = I_2 k$ называется вторичным током, приведенным к первичной цепи; такова должна была бы быть сила тока во вторичной катушке, чтобы магнитный поток был бы тот же самый, если бы число витков w_2 равнялось w_1 . Обозначается эта величина через I'_2 .

Ход экспериментальных измерений и построения таков. Измеряем значения R_1 и $R_{2\text{вну}}$ при постоянном токе и вычисляем их значения при переменном токе сообразно с его частотой, пользуясь таблицами. Затем переходим к измерениям с переменным током. Замыкаем на короткое вторичную катушку при пониженном первичном напряжении. Меряем величины U_1 , I_1 , P_1 , откуда определяем угол $\angle KOB_1$, равный $\angle OKq$. Наносим на чертеж $\overline{OK} = U_1$ и линию $\overline{Kq}$, на которую опускаем перпендикуляр $\overline{Oq}$. Находим точку Q , делящую линию Kq в отношении $KQ:Qq = R_1:R_{2\text{вну}} \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2$. Допуская приближенно, что $R_1:R_{2\text{вну}} = X_1:X_{2\text{вну}}$, проводим линию $QN \parallel Oq$ до пересечения с OK в точке N и линию $Np \parallel Kq$. Разделив затем отрезки pq на I_1 и Op на $I_1 \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2$, мы получим X_1 и $X_{2\text{вну}}$ соответственно.

Таков приближенный способ нахождения этих величин, зная которые, можно построить векторную диаграмму трансформатора.

Строить эту диаграмму для каждой возможной нагрузки трансформатора было бы слишком обременительно; поэтому свойства векторной диаграммы были обобщены и была выработана особая диаграмма — диаграмма работы, которая представляет состояния трансформатора при изменениях нагрузки в самых широких пределах с единственным условием постоянства при этих изменениях величины $\cos \varphi_{2a}$. Ее построение по данным опыта много точнее построения простой векторной диаграммы, теория ее изложена в следующих главах.

§ 109. Аналитические выражения для соотношений в трансформаторе

Перейдем теперь к алгебраическому выражению соотношений в трансформаторе, представленных геометрически диаграммой фиг. 184.

Основным является соотношение

$$\overline{OK} = \overline{ON} + \overline{NK},$$

или

$$\dot{U}_1 = \dot{E}_1' + \dot{I}_1 \dot{Z}_1. \quad (109,1)$$

В нагруженном трансформаторе э. д. с. E_1 индуцируется потоком в железе Φ_m , который сам создается ампервитками (м. д. с.), результирующими из первичных и вторичных, $\dot{I}_1 w_1 + \dot{I}_2 w_2$.

Другими словами, при отсутствии тока во вторичной катушке в одной первичной должен был бы течь ток силы

$$\dot{I}_\mu = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \frac{w_2}{w_1}, \quad (109,2)$$

чтобы создавался тот же самый магнитный поток и индуцировалась та же самая э. д. с. E_1 , что и теперь, при нагрузке трансформатора. Тогда мы не имели бы вторичного тока и явления были бы подобны явлениям в простой катушке.

Поэтому проводимость намагничивания есть коэффициент пропорциональности между E_1 и этим фиктивным током I_μ , который мы назовем намагничивающим током:

$$I_\mu = -\dot{E}_1 \dot{Y}_\mu = \dot{E}_1' \dot{Y}_\mu. \quad (109,3)$$

Прибавим к этим трем уравнениям четвертое, служащее для определения I_2 :

$$I_2 = \frac{\dot{E}_2}{\dot{Z}_2} = -\frac{\dot{E}_1 \frac{w_2}{w_1}}{\dot{Z}_2},$$

или, положив $\frac{w_2}{w_1} = k$, где k есть коэффициент трансформации,

$$I_2 = \frac{\dot{E}_1}{\dot{Z}_2} k = -\frac{\dot{E}_1'}{\dot{Z}_2} k. \quad (109,4)$$

В этих четырех уравнениях величина $\dot{U}_1$ — первичное напряжение — дана, она постоянна и известна; величина $\dot{Z}_1$ определяется конструкцией первичной катушки, величина $\dot{Z}_2$ определяется как конструкцией вторичной катушки, так и нагрузкой, т. е. сопротивлениями активным и реактивным цепи, подключаемой ко вторичной катушке; при переменной нагрузке эта величина есть независимая переменная в той своей части, которая относится к этой внешней части вторичной цепи; таким образом

$$Z_2 = R_{2\text{вн}} + R_{2\text{сн}} + j(X_{2\text{вн}} + X_{2\text{сн}}),$$

где $R_{2\text{сн}}$ и $X_{2\text{сн}}$ меняются как независимые переменные: их изменение есть изменение нагрузки трансформатора и вызывает изменение силы тока I_2 и I_1 по величине и фазе.

Величина $\dot{Y}_\mu$ при условии постоянства магнитной проницаемости, как выяснено в конце § 101, т. е. при небольших колебаниях нагрузки, при небольших изменениях величин E_1 и I_μ может считаться величиной постоянной.

Величина $k = \frac{w_2}{w_1}$ есть отвлеченное число, постоянное для данного трансформатора.

Остальные величины $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$, $\dot{I}_\mu$, $\dot{E}_1$ суть величины, меняющиеся с изменением нагрузки. Из них обыкновенно наибольший практический интерес представляет первичный ток, т. е. его величина и фаза, затем вторичный; величины же I_μ и E_1 суть величины характера математического или расчетного, а потому и важны лишь при расчетах.

Исключим из написанных нами четырех уравнений три величины I_2 , I_μ и E_1 , после чего мы получим одно уравнение, связывающее при помощи постоянных величин, упомянутых только что, переменные $\dot{Z}_2$ и $\dot{I}_1$.

Подставив из формулы (109,4) выражение для $\dot{I}_2$ в формулу (109,2), а затем полученное выражение для $\dot{I}_\mu$ в формулу (109,3), получим

$$\dot{E}_1' \dot{Y}_\mu = \dot{I}_1 - \dot{E}_1' \frac{k^2}{\dot{Z}_2}.$$

Обозначим $\frac{\dot{Z}_2}{k^2}$ через $\dot{Z}_2'$ и назовем эту величину сопротивлением вторичной цепи, приведенным к первичной цепи; тогда

$$\dot{E}_1' \dot{Y}_\mu = \dot{I}_1 - \frac{\dot{E}_1'}{\dot{Z}_2'}.$$

откуда

$$\dot{E}_1' = \frac{\dot{I}_1 \dot{Z}_2'}{1 + Y_u \dot{Z}_2'}.$$

Подставляя это выражение в формулу (109,1), получаем

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 \left(\dot{Z}_1 + \frac{\dot{Z}_2'}{1 + Y_u \dot{Z}_2'} \right). \quad (109,5)$$

Соотношение (109,5) чрезвычайно важно: как указывается в теории машин переменного тока, оно распространяется не только на трансформатор, но и на асинхронный двигатель и другие машины; далее мы увидим, что такое же соотношение получается и для любой линии передачи энергии.

В случае асинхронного двигателя коэффициент трансформации k равен отношению произведений из чисел витков на соответствующие обмоточные коэффициенты ротора и статора.

Далее, у асинхронного двигателя $X'_{2\text{вн}} = 0$, а $R'_{2\text{вн}}$ эквивалентно его механической нагрузке.

Выражение в скобках дает величину того сопротивления, которое нагруженный трансформатор или асинхронный двигатель представляет для тока $\dot{I}_1$. Можно по аналогии с прежним назвать эту величину фиктивным сопротивлением первичной катушки трансформатора или обмотки статора асинхронного двигателя.

Изменяя по своему призыву величину $\dot{Z}_2'$ в формуле (109,5), т. е. изменяя нагрузку, мы будем изменять и силу тока $\dot{I}_1$ по величине и фазе. К случаю безиндукционной нагрузки, т. е. когда во внешней части вторичной цепи индуктивности нет и потому $X_{2\text{вн}} = 0$, мы вернемся позднее.

В последующем нам встретятся два предельных значения сопротивления, представляемого выражением в скобках в формуле (109,5).

При холостом ходе трансформатор (или асинхронный двигатель) подобен простой катушке, для которой мы вывели формулы (103,4) и (103,5). Формула (103,4) получается из формулы (109,5), если мы поставим в нее то значение $\dot{Z}_2'$, которое оно приобретает при холостом ходе, т. е. когда вторичная цепь разомкнута, тогда $R_{2\text{вн}} = \infty$, а следовательно, и $\dot{Z}_2' = \infty$; при этом из формулы (109,5) имеем, обозначая через $\dot{I}_0$ значение первичного тока при холостом ходе:

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_0 \left(\dot{Z}_1 + \frac{1}{\frac{1}{\dot{Z}_2'} + Y_u} \right) = \dot{I}_0 \left(\dot{Z}_1 + \frac{1}{Y_u} \right),$$

т. е. формулу (103,4).

Пологая

$$\dot{Z}_1 + \frac{1}{Y_u} = \dot{Z}_0, \quad (109,6)$$

получаем

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_0 \dot{Z}_0. \quad (109,7)$$

$\dot{Z}_0$ есть сопротивление, представляемое трансформатором или двигателем при холостом ходе.

Второе интересующее нас значение сопротивления в формуле (109,5) получится, когда нагрузка возрастет до своей максимальной величины, т. е. когда $R_{2\text{вн}}$ уменьшится до нуля; это есть случай короткого замыкания при пол-

ном первичном напряжении U_1 ; при этом $\dot{Z}_2 = \dot{Z}_{2\text{вну}}$, и сопротивление в скобках формулы (109,5) получает величину

$$\dot{Z}_1 + \frac{\dot{Z}_{2\text{вну}}'}{1 + Y_{\mu} \dot{Z}_{2\text{вну}}} = \dot{Z}_k \quad (109,8)$$

формулу (109,5) мы для этого случая напомним так, обозначая первичную силу тока при коротком замыкании и нормальном первичном напряжении через I_{1k} :

$$\dot{U}_1 = I_{1k} \dot{Z}_k \quad (109,9)$$

Заметим, что асинхронный двигатель характеризуется часто названием „всеобщий трансформатор“ на том основании, что в роторе его трансформируется не только напряжение и сила тока, как в обыкновенном трансформаторе, но и частота. Обыкновенный трансформатор является в своей области — трансформирования напряжения и силы тока — аппаратом более совершенным, чем асинхронный двигатель в той же роли, ибо в последнем есть воздушный прослой и намагничивающий ток в нем поэтому больше. Главным его применением является его работа двигателем, т. е. трансформирование же электрической мощности в механическую. Кроме этого он употребляется еще в качестве фазорегулятора и потенциал-регулятора, но в измененных включениях, которых мы касаться здесь не будем.

Работа обыкновенного трансформатора при $X_{2\text{вне}} = 0$ с математической стороны может быть совершенно уподоблена работе асинхронного двигателя, последний воображают заторможенным и стоящим неподвижно, причем в цепь его ротора введено такое сопротивление $R_{2\text{вне}}$, что сила тока I_2 в роторе та же самая, что при некоторой механической нагрузке его во время хода. Таким образом механическую нагрузку и ток I_2 частоты sf , где s — скольжение, заменяют электрической нагрузкой и током той же силы I_2 , но частоты f .

§ 110. Изменения магнитного потока и вторичного напряжения при нагрузке

В настоящем параграфе мы хотим особо отметить то обстоятельство, что общий магнитный поток в трансформаторе (и, конечно, в асинхронном двигателе) не остается постоянным с ростом нагрузки, но непрерывно уменьшается, если первичное напряжение U_1 остается постоянным.

Мерой потока $\Phi_{\text{ж}}$ может служить э. д. с. E_1 , но

$$\dot{E}_1 = \dot{U}_1 - I_1 \dot{Z}_1,$$

откуда видно, что с ростом I_1 будет уменьшаться E_1 , хотя при этом и надо учесть, что вычитание в правой части здесь геометрическое.

При коротком замыкании (при нормальном первичном напряжении), однако, из фиг. 187 мы видим, что разностью фаз E_1 и U_1 можно пренебречь, и так как I_{1k} в несколько раз больше полного нагрузочного тока, то очевидно, что э. д. с. E_1 при коротком замыкании много меньше, чем при нормальной работе; то же относится, следовательно, и к общему магнитному потоку.

При коротком замыкании общий магнитный поток уменьшается до такой величины, что вторичная э. д. с. E_2 в состоянии покрыть лишь потери на падение напряжения $I_{2k}(R_{2\text{вну}} + jX_{2\text{вну}})$ в самой вторичной обмотке.

Потоки же рассеяния, мерой которых являются э. д. с. рассеяния $I_{1k} X_1$ и $I_{2k} X_2$, очевидно, чрезвычайно возрастают при коротком замыкании.

В пределах же от холостого хода до полной нагрузки изменения общего магнитного потока невелики, поэтому и E_1 и U_2 изменяются при этом немного.

Вторичное напряжение U_2 при полной нагрузке меньше величины его при холостом ходе на $2,5 - 5\%$, завися также и от $\cos \varphi_{2a}$; при плохом (например, 0,5) $\cos \varphi_{2a}$ получается разница, близкая к 5% , при $\cos \varphi_{2a} = 0,8 - 0,9$ — близкая к 3% . Цифры эти, конечно, являются лишь примерными.

§ 111. Аналитический вывод круговой диаграммы тока

Если $X_{2mc} = 0$, то, как указано выше, работа трансформатора со стороны математической ее теории совершенно подобна работе асинхронного двигателя. Если мы при этом будем менять R_{2mc} , т. е. нагрузку, то первичная сила тока I_1 будет изменяться по величине и фазе, причем конечная точка вектора I_1 будет занимать различные положения на плоскости чертежа по отношению к вектору напряжения $\dot{U}_1$. Как было уже сказано, геометрическим местом положений этой конечной точки является окружность. Докажем это. Исходным пунктом нашего доказательства явится соотношение (109,5). Для упрощения дальнейших выкладок диаграмму (184) представим себе начерченной так, чтобы вектор первичного напряжения $\dot{U}_1$ совпадал по направлению с вертикальной осью, т. е. с осью действительных величин. Общности дальнейших заключений такой выбор направления вектора $\dot{U}_1$ нисколько не затрагивает, как было разъяснено раньше. Тогда составляющая вектора $\dot{U}_1$ по оси мнимых величин равна нулю, и мы имеем

$$\dot{U}_1 = U_1.$$

Вектор первичной силы тока мы представим в комплексной форме:

$$\dot{I}_1 = A - jB;$$

так как A есть проекция вектора на вертикальную ось, т. е. на направление $\dot{U}_1$, то A равно активной составляющей силы тока (относительно напряжения), $A = I_a$, а B как проекция на направление перпендикулярное, равно реактивной составляющей, $B = I_r$; мы ввели буквы A и B вместо I_a и I_r для того, чтобы облегчить рассмотрение следующих далее алгебраических выкладок.

После этого мы переписываем соотношение (109,5) в таком виде:

$$U_1(1 + \dot{Y}_\mu \dot{Z}'_2) = (A - jB)(\dot{Z}_1 + \dot{Z}'_2 + \dot{Y}_\mu \dot{Z}_1 \dot{Z}'_2).$$

Подставляя сюда комплексные выражения всех величин:

$$\begin{aligned} \dot{Y}_\mu &= g_\mu - jb_\mu, \\ \dot{Z}_1 &= R_1 + jX_1, \\ \dot{Z}'_2 &= \frac{\dot{Z}_2}{k^2} = \frac{R_2 + jX_{2\text{ану}}}{k^2} = \frac{R_2}{k^2} + j \frac{X_{2\text{ану}}}{k^2} = R'_2 + jX'_{2\text{ану}}, \end{aligned}$$

и получаем

$$\begin{aligned} U_1[1 + R'_2 g_\mu + X'_{2\text{ану}} b_\mu + j(X'_{2\text{ану}} g_\mu - R'_2 b_\mu)] = \\ = (A - jB) \{ R_1 + jX_1 + R'_2 + jX_{2\text{ану}} + g_\mu(R_1 R'_2 - X_1 X'_{2\text{ану}}) + \\ + b_\mu(R_1 X'_{2\text{ану}} + R'_2 X_1) + j[g_\mu(R_1 X'_{2\text{ану}} + R'_2 X_1) - \\ - b_\mu(R_1 R'_2 - X_1 X'_{2\text{ану}})] \}. \end{aligned}$$

Приравнявая друг другу действительные части, а также мнимые, получаем два уравнения:

$$\begin{aligned} U_1(1 + R'_2 g_\mu + X'_{2\text{ану}} b_\mu) &= A[R'_2 + R_1 + g_\mu(R_1 R'_2 - X_1 X'_{2\text{ану}}) + \\ + b_\mu(R_1 X'_{2\text{ану}} + R'_2 X_1)] &+ B[g_\mu(R_1 X'_{2\text{ану}} + R'_2 X_1) - \\ - X_1 X'_{2\text{ану}}] &+ X_1 + X'_{2\text{ану}}. \end{aligned}$$

$$U_1 (X'_{2\text{вну}} g_\mu - R'_2 b_\mu) = A [X_1 + X'_{2\text{вну}} + g_\mu (R_1 X'_{2\text{вну}} + R'_2 X_1) - \\ - b_\mu (R_1 R'_2 - X_1 X'_{2\text{вну}})] - B [R_1 + R'_2 + g_\mu (R_1 R'_2 - X_1 X'_{2\text{вну}}) + \\ + b_\mu (R_1 X'_{2\text{вну}} + R'_2 X_1)].$$

В этих двух уравнениях переменные составляющие силы тока A и B и сопротивление R'_2 , включающее в себя переменную нагрузку; исключим эту последнюю величину из этих двух уравнений и мы получим одно уравнение с двумя переменными A и B . Затем мы можем истолковать A и B как координаты конечной точки вектора I_1 и посмотреть, какое геометрическое место в координатах A и B полученное уравнение выражает.

Для исключения переменной нагрузки мы в обоих уравнениях переносим все члены, содержащие R'_2 в левую часть, а остальные члены в правую, после чего получаем

$$R'_2 [U_1 g_\mu - A (1 + R_1 g_\mu + X_1 b_\mu) + B (R_1 b_\mu - X_1 g_\mu)] = \\ = A [R_1 + X'_{2\text{вну}} (R_1 b_\mu - X_1 g_\mu)] + B [X_1 + X'_{2\text{вну}} (1 + X_1 b_\mu + \\ + R_1 g_\mu)] - U_1 (1 + X'_{2\text{вну}} b_\mu); \\ R'_2 [-U_1 b_\mu + B (1 + R_1 g_\mu + X_1 b_\mu) + A (R_1 b_\mu - X_1 g_\mu)] = \\ = -B [R_1 + X'_{2\text{вну}} (R_1 b_\mu - X_1 g_\mu)] + A [X_1 + X'_{2\text{вну}} (1 + X_1 b_\mu + \\ + R_1 g_\mu)] - U_1 X'_{2\text{вну}} g_\mu.$$

Деля одно уравнение на другое, после приведения к одному знаменателю и упрощений получаем

$$\{X_1 + b_\mu Z_1^2 + X'_{2\text{вну}} [1 + Y_\mu^2 Z_1^2 + 2(b_\mu X_1 + g_\mu R_1)]\} (A^2 + B^2) - \\ - 2(g_\mu X'_{2\text{вну}} + b_\mu R_1 + Y_\mu^2 R_1 X_1) U_1 A - 2 \left[b_\mu (X_1 + X'_{2\text{вну}}) + \right. \\ \left. + Y_\mu^2 X_1 X'_{2\text{вну}} + \frac{1}{2} \right] U_1 B = -U_1^2 (b_\mu + X'_{2\text{вну}} Y_\mu^2). \quad (A)$$

Уравнение это выражает круг, так как может быть приведено к виду

$$(A - \xi)^2 + (B - \eta)^2 = \rho^2.$$

Половины коэффициентов при A и B , деленные на коэффициент при $A^2 + B^2$, как раз представляют координаты центра круга ξ и η ; прибавив к первой части уравнения (A) квадраты этих координат, мы получим квадрат радиуса круга.

В уравнение (A) кроме напряжения U_1 входят пять постоянных величин, вполне характеризующих трансформатор (и асинхронный двигатель): R_1 , X_1 , $X'_{2\text{вну}}$, g_μ и b_μ .

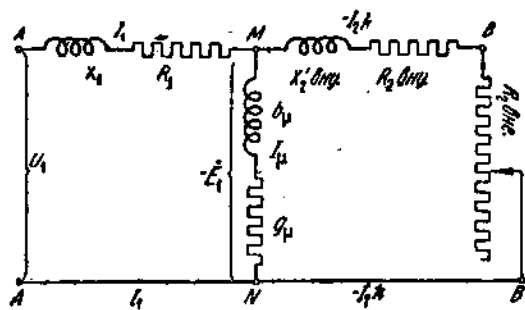
В действительности они постоянны лишь между некоторыми пределами изменения нагрузки; с ростом последней, т. е. с ростом токов I_2 и I_1 , растет температура трансформатора, а с ее ростом растет сопротивление R_1 , которое, таким образом, при сильных изменениях нагрузки уже не окажется постоянной величиной: далее, потоки рассеяния в некоторой своей части идут ту или иную часть пути в железе, как было в свое время указано; при больших величинах сил токов I_1 и I_2 эти пути потоков могут перейти в состояние магнитного насыщения, и тогда потоки не будут расти пропорционально токам, а это будет обозначать, что коэффициент S_1 и $S_{2\text{вну}}$, а следовательно, и величины, в 10 раз большие, X_1 и $X_{2\text{вну}}$ (и $X'_{2\text{вну}}$) будут уменьшаться с ростом нагрузки; наконец, с ростом нагрузки будет расти и падение напряжения $i_1 Z_1$ в первичной обмотке (хотя и изменяясь по фазе), и будет уменьшаться э. д. с. E_1 , а потому и магнитный поток (физически перво-причиной является соответствующее изменение результирующих ампервитков) и

проводимость намагничения может при этом несколько измениться, скорее всего увеличиться из-за уменьшения насыщения. Таким образом совершенной точностью круговая диаграмма не обладает. Кроме непостоянства означенных пяти величин оказывает влияние и то обстоятельство, что напряжение и сила тока на диаграммах являются синусоидальными величинами, лишь „эквивалентными“ действительно существующим.

В наши задачи, в теории переменных токов, не входит исследовать, какие указания относительно целесообразного конструирования трансформаторов и асинхронных двигателей можно извлечь из свойств только что полученного круга, — это задача электромеханики, т. е. учения об электрических машинах; заметим лишь, что в истории электротехники эта круговая диаграмма тока имела большое значение.

§ 112. Эквивалентная схема, первый вид ее

Возможны и другие пути для вывода круговой диаграммы — особым геометрическим методом, называемым методом обращений и методом векторных уравнений, которые мы изложим в следующих главах. Для того чтобы метод обращений



Фиг. 188.

применить к трансформатору или асинхронному двигателю, эти последние заменяются или изображаются особой искусственной комбинацией сопротивлений и проводимостей, называемой эквивалентной схемой; для нее имеет место уравнение (109,5); схема эта представлена на фиг. 188 и заключается в последовательном включении сопротивления $\dot{Z}_1 = R_1 + jX_1$ и двух параллельных ветвей: одной, в которой дана проводимость $\dot{Y}_\mu = g_\mu - jb_\mu$, равная проводимости намагничения трансформатора, и другой с сопротивлением $\dot{Z}'_2$. Напряжение U_1 на зажимах AA то же, что у трансформатора (или асинхронного двигателя).

Проводимость двух параллельных ветвей равна сумме их проводимостей:

$$\dot{Y}_\mu + \frac{1}{\dot{Z}'_2} = \frac{1 + \dot{Y}_\mu \dot{Z}'_2}{\dot{Z}'_2};$$

их эквивалентное сопротивление есть величина обратная:

$$\frac{\dot{Z}'_2}{1 + \dot{Y}_\mu \dot{Z}'_2};$$

полное сопротивление включения от A до B есть

$$\dot{Z}_1 + \frac{\dot{Z}'_2}{1 + \dot{Y}_\mu \dot{Z}'_2},$$

т. е. точно такое же, какое по формуле (109,5) представляет нагруженный трансформатор. Если мы будем давать величине $\dot{Z}'_2$ те же значения, что и в случае трансформатора, то сила тока I_1 будет одна и та же по величине и по фазе в обоих случаях и изменяться будет по одному и тому же закону.

После того как $\dot{I}_1$ прошел сопротивление $\dot{Z}_1$, произошло падение напряжения $\dot{I}_1 \dot{Z}_1$, и осталось напряжение между точками M и N , равное

$$\dot{U}_{MN} = \dot{U}_1 - \dot{I}_1 \dot{Z}_1,$$

что в свою очередь по формуле (109,1), равно $\dot{E}'_1 = -\dot{E}_1$.

Сила тока в ветви с проводимостью $\dot{Y}_a$ равна

$$\dot{U}_{MN} \dot{Y}_a = \dot{E}'_1 \dot{Y}_a,$$

т. е. равна силе тока намагничивающего $\dot{I}_\mu$, [формула (109,3)].

Сила тока в ветви с сопротивлением $\dot{Z}'_2$ равна

$$\dot{I}'_2 = \frac{\dot{U}_{MN}}{\dot{Z}'_2} = \frac{\dot{E}'_1}{\dot{Z}'_2}.$$

Последняя величина равна $(-\dot{I}'_2 \cdot k)$, если $\dot{I}'_2$ есть вторичный ток трансформатора при том же $\dot{Z}'_2$, так как согласно формуле (109,4),

$$-\dot{I}'_2 k = \frac{\dot{E}'_1}{\dot{Z}'_2} k^2 = \frac{\dot{E}'_1}{\dot{Z}'_2} = \dot{I}'_2.$$

Таким образом в эквивалентной схеме сила тока $\dot{I}'_1$ разветвляется на две по уравнению

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_\mu + (-\dot{I}'_2 \cdot k) = \dot{I}_\mu + \dot{I}'_2,$$

что опять находится в полном согласии с разложением тока $\dot{I}_1$ в трансформаторе и формулой (109,2). Таким образом между работой трансформатора и работой эквивалентной схемы существует полное подобие.

Изменяя в эквивалентной схеме активную часть сопротивления $\dot{Z}'_2$, мы будем изменять первичный ток $\dot{I}_1$ совершенно так же, как он изменяется при безиндукционной нагрузке трансформатора (или при механической нагрузке асинхронного двигателя).

Можно изменять и $R'_{2\text{вн}} \text{ и } X'_{2\text{вн}}$, и в будущем мы будем рассматривать как наиболее общий и этот случай с одним лишь ограничением, именно, чтобы при этом $\cos \varphi_{2\text{вн}}$ оставался постоянным.

§ 113. Другие виды эквивалентной схемы

Уравнению (109,5) могут удовлетворить и другие схемы, которые получаются следующим образом:

Введем вместо полного сопротивления нагруженного трансформатора (или асинхронного двигателя и пр.) его полную проводимость; она равна

$$\dot{Y}_{\text{вс}} = \frac{1 + \dot{Y}_\mu \dot{Z}'_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}'_2 + \dot{Z}_1 \dot{Z}'_2 \dot{Y}_\mu} = \frac{\dot{Y}_\mu \dot{Z}'_2 + 1}{(1 + \dot{Y}_\mu \dot{Z}_1) \dot{Z}'_2 + \dot{Z}_1}.$$

Произведем здесь деление числителя на знаменатель, но только до первого члена частного, прибавив остаток:

$$\dot{Y}_{\text{вс}} = \frac{\dot{Y}_\mu}{1 + \dot{Y}_\mu \dot{Z}_1} + \frac{1}{(1 + \dot{Y}_\mu \dot{Z}_1)^2 \dot{Z}'_2 + (1 + \dot{Y}_\mu \dot{Z}_1) \dot{Z}_1}.$$

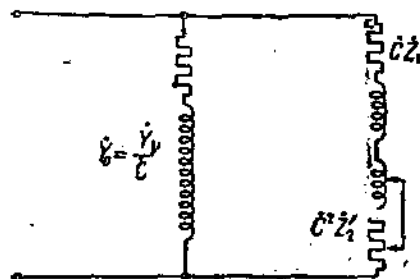
Введем для большей краткости обозначения

$$1 + \dot{Y}_\mu \dot{Z}'_1 = \dot{C}$$

тогда

$$\dot{Y}_{\text{вс}} = \frac{\dot{Y}_\mu}{\dot{C}} + \frac{1}{\dot{C}^2 \dot{Z}'_2 + \dot{C} \dot{Z}'_1}.$$

Таким образом проводимость всего включения представлена как сумма двух проводимостей, следовательно, эквивалентная схема должна иметь две параллельные ветви, они и изображены на фиг. 189.



Фиг. 189.

На этой схеме переменными могут быть и R'_2 и X'_2 , это случай более общий, чем безиндукционная нагрузка, когда $X'_2 = X'_{2\text{ану}} = \text{const.}$

Назовем эту схему второй эквивалентной схемой всеобщего трансформатора.

Далее мы еще воспользуемся ею для одной определенной цели.

Выведем еще одну схему из основного уравнения (109,5).

Формула (109,8) дает нам сопротивление всего трансформатора при коротком замыкании

$$\dot{Z}_\kappa = \dot{Z}'_1 + \frac{\dot{Z}'_{2\text{ану}}}{1 + \dot{Y}_\mu \dot{Z}'_{2\text{ану}}}. \quad (\text{A})$$

Представим формулу (109,5) в таком виде:

$$\dot{U}_1 = I_1 \left(\dot{Z}_\kappa + \frac{\dot{Z}'_2}{1 + \dot{Y}_\mu \dot{Z}'_2} - \frac{\dot{Z}'_{2\text{ану}}}{1 + \dot{Y}_\mu \dot{Z}'_{2\text{ану}}} \right). \quad (\text{B})$$

Преобразуем разность второго и третьего членов в скобках; она равна после приведения к одному знаменателю и замены $\dot{Z}'_2$ через $\dot{Z}'_{2\text{ану}} + \dot{Z}'_{2\text{анг}}$ следующему выражению:

$$\frac{(\dot{Z}'_{2\text{ану}} + \dot{Z}'_{2\text{анг}})(1 + \dot{Y}_\mu \dot{Z}'_{2\text{ану}}) - \dot{Z}'_{2\text{ану}}(1 + \dot{Y}_\mu \dot{Z}'_{2\text{анг}} + \dot{Y}_\mu \dot{Z}'_{2\text{ану}})}{(1 + \dot{Y}_\mu \dot{Z}'_{2\text{ану}} + \dot{Y}_\mu \dot{Z}'_{2\text{анг}})(1 + \dot{Y}_\mu \dot{Z}'_{2\text{ану}})}.$$

Введем для сокращения обозначение

$$1 + \dot{Y}_\mu \dot{Z}'_{2\text{ану}} = \dot{C}_\kappa.$$

Тогда окончательный вид преобразуемого выражения разности двух членов в скобках (B) будет

$$\frac{\dot{Z}'_{2\text{анг}}}{\dot{C}_\kappa^2 + \dot{C}_\kappa \dot{Y}_\mu \dot{Z}'_{2\text{анг}}}. \quad (\text{D})$$

Сопротивления (A) и D), включенные последовательно, представят весь трансформатор с нагрузкой.

Возьмем величину, обратную (D), это будет проводимость; она равна

$$\dot{C}_\kappa \dot{Y}_\mu + \frac{\dot{C}_\kappa^2}{\dot{Z}'_{2\text{анг}}}. \quad (\text{E})$$

Следовательно, последовательно с $\dot{Z}_k$ включенное сопротивление (D) можно представить как сопротивление двух параллельных ветвей с проводимостями

$$\dot{C}_k \dot{Y}_p \text{ и } \frac{\dot{C}_k^2}{\dot{Z}_{2\text{вс}}}$$

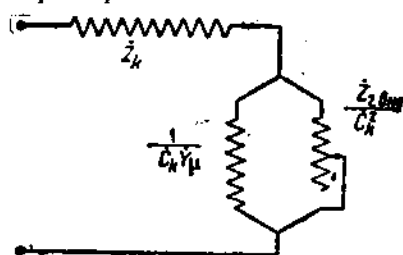
Такая схема изображена на фиг. 190; назовем ее третьей эквивалентной схемой всеобщего трансформатора.

§ 114. Многообмоточные трансформаторы

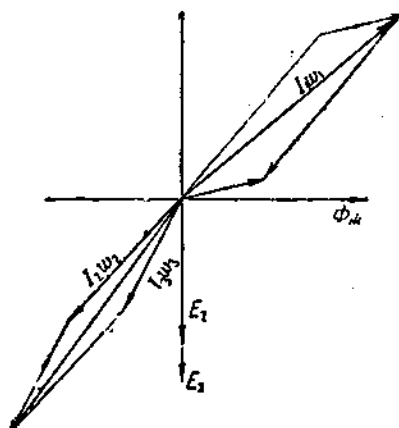
В настоящее время для специальных целей строят и особые трансформаторы. Для питания двух или нескольких сетей с разными напряжениями от одного трансформатора строят так называемые „трехобмоточные“ и вообще „многообмоточные“ трансформаторы, у которых не одна вторичная катушка, а две или несколько.

Соотношения здесь осложняются сравнительно с изложенным выше лишь немого. Главнейшее отличие работы, например, трехобмоточного трансформатора от обыкновенного заключается в том, что вторичные ампервитки складываются из ампервитков двух вторичных катушек $I_2 w_2 + I_3 w_3$.

Построение всех действующих в трансформаторе ампервитков показано на фиг. 191. В остальном детализация диаграммы будет идти тем же путем, что разобран выше.



Фиг. 190.



Фиг. 191.

Полезная мощность состоит здесь из двух слагаемых $U_2 I_2 \cos \varphi_{2n}$ и $U_3 I_3 \cos \varphi_{3n}$. Эквивалентная схема трехобмоточного трансформатора представлена на фиг. 192.

Если нагрузки в обеих вторичных цепях друг от друга не зависят, то никакой закономерности для изменения силы тока I_1 не существует, т. е. нет геометрического места концов вектора тока I_1 .

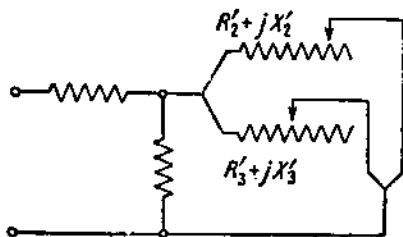
§ 115. Трансформаторы трехфазного тока

Для трансформирования трехфазного тока можно применить или три отдельных трансформатора, по одному на каждую фазу, или трехфазный трансформатор.

На схеме фиг. 193 представлено включение первого рода.

На этой схеме первичные обмотки трех однофазных трансформаторов соединены звездой (без нулевого провода). Вторичные могут быть соединены или звездой, или треугольником, или, наконец, питать три не связанные между собой цепи.

Конечно, можно первичные обмотки соединить и треугольником.

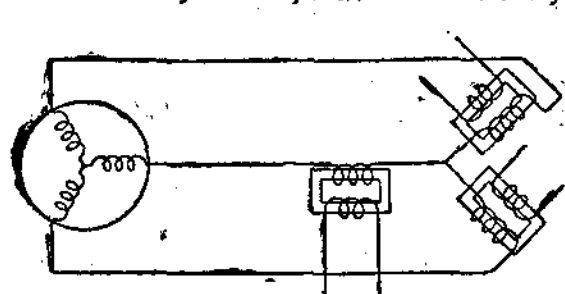


Фиг. 192.

К каждому трансформатору в отдельности и надо применить всю изложенную выше теорию; для каждого будет своя векторная диаграмма.

Но будет и некоторое отличие в работе этих трансформаторов от работы их в однофазных цепях; это отличие касается формы кривой намагничивающего тока.

Дело в том, что при показанном на фиг. 193 соединении первичных обмоток звездой без нулевого провода в них не смогут течь составляющие третьего порядка.



Фиг. 193.

Как мы уже знаем из § 98 „Составляющие высших порядков в трехфазном токе“, третьи составляющие тока и напряжения во всех трех обмотках генератора, а в данном случае и трансформатора и в проводах находятся все всегда в одной фазе, а потому при соединении звездой без нулевого провода попарно компенсируют друг друга в каждой из трех цепей, так что токи соответствующей утроенной частоты возникнуть не могут.

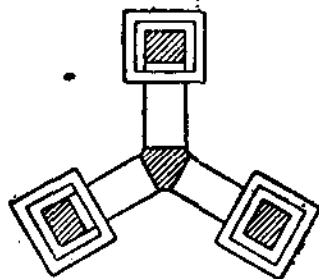
Таким образом намагничивающие токи всех трех трансформаторов лишены третьей составляющей.

Но, очевидно, что если мы вычтем из намагничивающего тока на фиг. 174 третью составляющую и, таким образом, лишим его ее, то магнитный поток должен будет изменяться не по синусоиде, как раньше, а иначе: именно он получит теперь составляющую третьего порядка.

Если вторичные обмотки трансформаторов включены тоже в звезду, э. д. с., индуцируемые в них этими потоками тройной частоты, уравниваются попарно друг друга, и в междофазовом напряжении их не будет, так же как не будет и токов этой частоты, если нет нулевого провода и со вторичной стороны.

Если же вторичные обмотки включены треугольником, то для этих всегда одинаково, т. е. от начала обмотки к ее концу или наоборот, направленных э. д. с. такое включение равносильно короткому замыканию; в треугольнике вторичных обмоток будут течь сильные токи тройной частоты, которые, с одной стороны, будут нагревать обмотки, а с другой стороны, по закону Ленца будут сильно, как токи короткого замыкания, „успокаивать“ или „глушить“ эти потоки; „наружу“, во внешнюю часть вторичной цепи, эти токи не выйдут.

Вместо трех фазных трансформаторов в европейской практике употребляют трехфазный трансформатор. Эволюция его была такова.



Фиг. 194.

Так как три магнитных потока в трех трансформаторах составляют симметричную систему, то сумма их равна нулю.

Поместив вторичные обмотки на те же стержни, где находятся первичные, мы можем все три сердечника соединить магнитно в звезду, получив, таким образом, (фиг. 194) всего четыре стержня: три с обмотками, четвертый, так сказать, „нулевой“. Затем этот последний стержень выбрасываем как ненужный, ибо магнитный поток в нем при одинаковой нагрузке фаз равен нулю.

Такая конструкция еще слишком громоздка и дорога. Поэтому располагаем все три стержня в одной плоскости и получаем современный трехфазный трансформатор (фиг. 195).

Такой трансформатор называется „несимметричным трехфазным трансформатором“. Несимметрия подразумевается при этом магнитная; обуславливается она тем, что пути для магнитных потоков обладают разными сопротивлениями.

Разберем этот вопрос.

Представим себе два случая: первый, когда во всех вторичных катушках и двух первичных B_1 и C_1 тока нет, а есть ток только в катушке A_1 , и второй, когда ток есть только в катушке B_1 .

Нетрудно понять, что магнитное сопротивление во втором случае несколько меньше, чем в первом, так как длины силовых линий во втором случае меньше, чем в первом. Следовательно, при равных токах в A_1 и B_1 магнитный поток в B_1 будет больше, чем в A_1 , и наоборот, при равенстве э. д. с. в обеих катушках и равенстве потоков намагничивающий ток в B_1 будет меньше, чем в A_1 . Очевидно, что катушка C_1 находится в тех же условиях, что A_1 .

Эта несимметрия и неравенство намагничивающих токов весьма невелики, так что ими можно и пренебречь.

Перейдем к включению обмоток. Первичная и вторичная обмотки могут быть включены как звездой, так и треугольником. Здесь возможны четыре комбинации, показанные на фиг. 196.

Соотношения между подводимыми и получаемыми линейными напряжениями при этом будут следующие:

Положим приближенно для большей наглядности

$$E_1 = U_{1\phi} \text{ и } E_2 = U_{2\phi},$$

тогда для включения звезда-звезда имеем:
подведено

$$U_{1\Delta}; \quad E_1 = \frac{U_{1\Delta}}{\sqrt{3}}; \quad E_2 = E_1 k = \frac{U_{1\Delta}}{\sqrt{3}} k;$$

$$U_{2\Delta} = E_2 \sqrt{3} = U_{1\Delta} \cdot k.$$

Для включения звезда-треугольник:

$$E_1 = \frac{U_{1\Delta}}{\sqrt{3}}; \quad U_{2\Delta} = \frac{U_{1\Delta}}{\sqrt{3}} k;$$

для включения треугольник-звезда:

$$E_1 = U_{1\Delta}; \quad U_{2\Delta} = E_2 \sqrt{3} = U_{1\Delta} \cdot k \sqrt{3};$$

и наконец, для включения треугольник-треугольник:

$$E_1 = U_{1\Delta}; \quad U_{2\Delta} = E_2 = U_{1\Delta} \cdot k.$$

№	I	II
1		
2		
3		
4		

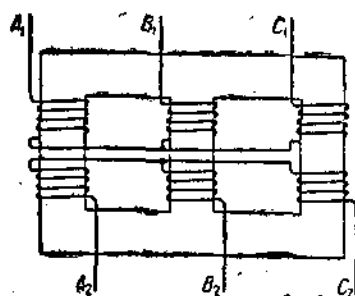
Фиг. 196.

Когда нагрузка в трех фазах очень различна, то и напряжения вторичные получаются очень разными, вследствие падения напряжения внутри вторичных катушек.

Чтобы выровнять до некоторой степени эти напряжения, прибегают к так называемому включению зигзагом (фиг. 197 и 198).

При этом каждая вторичная обмотка состоит из двух половин или двух катушек, причем одна половина включается уже не в эту, а в другую фазу, как это и показано на фиг. 197. Присоединение этой половины a к половине другой фазы b делается так, что ее напряжение вычитается из напряжения катушки этой другой фазы, так что векторная диаграмма напряжений получается такой, как показано на фиг. 193.

Если бы мы соединили катушки a и b не так, как показано на фиг. 197, а так, чтобы их напряжения складывались, то на фиг. 198 вместо вектора $O_1 D$



Фиг. 195.

получили бы вектор O_1F , т. е. напряжение, по величине равное напряжению одной катушки a .

Можно каждую обмотку разделить на три части и включить по одной такой части в каждую фазу.

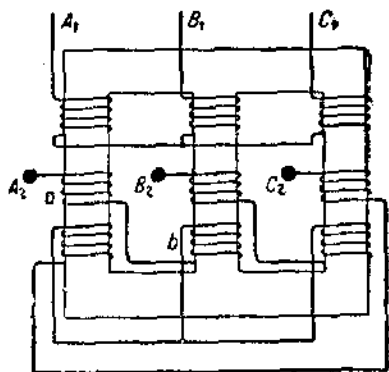
Пусть читатель начертит векторную диаграмму напряжений для этого случая.

Такими мерами влияние несимметричности нагрузки почти совершенно устраняется.

Рассмотрим в заключение вопрос о намагничивающем токе третьей составляющей в трехфазном трансформаторе.

Пусть первичные обмотки включены звездой без нулевого провода.

Разница с подобным же включением трех однофазных трансформаторов будет следующая: там потоки тройной частоты могли свободно существовать в сердечниках, а здесь при отсутствии четвертого, нулевого, стержня они все всегда направлены друг другу навстречу, поэтому, не находя для замыкания своих линий пути в железе, они выходят из сердечника и замыкаются через воздух или, если трансформатор находится в кожухе, через стенки кожуха. При этом ввиду



Фиг. 197.

большого пути в воздухе эти потоки тройной частоты сильно ослаблены, сравнительно с такими потоками в однофазных трансформаторах.

Соединение вторых обмоток в треугольник почти заглушает эти потоки.

Остается отметить еще одно, притом очень важное, обстоятельство.

В первичных обмотках при звезде без нулевого провода э. д. с. третьего порядка все друг друга компенсируют. Это значит только то, что они не вызывают сильных токов, замыкающихся исключительно по проводникам двух любых фаз; но они вызывают другое явление.

Представим себе, что нулевая точка генератора заземлена.

Когда э. д. с. третьего порядка направлены к ней, они понижают на свою величину потенциал нулевой точки первичной звезды трансформатора. Когда же они направлены к этой последней, они ее потенциал на столько же повышают.

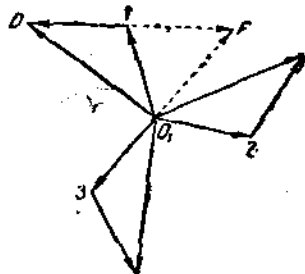
Если влияние третьей составляющей в намагничивающем токе мы определяли в среднем около 30% от величины первой составляющей, то это соотношение будет справедливо и для магнитных потоков тройной частоты, появляющихся «взамен» этих токов, и индуцируемых ими э. д. с.

Если э. д. с. генератора 6 000 V, то э. д. с. третьего порядка легко поэтому может быть порядка 2 000 V. Отсюда становится ясно, что прикосновение к нулевой точке трансформатора может быть весьма опасно.

Кроме того, несомненно, повышение и понижение потенциалов с тройной частотой означают емкостные токи или перераспределение зарядов такой же частоты, хотя и слабые, но вследствие своей одинаковой направленности суммирующиеся в своем действии и влиянии на те или иные провода связи, например, телефонные линии. Токи же основной частоты дают в сумме нуль, то же и заряды этой частоты, так что на некотором расстоянии их действие становится весьма малым, много меньше действия зарядов и токов тройной частоты.

Эти колебания потенциалов исчезают, если мы проведем нулевой провод.

По нему пойдут тогда и намагничивающие токи тройной частоты, появившиеся



Фиг. 198.

в фазовых токах; магнитные потоки при этом становятся синусоидальными, теряя свои третьи составляющие.

Что касается векторной диаграммы трехфазного трансформатора, то она состоит из трех повернутых на 120° векторных диаграмм однофазного трансформатора.

§ 116. Автотрансформатор

Автотрансформатором называется трансформатор с одной только обмоткой; в случае понижения напряжения первичное напряжение подводится ко всей обмотке а вторичное берется только от некоторой части ее; в случае повышения напряжения первичное напряжение подводится к части обмотки, а вторичное берется от всей обмотки. Этот случай изображен на фиг. 199.

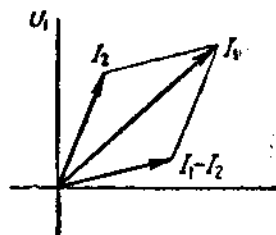
Выясним, какие ампервитки действуют здесь, а для этого рассмотрим токи.

Токи первичный $\dot{I}_1$ и вторичный $\dot{I}_2$ будем рассматривать в их векторном, символическом представлении.

Оказывается, что на ток $\dot{I}_2$ можно при этом взглянуть с двух разных точек зрения. Можно сказать, что из тока $\dot{I}_1$, подходящего к точке M , часть $\dot{I}_2$ идет во вторичную цепь.

Очевидно, что аргумент $\dot{I}_2$ при этом будет несколько отличаться от аргумента $\dot{I}_1$, но что эта разница меньше $\frac{\pi}{2}$, т. е. что большую часть периода эти

токи направлены одинаково вдоль линии AS ; другая часть, именно $\dot{I}_1 - \dot{I}_2$, тока $\dot{I}_1$ идет по виткам w_1 от точки M до N и затем в первичную цепь фиг. 199 и 200. Таким образом получаются ампервитки



Фиг. 200.

$$(\dot{I}_1 - \dot{I}_2) w_1. \quad (A)$$

Ток $\dot{I}_2$, обходя вторичную цепь, возвращается в обмотку и идет по ней от точки Q до N , где присоединяется к току $\dot{I}_1 - \dot{I}_2$ и в виде тока $\dot{I}_1$ уходит в первичную цепь. Ток $\dot{I}_2$ проходит при этом $(w_2 - w_1)$ витков.

Ампервитки

$$\dot{I}_2 (w_2 - w_1) \quad (B)$$

действуют, следовательно, навстречу ампервиткам (A); результирующие ампервитки получим, если из (A) вычтем (B), что дает

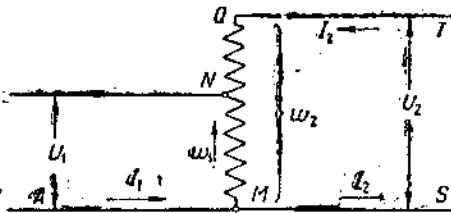
$$(\dot{I}_1 - \dot{I}_2) w_1 - \dot{I}_2 (w_2 - w_1) = \dot{I}_1 w_1 - \dot{I}_2 w_2. \quad (C)$$

Возможен другой взгляд на токи.

Можно сказать, что мы имеем в автотрансформаторе предельный случай сближения пространственно первичной и вторичной обмоток, причем w_1 витков первичной совпали с w_1 витков вторичной. Тогда ток $\dot{I}_2$ имеет аргумент, как в обычном трансформаторе, отличающийся от аргумента тока почти на π , т. е. $\dot{I}_2$ противоположно по фазе $\dot{I}_1$ в формулах (A), (B) и (C).

По виткам w_1 идет при этом геометрическая сумма двух токов $\dot{I}_1 + \dot{I}_2$, соответствующие ампервитки будут

$$(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) \cdot w_1. \quad (D)$$



Фиг. 199.

К ним прибавляются геометрически амперантки

$$\dot{I}_2(\omega_2 - \omega_1). \quad (F)$$

(D) и (F) в сумме дают

$$\dot{I}_1\omega_1 + \dot{I}_2\omega_2,$$

т. е. соотношение, которое равнозначуще с (C), принимая во внимание сказанное о знаке $\dot{I}_2$ или его аргументе.

Автотрансформаторы выгодны особенно тогда, когда коэффициент трансформации близок к единице, ибо тогда, очевидно, мы много выгадываем: во-первых, на медь, делая одну обмотку вместо двух, почти одинаковых; во-вторых, потери в меди при одной обмотке, очевидно, меньше, чем при двух.

Когда при нагрузке линии оказывается, что вследствие падения напряжения в линии напряжение в конце ее становится ниже, чем желательно, пользуются автотрансформатором для повышения его.

Автотрансформатором не пользуются для трансформирования высокого напряжения в низкое, так как, как видно из фиг. 199, провод низкого напряжения AM имеет в общем ту же величину потенциала, что и провод MS , так что может легко возникнуть опасность от высокого напряжения в цепи низкого напряжения.

Для трехфазного тока употребляются трехфазные автотрансформаторы.

ГЛАВА ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ

МЕТОД ОБРАЩЕНИЙ, ПРИЛОЖЕНИЯ ЕГО К ВЫВОДУ ДИАГРАММ ТОКА И НАПЯЖЕНИЯ

§ 117. Взаимнообратные кривые

Две кривые MM_1 и $M'M'_1$ (фиг. 201) называются взаимнообратными относительно некоторой точки O , если произведения длин радиусов-векторов, совпадающих по направлению, от этой точки O до кривых представляют величину постоянную, т. е.

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \overline{OM_1} \cdot \overline{OM'_1} = \dots = K.$$

Величина K называется степенью обращения; точки M и M' , M_1 и M'_1 называются соответствующими: всякой точке одной кривой соответствует при этом некоторая точка другой; точка O , из которой проводятся радиусы-векторы к кривым, называется центром обращения.

Из определения взаимнообратных кривых следует, что если дана какая-либо кривая, то, приняв некоторые величины, пропорциональные обратным величинам радиусов-векторов из произвольной точки O до данной кривой, за величины радиусов-векторов от той же точки O по тем же направлениям до новой кривой, мы получим эту новую кривую как обратную данной; коэффициент пропорциональности при этом есть степень обращения, а точка O есть центр обращения.

В основе приложения идеи обратных кривых к явлениям переменного тока лежит следующая элементарная теорема.

§ 118. Основная теорема

Кривой, обратной данной окружности, является другая окружность, причем центр обращения является центром их подобия, а отношение подобия ее к первой равно частному от деления степени обращения на произведение длин наибольшего и наименьшего радиусов-векторов из центра обращения до первой кривой.

Докажем эту теорему отдельно для трех случаев: 1) когда центр обращения лежит вне первой окружности, 2) когда он находится на ней и 3) когда он находится внутри нее.

Первый случай. Пусть нам дана окружность $M_1Q_1N_1$ с центром в C_1 и центр обращения в O вне окружности (фиг. 202). Построим окружность $M_2Q_2N_2$ с центром C_2 на продолжении прямой OC_1 , подобную данной, т. е. с общей касательной.

Проведем произвольную прямую OP_2 из точки O , встречающуюся окружности в точках $P_1S_1S_2$ и P_2 .

По теореме элементарной геометрии

$$OP_2 \cdot OS_2 = OQ_2^2,$$

или

$$OP_2 = \frac{OQ_2}{OS_2} \cdot OQ_2. \quad (A)$$

Из условия подобия следует

$$\frac{OQ_2}{OS_2} = \frac{OQ_1}{OP_1}, \quad (B)$$

следовательно, подставив (B) в (A),

$$OP_2 = \frac{OQ_1}{OP_1} \cdot OQ_2,$$

или

$$OP_1 \cdot OP_2 = OQ_1 \cdot OQ_2 = K, \quad (C)$$

где K — постоянное число.

Выразив аналогично (A) не OP_2 , а OS_2 , получим

$$OS_1 \cdot OS_2 = K. \quad (D)$$

Далее заметим, что так как

$$OS_1 = \frac{OM_1 \cdot ON_1}{OP_1},$$

то

$$\frac{OP_2}{OS_1} = \frac{K \cdot OP_1}{OP_1 \cdot OM_1 \cdot ON_1} = \frac{K}{OM_1 \cdot ON_1}, \quad (E)$$

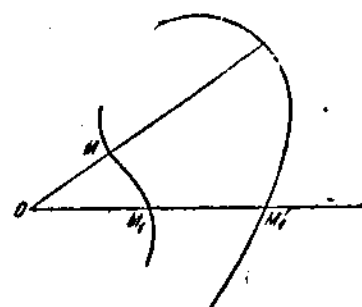
и по (C) и (D)

$$OM_1 \cdot OM_2 = ON_1 \cdot ON_2 = K. \quad (F)$$

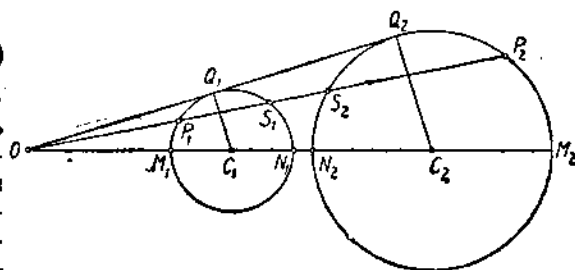
Соотношения (C) и (D) показывают, что вторая окружность действительно является обратной первой. Следует заметить, что для точки P_1 соответствующей точкой является P_2 , в то время как при рассмотрении одного лишь подобия окружностей ей соответствовала бы точка S_2 . При повороте луча OP_1P_2 около центра O соответствующие точки P_1 и P_2 или S_1 и S_2 движутся по их окружностям в противоположных направлениях. Для построения окружности C_2 всего лучше использовать именно соотношения (F), т. е. найти точки M_2 и N_2 — концы диаметра искомой окружности.

Очевидно, что чем ближе центр обращения O будет находиться к окружности C_1 , тем больше при одной и той же степени обращения будет радиус окружности C_2 и тем больше будет становиться расстояние OM_2 , связанное с уменьшающимся OM_1 соотношением (F). Когда центр обращения O будет находиться на окружности, т. е. в M_1 , мы будем иметь второй случай, подлежащий исследованию.

Очевидно, что чем ближе центр обращения O будет находиться к окружности C_1 , тем больше при одной и той же степени обращения будет радиус окружности C_2 и тем больше будет становиться расстояние OM_2 , связанное с уменьшающимся OM_1 соотношением (F). Когда центр обращения O будет находиться на окружности, т. е. в M_1 , мы будем иметь второй случай, подлежащий исследованию.



Фиг. 201.



Фиг. 202.

Второй случай. При этом OM_1 равно нулю и OM_2 равно из (F) бесконечности, тогда

$$ON_2 = \frac{K}{ON_1} = \frac{K}{M_1N_1}. \quad (G)$$

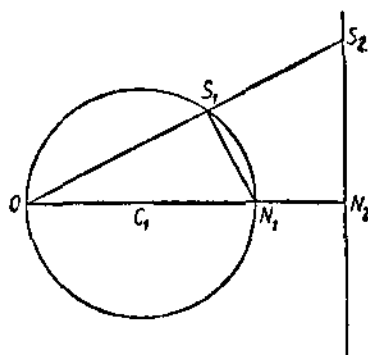
Окружность C_2 с бесконечно большим диаметром, очевидно, есть прямая, проходящая через точку N_2 на расстоянии $\frac{K}{M_1N_1}$ от центра обращения и направленная перпендикулярно к линии диаметра M_1N_1 .

На фиг. 203 изображена такая прямая. Из чертежа ясно, что для любого луча OS_1S_2

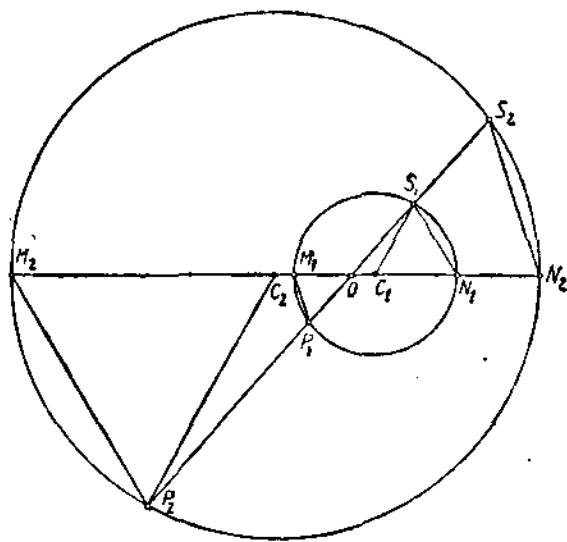
$$\frac{OS_1}{ON_1} = \frac{ON_2}{OS_2},$$

и следовательно, принимая во внимание (G),

$$OS_1 \cdot OS_2 = ON_1 \cdot ON_2 = K.$$



Фиг. 203.



Фиг. 204.

Когда центр обращения передвинется еще, он окажется уже внутри данной окружности, и мы будем иметь третий случай:

Третий случай. Строим, как и в первом случае, окружность с центром C_2 на продолжении линии C_1M_1 с отношением ее линейных элементов к сходственным элементам первой данной окружности, равным $\frac{K}{OM_1 \cdot ON_1}$, и с центром подобия в O .

На фиг. 204 $M_2P_2N_2S_2$ представляет такую окружность. Проводим произвольный луч P_2OS_2 . По подобию окружностей относительно точки O имеем следующий ряд равных отношений:

$$\frac{OC_2}{OC_1} = \frac{C_2P_2}{C_1S_1} = \frac{OP_2}{OS_1} = \frac{OM_2}{ON_1} = \frac{ON_2}{OM_1} = \frac{OS_2}{OP_1} = \frac{K}{OM_1 \cdot ON_1}.$$

Соединяя четвертое отношение с самым последним, получаем

$$\frac{OM_2}{ON_1} = \frac{K}{OM_1 \cdot ON_1},$$

или

$$OM_1 \cdot OM_2 = K.$$

Соединяя с последним — пятое, получим

$$ON_1 \cdot ON_2 = K. \quad (F)$$

Взяв пятое и шестое отношения,

$$\frac{ON_2}{OM_1} = \frac{OS_2}{OP_1}.$$

Умножим это равенство на равенство

$$OM_1 \cdot ON_1 = OS_1 \cdot OP_1,$$

после чего получим

$$ON_1 \cdot ON_2 = OS_1 \cdot OS_2,$$

или

$$OS_1 \cdot OS_2 = K.$$

А так как третье и шестое отношения дают

$$\frac{OP_2}{OS_1} = \frac{OS_2}{OP_1},$$

то и

$$OP_1 \cdot OP_2 = K.$$

В этом случае соответствующие точки P_1 и P_2 (или S_1 и S_2) при повороте луча движутся по своим окружностям в одинаковых направлениях.

Равенства (F) представляют простое средство для построения искомой окружности и в этом случае.

Очевидно, что, увеличивая степень обращения K , мы будем удалять во всех трех случаях окружности друг от друга, уменьшая ее, — сближать их, причем при некотором значении величины K они коснутся, затем при дальнейшем уменьшении ее будут пересекаться.

При $K = OM_1 \cdot ON_1$ в первом случае окружности сойдутся, в третьем случае — будут равны и симметрично расположены относительно центра обращения O .

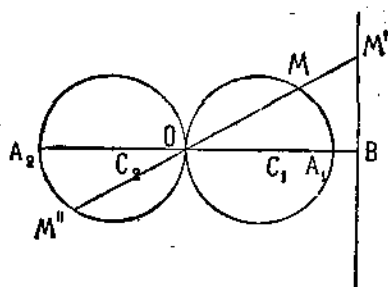
Далее, необходимо заметить, что, если центр обращения находится внутри одной окружности, он при всякой степени обращения будет находиться и внутри другой.

Все геометрические выводы, связанные с изложенным выше, читателю рекомендуется проделать со всей полнотой и во всех деталях.

Все разобранные три случая можно объединить в одной, так сказать, кинематической картине; при данной степени обращения по мере приближения центра обращения к первой окружности диаметр второй растет и делается бесконечностью, т. е. окружность становится прямой, когда центр обращения доходит до первой окружности; при дальнейшем его продвижении уже внутри эта прямая изгибается опять в окружность сначала большего, потом все меньшего радиуса, но уже в противоположную сторону.

Эта же картина получается весьма просто из случая первого тем способом, который носит название „приложения алгебры к геометрии“.

Очевидна справедливость и следующей теоремы, обратной выше рассмотренному второму случаю: дана прямая (фиг. 205) BM' и точка O вне ее; кривой, обратной прямой относительно O , является окружность OMA_1 , проходящая через



Фиг. 205.

O , с центром C_1 на перпендикуляре из O на прямую и с диаметром, равным частному от деления степени обращения на длину этого перпендикуляра, т. е.

$$OA_1 = \frac{K}{OB}.$$

Нужно заметить, что и окружность $OM'A_2$, проходящая через O , с диаметром $OA_2 = OA_1$ и центром в C_2 обратна прямой BM' , а потому при обращении окружности в прямую или прямой в окружность возможны всегда два решения, следует выбирать их, сообразуясь со смыслом решения или удобством.

Мы в последующем будем всегда поступать так: строить сначала окружность C_1 , т. е. с центром в той же стороне от центра обращения O , в которой находится и обрабатываемая прямая, а затем рассматривать, удовлетворяет ли эта окружность физическому смыслу задачи и не нужно ли ее заменить окружностью C_2 .

§ 119. Координаты центра и радиус обращенной окружности

Далее, нам нужно будет уметь выразить координаты центра и радиус обращенной окружности и степень обращения

Пусть радиус первой окружности будет r , координаты ее центра m и n ; соответствующие величины для второй окружности обозначим через r' , m' и n' .

На основании только что изложенной теоремы

$$\frac{m'}{m} = \frac{K}{OM_1 \cdot ON_1},$$

а так как

$$OM_1 = \sqrt{m^2 + n^2} - r$$

и

$$ON_1 = \sqrt{m^2 + n^2} + r,$$

то

$$\left. \begin{aligned} m' &= K \cdot \frac{m}{m^2 + n^2 - r^2} \\ n' &= K \cdot \frac{n}{m^2 + n^2 - r^2}, \\ r' &= K \cdot \frac{r}{m^2 + n^2 - r^2} \end{aligned} \right\}$$

и аналогично

(A)

§ 120. Обобщение предыдущего на случай пространства трех измерений

Очевидно, что изложенную выше для трех случаев теорему можно перенести без всякого изменения из плоскости в пространство трех измерений на случай обращения сфер одной в другую; стоит только представить себе вращение окружностей во всех трех случаях около оси OC_1 ; окружности образуют тогда сферические поверхности, а прямая линия в случае втором опишет плоскость.

Формулы (119A) претерпят изменение, соответствующее введению трех координат вместо двух.

Метод обращений в пространстве трех измерений широко применяется при решении задач электростатики.

Вернемся опять к методу обращений на плоскости.

§ 121. Примеры приложения метода обращения

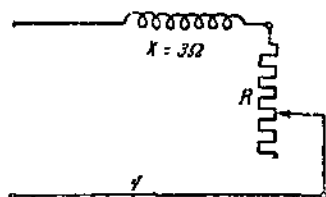
Перейдем к приложению идеи обратных кривых к изображению соотношений в цепях переменного тока.

Пример 55. Пусть мы имеем цепь, схематично представленную на фиг. 206, состоящую из последовательно включенных резистивного сопротивления X постоянной величины, например, 3Ω и активного сопротивления R , меняющегося от 0 до ∞ . Оказывается, что конец вектора тока при изменении R описывает окружность. К доказательству этого мы и переходим.

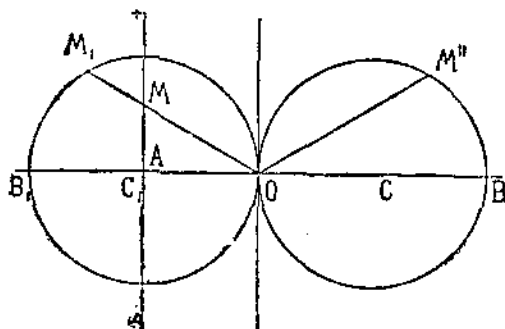
На фиг. 207 точка O есть начальная точка координатных осей, вертикальной и горизонтальной. Выбираем масштаб для сопротивления, например, $1 \text{ мм} \equiv \frac{1}{5} \Omega$, откладываем отрезок $\overline{OA} = +X$ (на чертеже $X = 3\Omega$) и проводим через A вертикальную линию. Эта линия есть геометрическое место концов точек отрезков $\overline{OM}$, представляющих комплекс

$$\dot{Z} = R + jX$$

при постоянном X и переменном R . Мы видим, что эта линия естественно продолжается ниже горизонтальной оси, но там значения R становятся отрицательными.



Фиг. 206.



Фиг. 207.

Каков физический смысл этого? Если R отрицательно, то мощность $\dot{I}^2 R$ тоже отрицательна, следовательно, физические мы имеем на месте R не сопротивление, а полвод электрической мощности откуда-то из другого источника, — наша цепь работает как генератор, а не как приемник электрической энергии. Поэтому мы можем расширить наше представление об изменемости R и положить, что R изменяется от $-\infty$ до $+\infty$.

Если мы знаем значения переменной проводимости какой-нибудь цепи, то, умножив эти значения на напряжение U , приложенное к цепи, получим соответствующие значения силы тока. Вектор напряжения $\dot{U}$ мы направим по вертикальной оси, так что комплексное выражение его превращается в $\dot{U} = Uj$: таким образом проводимости нужно множить на действительную, а не комплексную величину, что упрощает дело.

Проводимости обратны соответствующим сопротивлениям, поэтому при всяком состоянии цепи

$$Y \cdot \dot{Z} = 1.$$

Отрезки, изображающие проводимости $\dot{Y}$, в случае реактивного сопротивления X , обусловленного индуктивностью (а не емкостью), откладываются от той же точки O в правом верхнем квадранте. Выберем масштаб для проводимости, например, $1 \text{ см} \equiv \frac{1}{9} \text{ S}$, и обратим прямую AM относительно центра O , взяв степень обращения, равную единице; мы получим окружность OM_1B_1 с диаметром, соответственно всему изложенному равным $\frac{1}{X} = \frac{1}{3} \text{ S}$, или

30 мш. Радиус-векторы $\overline{OM_1}$ представят величины, обратные величинам $\overline{OM}$, и будут равняться $\frac{1}{Z}$.

следовательно, как раз проводимостям $\dot{Y}$, только отложенным в левом верхнем квадранте. Таким образом геометрическим местом концов отрезков, изображающих проводимости данной цепи, является окружность. Перевертываем ее около вертикальной оси, проходящей через O , из положения OM_1B_1 в положение $OM''B$, иначе — переносим центр ее из C_1 в C , т. е. берем второе из возможных решений, тогда отрезки, изображающие $\dot{I}$, попадают на свое надлежащее место — в первый верхний квадрант, те, которые получились из отрезков $\dot{Z}$ с положительными R , т. е. содержащие положительное g , в нижней же — те, которые получились из отрезков

$\dot{Z}$ с отрицательным R , а потому содержащие в себе отрицательное g . Умножив все $\dot{Y}$ на U , получим значения силы тока. Окружность при этом представит геометрическое место концов вектора силы тока. Те же отрезки $\overline{OM''}$ мы будем отсчитывать или измерять в масштабе силы тока, а этот масштаб возьмем в U раз мельче, чем выбранный нами раньше масштаб проводимости, тогда отрезки $\overline{OM''}$ прямо дадут силу тока I для соответствующих величин сопротивления $\overline{OM} = R + jX$.

Заметим, что, когда цепь разомкнута, $R = +\infty$, назовем это состояние цепи холостым ходом, точка M находится при этом вверху на бесконечности, линия $\overline{OM}$ параллельна $\overline{AM}$, и отрезок $\overline{OM''}$, а с ним и проводимость равны нулю, O есть точка холостого хода; ток холостого хода равен нулю; при уменьшении R точка M снижается, приближается к A ; линия $\overline{OM}$ при этом поворачивается все время влево, приближаясь к горизонтальному положению $\overline{OA}$, отрезок $\overline{OM''}$ поворачивается вправо, приближаясь к положению $\overline{OB''}$. Когда $R = 0$, будем называть это состояние коротким замыканием цепи, $\dot{Z} = \overline{OA}$, а $\dot{Y} = \overline{OB''}$; отрезок $\overline{OB''}$, измеренный в указанном масштабе силы тока, дает величину тока короткого замыкания цепи; точка B'' есть точка короткого замыкания.

При всех обращениях геометрических мест концов вектора $\dot{Z}$ в геометрические места концов вектора $\dot{I}$ следует иметь в виду следующее основное соотношение:

$$\dot{Z} = Ze^{j\varphi}.$$

то

$$\dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}} = \frac{1}{Z} e^{-j\varphi},$$

следовательно, $\dot{Z}$ и $\dot{Y}$ всегда наклонены по вертикальной оси под равными, но противоположными по знаку углами. На это соотношение мы обращаем особое внимание читателя.

Обращая кривую (или прямую), нужно всегда находить на обратной кривой характерные точки, соответствующие характерным точкам на первой кривой, каковы например, точки холостого хода и короткого замыкания.

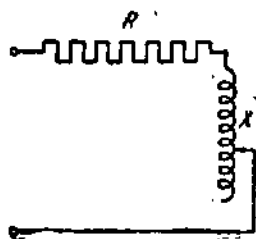
Чтобы упростить умножение $\dot{Y}$ на $\dot{U}$, мы $\dot{U}$ направили по вертикальной оси и тем избавились от мнимой части в его выражении, что в свою очередь сводит умножение $\dot{Y}$ на U к умножению лишь длины переменных отрезков $\dot{Y}$ на постоянное число U без поворота их, как это было бы при умножении на комплексное выражение. В последующем мы будем выбирать направление U так же, так что всякая диаграмма для величин $\dot{Y}$ в масштабе, в U раз меньшем, будет являться диаграммой силы тока.

На диаграмме фиг. 207 непосредственно для каждой величины силы тока I мы можем отсчитать или измерить и угол φ сдвига фаз тока с напряжением U . Рассмотрим другой пример.

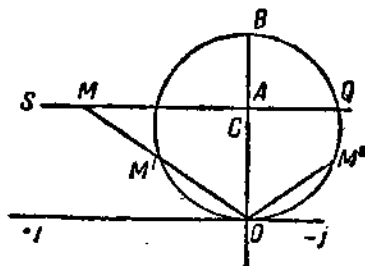
На фиг. 208 дана схема включения, где R постоянно, а $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ перемененно и может быть положительно, когда в цепи доминирует индуктивность, и отрицательно, когда емкостный эффект больше индукционного.

На фиг. 209 прямая SQ есть геометрическое место векторов полного сопротивления $\dot{Z} = R + jX$; при $X = 0$ имеем $\dot{Z} = \overline{OA}$; если $X = +\infty$, т. е. когда $L = \infty$, а C конечно или тоже бесконечно велико (последнее означает, что цепь замкнута и конденсаторов, последовательно с L включенных в цепь, нет), тогда

$\dot{Z} = +\infty$ и совпадает с левой положительной осью абсцисс; если $X = -\infty$, т. е. когда L конечно или равно нулю, а $C = 0$ или бесконечно мало (если конденсатора в цепи нет, а цепь просто разомкнута посредством рубильника, то две части рубиль-



Фиг. 208.



Фиг. 209.

ника — нож, с одной стороны, и щеки, куда он врубается, с другой стороны, представляют весьма малую емкость; пусть читатель оценит порядок величины этой емкости), тогда $Z = -\infty$ и совпадает с правой отрицательной осью абсцисс.

Обращая прямую SQ относительно точки O , получаем окружность OB . Остановимся подробнее на вопросе о масштабах.

Если для сопротивлений взят масштаб $1 \text{ мм} \equiv m$ омов, то OA (измеренное в миллиметрах) $\times m = R$; масштаб для проводимостей пусть будет $1 \text{ мм} \equiv n$ сименсов тогда OB (измеренное в миллиметрах) $\times n = \frac{1}{R}$; или $OA = \frac{R}{m} \text{ мм}$ и $OB = \frac{1}{Rn} \text{ мм}$,

так что $OA \cdot OB = \frac{1}{m \cdot n}$.

Следствием этого является, что произведение и всех других соответствующих друг другу радиусов-векторов тоже будет равно величине $\frac{1}{m \cdot n}$, т. е. величине, обратной произведению масштабов.

Итак степень обращения на чертеже (когда меряется в миллиметрах длина линий) равна:

$$K = \frac{1}{m \cdot n}.$$

Какой-нибудь величине $X = AM$, или, иначе, вектору $Z = OM$, соответствует вектор проводимости $\dot{Y} = \overline{OM'}$. По величине он равен отрезку $\overline{OM'}$, а углы наклона их к вертикальной оси равны, но противоположны по знаку.

Левой половине прямой SQ соответствует правая половина окружности, а правая половина прямой — левая половина окружности.

Как следующий пример применения метода обращений рассмотрим задачу, решенную в параграфе 44 аналитически: те же два значения для C в случае отсутствия сдвига фаз между током и напряжением на всей цепи мы можем найти и графически.

Проводимость части MN цепи (фиг. 78)

$$\frac{1}{R_2} + j\omega C,$$

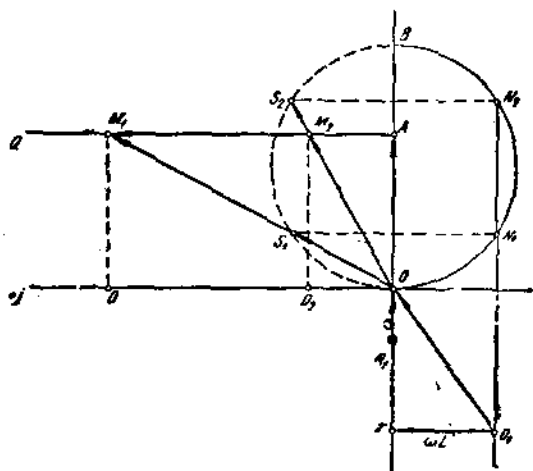
при изменяющемся C есть величина переменная. Геометрическое место концов векторов, представляющих эту переменную проводимость, есть на фиг. 210 прямая линия AQ , параллельная мнимой оси и проходящая от нее на расстоянии

$$OA = g = \frac{1}{R_2}.$$

Интересной особенностью ее является то, что она, будучи бесконечной в сторону возрастания положительных мнимых величин, имеет начало на оси ординат, чему соответствует значение

$$b = 0, C = 0.$$

Если бы нам было задано, что параллельно с R_2 включено вообще реактивное сопротивление, то нам следовало бы эту линию считать бесконечной в обе стороны, но так как задано, что в параллельной с R_2 ветви включена именно ем-



Фиг. 210.

кость и мы не считаем, что вместо нее может оказаться надобность в индуктивности, то и упомянутую прямую линию мы будем считать имеющей начало в A .

Обратив эту прямую относительно точки O , найдем геометрическое место концов векторов, представляющих сопротивление между M и N . Это будет окружность ON_1N_2B .

На основании сказанного выше о масштабах и степени обращения имеем

$$OB \cdot OA = \frac{1}{m \cdot n}$$

и

$$OB = \frac{1}{OA \cdot m \cdot n} = \frac{R_2}{m} \text{ миллиметров,}$$

так как

$$OA = \frac{1}{nR_2} \text{ миллиметров.}$$

Обратим внимание на следующее: так как прямая не имеет другой половины от A вправо (т. е. эта половина не имеет для нас смысла), то и окружность будет иметь для нас только одну половину OS_2S_2B .

Но если какой-нибудь вектор $\overline{OM_1}$ есть проводимость Y_1 при емкости, то соответствующее ей сопротивление $Z_1 = \overline{OS_1}$ должно быть отложено в правом квадранте согласно с изложенным выше.

Следовательно, решив задачу геометрически, т. е. найдя половину окружности OS_2S_2B , мы сообразно физическому смыслу должны ее повернуть в правый квадрант в положение ON_1N_2B .

Ко всем векторам из O в точки этой дуги, представляющим сопротивления части цепи MN , надо прибавить сопротивление

$$R_1 + j\omega L,$$

т. е. постоянный вектор, идущий из O в левом квадранте, что сдвинет всю полуокружность влево.

Вместо перечерчивания полуокружности проще перенести начало координат вправо на ту же длину

$$\sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2}$$

по противоположному направлению, т. е. перенести его в точку O_1 , причем

$$\overline{OO_1} = -(R_1 + j\omega L).$$

Радиусы-векторы из O_1 в точки полуокружности дадут сопротивления всей цепи.

Чтобы сила тока совпадала в фазе с напряжением, надо, чтобы сопротивление не имело реактивной части, т. е. чтобы вектор его не имел горизонтальной составляющей. Проводим линию $O_1N_2 \parallel OB$ и находим точки N_1 и N_2 пересечения ее с полуокружностью. O_1N_1 и O_1N_2 будут те сопротивления, которые имеют только активную часть. Переносим точки N_1 и N_2 на левую половину окружности в S_1 и S_2 и в пересечении направлений радиусов-векторов OS_1 и OS_2 с прямой AQ находим точки M_1 и M_2 .

$\overline{OM_1}$ и $\overline{OM_2}$ будут проводимости части цепи MN для этого случая.

Проектируя эти точки на ось мнимых величин, находим точки D_1 и D_2 . Отрезки OD_1 и OD_2 дают нам величины, реактивной проводимости $j\omega C$; деля их на ω , получаем два решения для C .

Геометрическое условие возможности решения задачи, очевидно, заключается в том, чтобы вертикальная прямая O_1N_3 пересекла окружность или коснулась ее, следовательно, решение возможно, если TO_1 меньше радиуса окружности, или

$$\omega L \leq \frac{1}{2} R_2.$$

То же самое условие было нами получено и в конце § 44.

Рассмотрим еще один пример, отличающийся от предыдущих тем, что обращение здесь надо применить не один раз, а два раза.

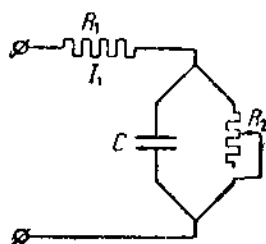
На фиг. 211 представлена цепь, состоящая из активного сопротивления R_1 и последовательно с ним включенных двух ветвей — постоянной емкости C и переменного активного сопротивления R_2 , могущего изменяться от 0 до $+\infty$. Требуется построить геометрическое место концов вектора тока I_1 .

Очевидно, что эти две параллельные ветви имеют эквивалентную проводимость, равную

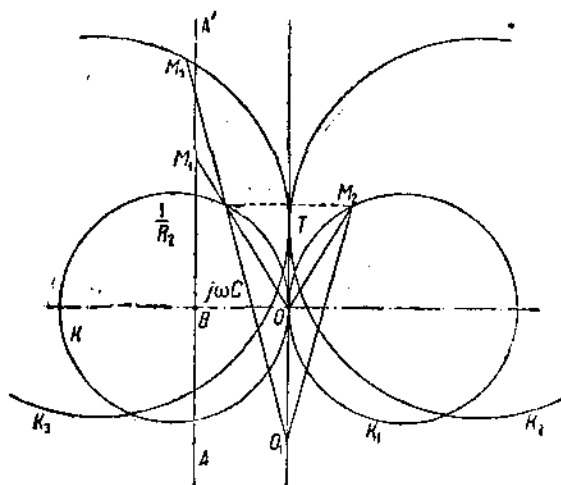
$$\frac{1}{R_2} + j\omega C,$$

изменяющуюся от ∞ до $j\omega C$; на фиг. 212 эта проводимость представляется векторами из начала координат до прямой AA' .

Ход решения далее таков:



Фиг. 211.



Фиг. 212.

Узнаем сначала геометрическое место концов вектора сопротивления всей цепи, затем его проводимости и, наконец, изменив масштаб, — тока I_1 .

Обращая прямую AA' относительно точки O , находим окружность K . Поворачиваем ее около вертикальной оси в положение K_1 . Вектор OM_2 есть эквивалентное сопротивление двух ветвей, когда $R_2 = \frac{1}{BM_1}$. Прибавим к векторам OM_2 постоянный вектор R_1 , для чего вместо передвижения всей окружности перенесем в обратную сторону, т. е. вниз, на величину R_1 начало координат. Тогда векторы O_1M_2 представят полное сопротивление всей цепи. Теперь, чтобы найти геометрическое место полной проводимости, обращаем окружность K_1 относительно O_1 ; получаем окружность K_2 ; поворачиваем ее влево и получаем окружность K_3 ; векторы O_1M_3 в новом, измененном в U раз, масштабе, представляет ток, текущий по цепи.

Окружность K_3 касается оси ординат в точке T , причем вектор OT в масштабе проводимостей есть величина, обратная сопротивлению R_1 : $O_1T = \frac{1}{R_1}$; это есть проводимость всего включения при $R_2 = 0$.

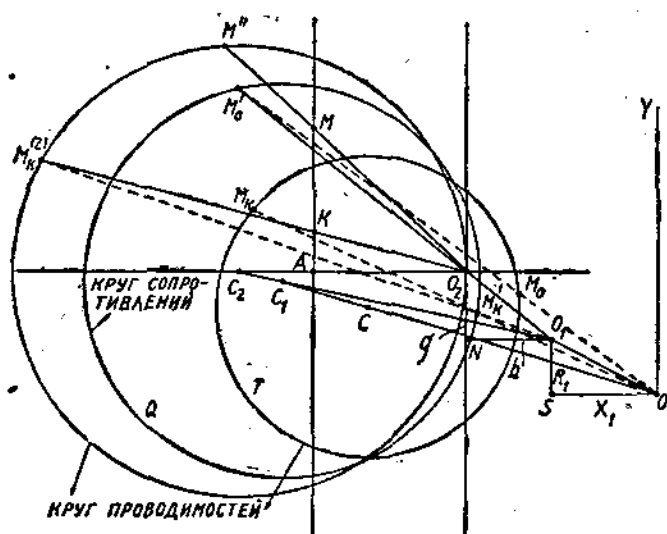
В масштабе тока O_1T есть ток „короткого замыкания“, т. е. при $R_2 = 0$.

§ 122. Круговая диаграмма трансформатора и асинхронного двигателя. Первая эквивалентная схема

Переходим к более сложному случаю.

Фиг. 188 изображает схему включения, эквивалентного трансформатору при безиндукционной нагрузке и асинхронному двигателю. Сила первичного тока для этого включения изменяется с нагрузкой совершенно так же, — как было выяснено, — как и в трансформаторе или двигателе. Найдем, как изменяется проводимость всего включения с изменением нагрузки, т. е. величины сопротивления $R'_{2\text{вне}}$; умножая, как выше, проводимость на постоянную величину напряжения U или уменьшая масштаб для силы тока в U раз сравнительно с проводимостью, мы получим закон изменения силы тока.

Выберем прежде всего масштабы для сопротивления и проводимости, затем построим (фиг. 213) линию AM , параллельную вертикальной оси на расстоянии



Фиг. 213.

$AO_2 = X'_{2\text{вну}}$ от нее; радиус-векторы O_2M представляют сопротивления „ветви нагрузки“

$$\dot{Z}'_2 = R'_{2\text{вну}} + R'_{2\text{вне}} + jX'_{2\text{вну}}$$

при переменном $R'_{2\text{вне}}$. Когда зажимы вторичной катушки трансформатора замкнуты накоротко, во вторичной цепи трансформатора имеется сопротивление

$$\dot{Z}'_2 = \dot{Z}'_{2\text{вну}} = R'_{2\text{вну}} + jX'_{2\text{вну}};$$

такое же сопротивление будет и в „ветви нагрузки“ эквивалентной схемы, и это состояние всего эквивалентного включения мы назовем коротким замыканием. При работе асин-

хронного двигателя такое состояние получается, когда ротор, замкнутый накоротко, заторможен вполне.

Радиус-вектор $\overline{O_2K}$ представляет $\dot{Z}'_{2\text{вну}}$, и точку K назовем точкой короткого замыкания.

Когда точка M спустится ниже K , мы будем иметь введенным в ветвь Z'_2 отрицательное сопротивление $R'_{2\text{вне}}$, т. е. будем иметь здесь ввод электрической энергии в наше включение, оно будет работать при этом генератором и передавать энергию в первичную цепь.

Когда ветвь Z'_2 разомкнута, тогда $R'_{2\text{вне}} = \infty$, и точка M удалена на бесконечно большое расстояние, при этом радиус-вектор $\overline{O_2M}$ принимает положение вертикальное и по величине бесконечно велик.

Обратим прямую AM относительно точки O_2 со степенью обращения, равной $\frac{1}{m \cdot n}$, и мы получим окружность $O_2M''M^{(2)}_K$ с центром в C_2 и диаметром, равным

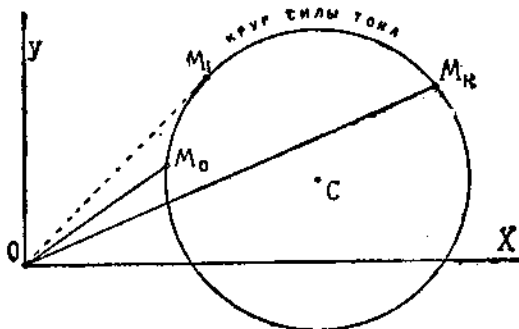
$\frac{1}{X'_{2\text{вну}}}$. Радиус-векторы $\overline{OM''}$ представят проводимости „ветви нагрузки“, отложенные, однако, не в надлежащем еще квадранте. Точке K соответствует точка $M^{(2)}_K$ —

это есть точка короткого замыкания; точка O_2 соответствует бесконечно удаленной точке M и есть точка холостого хода, когда ветвь нагрузки разомкнута. Между точками M и N включения фиг. 188 кроме ветви нагрузки есть еще ветвь с постоянной проводимостью $\dot{Y}_\mu = g_\mu - jb_\mu$; прибавив ее к радиусам-векторам $\vec{O_2M''}$, мы получим всю проводимость между M и N ; чтобы прибавить $\dot{Y}_\mu$, откладываем $\vec{O_2N} = g_\mu$ и $\vec{NO_1} = b_\mu$; тогда $\vec{O_1M''}$ есть вся проводимость между M и N (обеих ветвей) при соответствующей нагрузке (некоторой величине KM переменного сопротивления $R'_{2\text{вне}}$).

Следует хорошо уяснить следующее: „вектор“ проводимости намагничивания должен был бы быть отложен в правом верхнем квадранте, т. е. g_μ вверх от O_2 , b_μ вправо от O_2 ; такой вектор следовало бы приложить к вектору проводимости нагрузки, представленному зеркальным изображением в правом верхнем квадранте вектора $\vec{O_2M''}$ (ср. фиг. 207); мы же оставляем пока $\vec{O_2M''}$ в левом квадранте, а потому и проводимость намагничивания должны пока изобразить вектором тоже в левом квадранте, т. е. g_μ вверх от O_2 , b_μ влево от O_2 ; но приложить такой вектор к $\vec{O_2M''}$ — значит приложить вектор $\vec{O_1O_2}$, как и сделано на фиг. 213.

Обратим окружность C_2 относительно точки O_1 со степенью обращения $\frac{1}{m_1 \cdot n}$, где m_1 — новый масштаб для сопротивлений (конечно, можно выбрать и $m_1 = m$), и мы получим окружность

$$M'_0 Q M'_k$$



Фиг. 214.

с центром в C_1 как геометрическое место точек, расстояния до которых от O_1 представляют величины, обратные величинам $\vec{O_1M''}$, т. е. представляют сопротивление (при разных нагрузках) цепи между точками M и N . Точке короткого замыкания $M_k^{(2)}$ соответствует точка M'_k , которая на этом круге есть точка короткого замыкания; точке O_2 соответствует точка M'_0 — точка холостого хода на этом круге. Прибавим к этому переменному сопротивлению сопротивление Z_1 , для чего отложим $\vec{O_1S} = R_1$ и $\vec{SO} = X_1$; тогда радиусы-векторы окружности C_1 из точки O представят сопротивление всего включения фиг. 188.

Обратим окружность C_1 относительно точки O со степенью обращения $\frac{1}{m_1 \cdot n_1}$ и мы получим окружность $M'_0 M'_k T$ с центром в C , радиусы-векторы которой из O представляют переменную проводимость всего включения. Точке M'_0 соответствует точка M'_0 — точка холостого хода; величину $\vec{OM'_0}$ проводимость включения имеет тогда, когда ветвь нагрузки Z'_2 разомкнута; точке M'_k соответствует точка M'_k — точка короткого замыкания; величину $\vec{OM'_k}$ проводимость включения имеет тогда, когда ветвь нагрузки имеет сопротивление $R'_{2\text{вне}} + jX'_{2\text{вне}}$ и когда $R_{2\text{вне}} = 0$.

Так как проводимости цепи без емкости надо откладывать в правом квадранте, то повернем окружность C около вертикальной оси, проходящей через O ; тогда мы получим фиг. 214.

Как и раньше, положим $\dot{U} = U$, т. е. направим вектор U по вертикальной оси, а масштаб для силы тока I_1 выберем в U раз меньше, чем для проводимостей; тогда круг $M'_0 M'_k T$ фиг. 214 явится геометрическим местом концов вектора первичного тока I_1 , т. е. мы получаем круговую диаграмму тока. $\vec{OM'_0}$ есть ток холостого

хода — такова сила тока в первичной катушке трансформатора, когда вторичная цепь разомкнута и ток от вторичной катушки не берется; OM_k есть ток короткого замыкания — такова сила тока в первичной катушке, когда вторичную катушку мы замкнем накоротко.

Наименьший угол сдвига фаз между первичным током и напряжением получается тогда, когда вектор силы тока I_1 касается окружности (на фиг. 214 положение OM_1). Трансформатор рассчитывается обыкновенно так, что его полная нагрузка соответствует точке M_1 и току OM_1 (то же — и для асинхронного двигателя).

Часть окружности в круговой диаграмме лежит ниже оси абсцисс OX ; для точек этой части угол между вектором тока и вертикальной осью, вдоль которой направлен вектор напряжения, будет больше прямого, а $\cos \varphi$ будет отрицательным, т. е. и мощность $UI_1 \cos \varphi$ будет отрицательной; при этом, следовательно, наше включение работает генератором, посылает электрическую мощность в первичную сеть. Для случая трансформатора это возможно, понятно, лишь тогда, когда ко вторичной катушке подключен генератор переменного тока (с тем же числом периодов), т. е. когда $R_{\text{зане}}$ — отрицательно.

Как экспериментальным путем построить круговую диаграмму, излагается в следующей главе (путем непосредственной нагрузки трансформатора или вообще включения фиг. 188 и измерения силы тока I_1 , напряжения U и мощности $UI_1 \cos \varphi$, откуда вычисляется φ ; этим путем можно получить только часть M_0M_1 окружности, так как дальше M_1 наступают перегрузка и с ней перегрев, ниже же точки M_0 эксперимент хлопотлив; часть окружности M_0M_1 обычно является вследствие своей небольшой величины и отступления экспериментально полученных точек от теоретической линии окружности из-за разных осложняющих обстоятельств недостаточной для построения целого круга). На круговой диаграмме особым приемом можно отсчитать первичную и вторичную мощности, потери и к. п. д. всего включения.

Круговая диаграмма со вспомогательными построениями для этих отсчетов называется также диаграммой работы цепи переменного тока.

Чтобы видеть, какое влияние на диаграмму оказывают постоянные схемы замещения, полезно иметь выражения радиуса круга и координат его центра в функции этих постоянных, которые в построение диаграммы входят все время как координаты тех или иных точек. Воспользуемся формулами § 119. При неоднократном последовательном обращении эти формулы, очевидно, переписутся в таком виде:

$$\begin{aligned} r_{\lambda+1} &= K \frac{r_\lambda}{m_\lambda^2 + n_\lambda^2 - r_\lambda^2}, \\ m_{\lambda+1} &= K \frac{m_\lambda}{m_\lambda^2 + n_\lambda^2 - r_\lambda^2}, \\ n_{\lambda+1} &= K \frac{n_\lambda}{m_\lambda^2 + n_\lambda^2 - r_\lambda^2}. \end{aligned}$$

В разбираемом случае, полагая для упрощения письма

$$X'_{2 \text{ вк}} = X_2,$$

для окружности C_2 имеем

$$r_1 = \frac{1}{2X_2}, \quad m_1 = \frac{1}{2X_2}, \quad n_1 = 0.$$

После переноса начала координат будет

$$\begin{aligned} r_2 &= \frac{1}{2X_2}, \quad m_2 = \frac{1}{2X_2} + b_\mu = \frac{1 + 2b_\mu X_2}{2X_2}, \quad n_2 = g_\mu; \\ m_2^2 + n_2^2 - r_2^2 &= \frac{b_\mu + \gamma_\mu^2 X_2}{X_2}. \end{aligned}$$

После обращения этой окружности получим для окружности C_1 :

$$\begin{aligned} r_3 &= \frac{1}{2(b_\mu + Y_\mu^2 X_2)}; \\ m_3 &= \frac{1 + 2b_\mu X_2}{2(b_\mu + Y_\mu^2 X_2)}; \\ n_3 &= \frac{g_\mu X_2}{b_\mu + Y_\mu^2 X_2}. \end{aligned}$$

Последний перенос начала координат дает

$$\begin{aligned} r_4 &= r_3; \quad m_4 = m_3 + X_1 = \frac{1 + 2b_\mu X_2 + 2X_1(b_\mu + Y_\mu^2 X_2)}{2(b_\mu + Y_\mu^2 X_2)}; \\ n_4 &= n_3 + R_1 = \frac{gX_2 + b_\mu R_1 + Y_\mu^2 X_2 R_1}{b_\mu + Y_\mu^2 X_2}; \\ m_4^2 + n_4^2 - r_4^2 &= \frac{X_1 + b_\mu Z_1^2 + X_2[1 + Y_\mu^2 Z_1^2 + 2(b_\mu X_1 + g_\mu R_1)]}{b_\mu + Y_\mu^2 X_2}; \\ r_5 &= \frac{1}{2\{X_1 + b_\mu Z_1^2 + X_2[1 + Y_\mu^2 Z_1^2 + 2(b_\mu X_1 + g_\mu R_1)]\}}; \\ m_5 &= r_5 [1 + 2b_\mu X_2 + 2X_1(b_\mu + Y_\mu^2 X_2)]; \\ n_5 &= 2r_5 (g_\mu X_2 + b_\mu R_1 + Y_\mu^2 R_1 X_2), \end{aligned}$$

подставляя r_5 в выражения m_5 и n_5 для сокращения письма.

Предлагаем читателю убедиться, что ρ , ξ и η , получаемые из уравнения (А) § 111, отличаются от r_5 , m_5 и n_5 лишь множителем U_1 , так как они относятся не к кругу проводимостей, а уже к кругу силы тока.

Эквивалентная схема фиг. 188, положенная в основу получения круговой диаграммы тока метода обращений, так же как и аналитический вывод § 111, относилась к случаю, когда $X_{2\text{вне}} = 0$, т. е. к случаю безиндукционной нагрузки трансформатора. Положим в основу дальнейшего несколько более общее условие: именно пусть во внешней части вторичной цепи имеется постоянный по величине сдвиг фаз φ_{2a} между током I_2 и напряжением U_2 , т. е. постоянное отношение двух переменных величин $X'_{2\text{вне}}$ и $R'_{2\text{вне}}$; на фиг. 188 и 213 мы имеем тот частный случай, когда $\varphi_{2a} = 0$. Эквивалентную схему мы теперь будем изображать в виде, представленном на фиг. 215, где BB суть зажимы, к которым подключается внешняя часть вторичной цепи с постоянным φ_{2a} и на которых имеется напряжение U_2 . Назовем эти зажимы вторичными.

Согласно с рассуждениями в конце § 112 силу тока ($-I_2 k$) обозначим через $\dot{I}'_2$ и назовем вторичной силой тока, „приведенной“ к первичной части цепи; для краткости же мы дальше эту величину будем называть просто вторичным током.

Аналогично напряжение на зажимах BB , равное

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 - \dot{I}_1 \dot{Z}_1 - \dot{I}'_2 \dot{Z}'_{2\text{вну}},$$

назовем вторичным напряжением, „приведенным“ к первичной части цепи, или — для краткости — вторичным напряжением, хотя не будем забывать, что в действительности вторичное напряжение, как ясно видно из фиг. 184 (вектор OS), равно

$$\begin{aligned} \dot{E}_1 - \dot{I}_2 \dot{Z}_{2\text{вну}} &= \dot{E}_1 k - \dot{I}_2 \dot{Z}_{2\text{вну}} = -(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 \dot{Z}_1) k - \dot{I}_2 \dot{Z}_{2\text{вну}} = \\ &= -k \left(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 \dot{Z}_1 + \dot{I}_2 k \frac{\dot{Z}_{2\text{вну}}}{k^2} \right) = -k \dot{U}_1. \end{aligned}$$

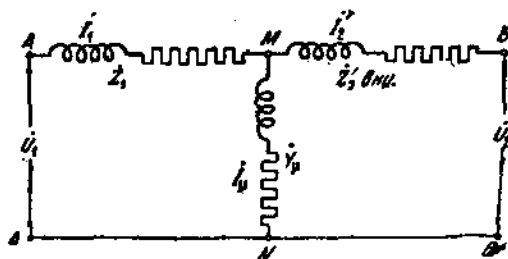
Комплекс $\dot{Z}'_2 = \frac{\dot{Z}_2}{k^2}$ есть вторичное сопротивление, приведенное к первичной части цепи.

„Приведение“ величин вторичной части к первичной обусловлено существованием коэффициента трансформации k (в который у асинхронных двигателей входят еще и обмоточные коэффициенты) и может быть резюмировано в следующих правилах: приведенный ток равен действительному, помноженному на k (отвлекаясь от знака); приведенное напряжение равно действительному, деленному на k (тоже отвлекаясь от знака) и приведенное сопротивление равно действительному, деленному на k^2 .

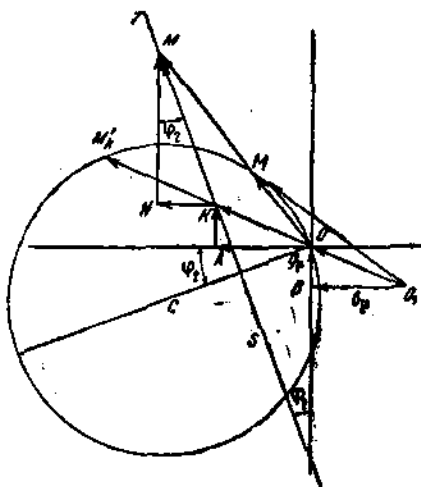
На фиг. 187 увеличение $\triangle MLO$ линейно в $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{k}$ раз было приведением вторичной части цепи к первичной.

Из вышеизложенного ясно, что выражения вторичной мощности как в „приведенных“ величинах, так и в действительных дают одну и ту же величину этой мощности.

Далее очень важно заметить, что включение фиг. 215 эквивалентно не только отдельному трансформатору или асинхронному двигателю, но, как легко видеть, и це-



Фиг. 215.



Фиг. 216.

люй сети с подключенными к ней трансформаторами, двигателями, не только асинхронными, но и всякими другими двигателями переменного тока, умформерами, лампами и пр. Линия передачи энергии тоже эквивалентна схеме фиг. 215. Провода, передающие энергию и имеющие на своих концах нагрузку, по своей длине имеют равномерно распределенную ёмкость, каковую можно заменить сосредоточенной в одном месте, что будет доказано позднее, а это равносильно существованию ветви MN с положительным b_{μ} , т. е. с проводимостью $g_{\mu} + jb_{\mu}$; трансформаторы и двигатели на конце проводов в этом случае представляют просто индукционную нагрузку между вторичными зажимами BB . При этом $k=1$, и кроме того, отпадает разница в знаке между приведенной силой тока и действительной, то же для приведенного напряжения и действительного. При условии постоянства φ_{2a} при изменении этой нагрузки для всех таких сетей имеют место и эквивалентная схема фиг. 215 и последующие выводы и диаграммы.

Круговая диаграмма для случая φ_{2a} не равного нулю, методом обращений получается следующим образом.

Построим (фиг. 216) вектор $\overline{OK} = \dot{Z}'_{2\text{вну}}$ отложив $\overline{OA} = \dot{X}'_{2\text{вну}}$ и $\overline{AK} = \dot{R}'_{2\text{вну}}$. Затем отложим любое значение $\dot{X}'_{2\text{вне}} = \overline{KN}$ и соответствующее ему значение $\dot{R}'_{2\text{вне}} = \overline{NM}$; отрезок $\overline{KM}$ изобразит одно из значений переменного $\dot{Z}'_{1\text{вне}}$, а радиус-вектор $\overline{OM}$ представит все $\dot{Z}'_2$. При изменении $\dot{Z}'_{2\text{вне}}$ угол φ_{2a} остается постоянным и точка M перемещается по прямой ST , проходящей через точку K и наклоненной

под углом φ_{1n} к вертикальной оси. Обратив прямую ST относительно точки O , мы получим окружность, изображенную на фиг. 216, с центром C на перпендикуляре, опущенном из O на прямую ST . Радиусы-векторы OM' будут величинами, обратными радиусам-векторам OM , т. е. представят проводимости ветви $MBBN$ эквивалентной схемы фиг. 215, т. е. всей вторичной части цепи. Когда вторичные зажимы BB замкнуты накоротко, тогда $Z'_2 = Z'_{2\text{вну}} = \overline{OK}$; соответствующая точке K точка M'_k есть точка короткого замыкания; точка O есть точка холостого хода. Отложив $OB = g_\mu$ и $BO_1 = b_\mu$, мы получим, что радиусы-векторы OM' представят проводимости обеих ветвей вместе между точками M и N эквивалентной схемы. Далее вывод не будет отличаться от изложенного выше.

Для построения круговой диаграммы для существующей и работающей цепи переменного тока, которая может быть представлена эквивалентной схемой фиг. 215, при помощи метода обращений нужно знать $Z'_{2\text{вну}}$, Y_μ и Z_1 ; определение этих „постоянных“ экспериментальным путем оказывается весьма сложным. Построение круговой диаграммы или диаграммы работы цепи изложенным в следующей главе способом оказывается практически более удобным. Наоборот, для такой цепи (трансформатора, двигателя, линии передачи), которая только еще рассчитывается, проектируется, метод обращений бывает удобен; в особенности он удобен для теоретического исследования работы двигателей, основанных на новых принципах, новых схемах включения.

§ 123. Пример построения круговой диаграммы тока для первой эквивалентной схемы

Пример 56. Требуется построить круговую диаграмму тока для цепи со следующими данными (фиг. 217):

$$\begin{aligned} Z_1 &\approx 5 + j10; \quad Z'_{2\text{вну}} = 3 + j9; \quad Y_\mu = 0,004 + j0,020; \\ U_1 &= 2000 \text{ В}, \quad \cos \varphi_{1n} = 1. \end{aligned}$$

Обращаем внимание читателя, что в этом примере реактивная составляющая проводимости Y_μ положительная, что означает, что в Y_μ находится не индуктивность, как в схеме трансформатора, а емкость, что и показано на фиг. 217.

Таким образом рассматриваемый пример может относиться не к трансформатору, а к линии передачи энергии, во всяком случае, по характеру зависимостей.

Выберем масштабы: для сопротивлений $1 \text{ мм} \equiv m = 0,4 \text{ }\Omega$ и для проводимостей $1 \text{ мм} \equiv n = 0,001 \text{ S}$.

Строим (фиг. 218) вектор $Z'_{2\text{вну}}$, откладывая

$$O_1A = \frac{9}{0,4} = 22,5 \text{ мм} \text{ и } AB = \frac{3}{0,4} = 7,5 \text{ мм}.$$

Продолжая отрезок AB в обе стороны, получаем прямую FF_1 — геометрическое место концов вектора сопротивления $Z_2 = Z'_{2\text{вну}} + R_{2\text{вне}}$.

Точка B есть точка короткого замыкания, когда $R_{2\text{вне}} = 0$, а бесконечно удаленная точка D есть точка холостого хода, когда $R_{2\text{вне}} = \infty$.

Обратив прямую FF_1 относительно O_1 , получим окружность проводимостей Y_2 . Степень обращения равна

$$K = \frac{1}{mn} = \frac{1}{0,4 \cdot 0,001} = 2500.$$

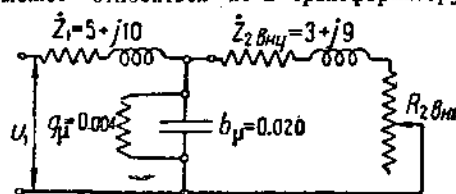
Поэтому

$$O_1D = \frac{K}{O_1A} = \frac{2500}{22,5} = 111,1 \text{ мм}$$

и $O_1C_1 = 55,5 \text{ мм}$.

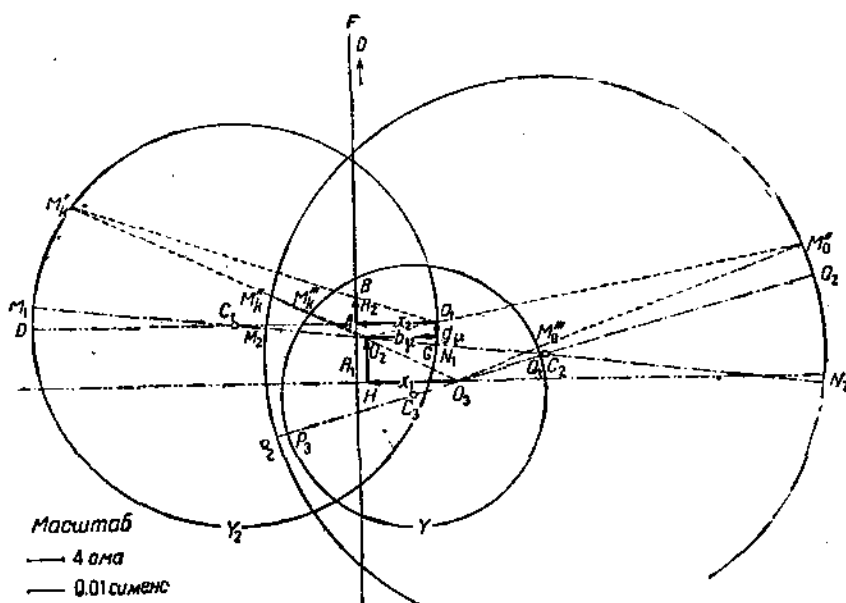
Продолжив линию O_1B , найдем в точке M_k точку короткого замыкания круга проводимостей.

К кругу проводимостей Y_2 надо теперь прибавить Y_μ .



Фиг. 217.

Не забудем, что проводимости $\dot{Y}_2$ должны были быть отложены по правую сторону от вертикальной оси через O_1 (фиг. 219; прибавляя $\dot{Y}_\mu$ проводимость емкостного характера, т. е. с положительным b , мы, как видно из фиг. 219, передвинули бы всю окружность в новое положение; но проще передвинуть в обратном направлении на ту же величину начало



Фиг. 218.

координат, т. е. поместить его в точку O_2 , причем $\overline{O_1 O_2} = -\dot{Y}_\mu$. Перевернув чертеж опять на левую сторону от вертикали $O_1 U$, получим то, что начерчено уже в масштабе на фиг. 218, где

$$O_1 G = \frac{0.004}{0.001} = 4 \text{ мм} \text{ и } G O_2 = \frac{0.02}{0.001} = 20 \text{ мм.}$$

Обратим круг $\dot{Y}_2$ относительно точки O_2 и мы получим круг сопротивлений двух параллельных ветвей схемы.

Для этого вычисляем

$$O_2 N_2 = \frac{K}{O_2 N_1} = \frac{2500}{19.75} = 126.7 \text{ мм}$$

$$O_2 M_2 = \frac{K}{O_2 M_1} = \frac{2500}{91.3} = 27.3 \text{ мм,}$$

$$O_2 N_2 + O_2 M_2 = 154 \text{ мм}$$

есть диаметр нового круга и

$$M_2 C_2 = 77 \text{ мм}$$

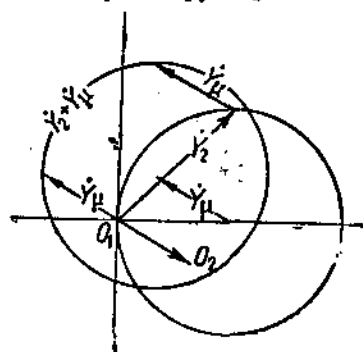
его радиус.

Продолжая линию $O_2 O_1$, находим точку холостого хода M'_0 , а проводя $O_2 M'_k$, находим точку короткого замыкания M''_k .

Прибавляем к кругу C_2 сопротивление $\dot{Z}_1 = 5 + j10$, откладывая

$$O_2 H = \frac{5}{0.4} = 12.5 \text{ мм}$$

$$H O_1 = \frac{10}{0.4} = 25 \text{ мм,}$$



Фиг. 219.

и получаем точку O_3 . Замечаем, что реактивное сопротивление HO_3 мы отложили вправо от вертикали через O_3 , так как оно положительно и будет увеличивать реактивные составляющие всего сопротивления Z всего включения.

Чтобы найти проводимость $\dot{Y}$ всего включения, обращаем окружность C_2 относительно точки O_3 , для чего находим:

$$O_3Q_2 = \frac{K}{O_3Q_1} = \frac{2500}{102,5} = 24,4 \text{ мм},$$

$$O_3P_2 = \frac{K}{O_3P_1} = \frac{2500}{51,5} = 48,4 \text{ мм}$$

и $P_2Q_2 = 72,8 \text{ мм}$; это есть диаметр нового круга C_3 , радиус его

$$C_3P_2 = 36,4 \text{ мм}.$$

Если мы повернем весь чертеж (фиг. 220) около вертикальной оси через O_3 , то получим окружность проводимостей в правильном положении; большая часть ее будет находиться при этом справа от этой вертикальной оси.

Направим вектор напряжения по вертикали; тогда векторы от O_3 до любых точек M окружности $\dot{Y}$ дадут нам силу тока в масштабе p , который определяется из соотношения:

$$(\text{длина } O_3M) \cdot n \cdot 2000 = (\text{длина } O_3M) \cdot p,$$

или

$$p = n \cdot 2000 = 2,$$

или

$$1 \text{ мм} \equiv 2 \text{ А}.$$

Выразим символически токи при холостом ходе и коротком замыкании. Проще всего нанесем на окружности тока (фиг. 220) точки M''_0 и M''_k . Измерением находим, что $O_3M''_k = 44,4 \text{ мм}$, следовательно,

$$I_{lk} = O_3M''_k \cdot p = 44,4 \cdot 2 = 88,8 \text{ А}.$$

Мераем по транспортиру угол между $M''_k O_3$ и вертикалью через O_3 или вычисляем его по компонентам отрезка $O_3M''_k$, этот угол равен $64^\circ 18'$. Следовательно,

$$I_{lk} = 88,8e^{-j64^\circ 18'}$$

или

$$I_{lk} = 88,8e^{-j64,3^\circ}.$$

Отрезок $O_3M''_0 = 24,5 \text{ мм}$, следовательно, $I_{l0} = 49 \text{ А}$. Аргумент его получаем равным $+69^\circ$, так что

$$I_{l0} = 49e^{+j69^\circ},$$

т. е. в данном примере ток холостого хода есть ток, опережающий напряжение.

§ 124. Круговая диаграмма второй эквивалентной схемы

В этом параграфе возвратимся ко второй эквивалентной схеме, представленной на фиг. 189, и на получении для нее круговой диаграммы.

Для вывода последней можно воспользоваться фиг. 216. Отложим согласно схеме фиг. 189 вектор

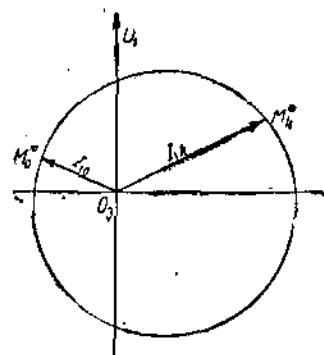
$$\overline{OK} = \dot{C}Z_1 + \dot{C}^2Z'_{2\text{вну}}$$

и проведем линию MKS под таким углом φ'_2 к вертикальной оси, что

$$\varphi'_2 = \arg \lg \frac{X_{2\text{вне}}}{R_{2\text{вне}}} + \arg \dot{C}^2 = \arg \lg \frac{X_{2\text{вне}}}{R_{2\text{вне}}} + 2\gamma = \varphi_2 + 2\gamma,$$

если обозначить $\dot{C} = C \cdot e^{j\gamma}$.

Обратив ее, получим окружность S . Любой вектор $\overline{OM'}$ до этой окружности дает проводимость ветви с нагрузкой (конечно, не в надлежащем еще квадранте). К этой



Фиг. 220.

проводимости надо прибавить постоянную проводимость второй ветви, т. е. вектор

$$\frac{\dot{Y}_p}{C} = Y_0 e^{-j\alpha},$$

для чего и строим его зеркальное изображение, вектор

$$\overline{O_1 O} = Y_0 e^{+j\alpha},$$

отложив отрезок OB равным активной составляющей вектора $\dot{Y}_0$ и BO_1 равным реактивной его составляющей.

Повернув всю фигуру около вертикальной оси, проходящей через O_1 , получим окружность проводимости всего включения уже в надлежащем квадранте; после изменения масштаба это будет и окружность тока.

Что касается экспериментального определения постоянных величин, положенных в основание обеих эквивалентных схем, то здесь остановимся лишь на следующем:

При холостом ходе, когда $Z_{2\text{вне}} = \infty$, меряются U , I и P , и отсюда вычисляются $\cos \varphi = \frac{P}{UI}$, $\sin \varphi$ и величины $\frac{I \cos \varphi}{U}$ и $\frac{I \sin \varphi}{U}$; очевидно, что

$$\frac{I \cos \varphi}{U} - j \frac{I \sin \varphi}{U} = \frac{\dot{Y}_p}{C} = \dot{Y}_0$$

равно проводимости включения при разомкнутой внешней цепи, т. е. проводимости ветви $\frac{\dot{Y}_p}{C}$.

При коротком замыкании, когда $Z_{2\text{вне}} = 0$, производится измерение тех же величин, обозначим их U , I_k и P_k , и вычисляется

$$\frac{I_k \cos \varphi_k}{U} - j \frac{I_k \sin \varphi_k}{U} = \dot{Y}_k$$

проводимость всего включения при коротком замыкании. Из этой проводимости вычитается первая и получается проводимость ветви нагрузки при коротком ее замыкании:

$$\dot{Y}_k - \dot{Y}_0 = \frac{1}{\dot{C} \dot{Z}_1 + \dot{C}^2 \dot{Z}'_{2\text{вну}}}$$

Величина, обратная этой, есть вектор $\overline{OK}$ (фиг. 216):

$$\overline{OK} = \dot{C} \dot{Z}_1 + \dot{C}^2 \dot{Z}'_{2\text{вну}} = \frac{1}{\dot{Y}_k - \dot{Y}_0}.$$

Таким образом имеются оба элемента, $\overline{OK}$ и $\overline{O_1 O}$, необходимые для построения круговой диаграммы,

Величина $\dot{C}$ может быть определена следующим образом:

При опыте холостого хода первичное напряжение $\dot{U}_1$ может быть выражено, принимая во внимание, что вторичный ток при этом равен нулю

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 + \dot{I}_1 \dot{Z}_1,$$

а ток холостого хода $\dot{I}_1$ в свою очередь выражается так:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_2 \dot{Y}_p.$$

Следовательно,

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2(1 + \dot{Y}_2 \dot{Z}_1) = \dot{U}_2 \dot{C}.$$

Таким образом

$$C = \frac{U_1}{U_2}$$

и

$$\arg \dot{C} = \gamma = \arg \dot{U}_1 - \arg \dot{U}_2.$$

Этот угол может быть определен при помощи ваттметра, толстую катушку которого мы подключим через реостат к первичному напряжению, а тонкую — ко вторичному.

У асинхронных двигателей угол γ получается чрезвычайно небольшим, так что можно его положить равным нулю.

Заметим, что опыт короткого замыкания проводится при пониженном первичном напряжении во избежание слишком большого перегрева трансформатора или асинхронного двигателя от большого тока короткого замыкания, причем изменились бы и самые „постоянные“ R_1, R_2', X_1, Y_2 , и результат перевычисляется на нормальное напряжение.

ГЛАВА ПЯТНАДЦАТАЯ

ВЕКТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ И КРУГОВЫЕ ДИАГРАММЫ

§ 125. Выражение окружности векторными уравнениями

Нам из предыдущего уже известно, что конец вектора

$$\dot{r} = \frac{1}{\dot{A} + x\dot{B}}$$

описывает окружность, так как, вводя вектор-перпендикуляр $\dot{P} = P e^{j\beta}$ из начала координат O на прямую $\dot{R} = \dot{A} + x\dot{B}$, мы имеем

$$\dot{r} = \frac{1}{\dot{P}(1 + jy)} = \frac{1}{2P} e^{-j\beta} + \frac{1}{2P} e^{-j(\beta + \pi)}.$$

В настоящем параграфе подойдем к вопросу еще с новой стороны и докажем, что конец $\dot{r}$ опишет окружность, другим методом.

В § 53 мы ознакомились уже с векторным уравнением прямой линии

$$\dot{U} = \dot{A} + x\dot{B} \quad (\text{I})$$

и окружности

$$\dot{U} = A + B e^{j\varphi}. \quad (\text{II})$$

Метод обращений подает нам мысль, что если уравнение (I) выражает прямую, то уравнение

$$\dot{U}' = \frac{1}{\dot{A} + x\dot{B}} \quad (\text{III})$$

будет выражать окружность, проходящую через начало координат; действительно, $\dot{U}'$ есть вектор, обратный $\dot{U}$, следовательно, уравнение (III) дает кривую, обратную прямой (I), причем начало векторов лежит в начале координат, следовательно, уравнение (III) выражает окружность, проходящую через начало координат.

Так как из уравнений (I) и (III)

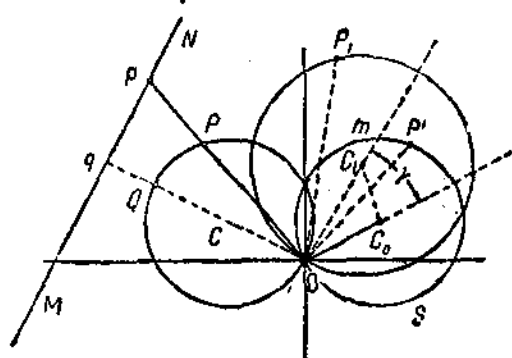
$$\dot{U} \cdot \dot{U}' = 1,$$

$$\dot{U} = U e^{j\varphi}, \text{ то } \dot{U}' = \frac{1}{\dot{U}} = \frac{1}{U} e^{-j\varphi},$$

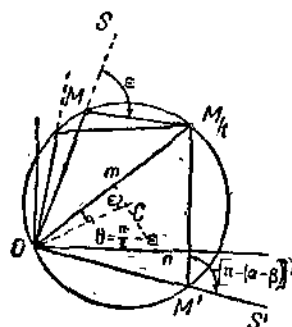
т. е. $\dot{U}$ и $\dot{U}'$ находятся в разных квадрантах.

Согнем чертеж по оси ординат, тогда $\dot{U}'$ совпадает по направлению с $\dot{U}$.

Если мы будем изменять x в уравнении (I), то $\dot{U}$ опишет своим концом прямую линию, пусть это будет прямая MM (фиг. 221); отрезки $\dot{U}'$, обратные по



Фиг. 221.



Фиг. 222.

величине отрезкам U , опишут своими концами при этом окружность OPQ , проходящую через начало координат, которое, являясь началом всех радиусов-векторов, будет и центром обращения; для любого радиуса-вектора OP будет

$$OP \cdot Op = 1,$$

и следовательно,

$$OP = \frac{1}{Op} = \frac{1}{U} = U'.$$

Сам вектор $\dot{U}'$ не есть, однако, $\overline{OP}$, а согласно предыдущему наклонен к оси ординат под таким же углом, но с другим знаком, т. е.

$$\dot{U}' = \overline{OP'}.$$

Геометрическое место концов вектора $\dot{U}'$ при изменении x есть окружность OP' с центром в C_0 .

Докажем теперь, что (III) выражает окружность другим методом, не прибегая к идее обращения.

Рассмотрим, какое геометрическое место будет описывать конец вектора, выражающегося уравнением (III)

$$\dot{U}' = \frac{1}{A + xB}.$$

Построим (фиг. 222) два частных значения вектора $\dot{U}'$, именно при $x=0$, которое отметим индексом k :

$$\dot{U}'_k = \frac{1}{A} = \overline{OM}_k$$

и при $x=\infty$, отметив его индексом 0:

$$\dot{U}'_0 = 0.$$

Представим себе теперь вектор $\vec{U}$ при некотором произвольном положительном значении x , пусть это будет вектор $\vec{OM}$. Соединим M с M_k и определим угол ε между продолжением $\vec{OM}$ и $\vec{MM}_k$; окажется, что его величина будет постоянна и независима от x .

Определение его произведем следующим образом:

Угол ε есть разность углов, составленных с вертикальной осью $\vec{OM}$ и $\vec{MM}_k$, т. е. разность аргументов этих векторов.

На чертеже эти углы отрицательны (находятся в правом квадранте), поэтому если мы вектор $\vec{OM}$ разделим на вектор $\vec{MM}_k$, то аргумент частного и будет угол ε , что мы обозначим так:

$$\varepsilon = \arg \left(\frac{\vec{OM}}{\vec{MM}_k} \right).$$

Вычисляем

$$\vec{MM}_k = \vec{OM}_k - \vec{OM} = \frac{1}{A} - \frac{1}{A + xB} = \frac{x\dot{B}}{A(A + xB)};$$

$$\frac{\vec{OM}}{\vec{MM}_k} = \frac{1}{A + xB} : \frac{x\dot{B}}{A(A + xB)} = \frac{A}{x\dot{B}} = \frac{A}{xB} e^{j(\alpha - \beta)}.$$

Итак

$$\angle M_k M S = \varepsilon = \alpha - \beta,$$

т. е. действительно равен постоянной величине.

Отсюда мы делаем следующее важное заключение: при всех положительных значениях x конец вектора $\vec{U}$, выраженного уравнением (III), описывает дугу окружности OMM_k , вмещающую угол

$$\pi - \varepsilon = \pi - (\alpha - \beta).$$

Рассмотрим, что будет, если x будет принимать отрицательные значения. Поставим вместо знака плюс знак минус перед x и будем давать ему всевозможные положительные значения, при этом некоторый новый вектор

$$\vec{OM}' = \frac{1}{A - xB},$$

$$\vec{M}'M_k = \frac{1}{A} - \frac{1}{A - xB} = -\frac{x\dot{B}}{A(A - xB)}$$

и

$$\frac{\vec{OM}'}{\vec{M}'M_k} = -\frac{A}{x\dot{B}} e^{j(\alpha - \beta)},$$

а так как

$$-1 = \cos \pi \pm j \sin \pi = e^{\pm j\pi},$$

то, беря в показателе знак минус, чтобы не вводить углов, больших 180° , имеем

$$\frac{\vec{OM}'}{\vec{M}'M_k} = \frac{A}{xB} e^{j(-\pi + \alpha - \beta)},$$

следовательно,

$$\angle M_k M' S' = -\pi + \varepsilon$$

или по абсолютной величине

$$\angle M_k M' O = \varepsilon.$$

Таким образом при отрицательных x конец M' вектора $\vec{U}$ описывает дугу, вмещающую угол ε ; обе дуги вместе составляют, очевидно, окружность. Ее

легко построить: вектор $\overline{OM}_k$ известен; из середины его m восстанавливаем перпендикуляр mn , и при O строим угол

$$\angle M_k OC = \vartheta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon;$$

точка C встречи стороны OC этого угла с mn и есть центр круга.

Допустим, что вектор $\dot{A}$ есть $\overline{Op}$ (фиг. 221), а $\dot{B}$ направлено от p к N ; тогда при $x > 0$ концы вектора $\dot{U}$ будут находиться на части pN , а при $x < 0$ — на части pM . Точка P' разделит окружность OP' на две части: $x > 0$ соответствует дуге $P'mO$, а $x < 0$ — дуге $P'SO$. Точка O соответствует значению $x = \pm \infty$, т. е. обоим бесконечно удаленным концам прямой MN .

Далее рассмотрим уравнение

$$\dot{U}_1 = \frac{\dot{C}}{A + xB}. \quad (IV)$$

Очевидно, что всякое $\dot{U}_1$ получается из некоторого $\dot{U}'$ умножением последнего на один и тот же комплекс $\dot{C} = Ce^{i\gamma}$; при таком умножении $\dot{U}'$ увеличивается в C раз и поворачивается против часовой стрелки на угол γ . Поэтому все концы векторов $\dot{U}'$, или, иначе, вся окружность OP' (фиг. 221), будут увеличены в C раз и повернуты относительно этого начала на угол γ .

Таким образом если вектор $\dot{U}$, определяемый уравнением (I), есть $\overline{Op}$, то вектор $\dot{U}_1$, определяемый уравнением (IV), есть $\overline{OP}_1$.

Возьмем теперь вектор, определяемый таким уравнением:

$$\dot{U}_2 = \dot{D} + \frac{\dot{C}}{A + xB}. \quad (V)$$

Сравнивая уравнение (V) с уравнением (IV) видим, что

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 + \dot{D},$$

т. е. если к любому $\dot{U}_1$ прибавить один и тот же вектор $\dot{D}$, то получится соответствующее значение вектора $\dot{U}_2$; другими словами, концы векторов $\dot{U}_2$ все сдвинуты на $\dot{D}$ относительно концов векторов $\dot{U}_1$. Поэтому геометрическим местом концов $\dot{U}_2$ будет окружность того же диаметра, что и для векторов $\dot{U}_1$, но сдвинутая на $\dot{D}$.

Для ее получения нужно сдвинуть на $\dot{D}$ центр C_1 прежней окружности OP_1 (фиг. 221, оставив радиус без изменения).

Уравнение (V) можно преобразовать, приведя правую часть к общему знаменателю:

$$\dot{U}_2 = \frac{A\dot{D} + xB\dot{D} + \dot{C}}{A + xB} = \frac{\dot{M} + x\dot{N}}{A + xB},$$

где

$$\dot{M} = A\dot{D} + \dot{C} = Me^{i\mu}$$

и

$$\dot{N} = B\dot{D} = Ne^{i\nu}. \quad (VI)$$

Таким образом мы приходим к результату, что если переменный вектор имеет выражение (отбросим индекс 2 у $\dot{U}_2$, теперь ненужный)

$$\dot{U} = \frac{\dot{M} + x\dot{N}}{A + xB}, \quad (VII)$$

где $\dot{A}$, $\dot{B}$, $\dot{M}$ и $\dot{N}$ суть постоянные комплексы, а x переменное действительное число, то конец этого вектора описывает окружность, не проходящую через начало координат.

Чтобы эта окружность прошла через начало координат, должно быть $D=0$ в уравнении (V), а это означает, что $\dot{N}=0$ в уравнении (VI) и (VII) и $\dot{U}$ приводится к виду (IV).

Когда дано уравнение, выражающее вектор в форме (VII), окружность, которую описывает ее конец, можно легко построить, не переводя это уравнение в формы (V), (IV) и (III), а непосредственно, и именно вполне аналогично предыдущему случаю.

Дадим переменному множителю x в уравнении (VII) два частных значения $x=0$ и $x=\infty$.

Им будут соответствовать два частных значения вектора $\dot{U}$, которые мы обозначим, как и раньше:

$$\text{при } x=0 \quad \dot{U}=\dot{U}_k$$

$$\text{и при } x=\infty \quad \dot{U}=\dot{U}_0.$$

Из уравнения (VII) находим, что

$$\dot{U}_k = \frac{\dot{M}}{A} = \frac{M}{A} e^{j(\mu-\alpha)} \quad (\text{VIII})$$

и

$$\dot{U}_0 = \frac{\dot{N}}{B} = \frac{N}{B} e^{j(\nu-\beta)}. \quad (\text{IX})$$

Здесь в правых частях все величины даны, поэтому векторы $\dot{U}_k$ и $\dot{U}_0$ легко вычислить.

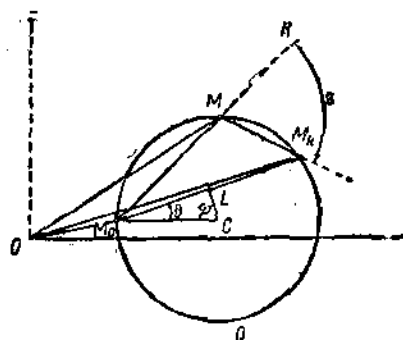
Начертим вектор (фиг. 223)

$$\overline{OM}_0 = \dot{U}_0 \text{ и } \overline{OM}_k = \dot{U}_k.$$

На чертеже вектор $\dot{U}_k$ взят больше $\dot{U}_0$, в наиболее важных для нас далее случаях так именно и будет, но при других физических значениях векторов $\dot{U}$ может быть и обратное.

Отрезок $\overline{OM}$ представляет вектор $\dot{U}$, соответствующий некоторому положительному значению x между 0 и ∞ , это есть любой вектор $\dot{U}$. Соединим между собой точки M и M_k , M_0 и M и, наконец, M_0 и M_k ; продолжим линию M_0M за точку M в виде MK .

Угол $\angle M_kMK$ есть постоянная величина, обозначим его опять через ε и докажем, что ε от переменной x не зависит.



Фиг. 223.

Угол ε есть угол, на который надо повернуть вектор $\overline{MM}_k$ навстречу линии времени, чтобы он совпал по направлению с вектором $\overline{M_0M}$, это есть угол опережения вектором $\overline{M_0M}$ вектора $\overline{MM}_k$. Представим себе, что мы делим комплексное выражение опережающего вектора $\overline{M_0M}$ на комплексное выражение отстающего вектора $\overline{MM}_k$; при этом аргументы их вычитаются, и очевидно, что аргумент частного и есть угол ε .

Произведем указанное вычисление, для чего сначала выразим векторы $\overline{MM_k}$ и $\overline{M_0M}$ через данные и вектор $\overline{OM}$:

$$\overline{MM_k} = \overline{OM_k} - \overline{OM} = \frac{\dot{M}}{A} - \frac{\dot{M} + x\dot{N}}{A + xB} = \frac{(\dot{B}\dot{M} - \dot{A}\dot{N})x}{(\dot{A} + x\dot{B})\dot{A}};$$

$$\overline{M_0M} = \overline{OM} - \overline{OM_0} = \frac{\dot{M} + x\dot{N}}{A + xB} - \frac{\dot{N}}{B} = \frac{\dot{B}\dot{M} - \dot{A}\dot{N}}{(\dot{A} + x\dot{B})\dot{B}}.$$

Теперь разделим второй результат на первый:

$$\frac{\overline{M_0M}}{\overline{MM_k}} = \frac{\dot{A}}{xB} = \frac{A}{xB} e^{j(\alpha - \beta)},$$

откуда следует, что

$$\varepsilon = \alpha - \beta.$$

Так как углы α и β нам известны, ибо известны $\dot{A} = Ae^{j\alpha}$ и $\dot{B} = Be^{j\beta}$, то ε определится, и окружность мы построим по углу

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

Пример 57.

$$\dot{A} = 3e^{j70^\circ}, \quad \dot{B} = 5e^{j10^\circ}, \quad \dot{M} = 60e^{-j70^\circ}, \quad \dot{N} = 25e^{-j70^\circ},$$

так что

$$\dot{U} = \frac{60e^{-j70^\circ} + x25e^{-j70^\circ}}{3e^{j70^\circ} + x5e^{j10^\circ}}.$$

Построим окружность, являющуюся геометрическим местом концов этого вектора $\dot{U}$.

Вычисляем

$$\dot{U}_0 = \frac{\dot{N}}{\dot{B}} = 5e^{-j80^\circ},$$

$$\dot{U}_k = \frac{\dot{M}}{\dot{A}} = 20e^{-j70^\circ},$$

$$\varepsilon = \alpha - \beta = 60^\circ,$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon = 30^\circ.$$

Откладываем (фиг. 224) под углом -75° , т. е. вправо от вертикали, отрезок $OM_k = 100$ мм, выбирая, таким образом, масштаб $1 \text{ мм} \equiv 0,2$ единицы той физической величины, которую представляет собой $\dot{U}$; затем под углом -80° отрезок $OM_0 = 25$ мм, т. е. представляющий величину пяти указанных единиц.

Откладывая при M_0 угол $\vartheta = 30^\circ$ и проводя его сторону, находим в пересечении ее с перпендикуляром, восстановленным из середины M_0M_k , центр C искомой окружности.

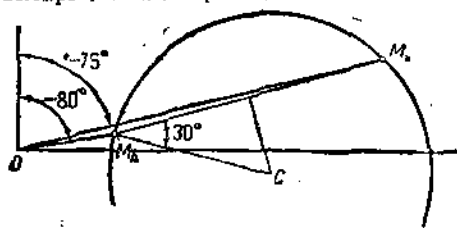
Если при таких построениях угол ϑ получится отрицательным, его надо отложить вверх от линии M_0M_k , а не вниз.

Предлагаем читателю проделать построение для следующего случая:

Пример 58.

$$\dot{A} = 3e^{j\frac{5}{12}\pi}, \quad \dot{B} = 2, \quad \dot{M} = 100, \quad \dot{N} = 20e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

и проверить местонахождение концов вектора $\dot{U}$ для некоторых значений величины x , например одной положительной (верхняя дуга M_0MM_k) и дугой отрицательной (нижняя большая дуга M_0QM_k), как в этой задаче, так и в предыдущей.



Фиг. 224.

§ 126. Простые примеры на векторные уравнения

Обратимся к тем двум примерам, которые были рассмотрены первыми в приложении метода обращения § 121.

Дана цепь, содержащая постоянное R и переменное $X = \omega L$; найти геометрическое место концов вектора тока I при постоянном напряжении U . Так как

$$I = \frac{\dot{U}}{R + jX},$$

то очевидно, что искомое геометрическое место есть окружность. Полагаем $\dot{U} = U$; X большое играет роли x малого в предыдущей теории векторных уравнений. Находим, что при $X = 0$ $i_k = \frac{U}{R}$; а при $X = \infty$ $i_0 = 0$.

Далее

$$\alpha = \arg A = \arg R = 0,$$

$$\beta = \arg B = \arg j = \frac{\pi}{2},$$

$$\varepsilon = \alpha - \beta = -\frac{\pi}{2},$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon = \pi,$$

что равнозначно с $\vartheta = 0$.

Таким образом центр окружности лежит на самом векторе $i_k - i_0 = \frac{U}{R}$, делит его пополам.

Возьмем другой пример. Переменно R , а $X = \omega L$ постоянно:

$$i = \frac{U}{jX + R}.$$

Случаю, когда $x = 0$, здесь соответствует $R = 0$; тогда

$$i_k = -j \frac{U}{X};$$

когда $R = \infty$, тогда $i_0 = 0$,

$$\alpha = \arg j = \frac{\pi}{2};$$

$$\beta = \arg R = 0;$$

$$\varepsilon = \alpha - \beta = \frac{\pi}{2};$$

$$\vartheta = 0.$$

Геометрическое место концов вектора i есть окружность диаметра $\frac{U}{X}$; центр находится на отрицательной мнимой оси в середине вектора i_k .

§ 127. Применение метода векторных уравнений к первой эквивалентной схеме

Уравнение, которое послужило нам основанием для создания первой эквивалентной схемы, было следующее (109,5):

$$\dot{U}_1 = i_1 \left(\dot{Z}_1 + \frac{\dot{Z}_2'}{1 + \dot{Y}_\mu \dot{Z}_2'} \right).$$

Выразим отсюда ток через напряжение и проводимость всего включения:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_1 \frac{1 + \dot{Y}_\mu \dot{Z}'_2}{\dot{Z}'_1 + \dot{Z}'_2 + \dot{Y}_\mu \dot{Z}'_1 \dot{Z}'_2} = \dot{U}_1 \dot{Y}_{\text{всe}}. \quad (127,1)$$

Полагая, как и раньше, $U = \dot{U}_1$, мы можем геометрическое место концов векторов $\dot{Y}_{\text{всe}}$ считать за геометрическое место концов вектора силы тока $\dot{I}_1$.

Перейдем к исследованию выражения вектора $\dot{Y}_{\text{всe}}$.

Прежде всего разложим $\dot{Z}'_2$ на два слагаемых: постоянный вектор $\dot{Z}'_{2\text{вну}}$ и переменный вектор $\dot{Z}'_{2\text{вне}} = r_2 + jx_2$. Затем введем условие постоянства угла φ_{2u} :

$$\frac{x_2}{r_2} = \operatorname{tg} \varphi_{2u} = \operatorname{const} = k,$$

так что

$$x_2 = r_2 k.$$

Тогда

$$\dot{Z}'_{\text{вне}} = r_2 + jkr_2 = r_2(1 + jk).$$

Вектор $1 + jk$ имеет угол φ , равный φ_{2u} , ибо

$$\operatorname{tg} \varphi = k = \operatorname{tg} \varphi_{2u}$$

(отличаться же на π эти углы не могут); таким образом

$$1 + jk = \dot{H} = H e^{j\varphi_{2u}}$$

и

$$\dot{Z}'_{2\text{вне}} = r_2 H e^{j\varphi_{2u}} = r_2 \dot{H}. \quad (127,2)$$

Будем здесь r_2 считать отвлеченным числом, а размерность сопротивления отнесем к вектору $\dot{H}$.

Преобразуем теперь выражение $\dot{Y}_{\text{всe}}$, стараясь придать ему один из изученных в предыдущем параграфе видов.

$$\dot{Y}_{\text{всe}} = \frac{1 + \dot{Y}_\mu \dot{Z}'_{\text{вну}} + \dot{Y}_\mu \dot{Z}'_{2\text{вне}}}{\dot{Z}'_1 + \dot{Z}'_{2\text{вну}} + \dot{Y}_\mu \dot{Z}'_1 \dot{Z}'_{2\text{вну}} + (1 + \dot{Y}_\mu \dot{Z}'_1 \dot{Z}'_{2\text{вне}})}.$$

В знаменателе первые три члена группируем следующим образом

$$\begin{aligned} \dot{Z}'_1 + \dot{Z}'_{2\text{вну}} + \dot{Y}_\mu \dot{Z}'_1 \dot{Z}'_{2\text{вну}} &= \dot{Z}'_{2\text{вну}} + \dot{Z}'_1 (1 + \dot{Y}_\mu \dot{Z}'_{2\text{вну}}) = \\ &= (1 + \dot{Y}_\mu \dot{Z}'_{2\text{вну}}) \left(\dot{Z}'_1 + \frac{\dot{Z}'_{2\text{вну}}}{1 + \dot{Y}_\mu \dot{Z}'_{2\text{вну}}} \right). \end{aligned} \quad (127,3)$$

Здесь выражение в больших скобках представляет величину сопротивления всего включения при коротком замыкании, когда $\dot{Z}'_{2\text{вне}} = 0$ и поэтому $\dot{Z}'_2 = \dot{Z}'_{2\text{вну}}$, что уже было указано в § 109, где это выражение обозначено через $\dot{Z}_k$ [формула (109,8)].

Введем следующие обозначения, частью уже встречавшиеся и раньше:

$$1 + \dot{Y}_\mu \dot{Z}'_1 = \dot{C}, \quad (127,4)$$

$$1 + \dot{Y}_\mu \dot{Z}'_{2\text{вну}} = \dot{C}_k, \quad (127,5)$$

$$\frac{\dot{Y}_\mu}{\dot{C}} = \dot{Y}_0, \quad (127,6)$$

$$\dot{Z}'_1 + \frac{\dot{Z}'_{2\text{вну}}}{\dot{C}_k} = \dot{Z}_k. \quad (127,7)$$

Из уравнения (127,3) получаем

$$\dot{Z}_1 + \dot{Z}'_{2\text{вну}} + \dot{Y}_\mu \dot{Z}_1 \dot{Z}'_{2\text{вну}} = \dot{C}_k \dot{Z}_k. \quad (127,8)$$

Тогда $Y_{\text{всв}}$ можно представить в таком виде:

$$\dot{Y}_{\text{всв}} = \frac{\dot{C}_k + r_2 \dot{Y}_0 \dot{C}\dot{H}}{\dot{C}_k \dot{Z}_k + r_2 \dot{C}\dot{H}}. \quad (127,9)$$

В этом выражении в правой части переменна только одна величина r_2 , так что уравнение (127,9) есть векторное уравнение типа, данного уравнением (125,VII). Если мы в уравнении (125,VII) считали x за отвлеченное число, то и в уравнении (127,9) r_2 мы сделали числом отвлеченным, отнеся размерность сопротивления к $\dot{H}$.

Таким образом на основании результатов предыдущего параграфа мы заключаем, что конец вектора $\dot{Y}_{\text{всв}}$, а следовательно, и $\dot{I}_2$ описывают окружность.

Когда $r_2 = 0$, мы имеем короткое замыкание, и из формулы (127,9)

$$\dot{Y}_{\text{всв}k} = \frac{1}{\dot{Z}}.$$

когда $r_2 = \infty$, мы имеем холостой ход, деля числитель и знаменатель на r_2 и полагая затем его равным ∞ , получаем:

$$\dot{Y}_{\text{всв}} = \dot{Y}_0.$$

§ 128. Экспериментальное построение окружности тока

Следует остановиться на экспериментальном построении окружности тока.

Из опыта холостого хода мы находим три величины U_1 , I_{10} и P_0 , где через I_{10} обозначена первичная сила тока при холостом ходе. Отсюда мы вычисляем

$$\cos \varphi_0 = \frac{P_0}{U_1 I_{10}}$$

и, отложив под углом $(-\varphi_0)$ к вертикали отрезок длиной I_{10} , получаем точку M_0 холостого хода на искомой окружности (фиг. 225). Из опыта короткого замыкания мы находим опять три величины: U_1 (оставшееся без изменения), I_{1k} и P_k .

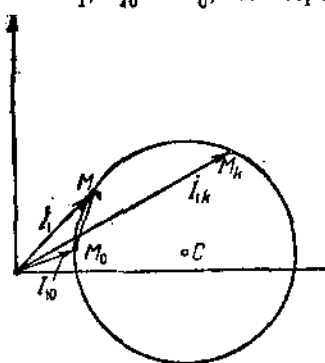
Раз навсегда заметим, что опыты короткого замыкания обыкновенно приходится производить при пониженном напряжении во избежание слишком большого перегрева включения от тока короткого замыкания, а потом в расчет вводить нормальное напряжение и пропорционально увеличенную силу тока; мощность же для введения в расчет при определении угла сдвига фаз нужно увеличить пропорционально квадрату отношения напряжений нормального к пониженному.

Вычислив

$$\cos \varphi_k = \frac{P_k}{U_1 I_{1k}},$$

строим вектор тока короткого замыкания $\dot{I}_{1k}$ и получаем точку M_k короткого замыкания на окружности (фиг. 225).

Чтобы построить всю окружность, надо, как известно уже, найти угол ϵ , равный разности $\alpha - \beta$.



Фиг. 225.

Вектору $\dot{B}$ уравнения (125, VII) соответствует в уравнении (127, 9) вектор $\dot{C}\dot{H}$, а вектору $\dot{A}$ — вектор $\dot{C}_k\dot{Z}_k$. Поэтому

$$\frac{\dot{A}}{\dot{B}} = \frac{\dot{C}_k\dot{Z}_k}{\dot{C}\dot{H}}.$$

Нас интересует не модуль этого отношения, а только его аргумент. Соединяя $\dot{C}_k$ и $\dot{C}$ в одну группу, можем написать

$$\varepsilon = \arg \frac{\dot{C}_k}{\dot{C}} + \arg \dot{Z}_k - \arg \dot{H}. \quad (128, 1)$$

То, что мы соединяем $\dot{C}_k$ и $\dot{C}$ в одно комплексное выражение, оправдывается дальнейшим. Для определения аргумента комплекса $\frac{\dot{C}_k}{\dot{C}}$ необходим третий опыт кроме описанных выше двух, именно опыт холостого хода „обратного“, т. е. такой опыт, когда напряжение прикладывается ко вторичным, а не первичным зажимам; причем первичные зажимы остаются незамкнутыми, ни к чему не присоединенными, или опыт „обратного короткого замыкания“. Выберем опыт обратного холостого хода; на соотношениях, получающихся при этом опыте, следует остановиться подробнее.

Силу тока, текущего при этом через цепь из $\dot{Z}'_{2\text{вну}}$ и $\dot{Y}_\mu$ обозначим $\dot{I}_{20}$.

Чтобы написать закон Ома для этого случая, надо принять во внимание, что $\dot{Z}'_{2\text{вну}}$ и $\dot{Y}_\mu$ суть величины, приведенные к первичной цепи, и нам надо „перевести“ их на вторичную. Очевидно, что первая величина дает при этом $\dot{Z}'_{2\text{вну}} = \dot{Z}_{2\text{вну}} \cdot k^2$; что же касается второй величины, то соотношения здесь уяснит следующее рассуждение:

Мы имели проводимость $\dot{Y}_\mu = g_\mu - jb_\mu$ и соотношение при холостом ходе $\dot{I}_0 = -\dot{E}_1 \cdot \dot{Y}_\mu$ или $\dot{I}_0 = \dot{E}_1 \cdot \dot{Y}_\mu$, причем потери в железе выражались так: $P_h = E_1^2 g_\mu$; если ветвь MN схемы фиг. 215 означает не проводимость намагничения, а что-нибудь другое, например, емкостную проводимость линии передачи энергии, т. е. емкость проводов линии друг относительно друга и относительно земли, то согласно формуле (30, 10) получим для потерь на участке MN опять выражение

$$P_{MN} = U_{MN}^2 g_\mu.$$

Слагающая тока $E_1 g_\mu$ обуславливает потери P_h , а слагающая $E_1 b_\mu$ создает магнитный поток.

Пропустим теперь намагничивающий ток холостого хода через вторичную катушку трансформатора или вообще через вторичную часть включения и регулируем, чтобы упростить дальнейшие рассуждения, его силу так, чтобы магнитный поток был такой же, как и при намагничении с первичной стороны. Потери в железе будут при этом те же, что и прежде, но выразятся теперь через э. д. с. E_2 и проводимость намагничения со вторичной стороны $\dot{Y}_{\mu 2} = g_{\mu 2} - jb_{\mu 2}$ так: $P_h = E_2^2 g_{\mu 2}$. Сравнивая с прежним их выражением, получаем

$$g_{\mu 2} = g_\mu \cdot \frac{E_1^2}{E_2^2} = \frac{g_\mu}{k^2}. \quad (128, 2)$$

Так как магнитный поток равен прежнему, равны и м. д. с.

$$E_1 b_\mu w_1 = E_2 b_{\mu 2} w_2,$$

откуда

$$b_{\mu 2} = b_\mu \cdot \frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{w_1}{w_2} = \frac{b_\mu}{k^2}. \quad (128, 3)$$

Из соотношений (128,2) и (128,3) имеем, что

$$\dot{Y}_{\mu 2} = \frac{\dot{Y}_{\mu}}{k^2}. \quad (128,4)$$

Закон Ома для случая холостого хода со вторичной стороны напишется, следовательно, так:

$$i_{20} = \frac{\dot{U}_{20}}{\dot{Z}_{2 \text{ хол}} + \frac{1}{\dot{Y}_{\mu 2}}},$$

или

$$\dot{U}_{20} = i_{20} \left(\frac{1 + \dot{Y}_{\mu 2} \dot{Z}_{2 \text{ хол}}}{\dot{Y}_{\mu 2}} \right).$$

Подставляя уравнение (128,4), получим

$$\dot{U}_{20} = i_{20} k^2 \left(\frac{1 + \frac{\dot{Y}_{\mu 2}}{k^2} \dot{Z}_{2 \text{ хол}}}{\dot{Y}_{\mu}} \right),$$

или

$$\dot{U}_{20} = i_{20} k^2 \left(\frac{1 + \dot{Y}_{\mu} \dot{Z}'_{2 \text{ хол}}}{\dot{Y}_{\mu}} \right) = i_{20} k^2 \cdot \frac{\dot{C}_k}{\dot{Y}_{\mu}} = i_{20} \dot{Z}_{02}, \quad (128,5)$$

где

$$\dot{Z}_{02} = Z_{02} e^{j\varphi_{20}}. \quad (128,6)$$

Измеряя силу тока, напряжение и мощность при этом опыте, мы вычисляем и угол сдвига фаз между напряжением и силой тока φ_{20} .

Таким образом из опыта обратного холостого хода мы узнаем

$$\varphi_{20} = \arg \left(\frac{\dot{C}_k}{\dot{Y}_{\mu}} \right).$$

Подставляя вместо $\dot{Y}_{\mu}$ его выражение из уравнения (127,6), получаем, что

$$\varphi_{20} = \arg \left(\frac{\dot{C}_k}{\dot{C} \dot{Y}_0} \right).$$

Очевидно, что

$$\arg \left(\frac{\dot{C}_k}{\dot{C}} \right) = \varphi_{20} + \arg \dot{Y}_0 = \varphi_{20} - \varphi_0.$$

Обращаем внимание читателя на минус, который мы поставили перед углом φ_0 .

Это мы сделали потому, что $\dot{Z}_0$ и $\dot{Y}_0$, сопротивление и проводимость всего включения при холостом ходе, суть величины обратные и φ_0 для $\dot{Z}_0$ положительно, а для $\dot{Y}_0$ — отрицательно. (Пусть читатель разберет вопрос, что будет, если в ветви $\dot{Y}_{\mu}$ включена не индуктивность, а емкость.)

Обращаясь теперь к формуле (128,1), имеем, что

$$\arg \dot{Z}_k = + \varphi_k$$

и из (127,2)

$$\arg \dot{H} = + \varphi_{2k}.$$

и таким образом получаем искомую величину

$$\varepsilon = \varphi_{20} - \varphi_0 + \varphi_k - \varphi_{2n}. \quad (128,7)$$

Для асинхронного двигателя

$$\varphi_{2n} = 0$$

и

$$\varepsilon = \varphi_{20} - \varphi_0 + \varphi_k.$$

§ 129. Векторные соотношения между разными величинами в круговой диаграмме

На фиг. 225 дана круговая диаграмма тока.

Остановимся на векторе $\overline{M_0M}$; выяснить его значение всего проще можно следующим образом.

$$\overline{M_0M} = \overline{OM} - \overline{OM_0} = \dot{I}_1 - \dot{I}_0.$$

Сравним это выражение с выражением вторичного тока, которое преобразуем так:

$$\begin{aligned} \dot{I}'_2 &= \dot{I}_1 - \dot{I}_\mu = \dot{I}_1 - (\dot{U}_1 - \dot{I}_1 \dot{Z}_1) \dot{Y}_\mu = \dot{I}_1 + \dot{I}_1 \dot{Y}_\mu \dot{Z}_1 - \dot{U}_1 \dot{Y}_\mu = \\ &= \dot{I}_1 \dot{C} - \dot{U}_1 \dot{Y}_0 \dot{C} = (\dot{I}_1 - \dot{I}_0) \dot{C}. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\dot{I}'_2 = \overline{M_0M} \cdot \dot{C},$$

или

$$\overline{M_0M} = \frac{\dot{I}'_2}{\dot{C}}.$$

Таким образом векторы, проведенные из точки холостого хода M_0 в любую точку M окружности, пропорциональны вторичной силе тока, причем коэффициент пропорциональности есть комплексное число $\dot{C}$.

Перейдем теперь к вектору вторичного напряжения $\dot{U}_2$. Выражение его, получаемое непосредственно на основании первой эквивалентной схемы, таково:

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 - \dot{I}_1 \dot{Z}_1 - \dot{I}'_2 \dot{Z}'_{2\text{вну}}.$$

Подставим сюда выражение

$$\dot{I}'_2 = \overline{M_0M} \cdot \dot{C} = (\dot{I}_1 - \dot{I}_0) \dot{C};$$

тогда

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= \dot{U}_1 - \dot{I}_1 \dot{Z}_1 - (\dot{I}_1 - \dot{I}_0) \dot{C} \dot{Z}'_{2\text{вну}} = \dot{U}_1 - \dot{I}_1 (\dot{Z}_1 + \dot{C} \dot{Z}'_{2\text{вну}}) + \\ &+ \dot{I}_0 \dot{C} \dot{Z}'_{2\text{вну}} = \dot{U}_1 - \dot{I}_1 (\dot{Z}_1 + \dot{Z}'_{2\text{вну}} + \dot{Y}_\mu \dot{Z}_1 \dot{Z}'_{2\text{вну}}) + \dot{I}_0 \dot{C} \dot{Z}'_{2\text{вну}}. \end{aligned}$$

Выражение в скобках преобразуется на основании формул (127,3) и (127,8) в $\dot{C}_k \dot{Z}_k$, так что

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 - \dot{I}_1 \dot{C}_k \dot{Z}_k + \dot{I}_0 \dot{C} \dot{Z}'_{2\text{вну}}.$$

Вместо $\dot{I}_0$ подставим

$$\dot{I}_0 = \dot{U}_1 \dot{Y}_0 = \dot{U}_1 \frac{\dot{Y}_\mu}{\dot{C}},$$

тогда

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 (1 + \dot{Y}_\mu \dot{Z}'_{2\text{вну}}) - \dot{I}_1 \dot{C}_k \dot{Z}_k$$

и окончательно

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 \dot{C}_k - \dot{I}_1 \dot{C}_k \dot{Z}_k = \dot{C}_k \dot{Z}_k (\dot{I}_{1k} - \dot{I}_1) = \overline{MM_k} \cdot \dot{C}_k \dot{Z}_k. \quad (129,1)$$

Выведем еще выражения для $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$ через $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2'$.

Так как

$$\dot{I}_2' = \frac{\dot{U}_1 - \dot{I}_1 \dot{Z}_1}{\dot{Z}_2},$$

то, принимая во внимание (109,5) и (127,1), получаем

$$\dot{I}_2' = \dot{U}_1 \frac{1}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Y}_\mu \dot{Z}_1 \dot{Z}_2'}.$$

Из этой формулы имеем, принимая во внимание формулы (127,4; 5 и 7),

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{I}_2' (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Y}_\mu \dot{Z}_1 \dot{Z}_2') = \dot{I}_2' (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2'_{\text{вну}} + \dot{Z}_2'_{\text{вне}} + \dot{Y}_\mu \dot{Z}_1 \dot{Z}_2'_{\text{вну}} + \dot{Y}_\mu \dot{Z}_1 \dot{Z}_2'_{\text{вне}}) = \\ &= \dot{I}_2' \dot{Z}_2'_{\text{вне}} \dot{C} + \dot{I}_2' (\dot{Z}_1 \dot{C}_k + \dot{Z}_2'_{\text{вну}}) = \dot{U}_2 \dot{C} + \dot{I}_2' \dot{C}_k \dot{Z}_k. \end{aligned} \quad (129,2)$$

Далее

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2' + \dot{I}_\mu = \dot{I}_2' + (\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \dot{Z}_2'_{\text{вну}}) \dot{Y}_\mu = \dot{U}_2 \dot{Y}_\mu + \dot{I}_2' (1 + \dot{Y}_\mu \dot{Z}_2'_{\text{вну}}) = \dot{U}_2 \dot{Y}_\mu + \dot{I}_2' \dot{C}_k,$$

или по соотношению (127,6)

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_2 \dot{Y}_0 \dot{C} + \dot{I}_2' \dot{C}_k. \quad (129,3)$$

Представим себе теперь, что мы проделываем опыт холостого хода; при этом мы регулируем первичное напряжение и именно так, чтобы вторичное $\dot{U}_2$ имело свою нормальную величину, какую оно должно иметь при нагрузке ($\dot{U}_2$ надо, очевидно, для этого несколько понизить до величины $\dot{U}_{10}$). Соотношения здесь будут следующие:

$$\dot{U}_{10} = \dot{U}_2 + \dot{I}_{10} \dot{Z}_1 = \dot{U}_2 + \dot{U}_2 \dot{Y}_\mu \dot{Z}_1 = \dot{U}_2 \dot{C}, \quad (129,4)$$

так как напряжение на ветви Y_μ будет в этом случае, когда $\dot{I}_2' = 0$, равно $\dot{U}_2$, и

$$\dot{I}_{10} = \dot{U}_2 \dot{Y}_\mu = \dot{U}_2 \dot{Y}_0 \dot{C}. \quad (129,5)$$

Теперь перейдем к опыту короткого замыкания, при котором будем опять регулировать первичное напряжение (тоже понижать его до $\dot{U}_{1k}$) так, чтобы вторичная сила тока $\dot{I}_2'$ была нормальной величины, например, как при полной нагрузке; тогда $\dot{U}_2 = 0$; напряжение $\dot{U}_{MN}$ на ветви $\dot{Y}_\mu$ равно $\dot{I}_2' \dot{Z}_2'_{\text{вну}}$, и ток в этой ветви

$$\dot{I}_{\mu k} = \dot{I}_2' \dot{Z}_2'_{\text{вну}} \dot{Y}_\mu.$$

Первичный ток короткого замыкания

$$\dot{I}_{1k} = \dot{I}_2' + \dot{I}_{\mu k} = \dot{I}_2' (1 + \dot{Z}_2'_{\text{вну}} \dot{Y}_\mu) = \dot{I}_2' \dot{C}_k, \quad (129,6)$$

и наконец, первичное напряжение

$$\dot{U}_{1k} = \dot{U}_{MN} + \dot{I}_{1k} \dot{Z}_1 = \dot{I}_2' \dot{Z}_2'_{\text{вну}} + \dot{I}_{1k} \dot{Z}_1 = \dot{I}_2' (\dot{Z}_2'_{\text{вну}} + \dot{C}_k \dot{Z}_1) = \dot{I}_2' \dot{C}_k \dot{Z}_k. \quad (129,7)$$

Сравнивая выражение (129,2) с (129,4) и (129,7), мы видим, что правая часть выражения (129,2) равна сумме правых частей выражений (129,4) и (129,7) т. е. любое

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{10} + \dot{U}_{1k},$$

если соблюдены вышеуказанные условия регулирования первичного напряжения при любых опытах.

Точно так же, сравнивая (129,3) с (129,5) и (129,6), находим

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{10} + \dot{I}_{1k}.$$

Таким образом мы приходим к результату, который могли бы получить и при помощи принципа наложения, т. е. сложения двух состояний цепи, — одного, при котором $\dot{U}_2$ нормально и $\dot{I}_2' = 0$, и другого, при котором $\dot{I}_2'$ нормально, а $\dot{U}_2 = 0$.

§ 130. Окружности падения напряжения, первичной э. д. с., вторичного напряжения и др.

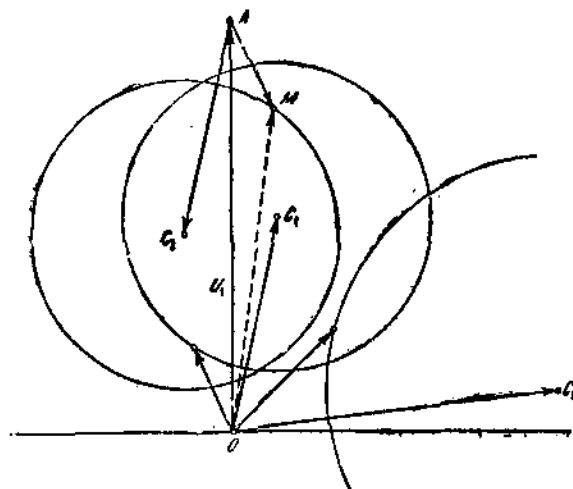
Относительно эквивалентной схемы фиг. 215 следует остановиться еще на следующем.

Так как

$$-\dot{E}_1 = \dot{U}_1 - \dot{I}_1 \dot{Z}_1, \quad (130,1)$$

где $\dot{U}_1$ постоянно, а вектор $\dot{I}_1$ изменяется, описывая своим концом окружность, то и $\dot{E}_1$ будет изменяться так, что конец вектора $\dot{E}_1$ опишет окружность. Эту последнюю мы получим так.

Когда мы будем умножать векторы силы тока $\dot{I}_1$ на комплекс $\dot{Z}_1 = \dot{Z}_1 e^{j\beta}$, то все эти векторы увеличатся численно в Z_1 раз и повернутся навстречу вращению линии времени на угол β , что мы можем представить себе так, что вся окружность тока C_0 (фиг. 226) сначала увеличится в Z_1 раз, оставаясь подобной себе относительно начала координат, затем повернется около этого начала на угол β . Само собой разумеется, что надо сделать еще перевод на масштаб напряжений на нашей диаграмме. На фиг. 226 окружность C_1 и есть круговая диаграмма падения напряжения в первичной части цепи. Вычтя эти падения напряжения из вектора $\overline{OA} = U_1$, т. е. перенеся окружность в положение C_2 , причем $OC_1 = AC_1$ и $OC_1 \parallel AC_1$, получим круговую диаграмму для составляющих $\overline{OM}$ напряжения, уравновешивающих э. д. с. в первичной части цепи $\dot{E}_1$ при разных нагрузках.



Фиг. 226.

Умножив векторы $\dot{U}_1 - \dot{I}_1 \dot{Z}_1$ на $\dot{Y}_\mu$, мы получим векторы тока $\dot{I}_\mu$ в ветви $\dot{Y}_\mu$. Для этого достаточно окружность C_2 увеличить и удалить от O в Y_μ раз и повернуть на угол, равный аргументу $\dot{Y}_\mu$, выражаясь короче, окружность C_2 умножить на $\dot{Y}_\mu$. На фиг. 230 это есть окружность C_4 .

В последующем нам будет полезен другой способ представления окружности для $\dot{E}_1$, основанный на следующем:

Из уравнения (130,1) имеем

$$-\dot{E}_1 = \left(\frac{\dot{U}_1}{\dot{Z}_1} = \dot{I}_1 \right) \dot{Z}_1. \quad (130,2)$$

Строим (фиг. 227) вектор

$$\overline{OO_3} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{Z}_1}.$$

Так как $\dot{U}_1 = U_1$, то мы строим вектор $\frac{1}{Z_1}$, обратный $\dot{Z}_1$, и затем, увеличив его модуль в U_1 раз, меряем новый модуль в масштабе силы тока. Очевидно, что

$$\overline{MO_3} = \overline{OO_3} - \overline{OM} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{Z}_1} - \dot{I}_1.$$

Если модуль MO_3 , измеренный в масштабе тока, умножим на модуль Z_1 , то по формуле (130,2) получим модуль E_1 .

Следовательно,

$$E_1 = m \cdot Z_1 (MO_3).$$

Этот способ нам пригодится в одном случае, где фаза или аргумент вектора E_1 нас не будут интересовать, а нужен будет только его модуль.

Далее мы можем получить геометрическое место концов вектора вторичного напряжения U_2 . Для этого удобнее всего воспользоваться уравнением (129,1):

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 \dot{C}_k - \dot{I}_1 \dot{C}_k \dot{Z}_k.$$

Умножаем окружность тока C_0 на комплекс $\overline{C_k Z_k}$ (фиг. 228), получаем окружность C_1 ; затем умножаем $\overline{OA} = \dot{U}_1$ на $\dot{C}_k$, получаем вектор $\overline{OB}$. Переносим окружность C_1 в положение C_2 . Окружность C_2 и есть геометрическое место концов вектора вторичного напряжения $\dot{U}_2$.

Ее можно получить и другими комбинациями действий, например, вычитание из $\dot{E}_1$ вектора $\dot{I}_2' \dot{Z}_2'$ (см. § 132).

Наконец, мы можем из круговой диаграммы первичного тока $\dot{I}_1$ получить окружность тока вторичного $\dot{I}_2$ и именно на основании того, что вектор

$$\overline{M_0 M} = \frac{\dot{I}_2'}{\dot{C}}$$

описывает ту же окружность, что и $\dot{I}_1$.

Векторы $\overline{M_0 M}$ надо увеличить в $\dot{C}$ раз и повернуть влево около M_0 на угол γ ($\dot{C} = C e^{j\gamma}$), или, короче, $\overline{M_0 M} \dot{C} = \dot{I}_2'$.

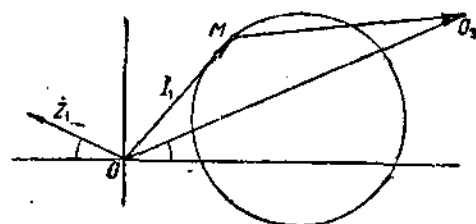
Чтобы получить сразу всю окружность, мы $\overline{M_0 C_1}$ множим на $\dot{C}$ и из нового положения C_4 центра радиусом $M_0 C_4$ описываем окружность.

Упражнение. Найти на новой окружности точку короткого замыкания.

§ 131. Вычитание одной окружности из другой

Можно было бы находить окружность $\dot{I}_2'$ на основании соотношения $\dot{I}_2' = \dot{I}_1 - \dot{I}_\mu$, но здесь возникает новый вопрос о вычитании одного геометрического места из другого или, в частности, о вычитании одной окружности из другой (или сложении их).

Для того чтобы такая задача была определенной, должен быть задан закон соответствия точек одной окружности точкам другой, иначе будет неизвестно, из какого именно вектора $\dot{I}_1$ надо вычитать тот или иной вектор $\dot{I}_\mu$. В различных случаях после вычитания могут получиться разные кривые; остановимся на частном случае, когда центральные углы дуг, описываемых соот-



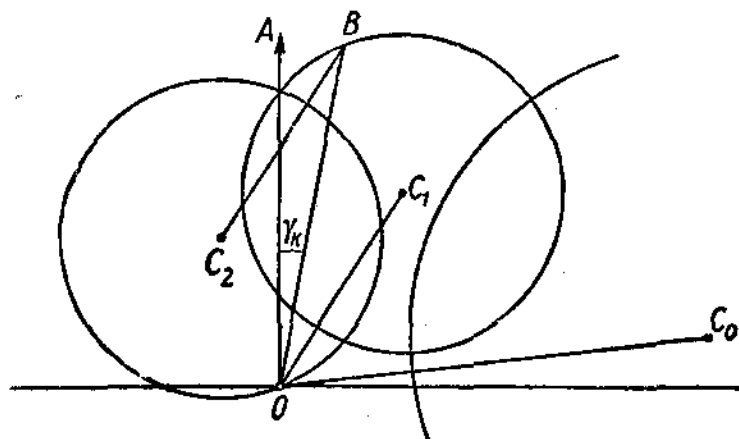
Фиг. 227.

ветствующими точками на двух окружностях, равны; в этом случае вычитание одной окружности из другой (и сложение их) дает тоже окружность.

Возьмем на окружности C_1 тока I_1 две точки M' и M'' , соответствующие значениям тока $\dot{I}_1'$ и $\dot{I}_1''$ (фиг. 229).

После умножения на $\dot{Z}_1$ вся диаграмма изменится линейно, оставшись сама себе подобной.

Вычитаем окружность $\dot{I}_1 \dot{Z}_1$ из $\dot{U}_1$; диаграмма вид изменит, но угол $M'_2 C_2 M'_1$ останется равным углу $M' C M''$; после умножения окружности C_2 на $\dot{Y}_\mu$ мы полу-

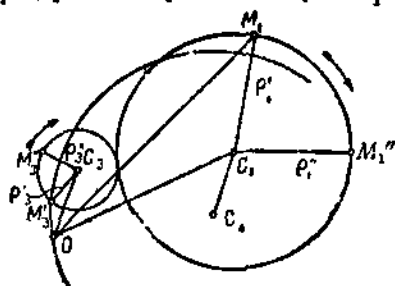


Фиг. 228.

чаем окружность C_2 тока I_μ , причем $\angle M'_2 C_2 M'_1$ остается равным углу $M' C M''$.

Таким образом имеется выполнение поставленного нами условия о равенстве соответствующих друг другу центральных углов двух окружностей.

Обозначим радиусы-векторы из O в центры окружностей через $\overline{OC}_1$ и $\overline{OC}_2$, и радиусы-векторы из центров C_1 и C_2 в точки M' , M'' , M'_2 , M''_2 — через $\dot{\rho}_1'$, $\dot{\rho}_1''$, $\dot{\rho}_2'$, $\dot{\rho}_2''$. Тогда



Фиг. 229.

$$\begin{aligned} \dot{I}_1' &= \overline{OC}_1 + \dot{\rho}_1' & \dot{I}_1'' &= \overline{OC}_1 + \dot{\rho}_1'' \\ \dot{I}_\mu' &= \overline{OC}_2 + \dot{\rho}_2' & \dot{I}_\mu'' &= \overline{OC}_2 + \dot{\rho}_2'' \end{aligned}$$

Произведем требуемое вычитание векторов:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1' - \dot{I}_\mu' &= \overline{OC}_1 - \overline{OC}_2 + \dot{\rho}_1' - \dot{\rho}_2', \\ \dot{I}_1'' - \dot{I}_\mu'' &= \overline{OC}_1 - \overline{OC}_2 + \dot{\rho}_1'' - \dot{\rho}_2''. \end{aligned}$$

Длины векторов $\dot{\rho}_1'$, $\dot{\rho}_2'$ и т. д. постоянны; наклонены $\dot{\rho}_1'$ и $\dot{\rho}_1''$ друг к другу под таким же углом, как и $\dot{\rho}_2'$ и $\dot{\rho}_2''$, причем точка M'_2 переходит в положение M''_2 , двигаясь по часовой стрелке, т. е. в том же направлении, в каком движется точка M' , переходя в положение M'' . Поэтому

$$\dot{\rho}_1'' = \dot{\rho}_1' e^{-j\tau}$$

и

$$\dot{\rho}_2'' = \dot{\rho}_2' e^{-j\tau}$$

и

$$\dot{\rho}_1' - \dot{\rho}_2' = (\dot{\rho}_1' - \dot{\rho}_2') e^{-j\tau}.$$

что, очевидно, представляет уравнение окружности;

$$\overline{OC_4} = \overline{OC_1} - \overline{OC_3}$$

дает положение ее центра, а геометрическая разность двух друг другу соответствующих (один из них произволен) радиусов-векторов $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_3$ дает радиус новой окружности. Разумеется при этом по величине

$$\rho = OC_4,$$

так как новая окружность проходит через начало координат при этом способе построения.

§ 132. Нахождение окружностей различных переменных величин первой эквивалентной схемы

Пример 59. Построим эти окружности для примера, разобранный в § 123. Окружность первичного тока I_1 дана на фиг. 230 в масштабе, вдвое более крупном, т. е.

$$1 \text{ мм} \equiv 1 \text{ А.}$$

на ней показаны и точки M_0 — холостого хода и M_k — короткого замыкания.

Умножаем круг C_1 на комплекс $Z_1 = 5 + j10$, т. е. умножаем OC_1 на $\sqrt{5^2 + 10^2} = 11,18$ и поворачиваем его на угол

$$\varphi_1 = \arctg \frac{10}{5} = +63^\circ 25'.$$

Масштаб для напряжений возьмем

$$1 \text{ мм} \equiv 10 \text{ В.}$$

Поэтому OC_1 , равное 24 мм или 24 А, умноженное на $Z_1 = 11,18$, дает 268 В, или 26,8 мм. Таким образом

$$OC_2 = 26,8 \text{ мм.}$$

Вычтя круг C_2 из $\dot{U}_1 = 2000 \text{ В} \equiv 200 \text{ мм}$, получаем круг C_3 напряжения на ветви $\dot{Y}_\mu$.

Умножаем круг C_3 на $\dot{Y}_\mu = 0,004 + j0,02$. Для этого $OC_3 = 181,5 \cdot 10 \text{ В}$ умножаем на $Y_\mu = 0,02$, получаем 36,3 и, деля на масштаб силы тока, равный единице, получаем отрезок $OC_4 = 36,3 \text{ мм}$; положение его находим по углу

$$\angle C_4 OC_3 = \arg \dot{Y}_\mu = \arctg \frac{0,02}{0,004} = 78^\circ 40'.$$

Радиус круга C_4 получаем таким же умножением радиуса круга C_3 , равного 81 мм на $Y_\mu = 0,02$ с переводом на масштаб:

$$\frac{81 \cdot 10 \cdot 0,02}{1} = 16,2 \text{ мм.}$$

Вычтя круг C_4 из круга C_1 , для чего из $\overline{OC_1}$ вычитаем $\overline{OC_4}$, получаем круг C_5 , геометрическое место концов вектора вторичного тока $\dot{I}_2$.

Умножив круг C_5 на комплекс $Z_{\text{ант}} = 3 + j9$, получим круг C_6 падения напряжения в сопротивлении $Z_{\text{ант}}$.

Напряжение U_2 совпадает в фазе с $\dot{I}_2$. Окружность U_2 находим проще всего вычитанием круга C_6 из круга C_5 , причем получается круг C_7 .

Читателю необходимо проделать следующие упражнения:

1. Определить на всех окружностях точки холостого хода и короткого замыкания; они даны на чертеже, необходимо проследить, как их получить.

2. Задавшись каким-нибудь током $\dot{I}_2$ на окружностях C_5 , найти соответствующие ему величины U_2 , $\dot{I}_1$, $\dot{I}_\mu$ и т. д.

3. Разобрать вопрос, почему имеется такая часть окружности напряжения U_2 : а) где U_2 больше U_1 , б) где U_2 опережает U_1 , в) где отстает от U_1 .

ГЛАВА ШЕСТНАДЦАТАЯ ЛИНИИ МОЩНОСТЕЙ НА КРУГОВЫХ ДИАГРАММАХ

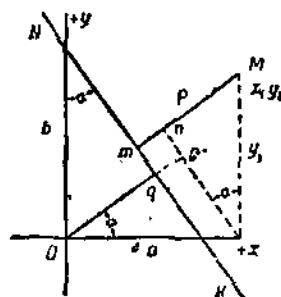
§ 133. Линии потерь мощности на круговой диаграмме

На круговой диаграмме тока можно провести такие прямые линии, что расстояния до них от переменной точки M окружности будут пропорциональны различным мощностям: первичной мощности, потерям в первичной части цепи, потерям в железе, полезной мощности. Прежде всего остановимся на линиях потерь. Теория этих линий основывается на следующих теоремах геометрии.

На фиг. 231 дана прямая KN , отсекающая на осях координат отрезки a и b .

Уравнение прямой KN есть

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0.$$



Фиг. 231.

Опустим из начала координат O перпендикуляр Oq на KN и обозначим длину его через p_0 и угол, составленный им с осью x , через α . Тогда

$$a = \frac{p_0}{\cos \alpha}, \quad b = \frac{p_0}{\sin \alpha}.$$

Подставим эти выражения в уравнение прямой и мы получим

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p_0 = 0. \quad (I)$$

Эта форма уравнения прямой называется нормальной.

Когда уравнение прямой дано в форме

$$Ax + By + C = 0, \quad (II)$$

то можно привести его к нормальной форме на основании следующих соображений.

Очевидно, что при данной форме уравнения получаются отрезки на осях координат:

$$a = -\frac{C}{A} \text{ и } b = -\frac{C}{B}.$$

Далее,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{B}{A}$$

и

$$\sin \alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

а

$$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Таким образом, разделив уравнение (II) на $\sqrt{A^2 + B^2}$, мы получим коэффициенты при x и y равными $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$, следовательно, третий член, равный

$$\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

выразит длину p_0 перпендикуляра из O на прямую. Итак уравнение прямой (II), приведенное к нормальной форме, будет

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0. \quad (\text{III})$$

Возьмем теперь произвольную точку M с координатами x_1 и y_1 на плоскости чертежа и определим длину p_M перпендикуляра из M на прямую KN (фиг. 231).

Из чертежа видно, что p_M можно представить так:

$$p_M = Mn = Mn + rO - Oq = y_1 \sin \alpha + x_1 \cos \alpha - p_0$$

или

$$p_M = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p_0. \quad (\text{IV})$$

Для формы уравнения прямой (II)

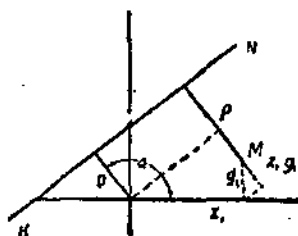
$$p_M = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (\text{V})$$

Следовательно, пока мы в уравнение (I) или (III) подставляем координаты точек самой прямой, мы получаем величину в левой части, равную нулю; если же мы подставим в эти уравнения координаты точки, не лежащей на прямой, то левая часть даст нам величину перпендикуляра из этой точки на прямую.

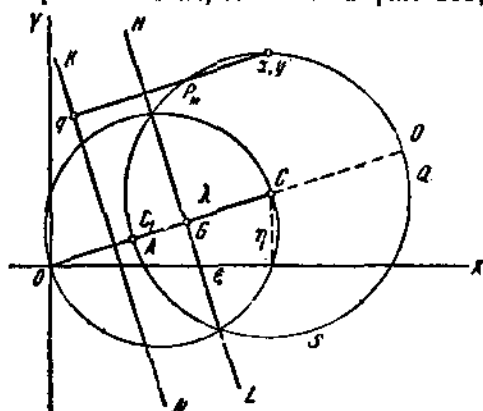
Читателю предлагается доказать, что для расположения, данного на фиг. 232, получим

$$p_M = -(x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p_0),$$

так что знак у p_M зависит от положения точки M .



Фиг. 232.



Фиг. 233.

Пусть на фиг. 233 окружность M есть окружность тока I для какого-то включения в масштабе $1 \text{ мм} \equiv m$ ампер, причем в этом включении этот ток I проходит через сопротивление R ; рассмотрим вопрос о том, как нам ввести в диаграмму учет потерь мощности $I^2 R$ на нагревание этого сопротивления.

Обозначим координаты любой точки M окружности через x, y , координаты ее центра C — через ξ и η , радиус ее — через ρ и расстояние OC центра ее от начала координат — через λ .

Тогда мы будем иметь, во-первых,

$$I = m\sqrt{x^2 + y^2},$$

или

$$\frac{I^2}{m^2} = x^2 + y^2, \quad (\text{VI})$$

и, во-вторых, уравнение окружности

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \rho^2,$$

или, раскрывая скобки,

$$x^2 + y^2 - 2\xi x - 2\eta y + \xi^2 + \eta^2 = \rho^2. \quad (\text{VII})$$

Соединим центр C с началом координат O и на линии OC , как на диаметре, построим окружность (фиг. 233). Координаты ее центра C_1 суть $\frac{1}{2}\xi$ и $\frac{1}{2}\eta$; радиус ее OC_1 равен

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\xi\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\eta\right)^2},$$

и уравнение ее таково:

$$x^2 + y^2 - \xi x - \eta y + \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\eta^2 = \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\eta^2,$$

или

$$x^2 + y^2 - \xi x - \eta y = 0. \quad (\text{VIII})$$

Когда мы из уравнения одной кривой вычитаем уравнение другой, мы получаем уравнение некоторой третьей кривой, проходящей через точки пересечения первых двух.

Вычитаем из уравнения (VIII) уравнение (VII): при этом вторые степени координат исчезнут, так что мы получим уравнение прямой HL :

$$\xi x + \eta y - \xi^2 - \eta^2 + \rho^2 = 0, \quad (\text{IX})$$

проходящей через точки пересечения обеих окружностей, т. е. прямой HL (фиг. 233).

Введя для краткости обозначение

$$\xi^2 + \eta^2 - \rho^2 = \delta^2,$$

приводим уравнение прямой HL к форме

$$\xi x + \eta y - \delta^2 = 0. \quad (\text{X})$$

Эта прямая называется полярной окружности MQS относительно точки O или полюса O .

Теперь перейдем к выражению потерь на нагревание в R . Из уравнения (VII) окружности MQS имеем

$$x^2 + y^2 = 2 \left(\xi x + \eta y - \frac{\xi^2 + \eta^2 - \rho^2}{2} \right),$$

или

$$x^2 + y^2 = 2 \left(\xi x + \eta y - \frac{\delta^2}{2} \right),$$

и на основании уравнения (VI) потеря $I^2 R$ представится в виде

$$I^2 R = 2m^2 R \left(\xi x + \eta y - \frac{\delta^2}{2} \right). \quad (\text{XI})$$

Сравнивая выражение в скобках этого последнего уравнения с уравнением (X) поляры, видим, что если мы его приравняем нулю:

$$\xi x + \eta y - \frac{\delta^2}{2} = 0, \quad (\text{XII})$$

то получим уравнение прямой, отсекающей на осях координат вдвое меньшие отрезки, т. е. находящиеся вдвое ближе к началу координат, чем полярная, и параллельной

поляр. Такая прямая называется полуполярюй, на фиг. 233 это есть прямая KN .

Разделив, согласно уравнению (III) все члены уравнения (XII) на $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, получим ее уравнение в нормальной форме.

Но $\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \lambda = OC$, так что это уравнение будет таково:

$$\frac{\xi}{\lambda}x + \frac{\eta}{\lambda}y - \frac{\delta^2}{2\lambda} = 0. \quad (XIII)$$

Если мы сюда вместо x и y координат точек прямой подставим координаты x и y точек M окружности тока, то получим в левой части величину, отличную от нуля и согласно уравнению (V) равную длине перпендикуляра, опущенного из M на полуполярю,

$$p_M = \frac{\xi x + \eta y - \frac{1}{2}\delta^2}{\lambda}. \quad (XIV)$$

Сравнивая последнее выражение (XIV) с выражением потерь на нагревание (XI), видим, что

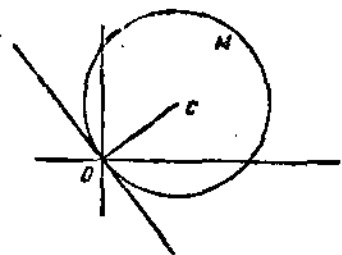
$$I^2 R = 2m^2 R \lambda p_M. \quad (XV)$$

Таким образом отрезки Mq пропорциональны потерям $I^2 R$ или выражают эти потери в масштабе: единица длины отрезков p_M представляет $2m^2 R \lambda$ ватт.

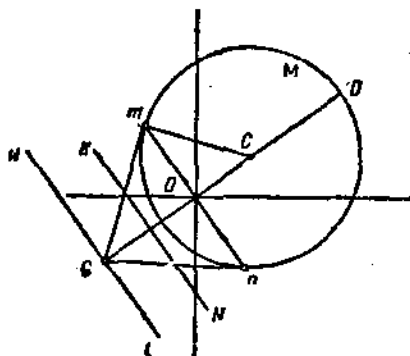
Может случиться, что точка O начала координат лежит на окружности тока (фиг. 234) или внутри нее (фиг. 235). В первом случае полярю и полуполярю совпадают с касательной в точке O . Во втором случае проводим через O линию $mn \perp OC$ и в точке m строим касательную к окружности; через точку G пересечения касательной с продолжением линии OC проводим

линию $HL \perp OC$; прямая HL есть полярю для точки C ; полуполярю KN будет лежать вдвое ближе к точке O .

Сравнивая фиг. 233 и 235, видим, что теперь точки O и G поменялись ролями, и полярю HL , занимающая на



Фиг. 234.



Фиг. 235.

фиг. 233 то положение, которое на фиг. 235 занимает прямая mn , перешла на фиг. 233 в такое положение, какое занимала бы на фиг. 233 не начерченная на ней прямая, параллельная полярю и проходящая через O .

Прямые mn и HL фиг. 235 суть сопряженные полярю.

Эти свойства полярю являются легко выводимыми следствиями их определения: если дана кривая второго порядка (у нас окружность $AMQS$) и точка O вне ее, то геометрическое место точек, гармонических точке O , есть прямая линия; эту прямую называют полярю точки O .

Поясним сказанное: на фиг. 233 гармонической для точки O является, например, точка G ; точки O и G делят диаметр AD окружности $AMQS$ в гармоническом отношении:

$$\frac{OD}{OA} = \frac{GD}{AG}.$$

Точки O и любая точка поляры делят в гармоническом отношении находящуюся внутри окружности часть луча, идущего из O через эту точку поляры.

Мы рассмотрели вопрос о представлении на диаграмме тока потерь P^2R ; теперь следует остановиться на представлении потерь в том случае, когда нам дана окружность напряжения, как, например, окружность, описываемая вектором $-\dot{E}_1$, способ получения которой изложен в параграфе 130 и на фиг. 227; в этом случае мощность, теряемая в той ветви, напряжение на которой представлено каким-то вектором $-\dot{E}_1$, U_{MN} , изменяющимся по окружности, определяется аналогично предыдущему.

Введем проводимость

$$\dot{Y} = g - jb;$$

величина потери мощности равна U^2g , т. е. выражается через U и g совершенно аналогично потерям, выраженным через I и R .

Поэтому способ построения линии потерь теперь ничем не будет отличаться от рассмотренного выше: длины перпендикуляров, опущенных из точек окружности напряжения на полуполюару точки O , начала координат, дадут нам величины, пропорциональные этим потерям. Если масштаб напряжений $1mm \equiv n$ вольт, то подобно (XV):

$$U^2g = 2n^2g\lambda'p'_M. \quad (XVI)$$

§ 134. Линии первичной мощности, потерь и полезной мощности на круговой диаграмме первой эквивалентной схемы

Ко всему включению подводится мощность

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1. \quad (XVII)$$

Здесь $I_1 \cos \varphi_1$ есть активная составляющая силы тока, т. е. ордината точки M — конца вектора первичного тока; поэтому в масштабе $1mm \equiv U_1 m$ ватт ордината любой точки дает нам величину всей подведенной, или иначе первичной, мощности. Ось абсцисс при этом является линией первичной мощности. Полезная мощность P_2 получается как разность между первичной мощностью и всей суммой потерь.

Остановимся на случае всеобщего трансформатора и именно на первой эквивалентной схеме его, как на случае, наиболее сложном из часто встречающихся.

На фиг. 236 мы имеем окружность первичного тока I_1 . Чтобы учесть первичные потери мощности „в меди“, т. е. $Q_1 = I_1^2 R_1$, проводим полуполюару KN ; тогда, опуская из любой точки M перпендикуляр Mq на полуполюару, будем по формуле (XV) иметь

$$Q_1 = I_1^2 R_1 = 2m^2 R_1 \lambda \cdot Mq.$$

Далее следует учесть потери в железе $Q_{ж}$, которые, как известно, можно выразить как

$$Q_{ж} = E_1^2 g_{ж}.$$

Так как величины E_1 изменяются (фиг. 227), как расстояние от O_3 до точек окружности тока, то величинам E_1^2 будут пропорциональны длины перпендикуляров, опущенных из этих точек окружности на полуполюару точки O_3 . Находим точку O_3 такую, чтобы

$$\overline{OO_3} = \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{Z_1} e^{-j\varphi_1},$$

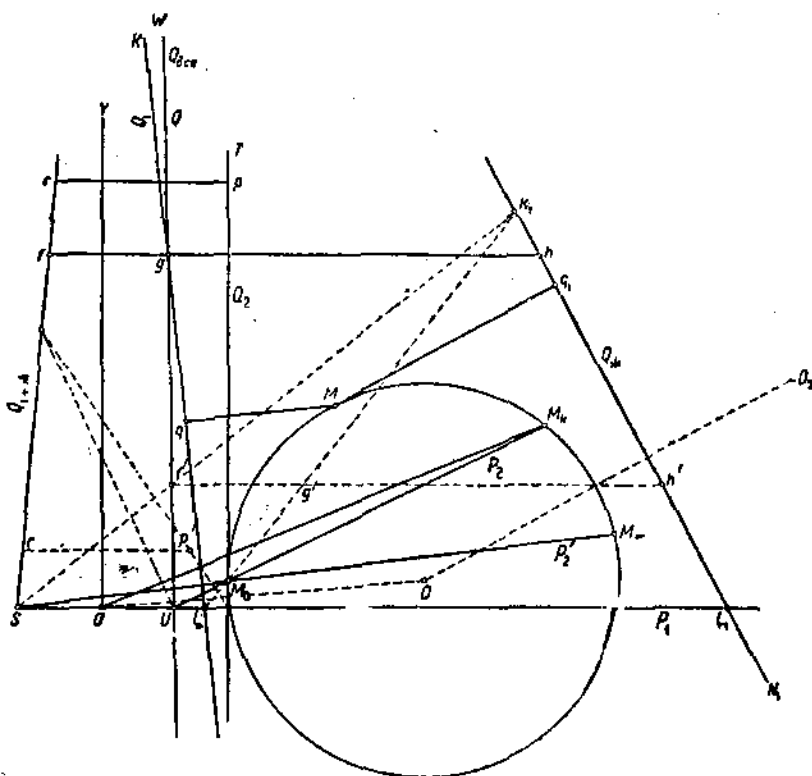
чертим ее полуполяр K_1N_1 и опускаем из M перпендикуляр Mq_1 ; тогда

$$Q_{ж} = E_1^2 g_{\mu} = 2n^2 g_{\mu} \lambda' \cdot Mq_1,$$

где $n = mZ_1$, как доказано в § 130.

Теперь следует просуммировать потери первичные „в меди“ и „в железе“; в асинхронном двигателе эта сумма даст потери в статоре.

Сложив потери, мы получим двучлен, у которого каждый член будет иметь вид выражения (XIV), помноженного для одного члена на $2m^2 R_1 \lambda$ и для другого на



Фиг. 236.

$2m^2 Z_1^2 g_{\mu} \lambda'$, причем величины ξ , η , δ и λ будут в обоих членах разные. Так как (XIII) есть уравнение прямой, то, приравняв нулю сумму, мы получим тоже уравнение некоторой прямой:

$$2m^2 R_1 \lambda \cdot \frac{\xi x + \eta y - \frac{1}{2} \delta^2}{\lambda} + 2m^2 Z_1^2 g_{\mu} \lambda' \cdot \frac{\xi' x + \eta' y - \frac{1}{2} \delta'^2}{\lambda'} = 0. \quad (\text{XVIII})$$

Эта прямая проходит через точку пересечения первых двух уже полученных нами прямых — полуполяр.

Если в это уравнение подставить координаты x и y точки, не лежащей на этой новой прямой, то левая часть будет не равна нулю, а будет пропорциональна длине перпендикуляра, опущенного на нее из этой точки, а если мы приведем уравнение (XVIII) к нормальному виду, то равна ей.

Итак эта прямая проходит через точку пересечения KN и K_1N_1 , и расстояния любой точки окружности M до нее в некотором масштабе представляют сумму

„двух потерь“. Чтобы начертить ее, надо найти какую-нибудь вторую точку, через которую она должна проходить.

Такую вторую точку найдем путем следующих рассуждений:

Обозначим через P_2 мощность, передающуюся во вторичную цепь (ср. сказанное о мощностях в § 106 „Баланс мощностей“), и через $Q_{1+ж}$ сумму потерь Q_1 и $Q_{ж}$ в статоре асинхронного двигателя или в первичной катушке и в железе трансформатора, так что

$$Q_{1+ж} = I_1^2 R_1 + E_1^2 g_{\mu}$$

и

$$P_1 = P_2' + Q_{1+ж},$$

или

$$P_2' = P_1 - Q_{1+ж}. \quad (XIX)$$

Полезную мощность мы обозначаем через P_2 , это есть мощность, тратящаяся во внешней части вторичной цепи (или эквивалентная механической мощности ротора асинхронного двигателя); очевидно, что

$$P_2 = U_2 I_2' \cos \varphi_{2н}$$

и

$$P_2' = P_2 + I_2'^2 R_{2вну}'.$$

Когда мы имеем $Z_{2вне} = 0$, т. е. короткое замыкание, тогда

$$P_2 = 0 \text{ и } P_2' = I_2'^2 R_{2вну}'.$$

Остановимся на том, когда P_2' может стать равным нулю.

В случае трансформатора, очевидно, во-первых, тогда, когда $I_2' = 0$, т. е. при холостом ходе, и во-вторых, когда $R_{2вне}'$ будет отрицательно, т. е. когда, как было пояснено уже, во вторичной цепи будет включен генератор, подающий мощность, как раз равную вторичным потерям $I_2'^2 R_{2вну}'$, покрывающую их, так что $R_{2вне}' = -R_{2вну}'$.

В случае асинхронного двигателя P_2' будет равно нулю, во-первых, тоже, когда $I_2' = 0$, т. е. при синхронном вращении ротора (или при идеально холостом ходе), и, во-вторых, при бесконечно большом скольжении (при $s = \infty$). Эту точку на окружности отметим буквой M_{∞} .

Найти эту точку легко методом обращений, исходя из соотношения, что для нее

$$R_{2вне} = -R_{2вну}.$$

В конце § 83 было доказано, что величина $R_{2вне}$ сопротивления, которое надо включить в цепь неподвижного ротора для замены механической нагрузки его при некотором скольжении с нагрузкой электрической, равна

$$R_x = \frac{1-s}{s} R_{рот}$$

или

$$R_{2вне} = \frac{1-s}{s} R_{2вну}.$$

При $s=0$ $R_{2вне} = \infty$, и мы имеем идеально холостой ход, или синхронизм; при $s=1$ $R_{2вне} = 0$, и мы имеем короткое замыкание; наконец, при $s=\infty$ $R_{2вне} = \left(\frac{1}{s} - 1\right) R_{2вну} = -R_{2вну}$ и $P_2' = 0$; практически последний режим неосуществим точно, ибо при нем надо вращать ротор с бесконечно большим числом оборотов.

На диаграмме фиг. 213 это будет точка A на прямой AKM сопротивлений Z'_2 ; при этом

$$Z'_2 = 0 + jX'_{2\text{ony}} = \overline{O_2A}.$$

На круге проводимостей C_2 ей соответствует тот конец диаметра O_2C_2 , у которого нет буквы.

На круге сопротивлений C_1 соответствующая точка будет находиться немного ниже точки M'_k , и наконец, на круге проводимостей C она будет находиться тоже несколько ниже M_k — точки короткого замыкания. На фиг. 236 тоже нанесена эта точка M_{∞} .

Из уравнения (XVIII) мы заключили, что потери $Q_{1+\text{ж}}$ выражаются линейно, т. е. через первые степени координат точки x, y ; то же самое имело место относительно мощностей подведенной или первичной P_1 (XVII); поэтому и из уравнения (XIX) следует, что и P'_2 выразится тоже через первые степени x и y . Другими словами, уравнение (XIX) превратится в уравнение прямой линии, если приравнять P'_2 нулю. Для точек этой прямой $P'_2 = 0$; для других точек, т. е. для других x и y , это уравнение, приведенное к нормальной форме, даст величину перпендикуляра, опущенного из точки x, y на эту прямую; длина этого перпендикуляра даст нам величину $P_1 - Q_{1+\text{ж}}$. Эту прямую назовем линией в с е й вторичной мощности (или передаваемой во вторичную цепь мощности).

Мы имеем две точки, M_0 и M_{∞} , для которых

$$P'_2 = P_1 - Q_{1+\text{ж}} = 0,$$

следовательно, прямая, проходящая через M_0 и M_{∞} , и есть линия в с е й вторичной мощности. Она пересекает ось абсцисс в точке S . Так как уравнение (XIX) можно написать и так:

$$Q_{1+\text{ж}} = P_1 - P'_2, \quad (\text{XX})$$

то очевидно, что линия мощности $Q_{1+\text{ж}}$ проходит через точку пересечения линии мощности P_1 (или оси абсцисс) и линии мощности P'_2 , т. е. через точку S .

Таким образом мы имеем, что линия потерь мощности $Q_{1+\text{ж}}$ проходит через точку S и точку W пересечения прямых KN и K_1N_1 .

Последняя точка W обыкновенно находится довольно далеко и выходит за пределы чертежа, поэтому для построения искомой линии потерь $Q_{1+\text{ж}}$ воспользуемся тем, что

$$\triangle Wgf \sim \triangle WLS \text{ и } \triangle Whg \sim \triangle WL_1L,$$

так что

$$\frac{fg}{SL} = \frac{gh}{LL_1},$$

ибо оба отношения порознь равны $\frac{Wg}{WL}$.

Задаваясь gh , ищем fg как четвертую пропорциональную к трем данным отрезкам. Для этого переносим gh в положение $g'h'$, проводим Lg' и находим K_1 , точку пересечения Lg' с K_1N_1 ; соединяя K_1 с S , получаем отрезок $f'g' = fg$; отложив fg на продолжении gh , проводим линию Sf , это и есть искомая линия потерь $Q_{1+\text{ж}}$.

Переходим к построению линии вторичных потерь мощности $I_2^2 R'_{2\text{акт}}$.

Мы знаем, что отрезок

$$M_0M = \frac{I_2^2}{C}.$$

Следовательно, в масштабе $1 \text{ mm} = mC$ ампер отрезки M_0M представляют по величине вторичную силу тока. Поэтому вторичные потери будут даны длинами

перпендикуляров из M на полуполюару точки M_0 (начало векторов I'_2), а согласно фиг. 234 это будет касательная в точке M_0 к окружности линии M_0T .

Далее, так как полезная мощность

$$P_2 = P'_2 - I_2'^2 R'_{2\text{вну}},$$

то, подобно тому как мы из уравнения (XIX) заключили, что P'_2 выражается линейно через координаты x , y , и затем нашли линию этой мощности, так и теперь на основании того, что в уравнении (XXI) P'_2 и $I_2'^2 R'_{2\text{вну}}$ выражаются длиной отрезков прямых, т. е. линейно относительно координат x и y , заключаем, что и P_2 тоже может быть выражено линейно через них.

Если мы выражение

$$P'_2 - I_2'^2 R'_{2\text{вну}} \quad (\text{XXI})$$

приравняем нулю, то получим уравнение прямой линии (ибо x и y входят сюда в первой степени) — назовем ее линией полезной мощности. Приведем это уравнение к нормальной форме и подставляя вместо x и y координаты точки, не лежащей на этой прямой, получим длину перпендикуляра, опущенного из точки на эту прямую; по уравнению (XXI) эта длина пропорциональна P_2 полезной мощности.

Чтобы построить линию P_2 , найдем две точки, через которые она проходит, т. е. найдем две точки, для которых $P_2 = 0$.

Первая точка есть точка идеально холостого хода асинхронного двигателя или, иначе, точка синхронизма, а у трансформатора просто точка холостого хода M_0 , вторая точка есть точка короткого замыкания M_k : в первой $I'_2 = 0$, а во второй $U_2 = 0$, так что

$$P_2 = U_2 I'_2 \cos \varphi_{2\pi} = 0$$

в обоих случаях.

Следовательно, линия полезной мощности есть линия M_0M_k .

Продолжим ее до пересечения ее с осью абсцисс в точке U .

Построим теперь линию всех потерь:

$$I_1^2 R_1 + E_1^2 g_a + I_2'^2 R'_{2\text{вну}} = P_1 - P_2 = Q_{\text{вс}}.$$

Очевидно, что это будет прямая линия, проходящая, с одной стороны, через точку пересечения линии, для которой $P_1 = 0$, с линией, для которой $P_2 = 0$, т. е. через точку U , с другой стороны, — через точку пересечения линии первичных потерь S_f и линии вторичных потерь M_0T .

Проведя линию, параллельную оси абсцисс на некоторой высоте, отрезок ее gp между линией S_f и M_0T переносим вниз в полжение $r'p'$, здесь делим пропорционально SU и UT_0 и, перенеся точку деления на gp , проводим через нее и U прямую UQ ; это и есть искомая линия всех потерь.

Теперь мы имеем на чертеже линии всех мощностей и всех потерь в отдельности и в сумме.

§ 135. Масштабы для линий мощностей и к. п. д.

Следует остановиться еще на вопросе о масштабах для линий F'_2 , P_2 , $Q_1 + x$ и $Q_{\text{вс}}$.

Эти масштабы можно определить, исходя из уравнения (XVIII), из которого можно вывести масштаб для первичных потерь, и затем переходить к другим линиям до последней.

Этот путь сложен и утомителен; гораздо проще определение масштабов на основании одной теоремы, которую мы сейчас и докажем.

Но можно все три мощности P_1 , $Q_{всв}$ и P_2 мерять в одном общем масштабе и еще в двух направлениях.

Проведем (фиг. 239) из точки M прямую $MN \parallel QU$; она линию полезной мощности встретит в точке K .

Так как, очевидно,

$$\triangle KUN \sim \triangle SMN,$$

то

$$\frac{KN}{MN} = \frac{UK}{SM} = \frac{TM}{SM} = \frac{Q_{всв}}{P_1}.$$

Следовательно, KN и MN в некотором общем масштабе $1 \text{ мм} \equiv n$ ватт выражают $Q_{всв}$ и P_1 , а потому в том же масштабе MK представляет полезную мощность

$$MK \cdot n = P_2.$$

Таким образом в направлении, параллельном линии потерь, все три мощности измеряются тоже в одном общем масштабе.

Наконец, проведя через M прямую $RL \parallel UX$, из подобия треугольников TRM и TUS находим

$$\frac{MR}{SU} = \frac{TM}{TS} = \frac{Q_{всв}}{P_2},$$

но $SU = ML$, поэтому

$$\frac{MR}{ML} = \frac{Q_{всв}}{P_2}.$$

Следовательно, MR и ML в одном общем масштабе $1 \text{ мм} \equiv l$ ватт представляют $Q_{всв}$ и P_2 ; а потому в том же масштабе

$$RL \cdot l = P_1.$$

Таким образом, проводя линии, параллельные любой из трех линий мощностей P_1 , $Q_{всв}$ и P_2 , мы получим в соответствующих отрезках все мощности в одном общем масштабе.

Находить масштаб мощности всего проще можно следующим путем: проведем из точки M_k линию в желательном направлении, например, параллельно линии потерь; отрезок ее от M_k до оси абсцисс представляет всю мощность P_{1k} при коротком замыкании, нам известную или из опыта или из расчета (при проектировании); отсюда вычисляется и масштаб.

Из предыдущего получается удобный способ графического определения

$$\eta = \frac{P_2}{P_1},$$

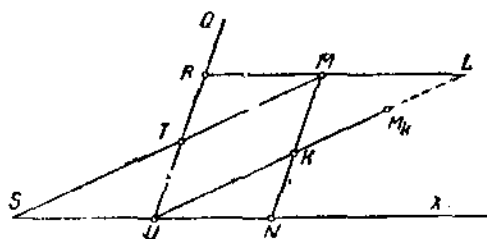
так как из фиг. 240

$$\eta = \frac{ML}{RL}.$$

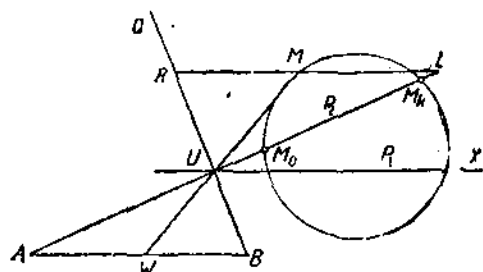
Продолжим линии $M_k U$ и QU за точку U и проведем $AB \parallel OX$ так, чтобы $AB = 100 \text{ мм}$. Продолжение MU пересечет AB в некоторой точке W . Очевидно,

$$\eta = \frac{ML}{RL} = \frac{AW}{AB}$$

и число миллиметров в AW прямо даст нам величину к. п. д.



Фиг. 239.



Фиг. 240.

§ 136. Линии мощности на круговой диаграмме второй эквивалентной схемы

При построении линий мощностей и потерь для круговой диаграммы второй эквивалентной схемы всеобщего трансформатора можно сразу строить линию всех потерь. А так как круговая диаграмма и линия всех потерь, очевидно, одни и те же независимо от того, из какой эквивалентной схемы мы исходили, то мы можем пользоваться для различных рассуждений и выводов первой эквивалентной схемой, а линию всех потерь строить сразу, как показано ниже.

Для этого построения только нам и нужна была вторая эквивалентная схема. Соотношения здесь следующие:

При нагрузке весь ток $\dot{I}_1$ есть тот же самый, что и в действительности.

Ток в ветви $\frac{\dot{Y}_\mu}{C}$ есть ток холостого хода $\dot{I}_0$, ток в ветви

$$\dot{Z}_{12} = C\dot{Z}_1 + C^2\dot{Z}_2,$$

который мы обозначим через $\dot{I}_2''$, равен их разности

$$\dot{I}_2'' = \dot{I}_1 - \dot{I}_0,$$

иначе же из схемы

$$\dot{I}_2'' = \frac{\dot{U}_1}{C\dot{Z}_1 + C^2\dot{Z}_2}. \quad (\alpha)$$

В действительном трансформаторе вторичный ток

$$\dot{I}_2' = \frac{\dot{U}_1 - \dot{I}_1\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2},$$

а так как из основного уравнения напряжений в трансформаторе

$$\dot{U}_1 - \dot{I}_1\dot{Z}_1 = \frac{\dot{I}_2'\dot{Z}_2'}{1 + \dot{Y}_\mu\dot{Z}_2'},$$

то

$$\dot{I}_2' = \frac{\dot{I}_1}{1 + \dot{Y}_\mu\dot{Z}_2'}. \quad (\beta)$$

Деля (α) на (β), получаем

$$\frac{\dot{I}_2''}{\dot{I}_2'} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \cdot \frac{1 + \dot{Y}_\mu\dot{Z}_2'}{C(\dot{C}\dot{Z}_2' + \dot{Z}_1)}.$$

Подставляя сюда выражение для $\dot{U}_1$ через $\dot{I}_1$, получаем

$$\frac{\dot{I}_2''}{\dot{I}_2'} = \frac{1}{C}$$

или

$$\dot{I}_2'' = \frac{\dot{I}_2'}{C},$$

что, конечно, и следовало ожидать, так как круговая диаграмма должна быть одна и та же, хотя мы исходим из разных схем.

Перейдем к мощностям.

$SM \parallel M_0M_k$, 3) делим отрезок SU в отношении, даваемом формулой (λ), 4) соединяем точки N и K и 5) проводим $UR \parallel NK$; эта линия UR и есть линия всех потерь.

На фиг. 242 дано построение линии потерь для примера, рассмотренного в § 123 и 132. Так как в этом примере

$$\dot{C} = 1 + \dot{Y}_u \dot{Z}_1 = 1 + (0,004 + j0,020)(5 + j10) = 0,820 + j0,14,$$

то

$$\gamma = \arg \dot{C} = \arctg \frac{0,14}{0,82} = 9^\circ 45',$$

и

$$k = \cos 2\gamma = 0,943;$$

на фигуре и отложено

$$SN = 0,943 \cdot SU.$$

Такой же результат получим и в том случае, когда $\gamma < 0$ и $\varphi_{2\gamma} = 0$, как это имеет место у асинхронного двигателя, ибо и тогда $k < 1$. У асинхронного двигателя 2γ , впрочем, настолько мало, что можно k положить приближенно равным единице.

Рассмотрим случай, когда $k > 1$. В этом случае из (8) получаем, что $P'_2 > P_2$, т. е. потери Q' меньше, чем в действительности, и где-то между K и S лежит точка L_1 , для которой $ML_1 = Q$ и $SL_1 = P_2$ (фиг. 240); при этом, очевидно,

$$Q - Q' = (k - 1)P_2$$

или

$$KL_1 = (k - 1) \cdot SL_1.$$

Проводим $L_1N_1 \parallel UW$ и получаем

$$\begin{aligned} \frac{KL_1}{SL_1} &= \frac{N_1U}{SN_1} = \frac{SU - SN_1}{SN_1} = \\ &= \frac{SU}{SN_1} - 1 = k - 1, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{SU}{SN_1} = k.$$

ГЛАВА СЕМНАДЦАТАЯ

ТЕОРИЯ ДЛИННЫХ ЛИНИЙ ПЕРЕДАЧИ ЭНЕРГИИ

§ 137. Дифференциальные уравнения цепи с равномерно распределенными емкостью, индуктивностью, активным сопротивлением и утечкой

Нам уже приходилось упоминать, что всякая линия передачи энергии обладает емкостью, равномерно распределенной по ее длине; при этом могут представиться разные случаи. Если два провода, передающие электрическую энергию, идут над землей, то их емкость, обусловленная их положением и расстоянием друг относительно друга и относительно земли, сравнительно невелика, и зарядный ток (ср. фиг. 79) и связанные с ним явления (большее падение напряжения и пр.) оказывают значительное влияние лишь при высоких напряжениях, когда присоединяется и еще

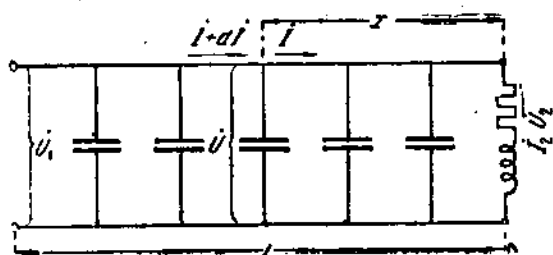
новое явление, — разряд через воздух, так называемый „тихий разряд“, в темноте создающий явление „короны“; кроме тихого разряда при высоком напряжении существует уже при всяком напряжении вдоль всех проводов утечка от провода к проводу через плохую изоляцию на столбах линии.

Другой случай получим, когда провода, передающие энергию, представляют собой жилы кабеля, продолженного под землей, как это имеет место во всех городских сетях как сильных токов (т. е. для освещения и моторов), так и слабых (телефонных и телеграфных), а также и в некоторых других случаях, например, в подводных телеграфных кабелях.

Здесь емкость проводов становится значительной, и ее влияние необходимо уметь учесть точно во всех случаях. С ростом частоты это влияние увеличивается, что ведет к очень важным следствиям для техники слабых токов. В дальнейшем мы отметим главнейшие пункты этого влияния.

Заметим, что всякие провода обладают еще и распределенной по длине их индуктивностью, которую тоже следует учесть при общем расчете явлений в линии передачи энергии, так же как и распределенное по длине их активное сопротивление.

Сделаем следующее допущение: пусть емкость, индуктивность, активное сопротивление, утечка через изоляцию и утечка в воздух тихим разрядом распределены по линии равномерно, т. е. величина их на единицу длины провода постоянна по всей длине линии; затем введем обозначения: пусть R_0 означает активное сопротивление единицы длины, именно — одного километра, линии, т. е. того и другого провода вместе, $X_{км} = \omega L_{км}$ — реактивное сопротивление (обусловленное самоиндукцией) одного километра, $Z = R_{км} + jX_{км}$ — полное его сопротивление; далее, через $G_{км}$ обозначим активную проводимость между проводами на один километр длины линии; если мы умножим на $G_{км} \cdot dx$ напряжение между проводами в любом месте линии, то получим активную силу тока, слагающуюся из тока утечки через изоляцию и через воздух и из активной составляющей, если таковая есть, заряжающего провод тока (или



Фиг. 243.

иначе — его продолжения — тока смещения между проводами) в этом месте; через $B_{км} = \omega C_{км}$ обозначим реактивную проводимость от провода к проводу на один километр; умножив ее на напряжение, получим реактивную составляющую зарядного тока; $Y_{км} = G_{км} + jB_{км}$ есть полная проводимость (берем перед $jB_{км}$ плюс, так как реактивный ток есть ток емкостный) между проводами на один километр длины линии. Величины $R_{км}$, $L_{км}$, $G_{км}$, $C_{км}$ называют постоянными линии. Всю длину линии обозначим l . На конце линии у вторичных зажимов напряжение пусть будет U_2 , сила тока I_2 ; у первичных зажимов в начале линии — U_1 и I_1 (фиг. 243).

Условимся положение элемента линии определять его расстоянием x от конца линии.

Падение напряжения в элементе dx длины линии выразится так:

$$\frac{du}{dx} dx = iR_{км} dx + L_{км} \frac{di}{dt} dx, \quad (137,1)$$

а изменение мгновенной силы тока:

$$\frac{di}{dx} dx = uG_{км} dx + C_{км} \frac{du}{dt} dx. \quad (137,2)$$

В векторной форме эти соотношения представляются так:

$$d\dot{U} = i\dot{Z}_{\kappa\mu} dx$$

$$d\dot{i} = \dot{U}\dot{Y}_{\kappa\mu} dx,$$

$$\frac{d\dot{U}}{dx} = i\dot{Z}_{\kappa\mu} \quad (137,3)$$

$$\frac{d\dot{i}}{dx} = \dot{U}\dot{Y}_{\kappa\mu} \quad (137,4)$$

Уравнения (137,1) и (137,2) не предполагают какой-либо частной формы зависимости i и u от времени и поэтому пригодны для исследования любого случая тока.

В уравнениях (137,3) и (137,4) нами введены векторы; этим самым мы уже предполагаем, что u и i — синусоидальные функции времени, следовательно, предполагаем, что приложенное к линии напряжение синусоидально и что кривая тока не искажается влиянием железа; кроме того, мы расширяем область приложения законов разветвления токов и пр. на бесконечно большое число бесконечно малых элементов, содержащих все виды сопротивлений и составляющих в совокупности линию передачи.

Величина $G_{\kappa\mu}$ определяется на основании, главным образом, эмпирических данных. Величины $L_{\kappa\mu}$ и $C_{\kappa\mu}$ могут быть рассчитаны.

Основам теории этого расчета посвящены ближайшие параграфы.

§ 138. Определение индуктивности трехфазной линии

В обоих проводах двухпроводной линии течет один и тот же ток; поэтому здесь можно говорить о самоиндукции.

Пусть теперь мы имеем случай трехфазной линии без нулевого провода; токи во всех трех проводах в фазе не совпадают и могут иметь различные амплитуды. Поэтому мы должны различать в случае трехфазной линии самоиндукцию любого провода от индуктивного действия на него двух других проводов; э. д. с. индукции в проводе e будет состояться из трех частей, например, для e_1

$$e_1 = -L \frac{di_1}{dt} - M_{12} \frac{di_2}{dt} - M_{13} \frac{di_3}{dt}.$$

Для определения L , M_{12} и M_{13} лучше всего исходить из представления о магнитном потоке сквозь контур и определять самоиндукцию контура. Приложим эту идею к данному примеру следующим образом: так как нулевого провода нет, то

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

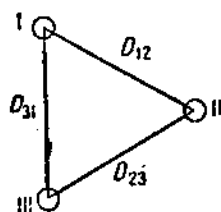
$$i_1 = -(i_2 + i_3) \quad (138,1)$$

и любой провод является обратным для обоих других. Мы можем э. д. с. индукции в проводе I разложить на две э. д. с. самоиндукции: одну, равную половине э. д. с. самоиндукции в контуре $I-II$ от тока i_2 , и другую, равную половине э. д. с. самоиндукции в контуре $I-III$ от тока i_3 (половины берем потому, что от каждого

контура мы берем лишь его половину — один провод). Эта результирующая э. д. с. выразится поэтому как сумма:

$$e_1 = \frac{1}{2} e_{I-II} + \frac{1}{2} e_{I-III} = -\frac{1}{2} L_{I-II} \frac{di_2}{dt} - \frac{1}{2} L_{I-III} \frac{di_3}{dt}. \quad (138,2)$$

Если провода расположены симметрично, т. е. в вершинах равностороннего треугольника (фиг. 245а), то



Фиг. 244.

$$L_{I-II} = L_{I-III} = (4 \ln \frac{D}{a} + 1) l \cdot 10^{-4},$$

(см. „Введение в теорет. электротехнику“ проф. И. А. Черданцева)

где l выражено в километрах.

Тогда

$$e_1 = -\frac{1}{2} L_{I-II} \left(\frac{di_2}{dt} + \frac{di_3}{dt} \right) = \frac{1}{2} L_{I-II} \frac{di_1}{dt}, \quad (138,3)$$

подставляя на основании (138,1) вместо суммы производных от i_2 и i_3 производную от i_1 с обратным знаком.

Величину

$$L_I = \frac{1}{2} L_{I-II} = \left(2 \ln \frac{D}{a} + \frac{1}{2} \right) l \cdot 10^{-4} \text{ генри} \quad (138,4)$$

примем за величину индуктивности одного провода L_I .

Итак

$$e_1 = L_I \frac{di_1}{dt}. \quad (138,5)$$

Очевидно, что в этом случае для всех трех проводов получаются равные индуктивности

$$L_I = L_{II} = L_{III} = \left(2 \ln \frac{D}{a} + \frac{1}{2} \right) l \cdot 10^{-4}. \quad (138,6)$$

В символической форме э. д. с. индукции есть

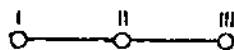
$$E_1 = j\omega L_I \dot{I}_1. \quad (138,7)$$

При несимметричном расположении проводов, например, когда все три провода лежат в одной плоскости (фиг. 245), нельзя индуктивности двух контуров $I-II$ и $I-III$ считать равными.

Поэтому здесь соотношения получаются не такие простые и формулу (138,2) надо написать для каждого провода отдельно.

Например, для провода II :

$$e_2 = -\frac{1}{2} L_{II-I} \frac{di_1}{dt} - \frac{1}{2} L_{II-III} \frac{di_3}{dt}.$$



Фиг. 245.

Здесь, конечно, L_{II-I} равно L_{I-II} , как половина величины индуктивности петли. Аналогично и

$$L_{I-III} = L_{III-I} \text{ и } L_{II-III} = L_{III-II}. \quad (138,8)$$

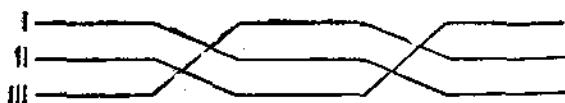
При этом

$$\left. \begin{aligned} L_{I-II} &= (4 \ln \frac{D_{I-II}}{a} + 1) l \cdot 10^{-4}; \\ L_{II-III} &= (4 \ln \frac{D_{II-III}}{a} + 1) l \cdot 10^{-4}; \quad L_{I-III} = (4 \ln \frac{D_{I-III}}{a} + 1) l \cdot 10^{-4}. \end{aligned} \right\} \quad (138,9)$$

Если в формулах э. д. с. от мгновенных значений перейти к действующим, то в векторных обозначениях формулы (138,2) и аналогичные формулы для двух других проводов напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_1 &= -j \frac{\omega}{2} (L_{I-II} \dot{I}_2 + L_{I-III} \dot{I}_3), \\ \dot{E}_2 &= -j \frac{\omega}{2} (L_{I-II} \dot{I}_1 + L_{II-III} \dot{I}_3), \\ \dot{E}_3 &= -j \frac{\omega}{2} (L_{I-III} \dot{I}_1 + L_{II-III} \dot{I}_2). \end{aligned} \right\} \quad (138,10)$$

Таким образом при несимметричном расположении проводов (т. е. когда центры их находятся не в вершинах равностороннего треугольника) падение напряжения в проводе вследствие э. д. с. индукции зависит не от силы тока в этом проводе, но от силы тока в двух других проводах, так что может иметь место даже и тогда, когда сила тока в этом проводе равна нулю.



Фиг. 246.

Если в длинных линиях провода располагаются несимметрично, то прибегают к транспозиции их, или „скрутке“ (фиг. 246), т. е. к перемещению их одного на место другого в определенной последовательности через одни и те же отрезки длины пути.

Отрезки эти выбираются так, чтобы вся длина линии содержала тройной отрезок (фиг. 246) целое число раз; при таком условии получается, что падение напряжения в одном проводе на всей длине пути зависит от силы тока только в этом проводе, что нетрудно доказать следующим образом:

Рассмотрим падение напряжения вследствие индукции на трех последовательных отрезках длины линии; они будут по фиг. 246 таковы: на первом отрезке формулы (138,10)

$$-j \frac{\omega}{2} (L_{I-II} \dot{I}_2 + L_{I-III} \dot{I}_3);$$

на втором отрезке провод I занимает то место, где был раньше провод II, а на место провода III становится провод II; поэтому при тех же самых токах $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_3$ коэффициенты индукции будут теперь другие: вместо L_{I-II} будет L_{II-III} , а вместо L_{I-III} будет L_{I-II} ; поэтому на втором отрезке падение напряжения выразится

$$-j \frac{\omega}{2} (L_{II-III} \dot{I}_2 + L_{I-II} \dot{I}_3).$$

Аналогично получаем для третьего отрезка

$$-j \frac{\omega}{2} (L_{I-III} \dot{I}_2 + L_{II-III} \dot{I}_3).$$

На всех трех отрезках получается падение напряжения как сумма этих трех падений

$$-j \frac{\omega}{2} (L_{I-II} + L_{II-III} + L_{I-III}) (\dot{I}_2 + \dot{I}_3) = +j \frac{\omega}{2} (L_{I-II} + L_{II-III} + L_{I-III}) \dot{I}_1, \quad (138,11)$$

так как $\dot{I}_2 + \dot{I}_3 = -\dot{I}_1$.

Таким образом в формуле (138,11) реактивное падение напряжения в проводе зависит от силы тока только в этом проводе. Если она равна нулю, то и падение напряжения равно нулю.

После этого становится ясно, что если мы весь путь разобьем на число таких отрезков большее трех, то число это во всяком случае должно быть кратно трем, иначе мы не сможем повторять формулы (138,11) для каждого новых трех отрезков пути.

Формулу (138,11) можно привести к другому виду подстановкой вместо коэффициентов индукции их выражений, где вместо длины l нужно взять одну треть ее.

Таким образом при скрутке проводов каждый провод обладает „коэффициентом самоиндукции“ (или индуктивностью), понимая этот термин, как изложено выше, равным

$$L = \frac{1}{2} (L_{I-I} + L_{II-III} + L_{I-III}) = 2 \left(\ln \frac{D_{I-II}}{a} + \ln \frac{D_{II-III}}{a} + \ln \frac{D_{I-III}}{a} + \frac{3}{2} \right) \frac{l}{3} 10^{-4} =$$

$$= \frac{2l}{3} \left(\ln \frac{D_{I-II} D_{II-III} D_{I-III}}{a^3} + \frac{3}{2} \right) 10^{-4} = \left(2 \ln \frac{\sqrt[3]{D_{I-II} D_{II-III} D_{I-III}}}{a} + \frac{1}{2} \right) l \cdot 10^{-4} \text{ генри.}$$

Когда мы желаем вычислять с помощью десятичных логарифмов, а не натуральных, то (так как $\ln N = \lg N \cdot \ln 10 = 2,3 \lg N$) формулы для коэффициентов индукции мы должны писать так:

$$L = (9,21 \lg \frac{D}{a} + 1) l \cdot 10^{-4}$$

и

$$L = \left(4,6 \lg \frac{\sqrt[3]{D_{I-II} D_{II-III} D_{I-III}}}{a} + \frac{1}{2} \right) l \cdot 10^{-4}.$$

Если провода являются жилами кабеля, то для двухжильного кабеля пользуются той же формулой, что для двухпроводной линии, т. е. для всего кабеля в целом

$$L = (9,21 \lg \frac{D}{a} + 1) l \cdot 10^{-4}$$

и для трехжильного кабеля при трехфазном токе для каждой отдельной жилы

$$L = \left(4,6 \lg \frac{D}{a} + \frac{1}{2} \right) l \cdot 10^{-4}.$$

Если кабель обладает железной броней, магнитные поля жил замыкаются через броню и вызывают, во-первых, небольшие потери мощности в ней и, во-вторых, увеличение индуктивности.

Кроме того, действительная величина индуктивности более вычисленной еще и потому, что радиус провода a теперь не очень мал сравнительно с расстоянием их центров D , как предполагается при выводе обычной формулы индуктивности двух проводов.

§ 139. Определение емкости трехфазной линии

Когда имеется система из нескольких проводников, так что заряд одного влияет на заряд каждого другого, то надо прежде всего условиться, что понимать под емкостью отдельного проводника в такой системе.

Емкость проводника в этом случае мы определяем как отношение заряда проводника к его потенциалу. Эту емкость назовем действующей.

В трехфазной линии емкость есть отношение заряда к фазовому напряжению, т. е. к напряжению между проводом и искусственной нулевой точкой.

Чтобы воспользоваться этим определением для вычисления емкости, необходимо заряд и напряжение связать друг с другом уравнением.

Такой метод мы уже применяли и в учении о постоянном электрическом поле, см. „Введение в теорет. электротехнику“ проф. И. А. Черданцева.

Там было уже доказано, что разность потенциалов между точкой A в поле цилиндрического проводника с центром поперечного сечения O и любой точкой M , иначе работа, совершаемая силами поля при перемещении $+1$ электричества из A в M , равна

$$2\lambda \ln \frac{OM}{OA} \text{ абс. ед.}, \quad (139,1)$$

где λ есть плотность заряда на единицу длины провода в электростатических единицах.

Заряды на проводах трехфазной линии изменяются синусоидально и со сдвигом фаз в $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$. Если один заряд есть

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \lambda \sin(\omega t) \cdot \frac{1}{3 \cdot 10^9} \text{ кулонов,} \\ q_2 &= \lambda \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \frac{1}{3 \cdot 10^9} \\ q_3 &= \lambda \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \cdot \frac{1}{3 \cdot 10^9}, \end{aligned} \right\} \quad (139,2)$$

где l выражено в сантиметрах.

Работа при перемещении $+1$ от точки M поверхности одного провода до нулевой точки O будет совершаться силами результирующего поля и поэтому равна (фиг. 247)

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= 2\lambda \sin(\omega t) \ln \frac{O_1 O}{a} + 2\lambda \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \ln \frac{O_2 O}{O_2 M} + \\ &+ 2\lambda \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \ln \frac{O_3 O}{O_3 M} \text{ абс. ед.} \end{aligned} \right\} \quad (139,3)$$

Так как $O_2 O = O_3 O$ и $O_3 M = O_2 M$, то второй и третий члены дают

$$-2\lambda \sin(\omega t) \ln \frac{O_2 O}{O_2 M},$$

и таким образом

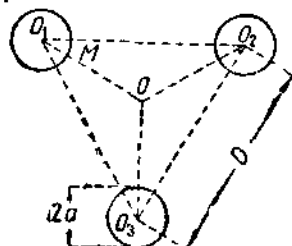
$$u_1 = 2\lambda \sin(\omega t) \ln \left(\frac{O_1 O \cdot O_2 M}{a \cdot O_2 O} \right) = 2\lambda \sin(\omega t) \ln \frac{O_2 M}{a} 3 \cdot 10^9 \text{ вольт.} \quad (139,4)$$

Разделив заряд q_1 на потенциал u_1 , получаем действующую емкость

$$C = \frac{l}{2 \ln \frac{O_2 M}{a}} \cdot \frac{10^9}{3 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^9} \mu\text{F.}$$

Если окружающая среда имеет диэлектрическую постоянную ϵ , то u_1 будет, как известно, в ϵ раз меньше, а C в ϵ раз больше.

Когда расстояние D между центрами проводов достаточно велико сравнительно с радиусом a поперечного сечения провода, то можно положить приближенно



Фиг. 247.

$O_2 M = D$; далее l обычно выражают в километрах и пользуются десятичными логарифмами. При учете всех этих пунктов получаем

$$C = \frac{\epsilon l}{2 \cdot 2,3 \cdot \lg \frac{D}{a}} \cdot \frac{10^6 \cdot 10^5}{3 \cdot 10^2 \cdot 3 \cdot 10^3} \mu F$$

или

$$C = 0,0241 \frac{l}{\lg \frac{D}{a}} \mu F,$$

где l выражается в километрах.

В этом выводе мы не учитываем влияния земли; в результате отношение заряда к потенциалу в проводе есть величина постоянная. Если расстояние от проводов до земли недостаточно велико сравнительно с расстоянием проводов друг от друга, то земля оказывает на электрическое поле проводов свое влияние: на более близкие провода — более сильное.

Путем транспозиции или скрутки и это влияние можно распределить на все три провода равномерно. Таким образом из-за соображений о получении одинаковой действующей емкости всех трех проводов надо делать транспозицию даже тогда, когда провода расположены в вершинах правильного треугольника, т. е. когда индуктивность их одинакова и не требует скрутки для своего выравнивания.

Следует заметить, что скрутка необходима еще и для того, чтобы избежать мешающего действия трехфазной линии на линию слабого тока, например, телефонную.

§ 140. Исследование уравнений линий передачи энергии

В § 137 мы нашли

$$\frac{d\dot{U}}{dx} = i\dot{Z}_{km}; \quad (A)$$

$$\frac{d\dot{i}}{dx} = \dot{U}\dot{Y}_{km}. \quad (B)$$

Дифференцируя эти уравнения еще раз по x , получим:

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = \frac{d\dot{i}}{dx} \dot{Z}_{km},$$

$$\frac{d^2\dot{i}}{dx^2} = \frac{d\dot{U}}{dx} \dot{Y}_{km}.$$

Подставляя сюда из (A) и (B) выражения первых производных, получаем такие уравнения:

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = \dot{U}\dot{Z}_{km}\dot{Y}_{km}; \quad (140,1)$$

$$\frac{d^2\dot{i}}{dx^2} = \dot{i}\dot{Z}_{km}\dot{Y}_{km}. \quad (140,2)$$

Мы получили для тока и напряжения уравнения одного и того же вида, что показывает, что напряжение и сила тока распределены в проводах одинаково.

Частный интеграл, например, первого уравнения есть

$$\dot{U} = \dot{A}e^{mx}. \quad (140,3)$$

где e есть основание натуральных логарифмов, постоянная A пока произвольна, а m определяется из уравнения, получаемого подстановкой решения в уравнение (140,1).

Так как

$$\frac{dU}{dx} = mA \cdot e^{mx},$$

а

$$\frac{d^2U}{dx^2} = m^2 A e^{mx},$$

то из (140,1) получаем

$$m^2 = \frac{\dot{Z}_{KM} \dot{Y}_{KM}}{\dot{Z}_{KM}}$$

или

$$m = \pm \sqrt{(R_{KM} + jX_{KM})(G_{KM} + jB_{KM})}. \quad (140,4)$$

Подставляя два полученных значения m в (140,3) и делая постоянные для общности различными, получаем общий интеграл уравнения (140) в таком виде:

$$\dot{U} = \dot{A}_1 e^{x \sqrt{(R_{KM} + jX_{KM})(G_{KM} + jB_{KM})}} + \dot{A}_2 e^{-x \sqrt{(R_{KM} + jX_{KM})(G_{KM} + jB_{KM})}} \quad (140,5)$$

или, обозначая через m арифметическое значение корня в (5),

$$\dot{U} = \dot{A}_1 e^{mx} + \dot{A}_2 e^{-mx}. \quad (140,6)$$

Чтобы получить i , обратимся к уравнению (A), из которого имеем

$$i = \frac{1}{\dot{Z}_{KM}} \frac{d\dot{U}}{dx},$$

или на основании формул (140,6) и (140,4)

$$i = \frac{1}{\dot{Z}_{KM}} m (\dot{A}_1 e^{mx} - \dot{A}_2 e^{-mx}) = \sqrt{\frac{\dot{Y}_{KM}}{\dot{Z}_{KM}}} (\dot{A}_1 e^{mx} - \dot{A}_2 e^{-mx}). \quad (140,7)$$

Из (140,4) следует, что m есть отвлеченное комплексное число; полагая

$$m = a + jb \quad (140,8)$$

и подставляя это выражение вместо m в (140,4) после возвышения в квадрат, находим

$$a^2 - b^2 + 2jab = R_{KM}G_{KM} - X_{KM}B_{KM} + j(R_{KM}B_{KM} + X_{KM}G_{KM}),$$

откуда, приравнявая сначала действительные, затем мнимые части, получаем

$$\left. \begin{aligned} a^2 - b^2 &= R_{KM}G_{KM} - X_{KM}B_{KM}, \\ 2ab &= R_{KM}B_{KM} + X_{KM}G_{KM}. \end{aligned} \right\} \quad (140,9)$$

Решая эту систему уравнений относительно a и b , получаем

$$\left. \begin{aligned} \text{I. } a &= \sqrt{\frac{1}{2} [R_{KM}G_{KM} - X_{KM}B_{KM} + \sqrt{(R_{KM}^2 + X_{KM}^2)(B_{KM}^2 + G_{KM}^2)}]}, \\ \text{II. } b &= \sqrt{\frac{1}{2} [X_{KM}B_{KM} - R_{KM}G_{KM} + \sqrt{(R_{KM}^2 + X_{KM}^2)(B_{KM}^2 + G_{KM}^2)}]}. \end{aligned} \right\} \quad (140,10)$$

Так как по формулам Эйлера

$$e^{+mx} = e^{ax+jbx} = e^{ax} (\cos bx + j \sin bx)$$

и

$$e^{-mx} = e^{-ax-jbx} = e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx),$$

то уравнения (140,6) и (140,7) приобретают такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{A}_1 e^{ax} [\cos(bx) + j \sin(bx)] + \dot{A}_2 e^{-ax} [\cos(bx) - j \sin(bx)], \\ i &= \sqrt{\frac{\dot{Y}_{KM}}{\dot{Z}_{KM}}} \{ \dot{A}_1 e^{ax} [\cos(bx) + j \sin(bx)] - \\ &- \dot{A}_2 e^{-ax} [\cos(bx) - j \sin(bx)] \}. \end{aligned} \right\} \quad (140,11)$$

Для определения постоянных $\dot{A}_1$ и $\dot{A}_2$ могут служить данные для какой-нибудь определенной точки линии величины $\dot{U}$ и i ; всего удобнее исходить из „вторичного“ напряжения, т. е. напряжения $\dot{U}_2$ в конце линии у нагрузки и нагрузочного тока i_2 , каковые значения величины $\dot{U}$ и i получают при $x=0$; при этом мы из уравнения (140,11) получаем

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= \dot{A}_1 + \dot{A}_2, \\ i_2 &= \sqrt{\frac{\dot{Y}_{KM}}{\dot{Z}_{KM}}} (\dot{A}_1 - \dot{A}_2), \end{aligned}$$

откуда и определяем $\dot{A}_1$ и $\dot{A}_2$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}_1 &= \frac{\dot{U}_2 + i_2 \sqrt{\frac{\dot{Z}_{KM}}{\dot{Y}_{KM}}}}{2} = \dot{A}_1 \cdot e^{j\psi_1}, \\ \dot{A}_2 &= \frac{\dot{U}_2 - i_2 \sqrt{\frac{\dot{Z}_{KM}}{\dot{Y}_{KM}}}}{2} = \dot{A}_1 \cdot e^{j\psi_2}. \end{aligned} \right\} \quad (140,12)$$

Подставляя эти выражения $\dot{A}_1$ и $\dot{A}_2$ в уравнения (140,6) и (140,7) и вводя следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{KM} &= Z_{KM} e^{j\psi_3}, \\ \dot{Y}_{KM} &= Y_{KM} e^{j\psi_4}, \end{aligned}$$

причем

$$\left. \begin{aligned} \psi_3 &= \arctg \frac{X_{KM}}{R_{KM}}, \\ \psi_4 &= \arctg \frac{B_{KM}}{G_{KM}} \end{aligned} \right\} \quad (140,13)$$

и

$$\sqrt{\frac{\dot{Y}_{KM}}{\dot{Z}_{KM}}} = \sqrt{\frac{Y_{KM}}{Z_{KM}} e^{j(\psi_4 - \psi_3)}} = \sqrt{\frac{Y_{KM}}{Z_{KM}}} e^{j \frac{(\psi_4 - \psi_3)}{2}},$$

получаем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{A}_1 e^{(a+jb)x + j\psi_1} + \dot{A}_2 e^{-(a+jb)x + j\psi_2} = \\ &= \dot{A}_1 e^{ax} e^{j(bx + \psi_1)} + \dot{A}_2 e^{-ax} e^{j(-bx + \psi_2)}, \\ i &= \sqrt{\frac{\dot{Y}_{KM}}{\dot{Z}_{KM}}} [\dot{A}_1 e^{ax} e^{j(bx + \psi_1)} - \dot{A}_2 e^{-ax} e^{j(-bx + \psi_2)}] = \\ &= \sqrt{\frac{Y_{KM}}{Z_{KM}}} [\dot{A}_1 e^{ax} e^{j(bx + \psi_1 + \frac{\psi_4 - \psi_3}{2})} - \dot{A}_2 e^{-ax} e^{j(-bx + \psi_2 + \frac{\psi_4 - \psi_3}{2})}]. \end{aligned} \right\} \quad (140,14)$$

Перейдем в уравнениях (140,14) от символического выражения напряжения и силы тока к выражению их мгновенных значений:

$$\left. \begin{aligned} u &= A_1 e^{ax} \sin(\omega t + bx + \phi_1) + A_2 e^{-ax} \sin(\omega t - bx + \phi_2), \\ i &= A_1 \sqrt{\frac{Y_{KM}}{Z_{KM}}} e^{ax} \sin\left(\omega t + bx + \phi_1 + \frac{\phi_4 - \phi_3}{2}\right) - \\ &\quad - A_2 \sqrt{\frac{Y_{KM}}{Z_{KM}}} e^{-ax} \sin\left(\omega t - bx + \phi_2 + \frac{\phi_4 - \phi_3}{2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (140,15)$$

Из последних уравнений мы видим, что для любой точки x с течением времени t и u и i изменяются синусоидально. Если мы отвлечемся от множителей e^{ax} и e^{-ax} , положив, например, a равным нулю и эти множители, следовательно, равными единице, то, рассматривая значения u и i для какого-нибудь момента, т. е. полагая $t = \text{const}$, мы видим, что они изменяются вдоль линии синусоидально в зависимости от переменного x . Если мы возьмем две точки x_1 и x_2 , причем расстояние между ними $x_2 - x_1$ будет таково, что

$$bx_2 = bx_1 + \pi,$$

или

$$x_2 - x_1 = \frac{\pi}{b},$$

то значения u в этих двух точках будут по фазе точно противоположны, так же как и значения i , потому что

$$\sin(\alpha \pm \pi) = -\sin \alpha.$$

Таким образом получается такой совершенно новый для нас результат исследования уравнений (140,15); при достаточной длине проводов в них в различных точках будут действовать в один и тот же момент напряжения в противоположных направлениях и течь в противоположных направлениях токи.

Из предыдущего следует, что в любых двух точках, отстоящих друг от друга на расстоянии $\frac{2\pi}{b}$, фазы и напряжений и сил токов будут одинаковы, хотя величины напряжений и сил токов при этом будут в этих точках разные, ибо в уравнения (140,15), дающие величины и фазы u и i , входят множители e^{ax} и e^{-ax} , которые и показывают, что амплитуды u и i изменяются непрерывно от точки к точке вдоль проводов.

Величина

$$\lambda = \frac{2\pi}{b} \quad (140,16)$$

называется длиной волны в проводе.

§ 141. Волны в линии

Из уравнений (140,15) следует, что процесс изменения u и i вдоль проводов и с течением времени можно представить себе, вообразив движение вдоль проводов двух синусоидальных кривых навстречу одна другой. Для напряжения u

$$+ A_1 e^{ax} \sin(\omega t + bx + \phi_1)$$

есть синусоидальная кривая,двигающаяся от начала линии к концу, причем амплитуды ее по мере продвижения уменьшаются, приближаясь к пределу A_1 при $x=0$;

$$+ A_2 e^{-ax} \sin(\omega t - bx + \phi_1)$$

есть синусоидальная кривая, двигающаяся в обратном направлении тоже, при уменьшении амплитуд по мере продвижения до величины $A_2 e^{-\alpha l}$. Эти результаты легко получить, полагая сначала

$$\sin(\omega t + bx + \phi_1) = k,$$

где k — некоторая постоянная величина, например, амплитуда синуса, т. е. единица, и рассуждая, где получится эта величина во время $t_1 > t$; так как при этом должно быть

$$\sin(\omega t_1 + bx_1 + \phi_1) = k,$$

то, очевидно,

$$\omega t + bx = \omega t_1 + bx_1,$$

и если $t_1 > t$, то $x_1 < x$, следовательно, в более поздний момент времени t_1 кривая оказывается смещенной к концу линии.

Подобным же образом получим направление движения второй кривой.

Действительно существующее в любой точке в любой момент напряжение u получается суммированием значений ординат этих двух кривых для этой точки и в этот момент.

Аналогичное получаем и для силы тока; только действительно существующая в любом элементе длины провода в любой момент сила тока i согласно уравнению (140,15), получается вычитанием из ординаты кривой, идущей от начала к концу, ординаты второй, идущей навстречу кривой. Кривые, идущие от конца к началу, называются отраженными волнами; кривые, идущие от начала к концу, называются главными волнами.

Рассмотрим, с какой скоростью перемещаются вдоль линии значения синусов уравнений (140,15). Из условия, что по прошествии времени dt

$$\sin[\omega(t+dt) + b(x+dx) + \phi_1] = \sin(\omega t + bx + \phi_1),$$

находим

$$\omega dt + b dx = 0,$$

откуда

$$w = \frac{dx}{dt} = -\frac{\omega}{b}.$$

Знак минус и показывает, что главная волна идет от начала к концу (в сторону убывающих x -ов). То же абсолютное значение скорости получим и для отраженной волны.

За период волна пройдет расстояние

$$w \cdot T = \frac{\omega}{b} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{b} = \lambda,$$

т. е. ту же самую длину волны λ . Таким образом скорость движения волн в проводах равна

$$w = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{b}. \quad (141,1)$$

Эта скорость, как видим, имеет конечную величину и зависит только от числа периодов тока и „постоянных“ линии передачи.

Допустим, что все потери энергии в линии так ничтожны, что ими можно пренебречь; это значит, что $R_{км} = 0$ и $G_{км} = 0$. Подставляя эти значения в уравнения (140,10), получаем, что $\alpha = 0$; это обозначает, что амплитуды волн не изменяются по мере продвижения волн по линии, — множители $e^{\alpha x}$ и $e^{-\alpha x}$ при этом равны единице; далее, из уравнений (140,10) имеем, что

$$b = \sqrt{X_{км} B_{км}}.$$

Так как $X_{км} = \omega L_{км}$, а $B_{км} = \omega C_{км}$ (ибо емкостный зарядный ток $I_c = \omega C_{км} U$ на единице длины провода, и следовательно, $\omega C_{км}$ есть проводимость $B_{км}$), то

$$b = \omega \sqrt{L_{км} C_{км}}$$

Подставляя это значение b в уравнение (141,1), получаем

$$w = \frac{1}{\sqrt{L_{км} C_{км}}} \text{ километров в секунду; } \quad (141,2)$$

что w действительно есть скорость в километрах в секунду, вытекает из того, что индуктивность имеет размерность длины, емкость же — размерность времени в квадрате, деленного на длину, а $L_{км}$ и $C_{км}$ суть индуктивность и емкость, отнесенные к одному километру длины.

В линиях с воздушными проводами величины $L_{км}$ и $C_{км}$ вообще говоря, меньше, чем во всех других случаях, и скорость w при этом получается наибольшей.

Для двухпроводной воздушной линии

$$L_{км} = \left(4 \ln \frac{D}{a} + 1 \right) 10^{-4} \frac{\text{генри}}{\text{км}},$$

и

$$C_{км} = \frac{1}{4 \ln \frac{D}{a}} \cdot \frac{1}{9 \cdot 10^9} \frac{\text{фарад}}{\text{км}},$$

где D есть расстояние между осями проводов, а a — радиус их поперечного сечения. Если мы пренебрежем $+1$ в скобках и подставим эти выражения в уравнение (141,2), то получим приближенно

$$w = \frac{1}{\sqrt{L_{км} C_{км}}} = 3 \cdot 10^8 \text{ км/сек},$$

т. е. скорость, равную скорости света в пустоте.

Полагая приближенно для воздушных проводов w равной скорости света, из уравнения (140,1) получим длину волны для обычных линий передачи энергии при числе периодов пятьдесят в секунду:

$$\lambda = w \cdot T = 6000 \text{ км}.$$

Таким образом длина даже наибольших линий передачи, построенных до настоящего времени, есть только часть длины волны тока. Например, при длине линии в 200 км на линии уместится только $\frac{1}{30}$ доля волны, т. е. напряжение в начале линии и напряжение в конце ее будут иметь сдвиг в фазе $\frac{1}{30} \cdot 2\pi$, или 12° .

То же, конечно, имеет место и для силы тока.

В кабелях, где $C_{км}$ значительно больше, чем в воздушных линиях, скорость w движения волн получается в 3—5 раз меньшей, так же как и длина волны при одинаковом числе периодов.

Остановимся на случае холостой работы линии, т. е. положим $I_2 = 0$. Тогда уравнения (140,12) дают нам

$$\dot{A}_1 = \frac{1}{2} \dot{U}_2 = \dot{A}_2,$$

$$\phi_1 = \phi_2.$$

Поэтому первое из уравнений (140,15) может быть в этом случае преобразовано следующим образом:

$$u = A_1 e^{ax} [\sin(\omega t + \phi_1) \cos bx + \cos(\omega t + \phi_1) \sin bx] + \\ + A_1 e^{-ax} [\sin(\omega t + \phi_1) \cos bx - \cos(\omega t + \phi_1) \sin bx].$$

Введем для упрощения дальнейших рассуждений предположение, что потери в линии ничтожны, а потому можно положить $a = 0$. При этом последнее уравнение упрощается следующим образом:

$$u = 2A_1 \cos bx \sin(\omega t + \phi_1). \quad (141,3)$$

Последнее выражение показывает, что амплитуды ($2A_1 \cos bx$) напряжения растут к концу линии, достигая максимума $2A_1 = U_2$ при $x = 0$, т. е. у вторичных зажимов. Это явление повышения напряжения в линии по мере удаления от станции или от генератора есть то же самое явление Ферранти, которое было уже приближенным образом описано в § 45.

Обратимся ко второму уравнению (140,15); сделанное нами допущение, что $a = 0$, так как потери ничтожны, равносильно утверждению, что $R_{км} = 0$ и $G_{км} = 0$, и следовательно, $Y_{км} = B_{км} = \omega C_{км}$, а $Z_{км} = X_{км} = \omega L_{км}$, а потому из уравнений (140,13) мы получаем, что $\phi_2 = \phi_1 = \frac{\pi}{2}$, и второе уравнение (140,15) преобразуется поэтому так:

$$i = 2A_1 \sqrt{\frac{C_{км}}{L_{км}}} \sin bx \cos(\omega t + \phi_1) = \\ = 2A_1 \sqrt{\frac{C_{км}}{L_{км}}} \sin bx \sin\left(\omega t + \phi_1 + \frac{\pi}{2}\right) \quad (141,4)$$

Из этого уравнения мы видим, что амплитуда $2A_1 \sqrt{\frac{C_{км}}{L_{км}}} \sin bx$ силы тока уменьшается по мере приближения к концу линии, и на самом конце, где $x = 0$, сила тока равна нулю. По фазе сила тока опережает напряжение везде на четверть периода.

Уравнения (141,3) и (141,4) суть уравнения стоячих волн в проводах. На таких расстояниях x от конца линии, что $\cos bx = 0$, амплитуды напряжения равны нулю; в этих точках все время напряжение равно нулю; эти точки суть узлы для напряжения; в тех точках, для которых $\cos bx = \pm 1$, амплитуды напряжения будут иметь наибольшую величину $2A_1 = U_2$, эти точки суть пучности; во всех промежуточных между узлами и пучностями точках амплитуды имеют величины $2A_1 \cos bx$ по уравнению (141,3).

Там, где $\cos bx = 0$, $\sin bx = \pm 1$, и наоборот; поэтому в тех точках, где находятся узлы напряжения, будут находиться пучности силы тока по уравнению (141,4), и в точках, где находятся пучности напряжения, будут находиться узлы силы тока.

На конце линии, таким образом, при холостой работе мы имеем пучность напряжения и узел тока.

В точках, где находятся узлы напряжения, мы можем оба провода линии передачи соединить друг с другом без всяких последствий от этого.

Стоячие же волны с узлом напряжения и пучностью тока на конце мы получим при коротком замыкании конца линии, конечно, при том же условии, что $a = 0$. При этом условии стоячие волны получатся вообще всегда, когда вторичная мощность равна нулю, например, и тогда, когда сдвиг фаз $\varphi_{2н}$ между $\dot{I}_2$ и $\dot{U}_2$ есть $\frac{\pi}{2}$; таков случай подключения конденсатора к концу линии; доказательство сказанного предоставляем провести самому читателю, заметив лишь, что

для доказательства нужно принять во внимание следующее: при $\varphi_{2n} = \frac{\pi}{2}$ векторы $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$ перпендикулярны один другому; так как потери равны нулю и

$$\dot{Y}_{KM} = +jB_{KM} = +j\omega C_{KM}, \text{ а } \dot{Z}_{KM} = +jX_{KM} = +j\omega L_{KM},$$

то

$$\sqrt{\frac{\dot{Y}_{KM}}{\dot{Z}_{KM}}} = \sqrt{\frac{C_{KM}}{L_{KM}}}$$

есть действительное, а не комплексное выражение, а потому в уравнениях (140,12) векторы

$$\dot{U}_2 \text{ и } \dot{I}_2 \sqrt{\frac{\dot{Y}_{KM}}{\dot{Z}_{KM}}}$$

составляют прямой угол. Отсюда вытекает, что величины комплексов (модули) $\dot{A}_1$ и $\dot{A}_2$ равны:

$$A_1 = A_2$$

и что $\phi_1 = -\phi_2$.

Если вторичная мощность или потери в линии имеют величину, отличную от нуля, образуются волны — главная и отраженная, идущие вдоль проводов со скоростью порядка скорости света.

При низкой частоте (например, 50 Hz) длина волны получается настолько большой, как мы видели выше, что длина линии передачи составляет только небольшую часть ее, а потому в таких линиях нельзя наблюдать пучности и узлы тока. Но при высокой частоте, например, при токах от разряда конденсатора, волна обладает небольшой длиной (например, в несколько метров), и в линии, состоящей в этом случае из двух проводов в воздухе, можно наблюдать хорошо выраженные стоячие волны с пучностями и узлами напряжения и тока. Место пучности напряжения находится при этом легко следующим образом: внесенная в пространство между проводами линии гейслерова трубка начинает ярко светиться там, где имеется пучность напряжения, т. е. где переменное электрическое поле между проводами имеет наибольшую амплитуду.

§ 142. Телеграфные и телефонные кабели

Обратимся к линиям с потерями и рассмотрим один частный случай.

В телеграфных и телефонных кабелях индуктивность и утечка так малы, что ими можно пренебречь, положить выражающие их величины X_{KM} и G_{KM} равными нулю и считать, что кабель обладает только активным сопротивлением R_{KM} и емкостью C_{KM} или проводимостью $B_{KM} = \omega C_{KM}$.

В этом случае из уравнений (140,10) получается, что

$$a = b = \sqrt{\frac{1}{2} R_{KM} \omega C_{KM}}. \quad (142,1)$$

Таким образом при увеличении частоты переменного тока a растет пропорционально корню квадратному из частоты.

Предположим, что переменный ток имеет составляющие высших порядков. Для такой составляющей n -го порядка вместо a будем иметь

$$a_n = a \sqrt{n},$$

следовательно, составляющие „затухают“ относительно тем сильнее, чем выше их порядок. Сильное „затухание“ ограничивает расстояние для передачи по кабелю

различных сигналов, например, речи в телефонных кабелях, ибо сильное затухание обертонов делает речь неясной.

Если к концу линии подключен аппарат, в котором отношение между

$\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$ равно как раз $\sqrt{\frac{\dot{Z}_{KM}}{\dot{Y}_{KM}}}$, то и в этой линии повсюду устанавливается это же самое постоянное отношение между напряжением и силой тока, и отраженная волна исчезает, ибо, как нетрудно видеть из уравнений (140,12), числитель в выражении для $\dot{A}_2$ равен при этом нулю.

Величину

$$\sqrt{\frac{\dot{Z}_{KM}}{\dot{Y}_{KM}}} = \sqrt{\frac{R_{KM} + j\omega L_{KM}}{G_{KM} + j\omega C_{KM}}} \quad (142,2)$$

часто называют „волновым“ сопротивлением линии.

Величина α характеризует или определяет величину затухания и, как показывает уравнение (140,10,1), где B_{KM} и X_{KM} зависят от частоты, тоже зависит от нее, а именно с ростом частоты растет; однако α изменяется и в зависимости от соотношений между величинами R_{KM} , X_{KM} , G_{KM} и B_{KM} , при этом, что особенно важно, наименьшая величина, которую α может иметь, не зависит от частоты.

Исследуем вопрос подробнее. Так как R_{KM} и G_{KM} должны быть вообще возможно меньшими, насколько это позволяет стоимость производства, то изменять в широких пределах мы можем только B_{KM} и X_{KM} . Эти величины входят в формулу для α совершенно симметрично. Найдем, при каком значении X_{KM} и, следовательно, L_{KM} имеет минимум величина α , или, что проще, подкоренное выражение в уравнении (140,10,1). Для этого производную от него по X_{KM} приравняем нулю, что дает

$$-B_{KM} + X_{KM} \frac{\sqrt{B_{KM}^2 + G_{KM}^2}}{\sqrt{R_{KM}^2 + X_{KM}^2}} = 0,$$

откуда

и наконец,

или

$$\left. \begin{aligned} \frac{X_{KM}^2}{B_{KM}^2} &= \frac{R_{KM}^2 + X_{KM}^2}{G_{KM}^2 + B_{KM}^2}, \\ \frac{X_{KM}}{B_{KM}} &= \frac{R_{KM}}{G_{KM}}, \\ \frac{L_{KM}}{C_{KM}} &= \frac{R_{KM}}{G_{KM}}. \end{aligned} \right\} \quad (142,3)$$

Такому соотношению должно удовлетворять X_{KM} или L_{KM} , чтобы α имело минимум, а что это будет именно минимум, видно из того, что вторая производная, равная

$$\frac{\sqrt{B_{KM}^2 + G_{KM}^2}}{\sqrt{R_{KM}^2 + X_{KM}^2}} - X_{KM}^2 \frac{\sqrt{B_{KM}^2 + G_{KM}^2}}{\sqrt{(R_{KM}^2 + X_{KM}^2)^3}} = \frac{Y_{KM}}{Z_{KM}} \left(1 - \frac{X_{KM}^2}{Z_{KM}^2} \right),$$

положительная (ибо $X_{KM} < Z_{KM}$). Преобразуя уравнение (140,10,1) на основании уравнений (142,3), получаем следующие выражения для минимального α , не зависящие от частоты:

$$\begin{aligned} \alpha_{\min} &= R_{KM} \sqrt{\frac{B_{KM}}{X_{KM}}} = R_{KM} \sqrt{\frac{G_{KM}}{R_{KM}}} = \sqrt{R_{KM} G_{KM}} = \\ &= G_{KM} \sqrt{\frac{X_{KM}}{B_{KM}}} = G_{KM} \sqrt{\frac{R_{KM}}{G_{KM}}}. \end{aligned}$$

Так как обыкновенно в телефонных кабелях $G_{км}$ очень мало, $R_{км}$ довольно значительно и $C_{км}$ тоже значительно, а $L_{км}$, как уже указывалось, очень мало, то для удовлетворения условия (142,3) надо $L_{км}$ увеличить искусственно.

Значение величины a для ясности речи и необходимость искусственного увеличения $L_{км}$ выяснил впервые Хивисайд. Пупин предложил для увеличения самоиндукции включать в кабель катушки и дал расчет необходимого числа их. По его теории, подтвержденной практикой, число катушек на длине одной волны не должно быть меньше шести; увеличение числа их свыше десяти на длине волны не приносит уже пользы. Таким образом в среднем одна катушка приходится на 1,5—3 km длины кабеля. Для воздушных проводов катушки располагаются реже ввиду меньшей емкости этих проводов сравнительно с кабелем. Описанным способом Пупин достиг значительного уменьшения затухания вышних составляющих тока и увеличения ясности речи.

При подключении к кабелю воздушных проводов нарушается указанное выше постоянство отношения между напряжением и силой тока, так как емкость кабеля больше таковой воздушного провода; включение катушки Пупина в кабель восстанавливает приблизительно постоянство этого отношения и тем улучшает работу линии.

Того же искусственного увеличения $L_{км}$ в кабеле Крауп предложил достигать обмоткой телефонного провода или жилы железной проволокой. Этот способ является, повидимому, не столь удобным ввиду добавочных потерь в железной проволоке, токов Фуко, искажающих ее действие, и пр.

§ 143. Замечание об электрическом расчете линий

Остановимся теперь на расчетах явлений в длинных линиях.

Если мы желаем по данным величинам, во-первых, нагрузки (U_2 , I_2 и ϕ) и, во-вторых, постоянных линий [см. уравнения (140,10)], вычислить $\dot{U}$ и $\dot{I}$ по величине и фазе в любой точке линии, например, вначале, то мы должны будем обратиться к уравнениям (140,14), которые для этого перепишем, освободившись от мнимости в показателе, как уже мы привыкли это делать. Ограничимся уравнением для $\dot{U}$:

$$\dot{U} = A_1 e^{+ax} [\cos(bx + \phi_1) + j \sin(bx + \phi_1)] + A_2 e^{-ax} [\cos(-bx + \phi_2) + j \sin(-bx + \phi_2)]$$

Здесь сначала мы должны вычислить A_1 , A_2 , ϕ_1 и ϕ_2 по уравнениям (140,12); затем, возвышая в квадрат действительную часть и множитель при j , складывая эти квадраты и извлекая из суммы квадратный корень, найдем амплитуду U , а деля множитель при j на действительную часть, найдем тангенс фазового угла $\dot{U}$ (относительно $(\dot{U}_2)$).

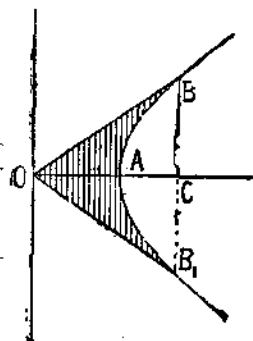
Подобным же образом определим $\dot{I}$.

В настоящее время для расчетов с длинными линиями часто употребляются гиперболические функции. Покажем кратко их происхождение, выведем основные зависимости для них и соотношения между ними и тригонометрическими функциями и, наконец, применим их для выражения соотношений в линии передачи.

§ 144. Гиперболические функции

В уравнении гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ положим $b = a$; уравнение приобретает простой вид: $x^2 - y^2 = a^2$. Пусть кривая $B_1 AB$ на фиг. 248 есть именно такая так называемая равнобокая гипербола; здесь $OA = a$, $OC = x$ и $BC = y$. По обычным правилам вычисления площадей криволинейных фигур определим заштрихованную

на чертеже площадь OB_1ABO как разность между площадью треугольника OB_1B и гиперболы; обозначая эту площадь через φ , имеем



Фиг. 248.

$$\varphi = xy - 2 \int_a^x y \cdot dx = xy - 2 \int_a^x \sqrt{x^2 - a^2} \cdot dx.$$

Так как

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - a^2} \, dx &= x \sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \\ &= x \sqrt{x^2 - a^2} - \left(\int \sqrt{x^2 - a^2} \cdot dx + \int \frac{a^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \right) = \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \int_a^x \sqrt{x^2 - a^2} \cdot dx &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + \\ &+ \frac{a^2}{2} \ln a = \frac{xy}{2} - \frac{a^2}{2} \ln \frac{x+y}{a}. \end{aligned}$$

Удвоив это выражение и вычитая его из xy , получаем

$$\varphi = a^2 \ln \frac{x+y}{a}.$$

Положим теперь a равным единице, т. е. пусть $OA = 1$, тогда

$$\varphi = \ln(x+y).$$

Отсюда следует, что

$$x+y = e^\varphi. \quad (I)$$

Определим из последнего уравнения x и подставим его выражение в уравнение гиперболы $x^2 - y^2 = 1$, после чего решим это уравнение относительно y и получим

$$y = \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{2}. \quad (II)$$

Отношение $\overline{BC}$ к $\overline{OA}$ называется гиперболическим синусом площади φ . Так как у нас $\overline{OA} = 1$, то $\overline{BC} = y$ и есть численно сам этот синус подобно линии синуса в круге с радиусом, равным единице. Обозначение введем такое:

$$y = \text{sh } \varphi. \quad (III)$$

Сопоставляя (II) и (III), получаем первое основное соотношение:

$$\text{sh } \varphi = \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{2}. \quad (IV)$$

Отношение $\overline{OC}$ к $\overline{OA}$ называется гиперболическим косинусом площади φ ; у нас $\overline{OC} = x$ численно и представляет этот косинус:

$$x = \text{ch } \varphi. \quad (V)$$

Сопоставляя (III) и (V) с уравнением гиперболы, имеем

$$\operatorname{ch}^2 \varphi - \operatorname{sh}^2 \varphi = 1 \quad (\text{VI})$$

второе основное соотношение.

Из (I), (III) и (V) имеем

$$\operatorname{sh} \varphi + \operatorname{ch} \varphi = e^{\varphi}. \quad (\text{VII})$$

Наконец, из (VII) и (IV) получаем

$$\operatorname{ch} \varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}. \quad (\text{VIII})$$

Отношение $\overline{BC}$ к $\overline{OC}$ называется гиперболическим тангенсом площади φ ; на основании предыдущего

$$\operatorname{th} \varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}. \quad (\text{IX})$$

Величину φ назовем и здесь аналогично теории тригонометрических функций аргументом.

Расширим понятие тригонометрических и гиперболических функций и введем мнимые аргументы — углы для первых, площади для вторых.

Нужно заметить следующее: при радиусе круга, равном единице, двойная площадь сектора с углом α равна α , поэтому и тригонометрические функции можно считать функциями площади α , — аналогия с гиперболическими функциями получается совершенная.

Связь между обоими видами функций можно установить с помощью формул Эйлера:

$$\cos \varphi + j \sin \varphi = e^{j\varphi},$$

$$\cos \varphi - j \sin \varphi = e^{-j\varphi},$$

из которых получаем

$$\sin \varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}, \quad (\text{M})$$

$$\cos \varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}. \quad (\text{N})$$

Сопоставляя последние два выражения (M) и (N) с выражениями (IV), (VIII) и (IX), можем написать следующие соотношения:

$$\sin \varphi = -j \operatorname{sh} (j\varphi), \quad (\text{X})$$

$$\cos \varphi = \operatorname{ch} (j\varphi), \quad (\text{XI})$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -j \operatorname{th} (j\varphi), \quad (\text{XII})$$

$$\sin (j\varphi) = j \operatorname{sh} \varphi, \quad (\text{XIII})$$

$$\cos (j\varphi) = \operatorname{ch} \varphi. \quad (\text{XIV})$$

Последние две формулы мы получим, введя в левых частях уравнений (M) и (N) мнимые аргументы, преобразовав соответственно их правые части и сравнив затем последние с (IV) и (VIII).

Рассмотрим еще, как выражаются гиперболические синус и косинус суммы двух аргументов.

Составим выражения:

$$\operatorname{sh} \varphi_1 \cdot \operatorname{ch} \varphi_2 = \frac{e^{\varphi_1} - e^{-\varphi_1}}{2} \cdot \frac{e^{\varphi_2} + e^{-\varphi_2}}{2} = \frac{e^{\varphi_1 + \varphi_2} - e^{-\varphi_1 + \varphi_2} + e^{\varphi_1 - \varphi_2} - e^{-(\varphi_1 + \varphi_2)}}{4}$$

и

$$\operatorname{ch} \varphi_1 \cdot \operatorname{sh} \varphi_2 = \frac{e^{\varphi_1} + e^{-\varphi_1}}{2} \cdot \frac{e^{\varphi_2} - e^{-\varphi_2}}{2} = \frac{e^{\varphi_1 + \varphi_2} + e^{-\varphi_1 + \varphi_2} - e^{\varphi_1 - \varphi_2} - e^{-(\varphi_1 + \varphi_2)}}{4}.$$

Сложив левые и правые части, будем иметь в правой части

$$\frac{e^{\varphi_1 + \varphi_2} - e^{-(\varphi_1 + \varphi_2)}}{2},$$

что, очевидно, может быть представлено как $\text{sh}(\varphi_1 + \varphi_2)$; приравнявая последнее сумме левых частей вышенаписанных выражений, имеем

$$\text{sh}(\varphi_1 + \varphi_2) = \text{sh} \varphi_1 \cdot \text{ch} \varphi_2 + \text{ch} \varphi_1 \cdot \text{sh} \varphi_2,$$

выражение, вполне соответствующее разложению синуса суммы двух углов в тригонометрии.

Составим далее выражения:

$$\text{ch} \varphi_1 \cdot \text{ch} \varphi_2 = \frac{e^{\varphi_1} + e^{-\varphi_1}}{2} \cdot \frac{e^{\varphi_2} + e^{-\varphi_2}}{2} = \frac{e^{\varphi_1 + \varphi_2} + e^{-\varphi_1 + \varphi_2} + e^{\varphi_1 - \varphi_2} + e^{-(\varphi_1 + \varphi_2)}}{4}$$

и

$$\text{sh} \varphi_1 \cdot \text{sh} \varphi_2 = \frac{e^{\varphi_1} - e^{-\varphi_1}}{2} \cdot \frac{e^{\varphi_2} - e^{-\varphi_2}}{2} = \frac{e^{\varphi_1 + \varphi_2} - e^{-\varphi_1 + \varphi_2} - e^{\varphi_1 - \varphi_2} + e^{-(\varphi_1 + \varphi_2)}}{4}.$$

Сложив, получим в правой части

$$\frac{e^{\varphi_1 + \varphi_2} + e^{-(\varphi_1 + \varphi_2)}}{2},$$

т. е. $\text{ch}(\varphi_1 + \varphi_2)$; таким образом получаем

$$\text{ch}(\varphi_1 + \varphi_2) = \text{ch} \varphi_1 \cdot \text{ch} \varphi_2 + \text{sh} \varphi_1 \cdot \text{sh} \varphi_2$$

формулу, отличающуюся от соответствующей тригонометрической знаком плюс перед произведением синусов.

Один или оба аргумента в этих формулах могут быть и мнимыми, как в формулах (X) — (XII).

А. Е. Кенелли разработал очень простые приемы геометрического построения гиперболических синуса и косинуса комплексных аргументов; существуют и таблицы для этих величин, которые помогают упростить вычисления.

Гиперболические синус и косинус комплексного аргумента можно представить и в виде комплексов, именно следующим образом:

Пусть нам приходится оперировать с величиной

$$\text{sh}(p + jq).$$

Преобразуем это выражение

$$\text{sh}(p + jq) = \text{sh} p \cdot \text{ch}(jq) + \text{ch} p \cdot \text{sh}(jq),$$

или, принимая во внимание формулы (X) и (XI):

$$\text{sh}(p + jq) = \text{sh} p \cdot \cos q + j \text{ch} p \cdot \sin q.$$

Последнее выражение есть комплекс, модуль которого выразим, принимая во внимание (VI), так:

$$\sqrt{\text{sh}^2 p \cdot \cos^2 q + \text{ch}^2 p \cdot \sin^2 q} = \sqrt{\text{sh}^2 p + \sin^2 q} = \sqrt{\text{ch}^2 p - \cos^2 q},$$

а аргумент есть

$$\text{arc tg} \frac{\text{ch} p \cdot \sin q}{\text{sh} p \cdot \cos q}.$$

Таким образом

$$\left. \begin{aligned} \text{sh}(p + jq) &= \sqrt{\text{sh}^2 p + \sin^2 q} \cdot e^{j \cdot \text{arc tg} [\text{ch} p \cdot \text{tg} q]} = \\ &= \sqrt{\text{ch}^2 p - \cos^2 q} \cdot e^{j \cdot \text{arc tg} [\text{ch} p \cdot \text{tg} q]}. \end{aligned} \right\} \quad (144,1)$$

Аналогично найдем

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ch}(p+jq) &= \operatorname{ch} p \cdot \operatorname{ch}(jq) + \operatorname{sh} p \cdot \operatorname{sh}(jq) = \\ &= \operatorname{ch} p \cdot \cos q + j \cdot \operatorname{sh} p \cdot \sin q = \\ &= \sqrt{\operatorname{ch}^2 p - \sin^2 q} \cdot e^{j \cdot \arctg(\operatorname{th} p \cdot \operatorname{tg} q)} = \\ &= \sqrt{\operatorname{sh}^2 p + \cos^2 q} \cdot e^{j \cdot \arctg(\operatorname{th} p \cdot \operatorname{tg} q)}. \end{aligned} \right\} \quad (144,2)$$

§ 145. Уравнения линии передачи в гиперболических функциях

С помощью предыдущих формул мы можем ввести в теорию линии передачи гиперболические функции.

Обратимся к уравнению (140,6); подставим в него вместо $\dot{A}_1$ и $\dot{A}_2$ их выражения (140,12) через вторичное напряжение и вторичную силу тока и преобразуем уравнение, как следует ниже:

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \frac{e^{+mx} + e^{-mx}}{2} + i_2 \sqrt{\frac{\dot{Z}_{\kappa\kappa}}{\dot{Y}_{\kappa\kappa}}} \frac{e^{+mx} - e^{-mx}}{2}$$

или

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \operatorname{ch}(mx) + i_2 \sqrt{\frac{\dot{Z}_{\kappa\kappa}}{\dot{Y}_{\kappa\kappa}}} \cdot \operatorname{sh}(mx). \quad (145,1)$$

Так как $i = \frac{1}{\dot{Z}_{\kappa\kappa}} \frac{d\dot{U}}{dx}$, то, подставляя для $\dot{U}$ его первое выражение в настоящем параграфе, получаем

$$i = \dot{U}_2 \frac{m}{\dot{Z}_{\kappa\kappa}} \left(\frac{e^{+mx} - e^{-mx}}{2} \right) + i_2 \sqrt{\frac{\dot{Z}_{\kappa\kappa}}{\dot{Y}_{\kappa\kappa}}} \frac{m}{\dot{Z}_{\kappa\kappa}} \left(\frac{e^{+mx} + e^{-mx}}{2} \right),$$

или

$$i = i_2 \operatorname{ch}(mx) + \dot{U}_2 \sqrt{\frac{\dot{Y}_{\kappa\kappa}}{\dot{Z}_{\kappa\kappa}}} \operatorname{sh}(mx). \quad (145,2)$$

Уравнения (145,1) и (145,2) являются наиболее часто встречающейся формой выражений $\dot{U}$ и i .

$\operatorname{sh}(mx)$ и $\operatorname{ch}(mx)$ должны быть вычисляемы при этом по формулам (144,1) и (144,2).

В некоторых случаях могут быть нам даны не $\dot{U}_2$ и i_2 , а соответствующие первичные величины $\dot{U}_1$ и i_1 .

В этом случае, очевидно, удобнее исходить из отсчета расстояния x не от конца линии, а от начала.

Уравнения (137,1) и (137,2) в этом случае, как легко видеть, будут иметь каждое знак минус перед одной из частей; после же исключения из каждого уравнения одного из неизвестных путем дифференцирования и подстановки, мы получим уравнения, тождественные с уравнениями (140,1) и (140,2).

Дальнейший ход решения, преобразований и исследования совершенно подобен изложенному выше; единственная разница будет вызвана упомянутым отличием новых формул для du и di от прежних в знаках, вследствие чего i определится как

$$i = -\frac{1}{\dot{Z}_{\kappa\kappa}} \frac{d\dot{U}}{dx}.$$

Поэтому вместо уравнений (140,11) будем иметь

$$\dot{U} = \dot{A}_1 e^{ax} [\cos(bx) + j \sin(bx)] + \dot{A}_2 e^{-ax} [\cos(bx) - j \sin(bx)],$$

$$\dot{I} = \sqrt{\frac{\dot{Y}_{KM}}{\dot{Z}_{KM}}} \left\{ -\dot{A}_1 e^{ax} [\cos(bx) + j \sin(bx)] + \right. \\ \left. + \dot{A}_2 e^{-ax} [\cos(bx) - j \sin(bx)] \right\}.$$

Для определения постоянных $\dot{A}_1$ и $\dot{A}_2$ будут служить условия у начала линии, т. е. где $x=0$; поэтому

$$\dot{U}_1 = \dot{A}_1 + \dot{A}_2, \\ \dot{I}_1 = \sqrt{\frac{\dot{Y}_{KM}}{\dot{Z}_{KM}}} \cdot (\dot{A}_2 - \dot{A}_1).$$

Окончательный результат в гиперболических функциях будет таков:

$$U = \dot{U}_1 \operatorname{ch}(mx) - \dot{I}_1 \sqrt{\frac{\dot{Z}_{KM}}{\dot{Y}_{KM}}} \cdot \operatorname{sh}(mx),$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 \operatorname{ch}(mx) - \dot{U}_1 \sqrt{\frac{\dot{Y}_{KM}}{\dot{Z}_{KM}}} \cdot \operatorname{sh}(mx).$$

Уравнения (145,1) и (145,2) обычно полагают в основу расчета длинных линий передач.

Часто довольствуются и приближенным расчетом, разлагая в этих уравнениях гиперболические функции в ряды, как показано ниже, и беря из этих рядов лишь первые члены.

§ 146. Формулы для приближенного расчета линий. Замечания о расчете трехфазной линии. Примеры.

При расчетах с линиями передачи, например, когда нам нужно найти первичное напряжение и первичную силу тока по данным вторичным, мы можем или найти $\operatorname{ch}(ml)$ и $\operatorname{sh}(ml)$ в таблицах, или вычислить их по формулам (144,1) и (144,2), или, наконец, когда можно ограничиться приближенным подсчетом, заменить их приближенными выражениями на основании разложения этих функций в ряды, как мы и покажем теперь.

Так как

$$e^{\varphi} = 1 + \varphi + \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \dots$$

$$e^{-\varphi} = 1 - \varphi + \frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^5}{5!} + \dots$$

$$\operatorname{sh}(mx) = \frac{e^{mx} - e^{-mx}}{2} = mx + \frac{(mx)^3}{3!} + \frac{(mx)^5}{5!} + \dots$$

$$\operatorname{ch}(mx) = \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{2} = 1 + \frac{(mx)^2}{2} + \frac{(mx)^4}{4!} + \dots$$

Подставляя вместо m его значение

$$V \sqrt{\dot{Y}_{KM} \dot{Z}_{KM}},$$

а вместо $m x$ величину

$$x V \sqrt{\dot{Y}_{KM} \dot{Z}_{KM}} = V \sqrt{\dot{Y} \dot{Z}},$$

где $\dot{Y}$ и $\dot{Z}$ есть проводимость и сопротивление всего участка линии длиной x от конца ее, получим вместо уравнения (145,1) следующее:

$$\begin{aligned} \dot{U} = \dot{U}_2 \left[1 + \frac{\dot{Y} \dot{Z}}{2} + \frac{(\dot{Y} \dot{Z})^2}{4!} + \dots \right] + \\ + I_2 \sqrt{\frac{\dot{Z}_{KM}}{\dot{Y}_{KM}}} \left[V \sqrt{\dot{Y} \dot{Z}} + \frac{(V \sqrt{\dot{Y} \dot{Z}})^3}{3!} + \frac{(V \sqrt{\dot{Y} \dot{Z}})^5}{5!} + \dots \right] \end{aligned}$$

и вместо (145,2) — соответствующее уравнение для силы тока i .

Вынося из вторых прямых скобок $V \sqrt{\dot{Y} \dot{Z}}$, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} = \dot{U}_2 \left[1 + \frac{\dot{Y} \dot{Z}}{2} + \frac{(\dot{Y} \dot{Z})^2}{4!} + \dots \right] + \\ + i_2 \dot{Z} \left[1 + \frac{\dot{Y} \dot{Z}}{3!} + \frac{(\dot{Y} \dot{Z})^2}{5!} + \dots \right] \\ i = i_2 \left[1 + \frac{\dot{Y} \dot{Z}}{2} + \frac{(\dot{Y} \dot{Z})^2}{4!} + \dots \right] + \\ + \dot{U}_2 \dot{Y} \left[1 + \frac{\dot{Y} \dot{Z}}{3!} + \frac{(\dot{Y} \dot{Z})^2}{5!} + \dots \right] \end{aligned} \right\} \quad (146,1)$$

Обычно при расчетах возможно ограничиться приведенными членами вследствие малости остальных.

Следует напомнить читателю, что вся изложенная здесь теория линии передачи энергии основана на допущении, сформулированном вначале, именно, что емкость, индуктивность, утечка и пр. распределены по линии равномерно. В действительности это условие осуществляется лишь с большим или меньшим приближением; в частности, все места линии, где находятся опоры для проводов, представляют места нарушения, большего или меньшего, указанной равномерности.

Пример 60. Дана линия с постоянными $L_{KM} = 2,1 \cdot 10^{-3}$ H/km; $R_{KM} = 0,2$ Ω/km; $C_{KM} = 0,0053 \cdot 10^{-6}$ F/km; $G_{KM} = 1 \cdot 10^{-8}$ S/km; $f = 50$ Hz; $e = 240$ km; $U_2 = 110\,000$ В и $\cos \varphi_2 = 0,8$ (нагрузка индукционная).

Определить $\dot{U}_1$, i_1 , $\cos \varphi$ в начале линии и к. п. д. η в зависимости от вторичной мощности P_2 .

В начале линии

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \operatorname{ch}(ml) + i_2 \sqrt{\frac{\dot{Z}_{KM}}{\dot{Y}_{KM}}} \operatorname{sh}(ml),$$

$$i_1 = i_2 \operatorname{ch}(ml) + \dot{U}_2 \sqrt{\frac{\dot{Y}_{KM}}{\dot{Z}_{KM}}} \operatorname{sh}(ml)$$

Вычисляем:

$$X_{KM} = \omega L_{KM} = 314 \cdot 2,1 \cdot 10^{-8} = 0,66; \quad \dot{Z}_{KM} = R_{KM} + jX_{KM} = 0,2 + j0,66 = 0,69 e^{j73,3^\circ}.$$

$$B_{KM} = \omega C_{KM} = 314 \cdot 0,0053 \cdot 10^{-6} = 1,67 \cdot 10^{-6}; \quad \dot{Y}_{KM} = G_{KM} + jB_{KM} = 0,01 \cdot 10^{-6} + j1,67 \cdot 10^{-6} = 1,67 \cdot 10^{-6} e^{j89,65^\circ},$$

$$\sqrt{\frac{\dot{Z}_{KM}}{\dot{Y}_{KM}}} = \sqrt{\frac{0,69 e^{j73,3^\circ}}{1,67 \cdot 10^{-6} e^{j89,65^\circ}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{0,69}{1,67 \cdot 10^{-6}} \cdot e^{j \frac{73,3^\circ - 89,65^\circ}{2}}} = 643 e^{-j8,18^\circ},$$

$$\sqrt{\frac{\dot{Y}_{KM}}{\dot{Z}_{KM}}} = \frac{1}{643 \cdot e^{-j8,18^\circ}} = 1,554 \cdot 10^{-3} e^{j8,13^\circ},$$

$$a = \sqrt{\frac{1}{2} (0,2 \cdot 10^{-8} - 0,66 \cdot 1,67 \cdot 10^{-6} + 0,69 \cdot 1,67 \cdot 10^{-6})} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 5,21 \cdot 10^{-8}} = 0,1615 \cdot 10^{-3},$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{2} (0,66 \cdot 1,67 \cdot 10^{-6} - 0,2 \cdot 10^{-8} + 0,69 \cdot 1,67 \cdot 10^{-6})} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 2,232 \cdot 10^{-6}} = 1,061 \cdot 10^{-3},$$

$$m = a + jb = (0,1615 + j1,061) \cdot 10^{-3},$$

$$ml = (0,1615 + j1,061) \cdot 10^{-3} \cdot 250 = 0,0404 + j0,2652.$$

По номограммам гиперболических функций находим:

$$\operatorname{ch}(ml) = \operatorname{ch}(0,0404 + j0,2652) = 0,9555 + j0,0107 = 0,9655 \cdot e^{j0,68^\circ},$$

$$\operatorname{sh}(ml) = \operatorname{sh}(0,0404 + j0,2652) = 0,0315 + j0,2500 = 0,263 \cdot e^{j81,5^\circ}.$$

$$\dot{U}_1 = 110 \cdot 10^3 \cdot 0,9655 \cdot e^{j0,68^\circ} + \dot{I}_2 \cdot 643 \cdot e^{-j8,18^\circ} \cdot 0,263 \cdot e^{j81,5^\circ} =$$

$$= 106 \cdot 200 \cdot e^{j0,68^\circ} + \dot{I}_2 \cdot 169 \cdot e^{j73,22^\circ}.$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 \cdot 0,9655 \cdot e^{j0,68^\circ} + 110 \cdot 10^3 \cdot 1,554 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j0,8^\circ} \cdot 0,263 \cdot e^{j81,5^\circ} =$$

$$= 45 \cdot e^{j89,68^\circ} + \dot{I}_2 \cdot 0,9655 \cdot e^{j0,68^\circ}.$$

Выразим $\dot{I}_2$ через вторичную мощность:

$$\dot{I}_2 = \frac{P_2}{U_2 \cos \varphi_2} = \frac{P_2}{110 \cdot 10^3 \cdot 0,8} = 11,36 \cdot 10^{-4} P_2,$$

$$\varphi_2 = \arccos 0,8 = 36,87^\circ.$$

Направляем $\dot{U}_2$ по вертикальной оси, тогда

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_2 e^{-j\varphi_2} = P_2 \cdot 11,36 \cdot 10^{-4} \cdot e^{j36,87^\circ}.$$

$$\dot{U}_1 = 106 \cdot 200 \cdot e^{j0,68^\circ} + P_2 \cdot 11,36 \cdot 10^{-4} \cdot e^{j-36,87^\circ} \cdot 169 \cdot e^{j73,32^\circ} = 106 \cdot 200 \cdot e^{j0,68^\circ} +$$

$$+ P_2 \cdot 1920 \cdot 10^{-6} \cdot e^{j36,45^\circ}.$$

$$\dot{I}_1 = 45 \cdot e^{j89,68^\circ} + P_2 \cdot 11,36 \cdot 10^{-4} \cdot e^{-j33,87^\circ} \cdot 0,9655 \cdot e^{j0,68^\circ} = 45 \cdot e^{j89,68^\circ} +$$

$$+ P_2 \cdot 10,98 \cdot 10^{-6} \cdot e^{-j33,19^\circ}.$$

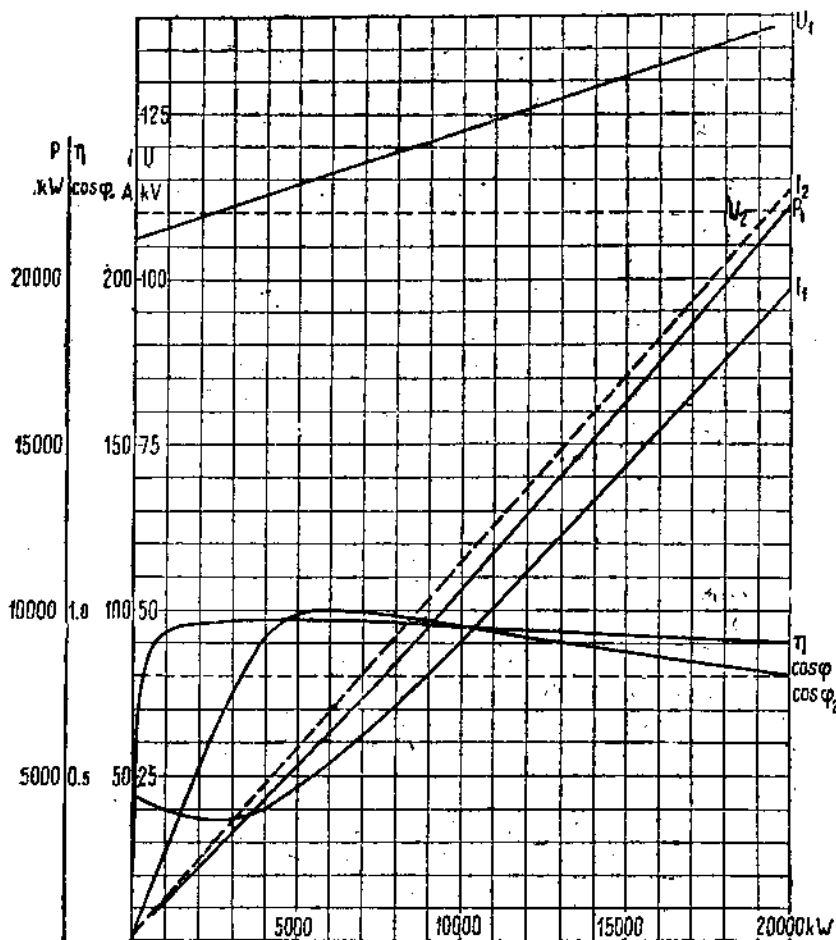
Подставляя в эти формулы различные значения P_2 и вычисляя модуль U_1 , I_1 и P_1 , получим таблицу зависимости U_1 , I_1 , P_1 , $\cos \varphi_1$ и η . Читателю следует проверить несколько точек графика, данного на фиг. 249.

Предыдущая теория относится к двум проводам, по которым течет простой переменный ток. В настоящее время передача энергии совершается исключительно трехфазным током. Если три провода линии удалены друг от друга на одинаковое расстояние, т. е. расположены в вершинах правильного треугольника, то самоиндукция, взаимная индукция и емкость относительно друг друга всех их одинакова, только емкость их по отношению к земле несколько разная.

В этом случае представляют себе четвертый нейтральный провод и изложенную выше теорию прилагают к линии, состоящей из одного фазового провода и ней-

трального, беря соответствующие этому расположению постоянные $R_{км}$, $L_{км}$, $C_{км}$ и $G_{км}$.

Когда линия еще только рассчитывается, мы определим сначала эти постоянные по правилам, излагаемым в специальных курсах (исключая $G_{км}$ — утечку, которой приходится задаться на основании эмпирических данных), затем из формул (147,2) и (147,4) вычисляем $\dot{Y}_0$ и $\dot{Z}_0$ и, принимая во внимание соотношение (147,11),



Фиг. 219.

определяющее $\dot{C}$, по формулам (148,3) и (148,4), вычисляем элементы эквивалентной схемы.

В случае несимметричной нагрузки трехфазной линии мы соединяем в звезду три эквивалентных схемы и, отбросив нейтральный провод, решаем задачу о напряжениях, силах токов и пр. так, как указано в главе о трехфазном токе.

Пример 61. Дана трехфазная линия длиной $l=500$ км с симметричным расположением проводов по углам равностороннего треугольника. Расстояние между проводами $D=430$ см. В качестве провода взят медный кабель, внешний диаметр которого равен $2r=15,8$ мм. Сопротивление кабеля $R_0=0,12$ Ω/км. Линейное напряжение в конце линии $U_2=220$ кВ, мощность, потребляемая приемником тока при начале эксплуатации линии, составляет лишь $P_2=40\,000$ кВт при $\cos \varphi_2=0,85$. Частота $\nu=50$ Hz. Определить режим у генератора и на конце линии при холостом ходе и указанной нагрузке.

Постоянные линии нам известны:

$$L_{\text{км}} = \left(2 \ln \frac{D}{r} + 0,5 \right) \cdot 10^{-4} \text{ генри/км} = \left(2 \cdot \ln \frac{430}{0,79} + 0,5 \right) \cdot 10^{-4} = \\ = (2 \cdot 6,3 + 0,5) \cdot 10^{-4} = 1,31 \cdot 10^{-3} \text{ Н/км}, \\ C_{\text{км}} = \frac{1}{21} \cdot \frac{1}{D} \cdot \frac{1}{9 \cdot 10^9} \text{ фарад/км} = \frac{10^{-6}}{12,6 \cdot 9} = 0,00883 \cdot 10^{-6} \text{ Ф/км}.$$

Таковы величины самоиндукции и емкости на 1 км длины для каждого отдельного провода (не для двух как в предыдущем примере).

Таким образом для каждой фазы линии имеем:

$$R_{\text{км}} = 0,12 \text{ Ом/км}; X_{\text{км}} = \omega L_{\text{км}} = 314 \cdot 1,31 \cdot 10^{-3} = 0,412 \text{ Ом/км}; \\ Z_{\text{км}} = 0,12 + j0,412 = 0,429 e^{j73^\circ 45'}.$$

Активная проводимость (или утечкой) вследствие ее малости пренебрегаем, так что $G_{\text{км}} = 0$,

$$B_{\text{км}} = \omega C_{\text{км}} = 3 \cdot 4 \cdot 0,00883 \cdot 10^{-6} = 2,77 \cdot 10^{-6}, \\ Y_{\text{км}} + G_{\text{км}} + jB_{\text{км}} = j2,77 \cdot 10^{-6} = 2,77 \cdot 10^{-6} e^{j90^\circ}.$$

Далее, для всей длины линии

$$Z = Z_{\text{км}} l = (0,12 + j0,412) \cdot 500 = 60 + j206 = 214,5 e^{j73^\circ 45'} \text{ Ом}, \\ Y = Y_{\text{км}} l = j2,77 \cdot 10^{-6} \cdot 500 = j1,385 \cdot 10^{-3} = 1,385 \cdot 10^{-3} e^{j90^\circ} \text{ омв}.$$

Фазовое напряжение в нагрузке (или в приемнике) равно

$$U_{2\phi} = \frac{220\,000}{\sqrt{3}} = 127\,000 \text{ В}.$$

Линейная сила тока у приемника

$$I_2 = \frac{P_2}{\sqrt{3} U_2 \cos \varphi_2} = \frac{40\,000}{\sqrt{3} \cdot 220 \cdot 0,85} = 123,7 \text{ А}.$$

Направим $\dot{U}_{2\phi}$ по вертикали, тогда $\dot{U}_{2\phi} = 127\,000 \text{ В}$ и

$$\dot{I}_2 = 123,7 e^{-j \arccos 0,85} = 123,7 e^{-31^\circ 47'}.$$

Для определения фазового напряжения $\dot{U}_{1\phi}$ и силы тока $\dot{I}_1$ в начале линии воспользуемся приближенным методом расчета и вышеприведенным разложением $\dot{U}$ и $\dot{I}$ в ряды.

$$\dot{Y} \cdot \dot{Z} = 1,385 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j90^\circ} \cdot 214,5 e^{j73^\circ 45'} = 0,297 \cdot e^{-j163^\circ 45'}, \\ (\dot{Y} \cdot \dot{Z})^2 = 0,0883 \cdot e^{-j327^\circ 30'},$$

так как

$$2 \cdot 163^\circ 45' = 327^\circ 30' = 360^\circ - 32^\circ 30'.$$

В разложении ограничимся лишь тремя членами.

Вычислим выражения, стоящие в квадратных скобках в формуле (146,1):

$$\begin{aligned} \dot{A} &= 1 + \frac{\dot{Y}\dot{Z}}{2} + \frac{(\dot{Y}\dot{Z})^2}{4!} = 1 + \frac{0,297}{2} e^{j163^\circ 45'} + \frac{0,0883}{2 \cdot 3 \cdot 4} e^{-j327^\circ 30'} = \\ &= 1 - 0,1425 + j0,0416 + 0,0031 - j0,0020 = 0,8606 + j0,0396 = 0,851 e^{j2^\circ 48'}, \\ \dot{B} &= 1 + \frac{\dot{Y}\dot{Z}}{3!} + \frac{(\dot{Y}\dot{Z})^2}{5!} = 1 + \frac{0,297}{2 \cdot 3} e^{j163^\circ 45'} + \frac{0,0883}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} e^{-j327^\circ 30'} = \\ &= 1 - 0,0475 + j0,0139 + 0,0006 - j0,0004 = 0,9531 + j0,0135 = 0,953 e^{j0^\circ 48'}, \\ \dot{U}_{1\phi} &= \dot{U}_{2\phi} \dot{A} + \dot{I}_2 \dot{Z} \dot{B} = 127\,000 \cdot 0,861 e^{j2^\circ 48'} + \\ &+ 123,7 e^{-j31^\circ 47'} \cdot 214,5 e^{j73^\circ 45'} \cdot 0,953 \cdot e^{j0^\circ 48'} = 109\,200 \cdot e^{j2^\circ 48'} + \\ &+ 25\,300 \cdot e^{j42^\circ 48'} = 109\,200 + j1\,720 + 18\,510 + j17\,180 = 127\,610 + j18\,900 = 128\,500 e^{j8^\circ 25'}, \\ \dot{I}_1 &= \dot{I}_2 \dot{A} + \dot{U}_{2\phi} \dot{Y} \dot{B} = 123,7 e^{-j31^\circ 47'} \cdot 0,861 e^{j2^\circ 48'} + \\ &+ 127\,000 \cdot 1,385 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j90^\circ} \cdot 0,953 \cdot e^{j0^\circ 48'} = 107,2 e^{-j29^\circ 7'} + 167,2 e^{j9^\circ 48'} = \\ &= 93,6 - j52,2 - 2,34 + j167,2 = 91,3 + j115 = 146,8 e^{j51^\circ 32'}. \end{aligned}$$

При холостом ходе $I_2 = 0$ и $\dot{U}_{1\phi} = 109\,200 e^{j2^\circ 48'}$, а $\dot{I}_1 = 167,2 e^{j9^\circ 48'}$.

Все вычисленные величины можем свести в таблицу.

Холостой ход	Нагрузка $P_2 = 40\,000\text{ kW}$
$\dot{U}_{1\phi} = 109\,200\text{ e}^{j2^\circ 10'}$	$\dot{U}_{1\phi} = 128,5\text{ e}^{j8^\circ 28'}$
$\dot{U}_{2\phi} = 127\,000$	$\dot{U}_{2\phi} = 127\,000$
$I_1 = 167,2\text{ e}^{j90^\circ 45'}$	$I_1 = 146,8\text{ e}^{j91^\circ 33'}$
$I_2 = 0$	$I_2 = 123,7\text{ e}^{j31^\circ 27'}$
$\varphi_2 = -$	$\varphi_2 = -31^\circ 47'$
$\varphi_1 = +83^\circ 8'$	$\varphi_1 = +43^\circ 27'$
$\cos \varphi_1 = 0,0325$	$\cos \varphi_1 = 0,73$
$P_1 = 1\,760\text{ kW}$	$P_1 = 41\,300\text{ kW}$
$\eta =$	$\eta = 96,8\%$

Как видим, и при указанной нагрузке ток I_1 в начале линии опережает напряжение. Читателю предлагается проделать вычисление всех этих же величин при нагрузке $P_2 = 80\,000\text{ kW}$.

§ 147. Определение постоянных линий

Перейдем теперь к опытному исследованию линии передачи энергии.

Аналогично тому, как в главе XV для экспериментального исследования были введены новые постоянные, введем новые постоянные и здесь для удобства экспериментального исследования линии передачи. Само это исследование состоит из двух опытов — холостого хода и короткого замыкания.

Обратимся сначала к холостому ходу.

Зададимся величиной вторичного напряжения U_2 ; при этом $I_2 = 0$. Измерим первичную мощность P_0 , первичное напряжение U_{10} и первичную, т. е. у начала линии, силу тока I_{10} .

Положив в уравнениях (145,1) и (145,2) $x = l$, получим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{10} &= \dot{U}_2 \operatorname{ch}(ml), \\ I_{10} &= \dot{U}_2 \sqrt{\frac{\dot{Y}_{\kappa\kappa}}{\dot{Z}_{\kappa\kappa}}} \operatorname{sh}(ml). \end{aligned} \right\} \quad (147,1)$$

Введем, как и прежде, величину $\dot{Y}_0$:

$$\dot{Y}_0 = Y_0 \cdot e^{j\varphi_0} = \frac{I_{10}}{U_{10}} = \frac{\operatorname{sh}(ml)}{\operatorname{ch}(ml)} \cdot \sqrt{\frac{\dot{Y}_{\kappa\kappa}}{\dot{Z}_{\kappa\kappa}}} = \sqrt{\frac{\dot{Y}_{\kappa\kappa}}{\dot{Z}_{\kappa\kappa}}} \operatorname{th}(ml). \quad (147,2)$$

Здесь $Y_0 = \frac{I_{10}}{U_{10}}$, а φ_0 определяется из соотношения

$$\cos \varphi_0 = \frac{P_0}{U_{10} I_{10}},$$

таким образом $\dot{Y}_0$ нам вполне известно.

Переходим к опыту короткого замыкания.

В этом случае $U_2 = 0$, а I_2 — сила тока у конца линии — имеет заданную величину. Измеряем U_{1k} , I_{1k} и мощность P_k .

Из уравнения (145,1) и (145,2) имеем при этом:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{1k} &= I_2 \sqrt{\frac{\dot{Z}_{\kappa\kappa}}{\dot{Y}_{\kappa\kappa}}} \operatorname{sh}(ml), \\ I_{1k} &= I_2 \operatorname{ch}(ml). \end{aligned} \right\} \quad (147,3)$$

Введем опять величину $\dot{Z}_k$:

$$\dot{Z}_k = Z_k e^{j\varphi_k} = \frac{U_{1k}}{I_{1k}} = \sqrt{\frac{\dot{Z}_{\kappa\kappa}}{Y_{\kappa\kappa}}} \operatorname{th}(ml), \quad (147,4)$$

причем $Z_k = \frac{U_{1k}}{I_{1k}}$, а φ_k определяется из соотношения

$$\cos \varphi_k = \frac{P_k}{U_{1k} I_{1k}}.$$

Из уравнений (147,2) и (147,4) перемножением получаем

$$\operatorname{th}(ml) = \sqrt{Y_0 \dot{Z}_k}, \quad (147,5)$$

а после деления уравнения (147,4) на (147,2) имеем

$$\sqrt{\frac{\dot{Z}_{\kappa\kappa}}{Y_{\kappa\kappa}}} = \sqrt{\frac{\dot{Z}_k}{Y_0}} = \sqrt{\frac{\dot{Z}_k}{Y_0}} e^{\frac{j(\varphi_k - \varphi_0)}{2}}. \quad (147,6)$$

Теперь можно поставить задачу об определении $m = a + jb$.

Применяя формулу (144,IX), получаем из уравнения (147,5)

$$\sqrt{Y_0 \dot{Z}_k} = \frac{e^{ml} - e^{-ml}}{e^{ml} + e^{-ml}} = \frac{e^{2ml} - 1}{e^{2ml} + 1},$$

откуда

$$e^{2ml} = \frac{1 + \sqrt{Y_0 \dot{Z}_k}}{1 - \sqrt{Y_0 \dot{Z}_k}}. \quad (147,7)$$

Раскроем символическую форму

$$\begin{aligned} \sqrt{Y_0 \dot{Z}_k} &= \sqrt{Y_0 Z_k} e^{\frac{j(\varphi_0 + \varphi_k)}{2}} = \\ &= \sqrt{Y_0 Z_k} \left[\cos \left(\frac{\varphi_0 + \varphi_k}{2} \right) + j \sin \left(\frac{\varphi_0 + \varphi_k}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Подставим это выражение в уравнение (147,7) и избавимся от мнимости в знаменателе:

$$e^{2ml} = \frac{1 - Y_0 Z_k + 2j\sqrt{Y_0 Z_k} \sin \left(\frac{\varphi_0 + \varphi_k}{2} \right)}{1 + Y_0 Z_k - 2j\sqrt{Y_0 Z_k} \cos \left(\frac{\varphi_0 - \varphi_k}{2} \right)}. \quad (147,8)$$

Так как

$$e^{2ml} = e^{2(a+jb)l} = e^{2al} [\cos(2bl) + j \sin(2bl)], \quad (a)$$

то можно приравнять друг другу мнимые части на правой и левой сторонах уравнения (147,8) и действительные.

Делением первого равенства на второе получим, очевидно,

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(2bl) &= \frac{2\sqrt{Y_0 Z_k} \sin \left(\frac{\varphi_0 + \varphi_k}{2} \right)}{1 - Y_0 Z_k} = k, \\ b &= \frac{1}{2l} \operatorname{arc} \operatorname{tg} k. \end{aligned} \right\} \quad (147,9)$$

откуда

Так как e^{2al} есть модуль выражения e^{2ml} , что видно из разложения (а), то, возводя в квадрат и складывая действительную часть и множитель при j в правой стороне уравнения (147,8), мы получим квадрат этого модуля; поэтому

$$e^{2al} = \frac{\sqrt{(1 - Y_0 Z_k)^2 + 4 Y_0 Z_k \sin^2 \left(\frac{\varphi_0 + \varphi_k}{2} \right)}}{1 + Y_0 Z_k - 2 \sqrt{Y_0 Z_k} \cos \left(\frac{\varphi_0 + \varphi_k}{2} \right)} = f, \quad (147,10)$$

откуда

$$a = \frac{1}{2l} \ln f.$$

На основании известного нам уже принципа наложения мы можем из состояний холостой работы линии и короткого замыкания получить состояние любой нагрузки, так как уравнения (147,1) и (147,3) линейны.

Из этих уравнений прежде всего находим

$$\frac{\dot{U}_0}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{I}_{1k}}{\dot{I}_2} = \operatorname{ch}(ml) = \dot{C}. \quad (147,11)$$

Сравним эти отношения с уравнениями (129,4) и (129,6).

Мы видим, что первое из отношений (147,11) равнялось $\dot{C}$, а второе — $\dot{C}_k$; для линии передачи энергии получается $\dot{C} = \dot{C}_k$, как будто имеет место равенство

$$\dot{Z}_1 = \dot{Z}'_{2 \text{ ну}}. \quad (147,12)$$

Определить $\dot{C}$ всего проще можно так: из уравнения (147,5) имеем

$$\dot{Y}_0 \dot{Z}_k = \operatorname{th}^2(ml) = \frac{\operatorname{sh}^2(ml)}{\operatorname{ch}^2(ml)}.$$

Пользуясь соотношением (144,VI), можем написать

$$\dot{Y}_0 \dot{Z}_k = \frac{\operatorname{ch}^2(ml) - 1}{\operatorname{ch}^2(ml)} = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2(ml)},$$

или

$$\dot{Y}_0 \dot{Z}_k = 1 - \frac{1}{(\dot{C})^2},$$

откуда

$$\dot{C} = \sqrt{\frac{1}{1 - \dot{Y}_0 \dot{Z}_k}}. \quad (147,13)$$

Таким образом по известным уже $\dot{Y}_0$ и $\dot{Z}_k$ определяем и $\dot{C}$.

Из уравнения (147,11) мы имеем

$$U_{10} = \dot{U}_2 \dot{C} \text{ и } I_{1k} = \dot{I}_2 \dot{C};$$

из (147,4)

$$U_{1k} = \dot{I}_{1k} \dot{Z}_k = \dot{I}_2 \dot{C} \dot{Z}_k;$$

из (147,2)

$$\dot{I}_{10} = \dot{U}_{10} \dot{Y}_0 = \dot{U}_2 \dot{C} \dot{Y}_0.$$

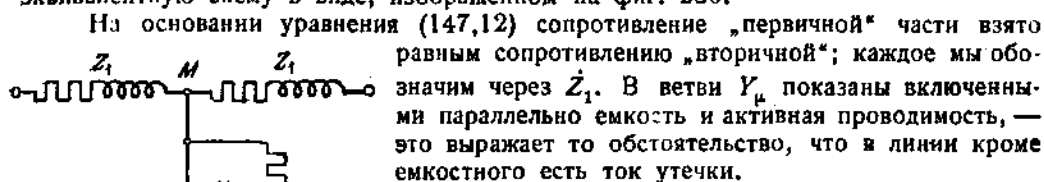
На основании принципа наложения

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_{10} + \dot{U}_{1k} = \dot{U}_2 \dot{C} + \dot{I}_2 \dot{C} \dot{Z}_k, \\ \dot{I}_1 &= \dot{I}_{10} + \dot{I}_{1k} = \dot{U}_2 \dot{C} \dot{Y}_0 + \dot{I}_2 \dot{C}. \end{aligned} \right\} \quad (147,14)$$

Сравнивая уравнения (147,14) с уравнениями (129,2) и (129,3), видим, что полученные нами уравнения (147,14) для линии передачи являются частным случаем уравнений (129,2) и (129,3), имеющим место при условии (147,12) и при коэффициенте трансформации, равном единице. Трансформаторы и асинхронные двигатели, подключенные к напряжению U_2 на конце линии, мы рассматриваем теперь ведь просто как индукционную нагрузку.

§ 148. Эквивалентные схемы линии передачи

Из сказанного вытекает, что для линии передачи энергии мы можем дать эквивалентную схему в виде, изображенном на фиг. 250.



Фиг. 250.

На основании уравнения (147,12) сопротивление „первичной“ части взято равным сопротивлению „вторичной“; каждое мы обозначим через $\dot{Z}_1$. В ветви Y_μ показаны включенными параллельно емкость и активная проводимость, — это выражает то обстоятельство, что в линии кроме емкостного есть ток утечки.

Как $\dot{Z}_1$, так и проводимость $\dot{Y}_\mu$, подключаемую посредине между двумя Z_1 , нужно выбрать так, чтобы при холостой работе эквивалентной схемы и при коротком замыкании ее получить те же самые величины напряжений и сил токов, что и в действительной линии; тогда по принципу наложения и при нагрузке схема и линия будут эквивалентны.

При холостой работе схема представит собой сопротивление, как видно из фиг. 250, равное

$$\dot{Z}_1 + \frac{1}{\dot{Y}_\mu},$$

а это должно быть равно $\frac{1}{\dot{Y}_0}$; поэтому

$$\dot{Z}_1 + \frac{1}{\dot{Y}_\mu} = \frac{1}{\dot{Y}_0}. \quad (148,1)$$

При коротком замыкании схема представит сопротивление, которое мы определяем из фиг. 250 и приравниваем Z_k , как это следует из уравнения (147,4):

$$\frac{1}{\frac{1}{\dot{Z}_1} + \dot{Y}_\mu} + \dot{Z}_1 = \dot{Z}_k. \quad (148,2)$$

Определяем из уравнения (148,1) $\dot{Z}_1$:

$$\dot{Z}_1 = \frac{\dot{Y}_\mu - \dot{Y}_0}{\dot{Y}_\mu \dot{Y}_0};$$

подставляем это выражение вместо $\dot{Z}_1$ в уравнение (148,2) и после упрощений получаем

$$(\dot{Y}_\mu)^2 = \frac{(\dot{Y}_0)^2}{1 - \dot{Y}_0 \dot{Z}_k},$$

откуда, принимая во внимание уравнение (147,13), получаем

$$\dot{Y}_\mu = \dot{Y}_0 \sqrt{\frac{1}{1 - \dot{Y}_0 \dot{Z}_k}} = \dot{Y}_0 \dot{C} \quad (148,3)$$

Далее, из уравнения (148,2) имеем

$$\frac{\dot{Z}_1}{1 + \dot{Y}_\mu \dot{Z}_1} + \dot{Z}_1 = \dot{Z}_k$$

Подставим сюда из уравнений (148,1) и (148,3)

$$1 + \dot{Y}_\mu \dot{Z}_1 = \frac{\dot{Y}_\mu}{\dot{Y}_0} = \dot{C}$$

и вынесем $\dot{Z}_1$ за скобки:

$$\dot{Z}_1 \left(\frac{1}{\dot{C}} + 1 \right) = \dot{Z}_k$$

и, наконец,

$$\dot{Z}_1 = \frac{\dot{Z}_k \dot{C}}{1 + \dot{C}}. \quad (148,4)$$

При значениях $\dot{Z}_1$ и $\dot{Y}_\mu$ согласно уравнениям (148,3) и (148,4) схема фиг. 250 эквивалентна действительной линии, т. е. при одних и тех же значениях $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$ мы получим в обоих случаях, и в линии и в схеме, одни и те же значения $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$ и одни и те же значения мощностей и потерь в линии. Таким образом эквивалентная схема заменяет линию во всех вопросах, не касающихся распределения напряжения и силы тока вдоль линии, их мгновенных значений, образования волны и пр., одним словом, исключая те вопросы, для решения которых необходимо учесть время, нужное для распространения вдоль линии любого значения напряжения.

Нетрудно видеть, что, во-первых, при этих условиях для эквивалентной схемы, а потому и для линии передачи, имеет место формула (109,5), а во-вторых, для изменений силы тока в начале линии у первичных зажимов при изменении нагрузки при постоянном $\cos \varphi_2$ имеет место круговая диаграмма тока или диаграмма работы, которая получается подобно тому, как и раньше, с тем только отличием, что проводимость $\dot{Y}_\mu$ берет теперь опережающий ток, а не отстающий, как в трансформаторе или асинхронном двигателе.

Однако в линии передачи постоянным поддерживается не первичное, а вторичное напряжение.

Упражнение. Читателю предлагается исследовать, как будут изменяться $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$ (у начала линии): 1) если $U_2 = \text{const}$ и $\varphi_2 = \text{const}$ и 2) если $U_2 = \text{const}$, а для $\dot{I}_2$ имеет место круговая диаграмма; как будут в обоих случаях измеряться на диаграммах первичная и вторичная мощности.

Следует упомянуть, что иногда вместо эквивалентной схемы фиг. 250 употребляется другая, изображенная на фиг. 251. Указанные на ней величины $\dot{Y}$ и $\dot{Z}$ мы найдем из того же условия, как и при определении соответствующих величин в первой схеме, именно, что при холостом ходе и коротком замыкании схема должна представлять те же сопротивления, что и действительная линия передачи. Поэтому имеем:

$$\dot{Y} + \frac{1}{\frac{1}{\dot{Y}} + \dot{Z}} = \dot{Y}_0 \quad (A)$$

и

$$\frac{1}{\frac{1}{\dot{Z}} + \dot{Y}} = \dot{Z}_k. \quad (B)$$

Из (B) получаем

$$\frac{\dot{Z}}{1 + \dot{Y}\dot{Z}} = \dot{Z}_k; \quad (C)$$

подставляя в (A) величину $\frac{\dot{Z}_k}{Z}$ вместо $\frac{1}{1 + \dot{Y}\dot{Z}}$, мы имеем

$$\dot{Y} \left(1 + \frac{\dot{Z}_k}{Z} \right) = \dot{Y}_0,$$

или

$$\dot{Y}\dot{Z} + \dot{Y}\dot{Z}_k = \dot{Y}_0\dot{Z}. \quad (D)$$

Из (C) получаем

$$\dot{Z} = \dot{Z}_k + \dot{Y}\dot{Z}\dot{Z}_k,$$

или

$$\dot{Y} = \frac{\dot{Z} - \dot{Z}_k}{\dot{Z}\dot{Z}_k};$$

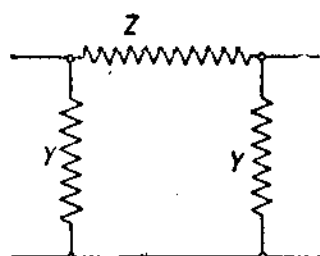
подставляя последнее выражение вместо $\dot{Y}$ в (D), получаем

$$\frac{\dot{Z} - \dot{Z}_k}{\dot{Z}_k} + \frac{\dot{Z} - \dot{Z}_k}{\dot{Z}} = \dot{Y}_0\dot{Z},$$

$$\dot{Z}^2 (1 - \dot{Y}_0\dot{Z}_k) = \dot{Z}_k^2.$$

Следовательно,

$$\dot{Z} = \frac{\dot{Z}_k}{\sqrt{1 - \dot{Y}_0\dot{Z}_k}},$$



Фиг. 251.

или

$$\dot{Z} = \dot{Z}_k \dot{C}.$$

Из (D) имеем далее

$$\dot{Y} = \frac{\dot{Y}_0}{1 + \frac{\dot{Z}_k}{\dot{Z}}} = \dot{Y}_0 \frac{\dot{C}}{1 + \dot{C}}.$$

Схема фиг. 250 называется иногда Т-схемой, а фиг. 251 П-схемой. Чаще пользуются первой.

§ 149. Замечания о влиянии трансформаторов

В начале и конце всякой линии передачи стоят трансформаторы, так что U_1 и I_1 являются вторичными напряжением и силой тока в трансформаторе у генератора, а U_2 и I_2 — первичными в трансформаторе у нагрузки.

Цель первого трансформатора — повысить напряжение для передачи энергии, цель второго — понизить его для распределения энергии.

Обозначим через $\dot{Z}'_{21}$ полное первичное, т. е. обмотки более низкого напряжения, подключаемой к генератору, сопротивление повысительного трансформатора, приведенное ко вторичной цепи, через $\dot{Z}'_{22}$ — вторичное сопротивление того же трансформатора; $\dot{Y}'_2$ — его приведенная проводимость намагничивания, $\dot{Z}'_{11}$ — сопротивление вторичное, т. е. обмотки низкого напряжения пони-

зительного трансформатора, приведенное к первичной части; приведение, таким образом, делается у обоих трансформаторов к самой линии, т. е. к части цепи высокого напряжения.

Напряжение в начале линии есть $\dot{U}_1$, ток — i_1 ; намагничивающий ток выразится при этом так:

$$\dot{i}_\mu = \dot{Y}_\mu (\dot{U}_1 + \dot{i}_1 \dot{Z}_{22}).$$

Сила тока в генераторе (приведенная) будет

$$\dot{I}_2 = \dot{i}_1 + \dot{i}_\mu,$$

и напряжение у генератора (приведенное)

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 + \dot{i}_1 \dot{Z}_{22} + \dot{Z}'_{21} [\dot{i}_1 + \dot{Y}_\mu (\dot{U}_1 + \dot{i}_1 \dot{Z}_{22})],$$

или

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 (1 + \dot{Y}_\mu \dot{Z}'_{21}) + \dot{i}_1 (\dot{Z}'_{21} + \dot{Z}_{22} + \dot{Z}'_{21} \dot{Z}_{22} \dot{Y}_\mu).$$

Стоящие здесь $\dot{U}_1$ и $\dot{i}_1$ выражаются уравнениями (145,1) и (145,2) через $\dot{U}_2$ и $\dot{i}_2$.

Читателю не будет трудно выразить последние величины через напряжение и силу тока самой нагрузки, т. е. за понизительным трансформатором, и связать напряжение и силу тока у генератора с напряжением и силой тока у нагрузки.

ГЛАВА ВОСЕМНАДЦАТАЯ

НЕУСТАНОВИВШИЙСЯ РЕЖИМ В ЦЕПИ ТОКА

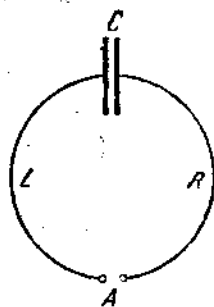
§ 150. Теория разряда конденсатора

В практике нам приходится встречаться с явлением особого переменного тока при разряде емкости. Любая линия передачи энергии представляет собой, как мы уже знаем, между прочим, и определенную емкость; обмотки любой машины относительно друг друга и корпуса машины обладают емкостью, хотя и небольшой; поэтому явление разряда емкости встречается весьма часто.

Ознакомимся с теорией этого явления, при котором возможно получение частоты переменного тока во много раз большей, чем в машинах.

Конденсатор можно зарядить от любого источника постоянного тока (например, от аккумуляторной батареи); и если мы обкладки конденсатора, заряженного до некоторой разности потенциалов и отделенного затем от источника тока, соединим одну с другой каким-либо проводником, то произойдет разряд конденсатора: через этот проводник потечет ток, причем напряжение на обкладках будет уменьшаться, потенциалы обкладок будут стремиться выравниваться.

Обозначим через C емкость конденсатора, через R — активное сопротивление цепи разряда, включая сопротивление того воздушного промежутка, в котором проскакивает искра при разряде, когда мы проводник, соединенный с одной обкладкой, приближаем к другой обкладке, или, при двух „разрядниках“, соединенных с обкладками, — промежутка между ними, на фиг. 252 помеченного буквой A ; далее обозначим: через L — индуктивность цепи разряда, через U_k — разность потенциалов, или напряжение на обкладках конденсатора перед началом разряда, через u_k — переменное напряжение на них в течение разряда, через q — переменное количество электричества на положительно заряженной обкладке и, наконец, через i — переменную силу тока в цепи разряда.



Фиг. 252.

Закон Ома, примененный ко всей цепи, дает для произвольного момента времени t

$$e_c = iR + u_k,$$

или

$$-L \frac{di}{dt} = iR + u_k. \quad (150,1)$$

Сила тока выражается, как известно, так:

$$i = \frac{dq}{dt},$$

причем $q = Cu_k$, следовательно

$$i = C \frac{du_k}{dt}. \quad (150,2)$$

Подставляя это выражение силы тока в уравнение (150,1), получаем

$$-LC \frac{d^2 u_k}{dt^2} = CR \frac{du_k}{dt} + u_k,$$

или

$$\frac{d^2 u_k}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_k}{dt} + \frac{u_k}{LC} = 0. \quad (150,3)$$

Частный интеграл этого уравнения есть

$$u_k = A \cdot e^{mt},$$

где A есть произвольная постоянная, а m можно определить, подставив эту величину u_k в уравнение и получив так называемое „характеристическое“ уравнение

$$m^2 + \frac{R}{L} m + \frac{1}{LC} = 0.$$

Отсюда имеем

$$m_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Соответственно этим двум значениям m мы получаем два частных интеграла уравнения (150,3):

$$u_k = Ae^{m_1 t} \text{ и } u_k = Be^{m_2 t},$$

сложив которые, получим полный интеграл этого уравнения

$$u_k = e^{-\frac{R}{2L} t} \left(Ae^{\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} t} + Be^{-\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} t} \right). \quad (150,4)$$

Теперь могут представиться три случая: корни m_1 и m_2 могут быть мнимыми, действительными и равными.

Разберем сначала первый случай.

В этом случае

$$\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}, \text{ или } R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (150,5)$$

Положим

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} &= a^2 \\ \frac{R}{2L} &= b. \end{aligned} \right\} \quad (150,6)$$

и

Уравнение (150,4) мы можем теперь представить так:

$$u_k = e^{-bt}(Ae^{jat} + Be^{-jat}),$$

где $j = \sqrt{-1}$. Применяя формулы Эйлера, мы получим

$$u_k = e^{-bt}[(A+B)\cos at + (A-B)j\sin at],$$

или, вводя новые постоянные,

$$\begin{aligned} A+B &= C_1 \text{ и } (A-B)j = C_2, \\ u_k &= e^{-bt}(C_1 \cos at + C_2 \sin at). \end{aligned} \quad (150,7)$$

Произвольные постоянные получают определенные значения, если мы примем во внимание начальные условия: в момент $t=0$ мы имеем $u_k = U_k$, $i=0$, и следовательно, $\frac{du_k}{dt} = 0$.

Подставляя эти значения t и u_k в (150,7) и в производную от (150,7), получаем,

$$\begin{aligned} C_1 &= U_k, \\ aC_2 - bC_1 &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$C_2 = \frac{b}{a} U_k.$$

Мы видим, что прежние произвольные постоянные A и B должны были быть сопряженными и комплексными величинами:

$$A = m + jn \text{ и } B = m - jn,$$

тогда

$$\begin{aligned} A+B &= 2m = C_1, \\ A-B &= j2n \end{aligned}$$

и

$$(A-B)j = -2n = C_2.$$

Таким образом

$$u_k = e^{-bt} U_k \left(\cos at + \frac{b}{a} \sin at \right).$$

Умножим и разделим правую часть на $\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$, причем делитель отнесем к скобкам; затем, полагая $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \xi$, получим

$$u_k = e^{-bt} U_k \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \sin(at + \xi). \quad (150,8)$$

При $t=0$ из этого уравнения имеем $u_k = U_k$, так как

$$\sin \xi = \sqrt{\frac{a^2}{a^2 + b^2}}.$$

Если бы здесь не было множителя e^{-bt} , мы имели бы простую синусоидальную функцию с амплитудой $U_k \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$, начальной фазой ξ и периодом

$$T = \frac{2\pi}{a}, \quad (150,9)$$

но этот множитель e^{-bt} изменяет вид кривой, превращая синусоиду в кривую фиг. 253.

Амплитуды этой кривой уменьшаются с каждым периодом в e^{bT} раз. Если некоторая амплитуда есть U_{kn} , то следующая за ней однаковая по знаку амплитуда есть $U_{kn+1} = U_{kn}e^{-bT}$. Отсюда мы получаем

$$\gamma = bT = \ln \frac{U_{kn}}{U_{kn+1}}. \quad (150,10)$$

Величина $\gamma = bT$ называется логарифмическим декрементом затухания колебаний.

Величина $e^{bT} = e^{\gamma} = \Delta$ носит название просто декремента колебаний.

Самый процесс разряда конденсатора в рассматриваемом случае мнимых корней характеристического уравнения является процессом колебательным, с чем мы уже встречались в параграфах, посвященных резонансу напряжений или токов. Так как амплитуды колебаний с каждым периодом убывают, то колебания называются затухающими в отличие от того случая, когда $b=0$ и $e^{-bT}=1$ и когда амплитуды остаются все время одинаковыми, равными U_k . В последнем случае колебания будут незатухающими: они возможны лишь, когда $b=0$, а последнее условие означает, что $R=0$. Следовательно, в действительности колебания всегда будут затухающими,

ибо как ни было мало R , сопротивление разрядников и искры, оно всегда отлично от нуля.

Так как по предыдущему

$$i = C \frac{du_k}{dt},$$

то из уравнения (150,8) мы получаем выражение для силы тока

$$i = Ce^{-bt}U_k \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \left[-b \sin(at + \xi) + a \cos(at + \xi) \right],$$

или после преобразования

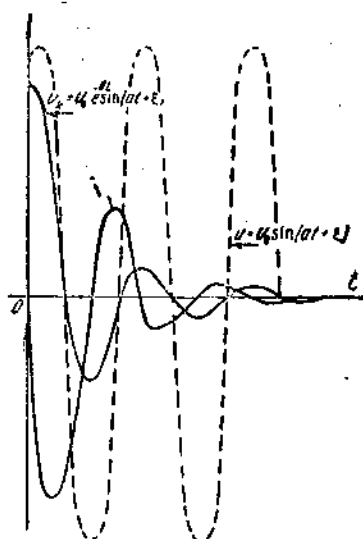
$$i = Ce^{-bt}U_k \frac{a^2 + b^2}{a} \sin(at + \pi). \quad (150,11)$$

Таким образом сила тока опережает в фазе напряжение на угол $\pi - \xi = \arctg\left(-\frac{a}{b}\right)$. В том случае, когда можно хотя бы приближенно положить $R=0$, мы имеем $b=0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$, т. е. сдвиг фаз между током и напряжением в отсутствии потерь достигает четверти периода.

Из сказанного следует, что кривые U_k и i строятся следующим образом (фиг. 253): сначала строится синусоида

$$U_k \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \sin(at + \xi)$$

— пунктирная кривая, затем ее ординаты умножаются на переменный множитель e^{-bt} , и получается кривая u_k — черная кривая. Ординаты пунктирной кривой



Фиг. 253.

растут еще некоторое время после момента $t=0$, ординаты же черной кривой непрерывно с момента $t=0$ уменьшаются, начиная со значения

$$u_k = U_k \sqrt{1 + \frac{\dot{u}^2}{a^2} \sin^2 \xi} = U_k;$$

в самом деле, так как

$$\dot{u}_k = C \frac{du_k}{dt},$$

в течение времени от $t=0$ до $t = \frac{T}{2}$ отрицательно, конденсатор разряжается,

$$\frac{du_k}{dt} < 0,$$

т. е. u_k уменьшается в течение того же промежутка времени, становясь в конце его отрицательным.

Кривая i строится аналогично кривой u_k .

Заметим, что u_k имеет максимумы положительные и отрицательные, когда $i=0$, поэтому у кривой u_k одна четверть периода несимметрична относительно другой четверти.

При $R=0$ нет траты энергии (потери на магнитный и диэлектрический гистерезисы можно ввести уже известным нам образом в величину $I^2 R$, расширяя как бы величину R), есть только постоянный переход энергии из электрической в магнитную, и наоборот. Ранее нами были уже даны некоторые соотношения между электрическими величинами; при этом был описан и самый физический процесс этих колебаний.

Так как при $R=0$ $b=0$ и $a = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ из уравнения (150,6), то, подставив эти величины в уравнение (150,11), мы получим для силы тока выражение

$$i = U_k \sqrt{\frac{C}{L}} \sin(at + \pi),$$

или

$$I_m = U_k \sqrt{\frac{C}{L}},$$

т. е. уже известную нам формулу (29,4).

Из уравнения (150,9), подставив значение a , мы получаем для продолжительности периода в общем случае величину

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}; \quad (150,12)$$

и для идеального случая $R=0$

$$T = 2\pi \sqrt{LC},$$

т. е. формулу (29,3), известную под названием „формулы В. Томсона“.

Перейдем к тому случаю, когда

$$\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC} \quad \text{или} \quad R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

и корни характеристического уравнения действительны.

Введем обозначение

$$\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} = a^2$$

и, как прежде,

$$\frac{R}{2L} = b.$$

Тогда

$$m_{1,2} = -b \pm a,$$

и полный интеграл уравнения (150,4) будет

$$u_k = Ae^{(-b+a)t} + Be^{-(b+a)t}.$$

Далее

$$\frac{du_k}{dt} = (-b+a)Ae^{(-b+a)t} - (a+b)Be^{-(b+a)t}.$$

Постоянные A и B определим опять из условий, что при $t=0$

$$u_k = U_k, \text{ а } \frac{du_k}{dt} = 0.$$

Эти условия дают

$$A + B = U_k,$$

$$(a-b)A - (a+b)B = 0.$$

Отсюда

$$A = \frac{a+b}{2a} \cdot U_k,$$

$$B = \frac{a-b}{2a} U_k.$$

Так что

$$u_k = U_k e^{-bt} \cdot \frac{(a+b)e^{at} + (a-b)e^{-at}}{2a}. \quad (150,13)$$

Подставляя в выражение производной вместо A и B их значения, получаем

$$\frac{du_k}{dt} = \frac{a^2 - b^2}{2a} U_k e^{-bt} (e^{at} - e^{-at}).$$

так как

$$b > a,$$

то эта производная всегда отрицательна

$$\frac{du_k}{dt} < 0;$$

следовательно, напряжение непрерывно уменьшается, стремясь к нулю при $t = \infty$. Разряд конденсатора происходит в этом случае без колебаний.

Для случая равных корней ($m_1 = m_2$) имеем

$$\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} = 0$$

или

$$a = 0.$$

Преобразуя выражение (150,13) для u_k , получаем

$$u_k = U_k e^{-bt} \left[\frac{a(e^{at} + e^{-at})}{2a} + \frac{b(e^{at} - e^{-at})}{2a} \right]_{a=0} = U_k e^{-bt} (1 + bt). \quad (150,14)$$

Далее для этого случая

$$\frac{du_k}{dt} = -b^2 U_k e^{-b^2 t};$$

эта производная тоже все время отрицательна.

В обоих последних случаях сила тока

$$i = C \frac{du_k}{dt},$$

начиная с нуля, имеет, в чем читателю предлагается убедиться самому, отрицательный максимум в некоторый момент времени, стремясь затем к нулю при $t = \infty$ (фиг. 254).

Оба случая, т. е. когда вообще корни действительны, носят название случая „аперiodического“ разряда.

Практически напряжение и сила тока в этих случаях перестают быть доступными по величине для измерений по истечении весьма небольшого промежутка времени.

При разряде конденсаторов в проводнике, соединяющем обкладки, обычно делается так называемый „искровой“ промежуток некоторой постоянной длины, о котором мы уже упоминали выше. Он может появиться и от того, что разряд происходит не при прикосновении проводника к обеим обкладкам, а уже при некотором небольшом расстоянии его от их обеих или от одной из них, если он к другой уже присоединен.

При цепи электрических колебаний с искровым промежутком сопротивление искры входит как часть, обычно главная, в сопротивление R .

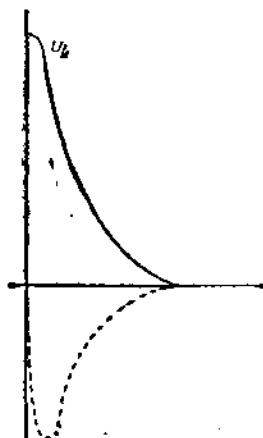
По мере затухания колебаний сопротивление искрового промежутка растет, отчего растет и продолжительность периода T , а также увеличивается и само затухание вследствие роста декремента колебаний bT . Вследствие затухания амплитуда напряжения, наконец, достигнет такой величины, что не сможет поддержать ток через искровой промежуток, искра прервется, разряд не сможет продолжаться. От этого колебания прерываются на некоторой стадии, а не идут до конца, т. е. в конденсаторе остается некоторый остаточный заряд, некоторая энергия. Эту энергию можно снова заставить колебаться, замкнув на короткое искровой промежуток.

Разобранный нами в этой главе колебательный разряд есть случай так называемых свободных электрических колебаний, т. е. таких, период которых определяется только через R , L и C самой цепи, или „контур“ колебаний, и общим выражением которых является формула (150,8). Кроме того, бывают колебания несвободные, или вынужденные, период и затухание которых зависят и от постоянных другого контура и которые индуктируются этим последним. Явления во вторичной цепи трансформатора представляют пример вынужденных колебаний.

Из формулы для периода колебаний мы видим, что, уменьшая R , L и C контура, мы будем уменьшать продолжительность периода и, следовательно, увеличивать частоту колебаний.

Пример 62. Вычислим частоту колебаний f в следующем примере:

Плоский стеклянный конденсатор с толщиной стекла в 0,1 см и площадью каждой обкладки в $20 \times 20 = 400$ см² разряжается медным проводником, согнутым по кругу с радиусом в 25 см; диаметр поперечного сечения проводника равен 1 см. Вычислим сначала емкость C конденсатора по приближенной формуле $C = \frac{\epsilon S}{4\pi d \cdot 9 \cdot 10^{11}}$ фарад, где ϵ диэлек-



Фиг. 254.

трическая постоянная стекла (равная приблизительно трем), S — площадь обкладки, d — толщина диэлектрика. Подставляя вместо этих величин их значения, получим $C = 1,06 \cdot 10^{-9}$ Ф. Индуктивность круглого, согнутого по кругу, проводника вычислим по формуле Кирхгофа:

$$L = 4\pi a \left(\ln \frac{16a}{b} - 1,75 \right) 10^{-9} \text{ генри,}$$

где a есть радиус круга, а b — диаметр поперечного сечения проводника. Подставляя $a = 25$ и $b = 1$, получаем $L = 1,33 \cdot 10^{-6}$ Н.

Как мы увидим из последней главы, сопротивление R при токе большой частоты больше, чем при обычной частоте, вследствие поверхностного эффекта, т. е. того, что ток при большой частоте идет, главным образом, по наружным слоям проводника, осевая же часть проводника остается почти совсем без тока и площадь поперечного сечения проводника не используется полностью, отчего и возрастает сопротивление. В разбираемом примере оценим все активное сопротивление цепи, т. е. и проводника и искрового промежутка, в 3Ω .

При указанных значениях всех величин имеем

$$\frac{1}{LC} = 7,5 \cdot 10^{14} \text{ и } \frac{R^2}{4L^2} = 0,01 \cdot 10^{14}.$$

Пренебрегая второй величиной, имеем из уравнения (150,12)

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{7,5 \cdot 10^{14}}} = \frac{1}{0,43 \cdot 10^7} \text{ сек.}$$

и частоту

$$f = \frac{1}{T} = 4,3 \cdot 10^6 \text{ колебаний в секунду.}$$

Декремент колебаний равен

$$\gamma = bT = \frac{R}{2L} \cdot T = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 1,33 \cdot 0,43 \cdot 10^7} = 0,26$$

Таким образом амплитуда каждого периода составляла бы при этом $e^{-0,26} \approx 0,77$ от амплитуды предшествовавшего периода, если бы затухание не увеличивалось, т. е. если бы R оставалось постоянно равным 3Ω .

Искровой промежуток в самом колебательном контуре не является неизбежным, без него можно обойтись, например, в том случае, когда энергия сообщается контуру не зарядом конденсатора, как было описано выше, а путем индукции от другого колебательного контура, уже содержащего искровой промежуток. В подробности о таких „связанных“ колебательных контурах в общем курсе теории переменных токов мы входить не можем.

Рассмотренный нами колебательный контур называется обыкновенно „замкнутым вибратором“.

Представим себе, что от начального момента прошло время $t = \frac{1}{b}$; тогда

$$e^{-bt} = \frac{1}{e},$$

и амплитуда напряжения равна $\frac{1}{e} U_k$.

Величина $\frac{1}{b}$ называется „постоянной времени“ контура; она показывает время, когда амплитуда колебаний уменьшится в e раз.

Положим, что от начального момента прошло время $t = t_m$, когда заряд стал очень уже мал (например, $0,01$ первоначальной величины).

Тогда

$$U'_{k\max} = e^{-bt_m} U = 0,01 U,$$

откуда

$$e^{-bt_m} = 0,01; \quad bt_m = \ln 100,$$

$$t_m = \frac{\ln 100}{b} \approx \frac{5}{b}.$$

Через промежуток t_m конденсатор может снова заряжать.

При периодически повторяющемся заряде, когда снабжение энергией производится $m = \frac{1}{t_m}$ раз в секунду, имеем, что в течение секунды подведена энергия

$$\frac{CU_k^2}{2} m,$$

которая превращается в тепло $I^2 R$; здесь I называется действующей силой тока, и величина ее определяется из выражения

$$I = U_k \sqrt{\frac{Cm}{2R}}.$$

Представим себе теперь два металлических шара или две большие металлические пластины, соединенные прямолинейным проводником (с искровым промежутком или без него). Здесь шары или пластины составляют вместе емкость, и в такой системе, называемой „открытым“ вибратором, будет возможен совершенно такой же колебательный разряд, как было описано.

Отличается открытый вибратор от замкнутого тем, что в первом появляется новая потеря энергии, не имевшая места в замкнутом, а именно — излучение электромагнитной энергии. Часть энергии тратится каждый период на нагревание проводника, а часть электрическим полем и связанным с ним магнитным уносится со скоростью света от вибратора во все стороны.

Если мы шары или пластины на концах проводника станем уменьшать, то все большее относительное значение будет приобретать емкость частей проводника друг относительно друга. В пределе в случае простого прямого провода вся емкость в системе есть емкость самого провода, таким образом теперь емкость равномерно распределена по длине провода, т. е. так же, как индуктивность.

В этом случае мы аналогично описанным ранее в гл. XVII волнам в проводах с равномерно распределенными емкостью и индуктивностью получим в вибраторе волнообразное распределение тока и напряжения, или потенциала. Потенциал имеет наибольшие значения, по знаку противоположные, на концах, нулевое значение — по середине провода, сила тока — наоборот.

Теория колебаний в открытом вибраторе и излучения им электромагнитной энергии составляет предмет специального учения об электромагнитных колебаниях и волнах и служит основой для радиотехники.

§ 151. Наиболее общая форма уравнения цепи переменного тока

Рассмотрим цепь переменного тока с индуктивностью L_1 , активным сопротивлением R_1 и последовательно включенной емкостью C_1 ; пусть в ней действует э. д. с. e_1 , в общем случае переменная, кроме нее будет существовать, тоже в общем случае, э. д. с. самоиндукции, и закон Ома для мгновенных значений напишется так:

$$i_1 = \frac{e_1 + e_s - u_k}{R}, \quad (151,1)$$

где через u_k мы обозначили напряжение, тратящееся или существующее на емкости.

Из уравнения (151,1) получаем

$$e_1 = i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + u_k,$$

или, заменяя u_k его выражением через i_1 ,

$$e_1 = i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1} \int_{i_{1m}}^{i_1} i_1 dt. \quad (151,2)$$

Последнее уравнение является достаточно общей формой „уравнения цепи переменного тока“. Но можно сделать в ней еще следующее добавление:

Предположим, что э. д. с. e_1 в рассматриваемой цепи индуцируется магнитным потоком второй цепи с током i_2 , так что

$$e_1 = -M \frac{di_2}{dt},$$

где M есть коэффициент взаимной индукции обеих цепей. Если существует относительное движение обеих цепей, то M переменна, и его нельзя выносить из-под знака дифференцирования, и

$$e_1 = -\frac{d(Mi_2)}{dt}, \quad (A)$$

а уравнение (151,2) превращается в

$$i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{d(Mi_2)}{dt} + \frac{1}{C_1} \int_{i_{1m}}^{i_1} i_1 dt = 0.$$

В частном случае i_2 может быть и постоянным током, например, током возбуждения в обмотке электромагнитов синхронного двигателя; в форме, аналогичной (A), может быть представлена и э. д. с. генератора переменного тока e_2 и т. д.

Продифференцировав последнее уравнение по t , получим

$$R_1 \frac{di_1}{dt} + L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{d^2 (Mi_2)}{dt^2} + \frac{1}{C_1} i_1 = 0,$$

или

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{R_1}{L_1} \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{L_1 C_1} i_1 = -\frac{1}{L_1} \frac{d^2 (Mi_2)}{dt^2}. \quad (151,3)$$

Такова наиболее общая форма уравнения цепи переменного тока при последовательном соединении емкости, индуктивности и активного сопротивления.

Предлагаем читателю составить уравнение для участка цепи, где включен синхронный двигатель, а конденсатора нет.

§ 152. Неустановившийся режим тока. Включение постоянного тока

Рассмотренный в предыдущей главе колебательный разряд конденсатора с затуханием является одним из случаев переменного тока с изменяющимися амплитудами напряжения и силы тока. Такой ток называется неустановившимся током; часто употребляются также выражения — неустановившееся состояние тока или неустановившийся режим тока.

При таком неустановившемся режиме следует различать два случая.

Первым случаем назовем тот, когда во всех частях цепи мгновенное состояние тока (величины и фазы напряжения и силы тока) — одно и то же; изменение его происходит одновременно во всех частях цепи одинаковым образом.

Вторым случаем назовем тот, когда изменение состояния тока неодинаково в разных частях цепи, т. е. когда имеет значение время, необходимое для того, чтобы измененное состояние распространилось с одной части цепи на другую.

Практически последний случай имеет большое значение при возникновении в достаточно длинной цепи (линии передачи) собственных, или свободных, колебаний. В этой главе мы остановимся на первом случае неустановившегося режима тока.

Введем следующее условие: „постоянные“ цепи — ее сопротивления, емкость, индуктивность не изменяются.

Рассмотрим случай включения и выключения тока; в этих случаях заранее видно, что неустановившееся состояние тока есть переходное от одного установившегося состояния (например работа цепи при определенной нагрузке) к другому (например отсутствие тока и напряжения). В течение переходного времени, т. е. пока режим тока не установился, ток можно рассматривать как состоящий из суммы двух токов — установившегося, или вынужденного, и так называемого свободного. На последующем примере эти понятия уяснятся конкретнее.

Сначала рассмотрим включение источника постоянного тока, например аккумуляторной батареи, в цепь, содержащую сопротивление R и обладающую индуктивностью L . Напряжение источника обозначим через U .

В переходное время, пока растет сила тока i и вместе с ней растет магнитное поле тока, будет существовать э. д. с. самоиндукции, на уравновешение которой потратится часть напряжения; для этого состояния, таким образом, мы будем иметь при изменяющемся i

$$U = Ri + L \frac{di}{dt}.$$

Так как $U = \text{const}$, то уравнение интегрируется разделением переменных

$$\frac{di}{i - \frac{U}{R}} = -\frac{R}{L} dt,$$

откуда, не забывая ввести произвольную постоянную, имеем

$$\ln \frac{1}{C} \left(i - \frac{U}{R} \right) = -\frac{Rt}{L},$$

и далее

$$i = \frac{U}{R} + C \cdot e^{-\frac{Rt}{L}}.$$

Постоянную интегрирования C определим из начального условия, что при $t = 0$ сила тока $i = 0$, откуда

$$C = -\frac{U}{R}.$$

Подставляя это значение C в предыдущее уравнение, получаем окончательно

$$i = \frac{U}{R} - \frac{U}{R} e^{-\frac{Rt}{L}}. \quad (152,1)$$

В этом уравнении второй член правой части с ростом i , т. е. с течением времени, уменьшается, стремясь к нулю при $t = \infty$; поэтому сила тока приближается с течением времени к пределу

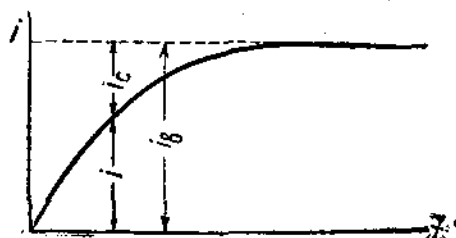
$$i_s = \frac{U}{R}, \quad (152,2)$$

т. е. к величине, определяемой по закону Ома для постоянного тока. Величину i_s , определяемую формулой (152,2), мы назовем вынужденной, или установившейся, силой тока, а величину

$$i_c = -\frac{U}{R} e^{-\frac{Rt}{L}} \quad (152,3)$$

назовем силой тока свободного, и, таким образом, уравнение (152,1) может быть переписано еще и так:

$$i = i_s + i_c. \quad (152,4)$$



Фиг. 255.

На фиг. 255 представлена кривая силы тока i .

Если $L = 0$, то второй член в уравнении (152,1) обращается в нуль для всякого t , и поэтому для всякого t

$$i = \frac{U}{R},$$

т. е. сила тока „устанавливается“ мгновенно в той цепи, где нет индуктивности, т. е. нет запасания энергии в магнитном поле. В период неустановившегося тока будем иметь для мощности

$$U \cdot i = R \cdot i^2 + L \frac{di}{dt} \cdot i;$$

второй член правой части здесь выражает мощность, идущую в магнитное поле.

Энергия, запасенная за период неустановившегося состояния в магнитном поле, равна

$$\int_{t=0}^{t=\infty} L \cdot \frac{di}{dt} \cdot i \cdot dt = \int_{i=0}^{i=i_s} L \cdot i \cdot di = \frac{L i_s^2}{2},$$

что представляет уже известное выражение энергии магнитного поля.

Практически влияние второго члена, т. е. тока i_c , в уравнении (152,1) перестает быть заметным по истечении некоторого промежутка времени — от долей секунды при слабых магнитных полях до нескольких минут при очень сильных.

Из уравнения (152,3) мы имеем, что при $t = 0$

$$i_c = -\frac{U}{R},$$

а при

$$t = \tau = \frac{L}{R}$$

$$i_c = -\frac{U}{R} \cdot e^{-1} = -\frac{U}{R} \cdot \frac{1}{e},$$

т. е. что через время τ после включения свободный ток падает до $\frac{1}{e}$, или $\frac{1}{2,71828}$ своей начальной величины. Величина τ называется „постоянной времени“ данной цепи тока.

При включении постоянного тока напряжения U в цепь, содержащую R и C , т. е., например, для заряда конденсатора, будем иметь из закона Ома

$$u_k = U - iR. \quad (152,5)$$

Сила тока выразится теперь через положительную производную от u_k , так как пока ток есть, u_k растет, так что

$$i = C \frac{du_k}{dt} = -CR \frac{di}{dt}.$$

Отсюда

$$\frac{di}{i} = -\frac{1}{CR} dt$$

и

$$i = A \cdot e^{-\frac{t}{CR}}.$$

Когда $t=0$, тогда $u_k=0$ и из уравнения (152,5) $i = \frac{U}{R}$; следовательно, окончательно

$$i = \frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{CR}}.$$

Умножив уравнение (152,5) на $i \cdot dt$ и интегрируя, найдем известное уже нам выражение энергии, запасаемой в конденсаторе.

§ 153. Включение переменного тока в цепь с активным сопротивлением и индуктивностью

Рассмотрим теперь включение источника синусоидальной э. д. с. в цепь, содержащую R и L .

В этом случае будем иметь

$$E_m \sin(\omega t) = Ri + L \frac{di}{dt}. \quad (153,1)$$

Не будем теперь задаваться, как делали это в § 7, выражением для силы тока, а определим i интегрированием уравнения (153,1), — это будет общее решение вопроса о токе при переменном напряжении в цепи, содержащей R и L .

Интегралом уравнения (153,1) является

$$i = A_1 \sin(\omega t - \varphi) + A_2 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (153,2)$$

A_1 и φ определим, подставив выражение (153,2), вместо i в уравнение (153,1):

$$\begin{aligned} E_m \sin(\omega t) = & A_1 R \cos \varphi \cdot \sin(\omega t) - A_1 R \sin \varphi \cdot \cos(\omega t) + \\ & + \omega L A_1 \cos \varphi \cos(\omega t) + \omega L A_1 \sin \varphi \cdot \sin(\omega t) + \\ & + \left(A_2 R - A_2 L \frac{R}{L} \right) e^{-\frac{R}{L}t}. \end{aligned}$$

Последний член здесь равен нулю; далее, отсюда имеем, приравняв сумму коэффициентов в правой части при $\sin(\omega t)$ величине E_m , а при $\cos(\omega t)$ — нулю,

$$\begin{aligned} A_1 R \cos \varphi + \omega L A_1 \sin \varphi &= E_m, \\ -A_1 R \sin \varphi + \omega L A_1 \cos \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем известные соотношения:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R},$$

$$A_1 = \frac{E_m}{R \cos \varphi + \omega L \sin \varphi} = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = I_{m_1}.$$

I_{m_1} есть амплитуда установившегося тока i_1 , и, таким образом, из уравнения (153,2) имеем опять

$$i = i_1 + i_2,$$

где

$$i_2 = + A_2 e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Постоянная A_2 определяется из начальных условий, например, так:

Из уравнения (153,1) ясно, что счет времени нами начат с момента, когда э. д. с. e равна нулю. Пусть она включена в цепь в момент $t = t_1$; в этот момент сила тока i равна еще нулю; подставляя значения i и t в уравнение (153,2), получаем

$$I_{m_1} \sin(\omega t_1 - \varphi) + A_2 e^{-\frac{R}{L}t_1} = 0,$$

откуда

$$A_2 = -I_{m_1} e^{\frac{R}{L}t_1} \sin(\omega t_1 - \varphi). \quad (153,3)$$

Из этого уравнения ясно, что если включение э. д. с. произошло в такой момент t_1 , что $\omega t_1 - \varphi = 0$, или $t_1 = \frac{\varphi}{\omega}$, то $A_2 = 0$, а потому и $i_2 = 0$ для всякого момента времени, т. е. второго члена в уравнении (153,2) совсем нет.

Указанный момент $t_1 = \frac{\varphi}{\omega}$ соответствует прохождению тока i_1 через нулевое значение.

При включении э. д. с. в какой-нибудь другой момент имеется ток i_2 , быстро — в обыкновенных случаях в течение нескольких периодов — уменьшающийся практически до нуля.

§ 154. Включение переменного тока в цепь, содержащую активное сопротивление, индуктивность и емкость

Поставим вопрос о силе тока в более общем случае, именно, когда в цепи кроме R и L имеется и C и соединены R , L и C последовательно.

Для такой цепи имеет место соотношение (151,2):

$$e = Ri + L \frac{di}{dt} + \int \frac{idt}{C}. \quad (A)$$

Полагаем опять, осциллограммы это подтверждают,

$$i = i_1 + i_2,$$

так как i_1 есть ток при установившемся режиме в цепи, то для него одного уравнение (A) тоже имеет место, приводя к общему случаю закона Ома, а потому, вычитая из общего уравнения (A) частный его вид для i_1 , получим уравнение для одного i_2 :

$$Ri_2 + L \frac{di_2}{dt} + \int \frac{i_2 dt}{C} = 0 \quad (B)$$

Дифференцируя, имеем

$$\frac{d^2 i_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di_c}{dt} + \frac{1}{LC} i_c = 0. \quad (C)$$

Подставляя в уравнение (B) величину $i_o = \frac{dq_c}{dt}$, где q_c обозначает заряд емкости C от свободного тока, получим

$$\frac{d^2 q_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq_c}{dt} + \frac{1}{LC} q_c = 0. \quad (D)$$

Оба последние уравнения (C) и (D) вполне подобны уравнению (150,3) для разряда конденсатора и интегрируются так же. Поэтому

$$\begin{aligned} i_c &= A e^{m_1 t} + B e^{m_2 t}, \\ q_c &= \int i_c dt = \frac{A}{m_1} e^{m_1 t} + \frac{B}{m_2} e^{m_2 t}, \end{aligned} \quad (E)$$

где m_1 и m_2 имеют прежние значения (см. § 150).

Если $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, то m_1 и m_2 действительны, i_c уменьшается аperiodически с течением времени вследствие существования множителя $e^{-\frac{R}{L}t}$, все время складываясь алгебраически с током i_o ; по истечении нескольких периодов i_c становится практически незаметным, и остается в цепи один ток i_o , для которого по соотношению (A) имеет место закон Ома в общей форме (фиг. 256).

То же будет при $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$; т. е. при $m_1 = m_2$.

Если $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, то m_1 и m_2 мнимы, и мы получаем, вводя опять величины a и b ,

$$\begin{aligned} m_1 &= -b + ja \text{ и } m_2 = -b - ja; \\ i_c &= e^{-bt} (C_1 \cos at + C_2 \sin at). \end{aligned} \quad (154,1)$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 мы определим из начальных условий. Будем считать время с момента включения тока. Так как включение застает э. д. с. в какой-то фазе, то выражение э. д. с. сети будет

$$e = E_m \sin(\omega t + \phi).$$

Обозначим добавочным индексом O значения всех величин в момент включения, т. е. при $t=0$;
тогда

$$i_o = 0,$$

или

$$i_{co} + i_{so} = 0,$$

откуда

$$i_{co} = -i_{so} = -I_m [\sin(\omega t + \phi - \varphi)]_{t=0} = -I_m \sin(\phi - \varphi), \quad (F)$$

где

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$



Фиг. 256.

Далее

$$e_o = E_m \sin \phi. \quad (G)$$

Так как и

$$u_k = u_{ko} + u_{kc},$$

и при

$$t=0 \quad u_{ko} = 0,$$

то

$$u_{kco} = u_{ko} - u_{kco} = -u_{kco} = -\frac{I_m}{\omega C} \left[\sin \left(\omega t + \phi - \varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right]_{t=0}.$$

Итак

$$u_{kco} = \frac{I_m}{\omega C} \cos(\phi - \varphi) = U_{km} \cos(\phi - \varphi). \quad (H)$$

Возвратимся к определению C_1 и C_2 в уравнении (154,1).

При $t=0$ из уравнения (154,1) и (F) имеем

$$i_{co} = C_1 = -I_m \sin(\phi - \varphi).$$

Для определения C_2 уравнение (154,1) — уравнение тока, как видим, не может служить, перейдем к уравнению напряжений (B) и подставим в него выражение (154,1) для i_c , причем последний член можем писать просто, как u_{kc} , ибо

$$\int \frac{i_c dt}{C} = u_{kc},$$

$$Re^{-bt} (C_1 \cos at + C_2 \sin at) + Le^{-bt} (-bC_1 \cos at - bC_2 \sin at - aC_1 \sin at + aC_2 \cos at) + u_{kc} = 0.$$

При $t=0$ получаем, принимая во внимание уравнение (H),

$$RC_1 + L(aC_2 - bC_1) = -U_{km} \cos(\phi - \varphi),$$

откуда

$$C_2 = \frac{(-R + Lb)C_1 - U_{km} \cos(\phi - \varphi)}{La},$$

или, подставив значение C_1 ,

$$C_2 = \frac{R - Lb}{La} I_m \sin(\phi - \varphi) - \frac{1}{aL} U_{km} \cos(\phi - \varphi).$$

Таким образом постоянные C_1 и C_2 нами определены, остается несколько упростить получающееся из уравнения (154,1) сложное выражение для i_c :

$$i_c = e^{-bt} \left[-I_m \sin(\phi - \varphi) \cos at + \right. \\ \left. + \frac{(R - Lb)I_m \sin(\phi - \varphi) - U_{km} \cos(\phi - \varphi)}{La} \sin at \right].$$

Так как

$$b = \frac{R}{2L},$$

$$R - Lb = \frac{R}{2}$$

затем, соединив вместе члены, содержащие I_m , получим

$$i_c = e^{-bt} \left[I_m \sin(\phi - \varphi) \left(\frac{R}{2La} \sin at - \cos at \right) - \frac{U_{km}}{La} \cos(\phi - \varphi) \sin at \right],$$

или

$$i_c = \frac{e^{-bt}}{La} \left[I_m \sin(\phi - \varphi) \sqrt{\frac{R^2}{4} + L^2 a^2} \left(\frac{R}{2\sqrt{\frac{R^2}{4} + L^2 a^2}} \sin at - \frac{La}{\sqrt{\frac{R^2}{4} + L^2 a^2}} \cos at \right) - U_{km} \cos(\phi - \varphi) \sin at \right].$$

Так как

$$\sqrt{\frac{R^2}{4} + L^2 a^2} = \sqrt{\frac{L}{C}},$$

и вводя уже известный нам угол ξ такой, что

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{2La}{R} = \frac{a}{b},$$

получаем окончательно

$$i_c = \frac{e^{-bt}}{La} \left[I_m \sqrt{\frac{L}{C}} \sin(\phi - \varphi) \sin(at - \xi) - U_{km} \cos(\phi - \varphi) \sin at \right].$$

Величина

$$T_c = \frac{2\pi}{a}$$

есть период собственных затухающих колебаний в цепи. Эти колебания, как видим, разлагаются на два i'_c и i''_c сдвинутых по фазе на ξ и с разными амплитудами колебания.

Если включение произошло в тот момент, когда $i_c = 0$, то $\phi = \varphi$, и первое колебание исчезает, так что в этом случае

$$i'_c = -\frac{e^{-bt}}{La} U_{km} \sin at.$$

Если включение произведено на четверть периода раньше или позднее, то

$$\phi - \varphi = \frac{\pi}{2},$$

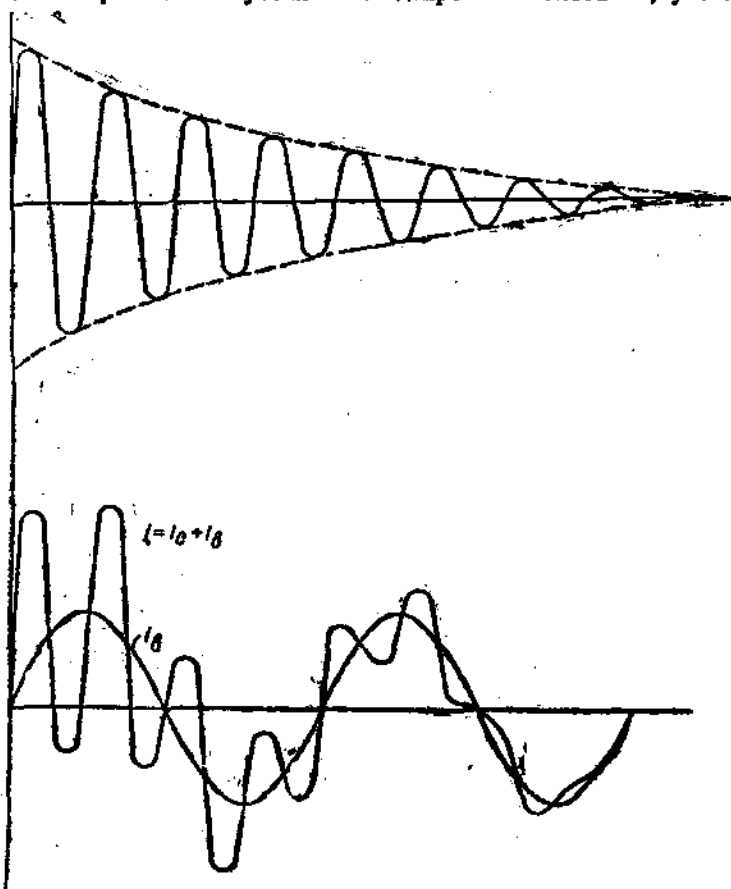
и исчезает второе колебание, так что

$$i''_c = \frac{e^{-bt}}{a\sqrt{LC}} I_m \sin(at - \xi).$$

Ток i_c в особо неблагоприятных случаях, т. е. при некоторых значениях R , L и C , а также при неблагоприятной фазе ϕ , может, слагаясь с i_c , обусловить колебательный ток в цепи, изображенный на фиг. 257, по временам достигающий большой силы и обуславливающий большие напряжения на емкости и индуктивности.

Примером может явиться включение генератора в цепь, содержащую трансформатор с подключенным к нему разомкнутым кабелем.

Дабы уменьшить t_c , подобное включение производится так, что выключатель замыкает цепь сначала через добавочное сопротивление, а затем уже без него; это сопротивление увеличивает декремент колебаний, увеличивает затухание.



Фиг. 257.

Другим способом является включение в цепь генератора сначала при пониженном напряжении.

Остановимся еще на выключении переменного тока, причем возьмем случай, представляющий большой практический интерес, именно выключение длинной, т. е. представляющей известную емкость, линии, замкнутой в конце на короткое. Допустим, что разрыв цепи произошел как раз в момент максимума силы тока I_m . Запасенная при этом в магнитном поле всей цепи магнитная энергия, равная

$$W_m = \frac{LI_m^2}{2},$$

должна превратиться в энергию электрического поля,

$$W_e = \frac{CU^2}{2}, \quad (U)$$

так что приближенно, пренебрегая потерями на нагревание проводов и пр. за первую четверть периода, имеем

$$U = I_m \sqrt{\frac{L}{C}},$$

формулу, аналогичную формуле (29,4); до такого напряжения зарядится линия; далее процесс исчезновения энергии будет идти знакомым нам путем затухающих колебаний.

Пример 63. Начертить кривую всего тока $i = i_0 + i_c$ по кривым i_0 и i_c для цепи, в которой $R = 10 \Omega$; $L = 0,01 \text{ H}$; $C = 0,0001 \mu\text{F}$ для трех случаев: 1) когда $\phi = \frac{\pi}{4}$. 2) $\phi = \varphi$ и 3) $\phi = \varphi + \frac{\pi}{2}$.

§ 155. Включение переменного тока, намагничивающего железо

Исходным уравнением можно взять то, которое мы составили для случая включения цепи с R и L :

$$U_m \sin(\omega t) = Ri + L \frac{di}{dt},$$

но в него мы должны ввести сначала поправку на влияние железа, а это влияние

сказывается тем, что L становится величиной не постоянной, а зависящей от насыщения железа. Поэтому уравнение возьмем в более общей форме:

$$U_m \sin(\omega t) = Ri + w \frac{d\Phi}{dt}.$$

Перенеся Ri в левую часть, будем иметь:

$$U_m \sin(\omega t) - Ri = w \frac{d\Phi}{dt},$$

или

$$\frac{U_m}{w} \sin(\omega t) - \frac{R}{w} i = \frac{d\Phi}{dt}. \quad (155,1)$$

Исследуем изменение потока

Пусть включение произведено в момент $t=t_1$; в этот момент $i=0$, а магнитный поток Φ равен потоку остаточного магнетизма Φ_0 .

Проинтегрируем уравнение (155,1) от $t=t_1$ (момента включения) до некоторого $t=t$;

$$-\frac{U_m}{w\omega} \cos(\omega t) + \frac{U_m}{w\omega} \cos(\omega t_1) - \frac{R}{w} \int_{t_1}^t i dt = \Phi - \Phi_0.$$

В момент включения и левая и правая части равны здесь нулю, причем в левой первый и второй члены дают в сумме тоже нуль.

Первый член

$$\frac{U_m}{w\omega} \cos(\omega t)$$

есть некоторый фиктивный магнитный поток, довольно близкий к действительно существующему при установившемся режиме потоку:

$$\Phi_{ycm} = \int -e dt = \int \frac{U_m \sin(\omega t) - Ri}{w} dt.$$

Второй член

$$\frac{U_m}{w\omega} \cos(\omega t_1)$$

есть постоянный магнитный поток, который однако же постепенно уравнивается растущим третьим членом.

Третий член выражает растущее с течением времени влияние падения напряжения в сопротивлении R . Если R очень мало, то этот член окажет влияние лишь через большой промежуток времени.

Вскоре же после включения в момент

$$t_2 = t_1 + \frac{T}{2}$$

этот член еще мал, и им можно пренебречь.

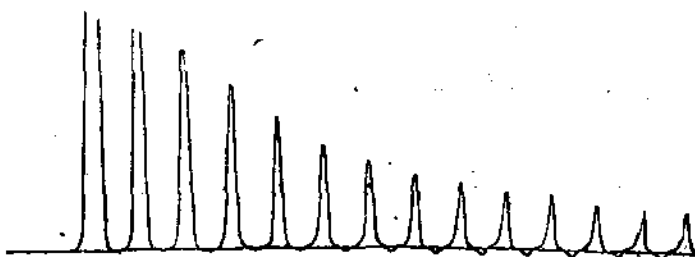
В этот момент будем иметь

$$\Phi = \Phi_0 + 2 \frac{U_m}{w\omega} \cos(\omega t_1).$$

Если включение произведено в момент перехода напряжения U через нуль.

то $\sin(\omega t_1) = 0$ и $\cos(\omega t_1) = 1$; тогда $\Phi = \Phi_0 + 2 \frac{U_m}{\omega \omega_0}$, следовательно, магнитный поток больше нормального потока $\Phi_{\text{н}}^{\text{н}}$ в два с лишним раза.

Мы знаем, что хотя железо трансформаторов работает в ненасыщенном состоянии, все же индукция в нем бывает 13 000—14 000 Г.



Фиг.

Фиг. 258.

Потоку, в два с лишним раза большему, соответствует и индукция, во столько же раз большая, т. е. выше 30 000 Г, а для такой индукции необходим громадный намагничивающий ток вследствие влияния загиба кривой намагничивания, влияния насыщения железа.

В этом так называемом „толчке тока“ и заключается опасность такого включения цепи с железом. Для уменьшения этого толчка цепь подключается к источнику переменного тока сначала через промежуточное сопротивление, которое затем закорачивается.

Фиг. 258 дает кривую тока трансформатора, когда включение произошло в неблагоприятный для этого момент перехода напряжения через нуль.

§ 156. Собственный период колебаний линии без потерь

Представим себе, что в линии передачи у конца ее ($x=0$) произошло длительное короткое замыкание, вследствие которого сила тока возросла до ненормальной величины, отчего предохранители в начале линии ($x=l$) перегорели¹ и линия оказалась отсоединенной от трансформатора у генератора и именно приблизительно в момент максимума силы тока, чему соответствует и максимальное магнитное поле около проводов. В предыдущих параграфах о неустановившемся режиме в цепи переменного тока уже упоминалось, что энергия, запасенная в этом поле, будет колебаться, превращаясь то в энергию электрического поля, заряжая линию до высокого напряжения, то опять в энергию магнитного поля. Колебания будут затухать вследствие траты энергии на нагревание проводов и на утечку.

Рассмотрим, с каким периодом будут происходить эти колебания в линии с распределенными и постоянными, причем для упрощения задачи рассмотрим незатухающие колебания, т. е. отвлечемся от потерь в линии, положив $R_{\text{км}} = 0$ и $G_{\text{км}} = 0$.

При этом условии

$$a = 0 \text{ и } b = \sqrt{X_{\text{км}} B_{\text{км}}},$$

и уравнения (140,11) приобретают такой вид:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= (\dot{A}_1 + \dot{A}_2) \cos(bx) + j(\dot{A}_1 - \dot{A}_2) \sin(bx), \\ i &= \sqrt{\frac{\dot{Y}_{\text{км}}}{\dot{Z}_{\text{км}}}} \left[(\dot{A}_1 - \dot{A}_2) \cos(bx) + j(\dot{A}_1 + \dot{A}_2) \sin(bx) \right]. \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\dot{A}_1 + \dot{A}_2 = \dot{C}_1$$

и

$$\dot{A}_1 - \dot{A}_2 = \dot{C}_2,$$

¹ Пусть читатель имеет в виду, что в практике длинная линия защищается не плавкими предохранителями, а автоматами.

так что

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{C}_1 \cos(bx) + j \dot{C}_2 \sin(bx), \\ i &= \sqrt{\frac{Y_{KM}}{Z_{KM}}} \left[\dot{C}_2 \cos(bx) + j \dot{C}_1 \sin(bx) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (156,1)$$

Заметим, что при $x=0$

$$\dot{U} = \dot{U}_2 = 0,$$

а при $x=l$, т. е. у генераторного конца,

$$i = i_1 = 0.$$

Из первого условия при $x=0$ имеем

$$\dot{C}_1 = 0,$$

так что

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= j \dot{C}_2 \sin(bx), \\ i &= \sqrt{\frac{Y_{KM}}{Z_{KM}}} \dot{C}_2 \cos(bx). \end{aligned} \right\} \quad (156,2)$$

$\dot{C}_2$ должно определяться или по данному $\dot{U} = \dot{U}_1$ при $x=l$ или по данному $i = i_2$ при $x=0$.

При $x=l$ сила тока, как указано, равна нулю, т. е.

$$\dot{C}_2 \cos(bl) = 0,$$

Если бы мы здесь C_2 положили равным нулю, то тогда $\dot{U}$ и i по всей линии равнялись бы нулю; поэтому надо положить

$$\cos(bl) = 0,$$

откуда

$$bl = (2n - 1) \frac{\pi}{2}, \quad (A)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$ любому целому числу.

Так как

$$b = \sqrt{X_{KM} B_{KM}},$$

то, подставляя сюда вместо X_{KM} и B_{KM} величины

$$\omega L_{KM} = 2\pi f_A L_{KM}$$

и

$$\omega C_{KM} = 2\pi f_A C_{KM},$$

где f_A есть число периодов уже не генератора, который отсоединен, а того переменного тока, который будет теперь, при колебаниях энергии, т. е. число периодов колебаний в линии, будем иметь

$$b = 2\pi f_A \sqrt{L_{KM} C_{KM}}$$

и из равенства (A) —

$$2\pi f_A l \sqrt{L_{KM} C_{KM}} = (2n - 1) \frac{\pi}{2}.$$

Вводя l под радикал, обозначая через L и C индуктивность и емкость всей линии, получаем

$$f_A = \frac{2n - 1}{4 \sqrt{LC}}. \quad (156,3)$$

Первое решение получим, положив $n = 1$; тогда

$$f_1 = \frac{1}{4\sqrt{LC}}.$$

Если бы L и C были сосредоточены, а не распределены по всей длине равномерно, мы имели бы из формулы Томсона:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Подставляя для n значения 2, 3, 4, 5, ..., будем получать частоты в 3, 5, 7, 9, ... раз большие; таким образом эти колебания имеют высшие составляющие нечетных порядков.

Из уравнения (156,2) мы видим, что значения $\dot{U}$ и $\dot{I}$ изменяются вдоль линии как $\sin$ и $\cos$ от аргумента, пропорционального расстоянию рассматриваемой точки от конца линии. Для составляющей первого порядка вся линия соответствует значению этого аргумента, равному $\frac{\pi}{2}$. Поэтому эти колебания называются колебаниями четвертью волны.

Наибольшая длина волны, которая может свободно возникнуть в линии, равна учетверенной длине линии.

У составляющей $(2n-1)$ -го порядка по длине линии располагаются $(2n-1)$ четвертей волны, причем у всех составляющих напряжение и сила тока сдвинуты друг относительно друга на четверть волны, т. е. где U имеет максимальное значение, там I равно нулю, и наоборот.

Введем такие величины:

$$L' = \frac{2}{\pi} L$$

и

$$C' = \frac{2}{\pi} C;$$

тогда

$$LC = \frac{\pi^2}{4} L'C'$$

и

$$f_1 = \frac{1}{4\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L'C'}}. \quad (156,4)$$

Введя величины L' и C' , мы получаем, таким образом, возможность пользоваться формулой Томсона, подставляя в нее эти величины. L' и C' называются иногда „действующими“ значениями индуктивности и емкости.

Представим теперь себе другой случай. Пусть каким-либо образом колебания возникли в линии, отсоединенной от обоих трансформаторов, т. е. как у генератора, так и у нагрузки.

Тогда в уравнениях (156,1) мы будем иметь при $x=0$ и при $x=l$

$$\dot{I} = 0.$$

Первое условие дает, что

$$\dot{C}_2 = 0$$

и что, следовательно,

$$\dot{I} = j \sqrt{\frac{\dot{Y}_{\kappa\kappa}}{Z_{\kappa\kappa}}} \cdot \dot{C}_1 \sin(bx);$$

второе условие дает, что

$$\sin(bl) = 0,$$

откуда

$$bl = n\pi,$$

где n — любое целое число. Произведя те же самые подстановки, что и в предыдущем случае, получаем

$$f_{\lambda} = \frac{n}{2\sqrt{LC}}.$$

Эти колебания могут содержать, таким образом, и четные составляющие. Сила тока на обоих концах линии равна нулю, а напряжение есть максимум; поэтому эти колебания называются колебаниями полуволной.

ГЛАВА ДЕВЯТНАДЦАТАЯ

НАИБОЛЕЕ ОБЩАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

§ 157. Общие уравнения и исследование их

В гл. XVIII мы занимались интегрированием дифференциальных уравнений тока и напряжения для цепей с сосредоточенными постоянными (R , C и L), причем там было указано, что разница по существу между этим приемом исследования переменного тока и приемом, которым выводился закон Ома в гл. II, заключалась в том, что в гл. II мы заранее задавались функциональной зависимостью тока или напряжения от времени, именно считали их синусоидальными функциями последнего, а в гл. XVIII мы этого предположения не делали, а потому и получили решение более общее, охватывающее два тока, свободный и вынужденный.

То же самое сделаем мы в настоящей главе по отношению к дифференциальным уравнениям тока в цепи с распределенными постоянными в отличие от предыдущей главы, где мы с самого начала исследования ввели векторы, т. е. синусоидальные токи.

При выводе уравнений (137,1) и (137,2) было указано, что они применимы к любому случаю тока в цепи с распределенными постоянными. Из них мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dx} &= lR_{km} + L_{km} \frac{di}{dt} \\ \frac{di}{dx} &= uG_{km} + C_{km} \frac{du}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (157,1)$$

Сделаем, как и раньше, допущение, что R_{km} , L_{km} , G_{km} и C_{km} постоянны вдоль линии.

Дифференцируем первое уравнение по x , второе по t и подставляем в первое место

$$\frac{di}{dx} \text{ и } \frac{d^2i}{dt \cdot dx}$$

их выражения из второго; после этого получаем

$$\frac{d^2u}{dx^2} = R_{km}G_{km}u + (R_{km}C_{km} + L_{km}G_{km}) \frac{du}{dt} + L_{km}C_{km} \frac{d^2u}{dt^2} \quad (157,2)$$

и аналогично получим

$$\frac{d^2i}{dx^2} = R_{km}G_{km}i + (R_{km}C_{km} + L_{km}G_{km}) \frac{di}{dt} + L_{km}C_{km} \frac{d^2i}{dt^2}. \quad (157,3)$$

Таким образом дифференциальные уравнения для силы тока и напряжения одинаковы; следовательно, и сами эти величины — сила тока и напряжение — выражаются уравнениями, отличающимися только постоянными интегрирования; последние определяются из начальных и конечных условий.

Так как в уравнениях (157, 2) и (157, 3) линейно связаны функции с их первыми и вторыми производными, то интегралом их является экспоненциальная функция, т. е. для силы тока, например,

$$i = A \cdot e^{-mx - nt}, \quad (157, 4)$$

Можно было бы вначале поставить у m и n плюсы, тогда минусы, выражающие „затухание“, выявились бы после.

Подстановка этого выражения в дифференциальное уравнение для i дает соотношение между m и n :

$$m^2 = R_{KM} G_{KM} - (R_{KM} C_{KM} + G_{KM} L_{KM}) n + L_{KM} C_{KM} n^2 = (n L_{KM} - R_{KM})(n C_{KM} - G_{KM}); \quad (157, 5)$$

подстановка же (157, 4) в первое из уравнений (156, 1) дает

$$\frac{du}{dx} = (R_{KM} - n L_{KM}) A \cdot e^{-mx - nt}$$

и после интегрирования

$$u = \frac{n L_{KM} - R_{KM}}{m} A \cdot e^{-mx - nt},$$

или

$$n = \frac{n L_{KM} - R_{KM}}{m} i,$$

откуда

$$\frac{u}{i} = Z = \frac{n L_{KM} - R_{KM}}{m},$$

или, принимая во внимание уравнение (157, 5),

$$\frac{u}{i} = Z = \sqrt{\frac{n L_{KM} - R_{KM}}{n C_{KM} - G_{KM}}}. \quad (157, 7)$$

Величину Z называют аналогично ранее разобранному случаю „волновым сопротивлением“.

Таким образом

$$u = iZ. \quad (157, 8)$$

Уравнения

и

$$\left. \begin{aligned} i &= A \cdot e^{-mx - nt} \\ u &= \frac{n L_{KM} - R_{KM}}{m} A \cdot e^{-mx - nt} \end{aligned} \right\} \quad (157, 9)$$

и являются наиболее общей формой выражения меняющихся как во времени, так и в пространстве (вдоль линии) напряжения и силы тока в цепи с равномерно распределенными R , G , L , и C ; A , m и n суть постоянные интегрирования, определяемые из условий задачи, причем m и n связаны соотношением (157, 5).

Заметим теперь же, что, положив $x=0$, мы простым преобразованием можем получить уравнения для цепей с сосредоточенными R и L .

От величин m и n зависит самый характер изменения u и i во времени и пространстве; читателю на основании всего предыдущего ясно, что, для того чтобы в изменениях u и i во времени была периодичность, величина n должна быть мнимой; далее, чтобы u и i были периодичны и в пространстве, величина m должна быть мнимой.

Из предыдущего мы также знаем, что всякий неустановившийся процесс или режим переходит в тот или иной установившийся, причем происходит затухание колебаний большого или меньшего запаса энергии; что периодичность в пространстве даже в установившемся режиме, как изложено в предшествовавшем, связана с некоторым затуханием; таким образом еще до исследования уравнений (157,9) неустановившегося режима мы можем уже предположить, что самой общей формой для величин m и n будет комплексная.

Положим

$$m = a + jb$$

и выразим с помощью этого соотношения и уравнения (157,5) величину n .

Итак

$$(a + jb)^2 = R_{KM} G_{KM} - (R_{KM} C_{KM} + G_{KM} L_{KM}) n + L_{KM} C_{KM} n^2,$$

или

$$n^2 - \frac{R_{KM} C_{KM} + G_{KM} L_{KM}}{L_{KM} C_{KM}} n + \frac{R_{KM} G_{KM} - (a + jb)^2}{L_{KM} C_{KM}} = 0,$$

или еще

$$n^2 - \left(\frac{R_{KM}}{L_{KM}} + \frac{G_{KM}}{C_{KM}} \right) n + \frac{R_{KM} G_{KM} - (a + jb)^2}{L_{KM} C_{KM}} = 0.$$

Отсюда

$$n = \left(\frac{R_{KM}}{2L_{KM}} + \frac{G_{KM}}{2C_{KM}} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{R_{KM}}{2L_{KM}} + \frac{G_{KM}}{2C_{KM}} \right)^2 - \frac{R_{KM} G_{KM} - (a + jb)^2}{L_{KM} C_{KM}}}.$$

Введем такие обозначения

$$\frac{R_{KM}}{2L_{KM}} + \frac{G_{KM}}{2C_{KM}} = e, \quad (157,10)$$

$$\sqrt{\left(\frac{R_{KM}}{2L_{KM}} + \frac{G_{KM}}{2C_{KM}} \right)^2 - \frac{R_{KM} G_{KM} - (a + jb)^2}{L_{KM} C_{KM}}} = \delta + j\beta, \quad (A)$$

где сами δ и β — действительные величины. Таким образом

$$n = e \pm (\delta + j\beta). \quad (157,11)$$

Возвратим (A) в квадрат и приравняем друг другу обе действительные части и также мнимые, после чего получим:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{R_{KM}}{2L_{KM}} + \frac{G_{KM}}{2C_{KM}} \right)^2 - \frac{R_{KM} G_{KM} - a^2 + b^2}{L_{KM} C_{KM}} &= \delta^2 - \beta^2 \\ \frac{ab}{L_{KM} C_{KM}} &= \delta\beta. \end{aligned} \right\} \quad (157,12)$$

Положим

$$\left(\frac{R_{KM}}{2L_{KM}} + \frac{G_{KM}}{2C_{KM}} \right)^2 - \frac{R_{KM} G_{KM}}{L_{KM} C_{KM}} = \left(\frac{R_{KM}}{2L_{KM}} - \frac{G_{KM}}{2C_{KM}} \right)^2 = k^2. \quad (157,13)$$

Тогда мы получим вместо двух последних уравнений для δ и β следующие:

$$\left. \begin{aligned} \delta^2 - \beta^2 - k^2 &= \frac{a^2 - b^2}{L_{KM} C_{KM}}, \\ \delta\beta &= \frac{ab}{L_{KM} C_{KM}}. \end{aligned} \right\} \quad (157,14)$$

В выражениях u и i переменным является множитель

$$e^{-mx - nt},$$

Подставляя сюда вместо t и x их комплексные выражения, мы получим два множителя:

$$e^{-ax - (x \pm \beta t)^2} e^{-j(bx \pm \beta t)},$$

Здесь второй множитель разлагается в тригонометрические функции от аргумента $b x \pm \beta t$ и выражает периодичность во времени и пространстве, а первый множитель выражает затухание тоже и во времени и в пространстве. Если второй множитель для точки x' и момента t' имеет ту же величину, что и для точки x в момент t , то мы и говорим о движении волны вдоль линии со скоростью

$$w = \frac{x' - x}{t' - t}.$$

Так как, очевидно, при этом

$$bx \pm \beta t = bx' \pm \beta t',$$

то скорость движения волны

$$w = \frac{x' - x}{t' - t} = \pm \frac{\beta}{b}. \quad (157,15)$$

Для определения этой скорости решим систему уравнений (156,14).

Подставляя из второго уравнения β в первое, получаем после преобразования

$$\beta^4 + \left(k^2 + \frac{a^2 - b^2}{L_{KM} C_{KM}} \right) \beta^2 - \frac{a^2 b^2}{L_{KM}^2 C_{KM}^2} = 0.$$

Отсюда

$$\beta = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(k^2 + \frac{a^2 - b^2}{L_{KM} C_{KM}} \right)^2 + \frac{4a^2 b^2}{L_{KM}^2 C_{KM}^2}} - \left(k^2 + \frac{a^2 - b^2}{L_{KM} C_{KM}} \right) \right]}. \quad (157,16)$$

Перед вторым радикалом, под корнем, мы берем знак плюс, потому что β должна быть действительной величиной по условию.

На основании последней формулы для β имеем, что скорость движения волны

$$w = \pm \sqrt{\frac{1}{2b^2} \left[\sqrt{\left(k^2 + \frac{a^2 - b^2}{L_{KM} C_{KM}} \right)^2 + \frac{4a^2 b^2}{L_{KM}^2 C_{KM}^2}} - \left(k^2 + \frac{a^2 - b^2}{L_{KM} C_{KM}} \right) \right]}. \quad (157,17)$$

Если мы имеем в линии выполненным условие (142,3) минимума затухания, то $k=0$. Если мы пренебрегаем потерями, то и k и a равны нулю.

В обоих случаях из последней формулы для w получаем уже знакомую нам формулу

$$w = \pm \frac{1}{\sqrt{L_{KM} C_{KM}}}.$$

Из условия

$$\beta t = 2\pi$$

получаем время, в течение которого напряжение и сила тока претерпевают весь цикл изменений, возвращаясь затем, если отвлечься от затухания, к прежним значениям

$$T = \frac{2\pi}{\beta}.$$

Из условия же

$$bx = 2\pi$$

получаем

$$\lambda = \frac{2\pi}{b},$$

длину, на которой происходит весь цикл изменений, т. е. длину волны

Чем больше b , тем короче волна, и наоборот.

Перейдем теперь к интегралу, выражающему i :

$$i = A \cdot e^{-mx - nt}.$$

Здесь может быть несколько частных случаев в зависимости от знаков при действительных и мнимых частях m и n , ибо может быть и

$$m = \pm a \pm jb$$

$$n = \varepsilon \pm \delta \pm j\beta.$$

Однако уравнение (157,14)

$$\delta\beta = \frac{ab}{L_{KM} C_{KM}}$$

вносит сюда то ограничение, что если a и b имеют одинаковые знаки, то и δ и β должны иметь одинаковые знаки, и если a и b имеют разные знаки, то и δ и β тоже имеют разные знаки.

Забудем, что ε известно и определяется уравнением (157,10). Таким образом возможны следующие восемь комбинаций величин a , b , δ и β с разными знаками, одинаково удовлетворяющие исходному дифференциальному уравнению:

$$\left. \begin{array}{ll} 1) & m = +a + jb, \quad n = \varepsilon - \delta - j\beta, \\ 2) & \quad +a - jb, \quad \varepsilon - \delta + j\beta, \\ 3) & \quad -a - jb, \quad \varepsilon - \delta - j\beta, \\ 4) & \quad -a + jb, \quad \varepsilon - \delta + j\beta, \\ 5) & \quad -a + jb, \quad \varepsilon + \delta - j\beta, \\ 6) & \quad -a - jb, \quad \varepsilon + \delta + j\beta, \\ 7) & \quad +a - jb, \quad \varepsilon + \delta - j\beta, \\ 8) & \quad +a + jb, \quad \varepsilon + \delta + j\beta. \end{array} \right\} \quad (157;18)$$

Подставим эти значения m и n в наш интеграл и сгруппируем полученные, таким образом, частные интегралы, каждый с его особой произвольной постоянной A , попарно, так что получим четыре таких пары. Первый и второй случай значений m и n дают:

$$\begin{aligned} i_1 &= A_1 e^{-(a+jb)x - (\varepsilon - \delta - j\beta)t} + A_2 e^{-(a-jb)x - (\varepsilon - \delta + j\beta)t} = \\ &= e^{-ax - (\varepsilon - \delta)t} [A_1 e^{j(\beta t - bx)} + A_2 e^{-j(\beta t - bx)}] = \\ &= e^{-ax} \cdot e^{-(\varepsilon - \delta)t} [A_1 \cos(\beta t - bx) + jA_1 \sin(\beta t - bx) + \\ &\quad + A_2 \cos(\beta t - bx) - jA_2 \sin(\beta t - bx)] = \\ &= e^{-ax} \cdot e^{-(\varepsilon - \delta)t} [(A_1 + A_2) \cos(\beta t - bx) + j(A_1 - A_2) \sin(\beta t - bx)] = \\ &= e^{-ax} \cdot e^{-(\varepsilon - \delta)t} [B_1 \cos(\beta t - bx) + B_2 \sin(\beta t - bx)] = \\ &= e^{-ax} \cdot e^{-(\varepsilon - \delta)t} \cdot C_1 \sin(\beta t - bx - \phi_1), \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\phi_1 = \arctg \frac{B_1}{B_2}$$

и

$$C_1 = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}.$$

а

$$B_1 = A_1 + A_2$$

и

$$B_2 = j(A_1 - A_2). \quad (2)$$

Третий и четвертый случаи значений m и n дают

$$i_2 = A_3 \cdot e^{(a+jb)x - (\varepsilon - \delta - j\beta)t} + A_4 \cdot e^{(a-jb)x - (\varepsilon - \delta + j\beta)t},$$

или после подобных же преобразований, полагая

$$A_3 + A_4 = B_3$$

и

$$j(A_3 - A_4) = B_4.$$

а затем

$$C_1 = \sqrt{B_3^2 + B_4^2}$$

и т. д.,

$$i_2 = e^{ax} \cdot e^{-(\epsilon + \delta)t} \cdot C_2 \sin(\beta t + bx + \phi_2). \quad (\text{II})$$

Пятый и шестой случаи дают

$$\begin{aligned} i_3 &= A_5 e^{(a-jb)x - (\epsilon + \delta - j\beta)t} + A_6 e^{(a+jb)x - (\epsilon + \delta + j\beta)t} = \\ &= e^{ax} \cdot e^{-(\epsilon + \delta)t} \cdot C_3 \sin(\beta t - bx + \phi_3) \end{aligned} \quad (\text{III})$$

при аналогичных заменах.

Последняя пара частных интегралов дает

$$\begin{aligned} i_4 &= A_7 e^{-(a-jb)x - (\epsilon + \delta - j\beta)t} + A_8 e^{-(a+jb)x - (\epsilon + \delta + j\beta)t} = \\ &= e^{-ax} \cdot e^{-(\epsilon + \delta)t} \cdot C_4 \sin(\beta t + bx + \phi_4). \end{aligned} \quad (\text{IV})$$

Складывая все четыре выражения, получим полный интеграл

$$i = e^{-(\epsilon - \delta)} [C_1 e^{-ax} \sin(\beta t - bx + \phi_1) + C_2 e^{ax} \sin(\beta t + bx + \phi_2)] + \\ + e^{-(\epsilon + \delta)} [C_3 e^{ax} \sin(\beta t - bx + \phi_3) + C_4 e^{-ax} \sin(\beta t + bx + \phi_4)]. \quad (157, 19)$$

Все четыре члена здесь представляют каждый движущуюся волну.

Постоянные C и величины a , b , β и δ определяются из условий задачи или так называемых „пограничных условий“; кроме того, мы имеем два уравнения (157, 14), связывающие последние четыре величины.

Из только что полученного выражения для i получается легко и его выражение при установившемся режиме, например, для случая включения переменного тока на линию. Последние два члена имеют множитель $e^{-(\epsilon + \delta)t}$, где ϵ и δ — положительные числа, так что этот множитель при всяком значении δ выражает затухание во времени двух последних волн; чтобы первые две волны не затухали во времени, должно быть

$$\epsilon - \delta = 0$$

или

$$\delta = \epsilon.$$

Далее, β должно быть равным ω приложенного к нашей линии переменного тока.

Таким образом, после того как затухнут последние две волны, сила тока в линии выразится первыми двумя членами, т. е. тем уравнением (140, 15).

Подобно тому как первая волна в полном выражении i называется отраженной волной для второй, третья волна есть отраженная для четвертой.

Из выражения (157, 19) мы видим, что в то же время как обе волны, представляющие устойчивый режим, имеют амплитуды, убывающие по мере продвижения волны по экспоненциальному закону, обе волны, представляющие переходящий ток, имеют амплитуды, растущие по тому же закону по мере продвижения каждой волны.

Чтобы выражение для i было пригодно для любого случая функциональной зависимости тока от времени при пограничных условиях или при установившемся режиме, мы должны сделать последнее обобщение и представить i в виде ряда Фурье, т. е. так:

$$\begin{aligned} i &= \sum_n e^{-(\epsilon - \delta_n)t} \{ C_n e^{-a_n x} \sin(\beta_n t - b_n x + \phi_n) + \\ &+ C_n e^{a_n x} \sin(\beta_n t + b_n x + \phi_n) \} + \\ &+ e^{-(\epsilon + \delta_n)t} \{ C_n e^{a_n x} \sin(\beta_n t - b_n x + \phi_n) + \\ &+ C_n e^{-a_n x} \sin(\beta_n t + b_n x + \phi_n) \}. \end{aligned}$$

Теперь следует получить выражение для напряжения.

Уравнение (157,6) теперь после разложения нами m и n примет восемь различающихся комбинацией знаков форм.

Группируя их по два, получаем:

$$u_1 = \frac{(e - \delta - j\beta) L_{KM} - R_{KM}}{a + jb} A_1 e^{-(a + jb)x - (e - \delta - j\beta)t} + \\ + \frac{(e - \delta + j\beta) L_{KM} - R_{KM}}{a - jb} A_2 e^{-(a - jb)x - (e - \delta + j\beta)t}.$$

Освобождаясь от мнимости в знаменателе и вводя тригонометрические функции вместо показательных, имеем

$$u_1 = e^{-ax - (e - \delta)t} \left\{ \left\{ \frac{[(e - \delta) L_{KM} - R_{KM}] a - b\beta L_{KM}}{a^2 + b^2} - \right. \right. \\ - j \frac{[(e - \delta) L_{KM} - R_{KM}] b + a\beta L_{KM}}{a^2 + b^2} \left. \right\} A_2 [\cos(\beta t - bx) + j \sin(\beta t - bx)] + \\ + \left\{ \frac{[(e - \delta) L_{KM} - R_{KM}] a - b\beta L_{KM}}{a^2 + b^2} + \right. \\ + j \frac{[(e - \delta) L_{KM} - R_{KM}] b + a\beta L_{KM}}{a^2 + b^2} \left. \right\} A_2 [\cos(\beta t - bx) - j \sin(\beta t - bx)] \left. \right\}.$$

Сделаем подстановку:

$$\frac{[(e - \delta) L_{KM} - R_{KM}] a - b\beta L_{KM}}{a^2 + b^2} = -M,$$

$$\frac{[(e - \delta) L_{KM} - R_{KM}] b + a\beta L_{KM}}{a^2 + b^2} = -N,$$

раскроем скобки, сгруппируем члены с $\cos$ и с $\sin$ и примем во внимание соотношения (а), после чего выражение для u_1 представится так:

$$u_1 = e^{-ax - (e - \delta)t} [(NB_2 - MB_1) \cos(\beta t - bx) - \\ - (MB_2 + NB_1) \sin(\beta t - bx)].$$

Подобным же образом из i_2 получаем u_2 ; при этом, так как третий и четвертый (157,18) случаи значений m отличаются от первого и второго только знаком минус перед всем m , а n то же самое, то мы получим те же самые величины M и N , и u_2 выразится так:

$$u_2 = e^{ax - (e - \delta)t} [(NB_4 - MB_3) \cos(\beta t + bx) - \\ - (MB_4 + NB_3) \sin(\beta t + bx)].$$

Пятый и шестой случаи в (156,18) отличаются от первого и второго переменной знака у a и δ ; поэтому при преобразовании у нас получатся выражения:

$$\frac{[(e + \delta) L_{KM} - R_{KM}] a + b\beta L_{KM}}{a^2 + b^2} = M',$$

$$\frac{[(e + \delta) L_{KM} - R_{KM}] b - a\beta L_{KM}}{a^2 + b^2} = -N',$$

после чего будем иметь

$$u_3 = e^{ax - (e + \delta)t} \{ (N'B_5 - M'B_6) \cos(\beta t - bx) - \\ - (M'B_5 + N'B_6) \sin(\beta t - bx) \},$$

и подобным же образом находим

$$u_4 = e^{-ax - (e + \delta)t} \{ (N'B_7 - M'B_8) \cos(\beta t + bx) - \\ - (M'B_7 + N'B_8) \sin(\beta t + bx) \}.$$

Сумма всех этих четырех u_n и дает нам все напряжение u .

В общем случае в правой части будет стоять сумма составляющих разных порядков.

§ 158. Случай постоянного тока

Не всегда удобно брать уравнения (157,19) для тока и аналогичное для напряжения за исходную точку при исследовании различных случаев, иногда лучше исходить из первоначальных уравнений:

$$i = A \cdot e^{-mx - nt},$$

$$u = \frac{nL_{KM} - R_{KM}}{m} A e^{-mx - nt} = \sqrt{\frac{nL_{KM} - R_{KM}}{nC_{KM} - G_{KM}}} A e^{-mx - nt} = Zi,$$

$$m^2 = (nL_{KM} - R_{KM})(nC_{KM} - G_{KM}).$$

Представим себе, что на линию с равномерно распределенными постоянными включен источник постоянного тока, и мы рассматриваем установившийся режим; тогда в этих формулах надо положить

$$n = 0,$$

ибо во времени никакого изменения теперь нет. В этом случае из соотношения (157,5), связывающего m и n , получаем, что

$$m = \pm \sqrt{R_{KM} G_{KM}}$$

и

$$Z = \frac{nL_{KM} - R_{KM}}{m} = \mp \sqrt{\frac{R_{KM}}{G_{KM}}}.$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} i &= A_1 e^{-x\sqrt{R_{KM} G_{KM}}} + A_2 e^{+x\sqrt{R_{KM} G_{KM}}}, \\ u &= \sqrt{\frac{R_{KM}}{G_{KM}}} \left(A_2 e^{+x\sqrt{R_{KM} G_{KM}}} - A_1 e^{-x\sqrt{R_{KM} G_{KM}}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (158,1)$$

Таковы уравнения цепи постоянного тока с равномерно распределенной утечкой.

Всякий подводный или подземный кабель, питаемый постоянным током, или рельсы электрического трамвая, работающего на таком же токе, представляют такую цепь.

Рассмотрим лишь один случай из различных возможных при исследовании этих уравнений.

Пусть линия замкнута в какой-нибудь точке на расстоянии $x = x_1$ от конца линии на сопротивление R_1 ; тогда

$$\left| \frac{u}{i} \right|_{x=x_1} = R_1,$$

или

$$\frac{A_2 e^{+x_1 \sqrt{R_{KM} G_{KM}}} - A_1 e^{-x_1 \sqrt{R_{KM} G_{KM}}}}{A_1 e^{-x_1 \sqrt{R_{KM} G_{KM}}} + A_2 e^{+x_1 \sqrt{R_{KM} G_{KM}}}} = R_1 \sqrt{\frac{G_{KM}}{R_{KM}}}.$$

Отсюда

$$\frac{A_2 e^{+x_1 \sqrt{R_{KM} G_{KM}}}}{A_1 e^{-x_1 \sqrt{R_{KM} G_{KM}}}} = \frac{1 + R_1 \sqrt{\frac{G_{KM}}{R_{KM}}}}{1 - R_1 \sqrt{\frac{G_{KM}}{R_{KM}}}},$$

или

$$A_2 = A_1 e^{-2x_1 \sqrt{R_{KM} G_{KM}}} \cdot \frac{1 + R_1 \sqrt{\frac{G_{KM}}{R_{KM}}}}{1 - R_1 \sqrt{\frac{G_{KM}}{R_{KM}}}},$$

таким образом

$$i = A_1 \left\{ e^{-x \sqrt{R_{KM} G_{KM}}} + e^{(x-2x_1) \sqrt{R_{KM} G_{KM}}} \cdot \frac{1 + R_1 \sqrt{\frac{G_{KM}}{R_{KM}}}}{1 - R_1 \sqrt{\frac{G_{KM}}{R_{KM}}}} \right\}, \quad (158,2)$$

$$u = \sqrt{\frac{R_{KM}}{G_{KM}}} \cdot A_1 \cdot \left\{ e^{(x-2x_1) \sqrt{R_{KM} G_{KM}}} \cdot \frac{1 + R_1 \sqrt{\frac{G_{KM}}{R_{KM}}}}{1 - R_1 \sqrt{\frac{G_{KM}}{R_{KM}}}} - e^{-x \sqrt{R_{KM} G_{KM}}} \right\}. \quad (158,3)$$

При расчетах с линиями постоянного тока с равномерно распределенной утечкой тоже часто употребляются гиперболические функции. Переход к ним в уравнениях (158,1) совершенно аналогичен переходу к ним в случае переменного тока.

Пусть нам даны напряжения U_2 и сила тока I_2 на конце линии, т. е. при $x=0$. Из уравнений для i и u имеем при $x=0$:

$$A_1 + A_2 = I_2,$$

$$A_2 - A_1 = U_2 \sqrt{\frac{G_{KM}}{R_{KM}}}.$$

Отсюда

$$A_1 = \frac{I_2 - U_2 \sqrt{\frac{G_{KM}}{R_{KM}}}}{2},$$

$$A_2 = \frac{I_2 + U_2 \sqrt{\frac{G_{KM}}{R_{KM}}}}{2}.$$

Подставляя эти значения A_1 и A_2 в уравнения для i и u и группируя надлежащим образом члены, получаем

$$i = I_2 \frac{e^{+x \sqrt{R_{KM} G_{KM}}} + e^{-x \sqrt{R_{KM} G_{KM}}}}{2} + U_2 \sqrt{\frac{G_{KM}}{R_{KM}}} \frac{e^{+x \sqrt{R_{KM} G_{KM}}} - e^{-x \sqrt{R_{KM} G_{KM}}}}{2},$$

или

$$i = I_2 \operatorname{ch}(x \sqrt{R_{KM} G_{KM}}) + U_2 \sqrt{\frac{G_{KM}}{R_{KM}}} \operatorname{sh}(x \sqrt{R_{KM} G_{KM}})$$

и аналогично

$$u = U_2 \operatorname{ch}(x \sqrt{R_{KM} G_{KM}}) + I_2 \sqrt{\frac{R_{KM}}{G_{KM}}} \operatorname{sh}(x \sqrt{R_{KM} G_{KM}}).$$

(158,4)

§ 159. Стоячие волны

Если мы в уравнениях (157,19) и других положим $a=0$, то получим уравнения стоячих волн в линии.

Из уравнения

$$\frac{ab}{L_{KM}C_{KM}} = \delta\beta$$

в этом случае мы имеем, что или $\delta=0$ или $\beta=0$. Обращаясь к уравнению (157,16) для β , мы видим, что при $a=0$ будет β равняться нулю или нет, зависит от того, какой знак имеет второй член под общим радикалом, так как мы условились уже для первого радикала брать лишь его арифметическое значение. Таким образом здесь могут быть два случая:

$$\frac{b^2}{L_{KM}C_{KM}} > k^2,$$

и

$$\frac{b^2}{L_{KM}C_{KM}} < k^2.$$

Во втором случае $\beta=0$, и волны не являются периодическим явлением во времени, а затухают аперiodично.

Случай, когда

$$\frac{b^2}{L_{KM}C_{KM}} = k^2,$$

называют критическим; для него

$$b = k \sqrt{L_{KM}C_{KM}}$$

и длина волны

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{k \sqrt{L_{KM}C_{KM}}}.$$

Как читатель может легко убедиться, взяв постоянные для любой линии передачи и подставив их в эту формулу, эта длина во много раз больше, чем длина существующих линий передач, а наибольшая длина волны, которая может установиться в линии без постороннего источника тока, в четыре раза больше длины линии и оказывается много меньше λ_0 . Таким образом эти волны не могут существовать в линии, если к ней не приложен посторонний источник тока.

В случае же

$$\frac{b^2}{L_{KM}C_{KM}} > k^2$$

мы имеем

$$\beta = \sqrt{\frac{b^2}{L_{KM}C_{KM}} - k^2},$$

и следовательно, $\delta=0$.

Уравнение (157,19) для силы тока принимает теперь такой вид:

$$i = e^{-at} [C_1 \sin(\beta t - bx + \phi_1) + C_2 \sin(\beta t + bx + \phi_2)];$$

что касается третьей и четвертой составляющих волн в уравнении (157,19), то, как легко видеть, вследствие обоих условий $a=0$ и $\delta=0$ они тождественны с первой и второй соответственно. Аналогично получаем уравнение для напряжения.

Эти уравнения суть уравнения стоячих волн в линии, затухающих с течением времени.

Мы ограничимся данным выше приложением общих уравнений линий с распределенными постоянными к нескольким случаям, вообще же область их применения весьма широка — они охватывают и импульсы тока, и блуждающие волны, и свободные колебания и находят поэтому частое применение в технике высоких напряжений для анализа перечисленных явлений.

§ 160. Упрощенное решение основных дифференциальных уравнений

Неустановившийся режим исследуют часто при помощи следующего упрощенного решения.

Преобразуем уравнения (157,2) и (157,3) так, чтобы исчезла первая производная по времени; для этого прежде всего положим

$$u = v \cdot e^{-at},$$

где v есть какая-то функция времени и расстояния. Тогда

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{dv}{dt} \cdot e^{-at} - a \cdot v \cdot e^{-at}, \\ \frac{d^2u}{dt^2} &= \frac{d^2v}{dt^2} e^{-at} - 2a \frac{dv}{dt} e^{-at} + a^2 \cdot v \cdot e^{-at}, \\ \frac{d^2u}{dx^2} &= \frac{d^2v}{dx^2} \cdot e^{-at}.\end{aligned}$$

Уравнение (157,2) вместе с этим приобретает вид

$$\begin{aligned}\frac{d^2v}{dx^2} &= [R_{KM} G_{KM} - a(R_{KM} C_{KM} + L_{KM} G_{KM}) + a^2 L_{KM} C_{KM}] \cdot v + \\ &+ [R_{KM} C_{KM} + L_{KM} G_{KM} - 2a L_{KM} C_{KM}] \cdot \frac{dv}{dt} + L_{KM} C_{KM} \cdot \frac{d^2v}{dt^2}.\end{aligned}$$

Чтобы первая производная исчезла из этого уравнения, нужно, чтобы

$$R_{KM} C_{KM} + L_{KM} G_{KM} - 2a L_{KM} C_{KM} = 0,$$

откуда

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{R_{KM}}{L_{KM}} + \frac{G_{KM}}{C_{KM}} \right),$$

т. е. a должна равняться ϵ , введенному нами уравнением (157,10):

$$a = \epsilon.$$

Полагая a равным не комплексу, мы тем самым, как читателю должно быть ясно после сказанного в начале § 157, ограничиваем решение случаем неустановившегося режима.

Множитель при v становится равным теперь

$$R_{KM} G_{KM} - \frac{(R_{KM} C_{KM} + L_{KM} G_{KM})^2}{2 L_{KM} C_{KM}} + \frac{(R_{KM} C_{KM} + L_{KM} G_{KM})^2}{4 L_{KM} C_{KM}} = - \frac{L_{KM} C_{KM}}{4} \left(\frac{R_{KM}}{L_{KM}} - \frac{G_{KM}}{C_{KM}} \right)^2,$$

что, принимая во внимание уравнение (157,13), равно

$$- L_{KM} C_{KM} k^2.$$

Здесь делают допущение, что в рассматриваемой линии имеет место соотношение (142,3):

$$\frac{R_{KM}}{L_{KM}} = \frac{G_{KM}}{C_{KM}}.$$

Для воздушных линий высокого напряжения, где $C_{км}$ невелико, а $L_{км}$ больше, чем в кабелях, это соотношение можно считать приближенно имеющим место в действительности.

В этом случае

$$k = 0,$$

и уравнение для v принимает вид

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = L_{км} C_{км} \cdot \frac{d^2 v}{dt^2}.$$

Вводя уже знакомую нам величину

$$w = \frac{1}{\sqrt{L_{км} C_{км}}},$$

можем написать

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = w^2 \frac{d^2 v}{dx^2}.$$

Решением этого уравнения является

$$v = f_1(x - wt) + f_2(x + wt),$$

где вид функций f_1 и f_2 определяется из заданных условий. Таким образом

$$u = e^{-at} [f_1(x - wt) + f_2(x + wt)]; \quad (160,1)$$

$$\frac{du}{dt} = -e \cdot e^{-at} [f_1(x - wt) + f_2(x + wt)] + e^{-at} \left[\frac{\partial f_1(x - wt)}{\partial t} + \frac{\partial f_2(x + wt)}{\partial t} \right].$$

Выражение в последних квадратных скобках, очевидно, можно заменить следующим:

$$-w \cdot \frac{\partial f_1(x - wt)}{\partial x} + w \cdot \frac{\partial f_2(x + wt)}{\partial x};$$

таким образом, отбрасывая при писании промежуточных уравнений скобки $(x - wt)$ и $(x + wt)$ как ненужные, имеем из уравнения (157,1) второго:

$$\frac{dl}{dx} = G_{км} \cdot e^{-at} (f_1 + f_2) - C_{км}' \cdot e^{-at} (f_1 + f_2) + C_{км} \cdot e^{-at} \left(-w \frac{\partial f_1}{\partial x} + w \frac{\partial f_2}{\partial x} \right),$$

или

$$\frac{dl}{dx} = e^{-at} (G_{км} - e C_{км}) (f_1 + f_2) - e^{-at} \cdot w \cdot C_{км} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial x} \right).$$

Здесь вследствие условия $k = 0$

$$G_{км} - e C_{км} = C_{км} \left[\frac{G_{км}}{C_{км}} - \frac{1}{2} \left(\frac{R_{км}}{L_{км}} + \frac{G_{км}}{C_{км}} \right) \right] = \frac{C_{км}}{2} \left(\frac{G_{км}}{C_{км}} - \frac{R_{км}}{L_{км}} \right) = 0,$$

так что

$$\frac{dl}{dx} = -e^{-at} \cdot w \cdot C_{км} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial x} \right).$$

Изменим отсчет расстояния x на обратный: будем отсчитывать его не от конца линии, а от начала; тогда dx войдет в уравнение с обратным знаком; подставляя затем вместо w его величину и интегрируя, получим

$$l = e^{-at} \sqrt{\frac{C_{км}}{L_{км}}} [f_1(x - wt) - f_2(x + wt)]. \quad (160,2)$$

Величина $\sqrt{\frac{L_{KM}}{C_{KM}}}$, обратная коэффициенту перед скобками, есть волновое сопротивление линии, как читателю нетрудно вывести самому, приняв во внимание условие, что $k = 0$. Эту величину называют также „характеристикой“ линии.

После всего изложенного в настоящей и предыдущей главах читателю ясно, что мы в уравнении для u и i имеем дело с двумя волнами, движущимися в противоположных направлениях по линии со скоростью w и не меняющими своего вида при движении, но с течением времени затухающими.

Эти уравнения в технике высоких напряжений часто полагают в основу при рассмотрении вопросов о включении и выключении линии, о блуждающих волнах от атмосферных влияний и т. д.

§ 161. Отражение волн в точках соединения двух проводов с различными волновыми сопротивлениями

Приложим к исследованию данного вопроса только что полученные уравнения неустановившегося режима.

Дифференциальные уравнения должны удовлетворяться и для одного и для другого проводов, но постоянные этих проводов различны, поэтому и скорости волн и затухания их будут различны в этих проводах.

Процесс в каждом проводе мы можем представить посредством двух движущихся навстречу волн; поэтому обозначая римскими цифрами I и II величины, относящиеся к одному и другому проводу, мы будем иметь следующие уравнения:

$$\begin{aligned} u_I &= e^{-\alpha_I t} [f_{I1}(x - w_I t) + f_{I2}(x + w_I t)] = u_{I1} + u_{I2}, \\ u_{II} &= e^{-\alpha_{II} t} [f_{II1}(x - w_{II} t) + f_{II2}(x + w_{II} t)] = u_{II1} + u_{II2}, \\ i_I \sqrt{\frac{L_{KM I}}{C_{KM I}}} &= e^{-\alpha_I t} [f_{I1}(x - w_I t) - f_{I2}(x + w_I t)], \\ i_{II} \sqrt{\frac{L_{KM II}}{C_{KM II}}} &= e^{-\alpha_{II} t} [f_{II1}(x - w_{II} t) - f_{II2}(x + w_{II} t)] \end{aligned}$$

Так как в месте соединения происходит переход напряжения и силы тока из состояния, обусловленного первым проводом, в состояние в другом проводе, то должно быть:

$$\left. \begin{aligned} u_{I1} + u_{I2} &= u_{II1} + u_{II2}, \\ \sqrt{\frac{C_{KM I}}{L_{KM I}}} (u_{I1} - u_{I2}) &= \sqrt{\frac{C_{KM II}}{L_{KM II}}} (u_{II1} - u_{II2}). \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

Если волна u_{I1} впервые с начала процесса проходит место соединения двух линий, то, конечно, волны u_{II2} еще нет, а есть только u_{II1} , как идущая дальше, теперь уже по второму проводу, волна, и u_{I2} — отраженная от места соединения волна в первом проводе. Полагая $u_{II2} = 0$ и обозначая характеристики или волновые сопротивления проводов через z_I и z_{II} , находим:

$$\left. \begin{aligned} u_{I1} + u_{I2} &= u_{II1}, \\ \frac{u_{I1} - u_{I2}}{z_I} &= \frac{u_{II1}}{z_{II}}. \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

Деля первое на второе, получаем

$$\frac{u_{I1} + u_{I2}}{u_{I1} - u_{I2}} = \frac{z_{II}}{z_I},$$

откуда отраженная волна в первом проводе

$$u_{I2} = \frac{z_{II} - z_I}{z_I + z_{II}} u_{I1}.$$

Подставляя это выражение в первое из уравнений (В), имеем идущую дальше, по второму проводу, волну

$$u_{\Pi 1} = \frac{2z_{\Pi}}{z_1 + z_{\Pi}} u_{11}.$$

После того как волна $u_{\Pi 1}$ дошла до конца линии II, получается и волна $u_{\Pi 2}$, отраженная от конца линии.

Теперь нужно решить уравнения (А), куда входят четыре величины; если мы будем за данные считать u_{11} и $u_{\Pi 2}$, тогда сможем из этих двух уравнений (А) выразить остальные две величины так: проходящую дальше волну

$$u_{\Pi 1} = \frac{2z_{\Pi}}{z_1 + z_{\Pi}} u_{11} + \frac{z_1 - z_{\Pi}}{z_1 + z_{\Pi}} u_{\Pi 2},$$

отраженную от места соединения в первом проводе,

$$u_{12} = \frac{z_{\Pi} - z_1}{z_1 + z_{\Pi}} u_{11} + \frac{2z_1}{z_1 + z_{\Pi}} u_{\Pi 2}.$$

Таким образом из двух волн u_{11} и $u_{\Pi 2}$, идущих к месту соединения, проходят его только определенные части, остальная же часть каждой волны отражается назад в тот провод, из которого волна пришла.

Величину $\frac{z_{\Pi} - z_1}{z_1 + z_{\Pi}}$ называют коэффициентом отражения.

ГЛАВА ДВАДЦАТАЯ

ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТНОГО ЭФФЕКТА ПРИ ПЕРЕМЕННОМ ТОКЕ И ПЕРЕМЕННОМ МАГНИТНОМ ПОТОКЕ

§ 162. Дифференциальное уравнение плотности тока в проводнике

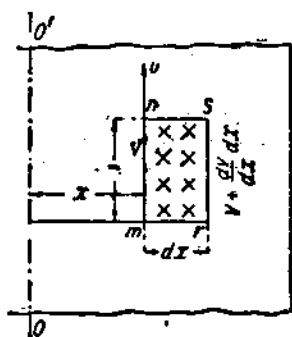
В предыдущем мы не раз упоминали о том, что переменный ток распределяется по площади поперечного сечения проводника неравномерно, а именно сила тока, приходящаяся на единицу этой площади, так называемая „плотность“ тока, убывает по мере приближения к центру площади или к оси проводника. Если мы возьмем цилиндрический проводник, то из соображений о симметрии ясно, что в элементах площади поперечного сечения, одинаково удаленных от оси, мы будем иметь одинаковую плотность тока.

Далее оказывается, что и фаза силы тока в различных слоях проводника различна. Рассмотрим весь вопрос математически.

Рассечем мысленно цилиндрический проводник плоскостью, проходящей через его ось OO' (фиг. 259), и в плоскости разреза выделим элементарный прямоугольник на расстоянии x от оси OO' . Длину двух его

сторон, параллельных оси, возьмем равной единице длины — одному сантиметру; длину же двух других сторон возьмем равной dx .

Далее обозначим: через i — силу тока в цилиндре радиуса x с осью OO' , через v — плотность тока на расстоянии x от оси, через H — напряженность магнитного поля, производимого этим током, там же; i , v и H суть мгновенные значения соответствующих величин.



Фиг. 259.

По закону Био и Савара

$$H = 0,2 \cdot \frac{i}{x}, \text{ или } Hx = 0,2i.$$

Дифференцируя по x , получаем

$$x \frac{dH}{dx} + H = 0,2 \cdot \frac{di}{dx}. \quad (A)$$

Величина $\frac{di}{dx} dx$ есть сила тока, проходящего через кольцевую площадь поперечного сечения стенки цилиндрической трубки с радиусами x и $x + dx$. Площадь эту, отбрасывая бесконечно малые величины второго порядка, мы можем выразить через $2\pi x dx$, а потому силе тока через нее можем дать и такое выражение: $2\pi x v dx$, откуда, сравнивая с первым выражением для этой силы тока, имеем

$$\frac{di}{dx} = 2\pi x v. \quad (B)$$

Подставляя (B) в (A), получаем

$$x \frac{dH}{dx} + H = 0,4\pi x v. \quad (C)$$

Обозначим через u величину, результирующую из напряжения, приложенного на единицу длины провода извне, и э. д. с. самоиндукции, тоже отнесенной к единице длины. Вследствие того что всякий элемент площади сечения проводника осевой плоскостью, всякий прямоугольник $mnsr$, пронизывается магнитным потоком, в сторонах его индуцируются э. д. с. Последние в сторонах mr и ns равны и противоположны, в сторонах же mn и rs обуславливают изменение величины u ; последняя на стороне mn равна u и на стороне rs равна $u + \frac{du}{dx} dx$. Таким образом окончательно в контуре $mnsr$ действует э. д. с. $\frac{du}{dx} dx$. Она равна производной по времени от магнитного потока, пронизывающего этот контур, $\mu \cdot H \cdot dx$, где μ есть магнитная проницаемость вещества проводника.

Отсюда имеем

$$\frac{du}{dx} = \mu \frac{dH}{dt} \cdot 10^{-9}. \quad (D)$$

Из фиг. 259 мы видим, что, заведшись направлением мгновенной силы тока, как на чертеже, мы получим магнитный поток, идущий через прямоугольник $mnsr$ от нас за плоскость чертежа. Если $\frac{dH}{dt} > 0$, т. е. поток возрастает, то э. д. с. в контуре направлена по правилу Максвелла против вращения правого винта, т. е. в стороне rs направлена снизу вверх, а это означает, что $\frac{du}{dx} dx$ положительно; это правило знаков и удовлетворяется уравнением (D).

Далее, обозначив через ρ удельное сопротивление в омсантиметрах, т. е. сопротивление, измеренное в омах и отнесенное к кубическому сантиметру, имеем $u = \rho v$ и $\frac{du}{dx} = \rho \frac{dv}{dx}$.

Сравнивая с (D), получаем

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\rho}{\mu} \frac{dv}{dx} 10^9. \quad (E)$$

Дифференцируем (С) по времени:

$$x \frac{d^2 H}{dx dt} + \frac{dH}{dt} = 0,4\pi x \frac{dv}{dt}. \quad (F)$$

Дифференцируем (Е) по x и подставляем в (F):

$$x\rho \frac{10^8}{\mu} \frac{d^2 v}{dx^2} + \rho \frac{10^8}{\mu} \frac{dv}{dx} = 0,4\pi x \frac{dv}{dt},$$

или

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dv}{dx} = \frac{0,4\pi\mu}{\rho 10^8} \frac{dv}{dt}. \quad (G)$$

Таково дифференциальное уравнение для плотности тока.

§ 163. Интегрирование уравнения плотности тока

В исследовании полученного уравнения пойдем следующим путем:

Прежде всего положим

$$v = F(x) \cdot \sin(\omega t + \phi), \quad (H)$$

где амплитуда $v_m = F(x)$ и фаза ϕ суть функции расстояния от оси. Разложив синус суммы, получим:

$$\left. \begin{aligned} v &= F_1 \sin(\omega t) + F_2 \cos(\omega t), \\ \text{где} \quad F_1 &= F(x) \cos \phi, \quad F_2 = F(x) \sin \phi, \\ \text{так что амплитуда} \quad v_m &= \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \quad \text{и} \quad \phi = \arctg \frac{F_2}{F_1}. \end{aligned} \right\} \quad (J)$$

Находим производные от v , входящие в уравнение (G)

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= \frac{dF_1}{dx} \sin(\omega t) + \frac{dF_2}{dx} \cos(\omega t), \\ \frac{d^2 v}{dx^2} &= \frac{d^2 F_1}{dx^2} \sin(\omega t) + \frac{d^2 F_2}{dx^2} \cos(\omega t), \\ \frac{dv}{dt} &= \omega F_1 \cos(\omega t) - \omega F_2 \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Подставляем эти выражения производных в уравнение (G), группируя члены, содержащие $\sin(\omega t)$, отдельно от членов, содержащих $\cos(\omega t)$, получаем

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d^2 F_1}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{dF_1}{dx} + \frac{0,4\pi\mu}{\rho \cdot 10^8} \cdot \omega F_1 \right) \sin(\omega t) + \\ &+ \left(\frac{d^2 F_2}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{dF_2}{dx} - \frac{0,4\pi\mu}{\rho \cdot 10^8} \cdot \omega F_2 \right) \cos(\omega t) = 0. \end{aligned}$$

Так как уравнение это справедливо для произвольного t , то множители при синусе и косинусе должны быть равны нулю, так что мы получаем, полагая для краткости

$$a = \frac{0,4\pi\mu\omega}{\rho \cdot 10^8},$$

следующие два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 F_1}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{dF_1}{dx} + a F_1 &= 0, \\ \frac{d^2 F_2}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{dF_2}{dx} - a F_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (K)$$

Затем полагаем, что F_1 и F_2 можно выразить бесконечными рядами:

$$\begin{aligned} F_1 &= A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n + \dots \\ F_2 &= B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots + B_n x^n + \dots \end{aligned}$$

Определим коэффициенты в этих рядах. Для этого подставим в уравнения (K) производные от этих рядов. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dF_1}{dx} &= A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \dots + nA_n x^{n-1} + \dots \\ \frac{1}{x} \frac{dF_1}{dx} &= \frac{1}{x} A_1 + 2A_2 + 3A_3 x + \dots + nA_n x^{n-2} + \dots \\ \frac{d^2 F_1}{dx^2} &= 2A_2 + 2 \cdot 3A_3 x + \dots + (n-1)nA_n x^{n-2} + \dots \end{aligned}$$

Заменив здесь всякое A_n на B_n , получим соответствующие выражения для функции F_2 , затем подставляем все полученные выражения в уравнения (K). Первое из них дает:

$$\left. \begin{aligned} &2A_2 + 2 \cdot 3A_3 x + \dots + (n-1)nA_n x^{n-2} + \dots + \\ &+ A_1 \cdot \frac{1}{x} + 2A_2 + 3A_3 x + \dots + nA_n x^{n-2} + \dots + \\ &+ \alpha(B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots + B_n x^n + \dots) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (L)$$

Второе дает:

$$\left. \begin{aligned} &2B_2 + 2 \cdot 3B_3 x + \dots + (n-1)nB_n x^{n-2} + \dots + \\ &+ B_1 \cdot \frac{1}{x} + 2B_2 + 3B_3 x + \dots + nB_n x^{n-2} + \dots - \\ &- \alpha(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n + \dots) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (M)$$

Теперь рассуждаем так: каждое из этих двух уравнений (L) и (M) справедливо для произвольного x , лишь бы x не превосходило радиуса поперечного сечения проводника; поэтому должна равняться нулю всякая сумма коэффициентов при одинаковых степенях x .

Таким образом получаем ряд уравнений, приравнявая нулю сначала сумму коэффициентов при x^{-1} , затем при x^0 , при x и т. д.

Уравнение (L) дает:

$$\begin{aligned} A_1 &= 0, \\ 2 \cdot 2A_2 + \alpha B_0 &= 0, \\ 3 \cdot 3A_3 + \alpha B_1 &= 0, \\ 4 \cdot 4A_4 + \alpha B_2 &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ k^2 A_k + \alpha B_{k-2} &= 0. \end{aligned}$$

Уравнение (M) дает:

$$\begin{aligned} B_1 &= 0, \\ 2 \cdot 2B_2 - \alpha A_0 &= 0, \\ 3 \cdot 3B_3 - \alpha A_1 &= 0, \\ 4 \cdot 4B_4 - \alpha A_2 &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ k^2 B_k - \alpha A_{k-2} &= 0. \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

На каком бы номере n в разложениях F_1 и F_2 мы ни остановились, мы всегда получим n таких уравнений между A и B из уравнения (L) и n из уравнения (M); итого будем иметь $2n$ уравнений, неизвестных же у нас $2(n+1)$, ибо нумерация у A и B начинается с нуля. Таким образом два каких-нибудь A и B прихо-

дится считать как бы известными, — выберем за таковые A_0 и B_0 , как их определить, мы увидим дальше, — и выражать все остальные A и B через эти A_0 и B_0 .

Таким образом получаем:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 0, & B_1 &= 0, \\
 A_2 &= -\frac{\alpha}{2^2} B_0, & B_2 &= \frac{\alpha}{2^2} A_0, \\
 A_3 &= 0, & B_3 &= 0, \\
 A_4 &= -\frac{\alpha}{4^2} B_2 = -\frac{\alpha^2}{2^2 \cdot 4^2} A_0, & B_4 &= \frac{\alpha}{4^2} A_2 = -\frac{\alpha^2}{2^2 \cdot 4^2} B_0, \\
 A_5 &= 0, & B_5 &= 0, \\
 A_6 &= -\frac{\alpha}{6^2} B_4 = \frac{\alpha^3}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} B_0, & B_6 &= \frac{\alpha}{6^2} A_4 = -\frac{\alpha^3}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} A_0, \\
 A_7 &= 0, & B_7 &= 0, \\
 A_8 &= -\frac{\alpha}{8^2} B_6 = \frac{\alpha^4}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} A_0, & B_8 &= \frac{\alpha}{8^2} A_6 = \frac{\alpha^4}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} B_0
 \end{aligned}$$

и т. д.

Что касается величин A_0 и B_0 , то мы зададимся их величиной следующим образом: на оси проводника, т. е. при $x=0$, имеем из разложений F_1 и F_2

$$F_{10} = A_0 \text{ и } F_{20} = B_0,$$

так что на оси

$$v_0 = \sqrt{A_0^2 + B_0^2} \cdot \sin(\omega t + \phi_0);$$

будем отсчитывать фазы v относительно этого v_0 ; тогда надо считать

$$\phi_0 = 0,$$

и следовательно, по формуле для F_2 из (J) и

$$B_0 = F_{20} = F(0) \cdot \sin \phi_0 = 0,$$

так что

$$v_0 = A_0 \cdot \sin(\omega t),$$

и амплитуда плотности тока на оси проводника

$$v_{0m} = A_0.$$

Подставим в формулы для A и B значения $B_0 = 0$ и $A_0 = v_{0m}$ и мы получим:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= v_{0m}, & B_0 &= 0, \\
 A_1 &= 0, & B_1 &= 0, \\
 A_2 &= 0, & B_2 &= \frac{\alpha}{2^2} \cdot v_{0m}, \\
 A_3 &= 0, & B_3 &= 0, \\
 A_4 &= -\frac{\alpha^2}{2^2 \cdot 4^2} v_{0m}, & B_4 &= 0, \\
 A_5 &= 0, & B_5 &= 0, \\
 A_6 &= 0, & B_6 &= -\frac{\alpha^3}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \cdot v_{0m}, \\
 A_7 &= 0, & B_7 &= 0, \\
 A_8 &= \frac{\alpha^4}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} \cdot v_{0m}, & B_8 &= 0
 \end{aligned}$$

и т. д.

F_1 и F_2 представляются теперь следующими рядами:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= v_{0m} \left(1 - \frac{a^2}{(2 \cdot 4)^2} x^4 + \frac{a^4}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8)^2} x^8 - \dots \right), \\ F_2 &= v_{0m} \left(\frac{a}{2^2} x^2 - \frac{a^3}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} x^6 + \frac{a^5}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10)^2} x^{10} - \dots \right). \end{aligned} \right\} \quad (163,1)$$

Ряды эти сходящиеся, так как отношение $(n+1)$ -го члена к n -му стремится к нулю при возрастании n .

Отсюда мы можем вычислить для любого x , т. е. в любом месте поперечного сечения провода, сначала F_1 и F_2 , а затем по уравнениям (J) амплитуду плотности тока $v_m = F$ и фазу ϕ .

Если a мало, то можно ограничиться для F_1 первыми двумя членами, а для F_2 — только одним первым. Тогда легко видеть, что с ростом x растет и ϕ (от нуля), и следовательно, сила тока в слоях большего радиуса опережает силу тока в слоях радиуса меньшего. То же, конечно, имеет место и при больших a , только тогда нужно взять для вычисления больше членов.

Определяя F , найдем, что оно растет с x , т. е. в наружных слоях плотность тока больше.

Таким образом, резюмируя, видим, что плотность тока все более уменьшается по величине, по мере того как мы переходим к слоям все меньшего радиуса, и все более запаздывает в фазе.

Изложенное решение вопроса принадлежит автору, оно пригодно для всяких значений a и x . Приведем другое решение, данное в 1900 г. Коном, чтобы показать читателю, каким (часто весьма искусственным) путем приходится идти при решении некоторых задач, чтобы получить удобные формулы.

§ 164. Интегрирование уравнения плотности тока — другой способ

Делаем такую подстановку

$$v = f(x)e^{j\omega t}. \quad (N)$$

Вспомним сказанное в конце § 35 о таких подстановках. Множитель $e^{j\omega t}$ пусть при этом выражает только то, что v есть синусоидальная функция времени. Подставляя (164, N) в (162, G), получаем

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{df(x)}{dx} = j \frac{0,4 \pi \mu \omega}{\rho 10^8} f(x),$$

или

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{df(x)}{dx} - j a f(x) = 0, \quad (P)$$

где опять

$$a = \frac{0,4 \pi \mu \omega}{\rho 10^8}.$$

Делаем еще подстановку, полагая

$$y = x \sqrt{-ja}, \quad (Q)$$

и следовательно,

$$x = \frac{1}{\sqrt{-ja}} y,$$

после чего получаем, обозначая искомую функцию одной буквой f ,

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dy} \sqrt{-ja},$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d^2f}{dy^2} (-ja)$$

и, подставляя в (P):

$$\frac{d^2f}{dy^2} + \frac{1}{y} \cdot \frac{df}{dy} + f = 0. \quad (164,1)$$

Частными интегралами этого уравнения являются бesselевы функции первого и второго рода. так как бesselева функция второго рода при $y \approx 0$ принимает значение, равное бесконечности, то она по смыслу нашей задачи не является решением ее (так как $y=0$ означает, что $x=0$, и следовательно, в точках на оси проводника плотность тока v — формула (N) — была бы при этом бесконечно большой), решение же дается только бesselевой функцией первого рода, которую обозначим через $I_0(y)$, причем

$$I_0(y) = 1 - \frac{y^2}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{y^4}{2^4 (1 \cdot 2)^2} - \frac{y^6}{2^6 (1 \cdot 2 \cdot 3)^2} + \frac{y^8}{2^8 (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)^2}. \quad (R)$$

Найти это частное решение уравнения (163,1) мы, очевидно, легко можем путем, совершенно подобным решению уравнений (J) и (K), приведенному выше, т. е., разложив функцию f в ряд по степеням y , мы можем определить коэффициенты этого ряда из уравнений, полученных подстановкой f и ее производных в уравнение (164,1) и приравняв коэффициенты в нем при различных степенях y нулю.

Вообще же о бesselевых функциях и об интегрировании уравнений посредством рядов следует смотреть в курсах анализа.

Таким образом из (N) получаем, вводя произвольную постоянную A ,

$$v = A \cdot I_0(y) \cdot e^{j\omega t}. \quad (164,2)$$

Введем такое обозначение:

$$\frac{ax^2}{4} = \beta; \quad (S)$$

тогда по (Q)

$$y = x\sqrt{-ja} = 2\sqrt{\frac{\beta}{a}} \cdot \sqrt{-ja} = 2\sqrt{-j\beta}.$$

Подставив это выражение для y в уравнение (R), получим после преобразований:

$$I_0(y) = \left(1 - \frac{\beta^2}{4} + \frac{\beta^4}{576} - \dots\right) + j\left(\beta - \frac{\beta^3}{36} + \dots\right). \quad (T)$$

Из уравнения (164,2) мы видим, что амплитуда v равна модулю правой части, или, иначе, амплитуда отношения v к A равна модулю $I_0(y)$; последний определяем приближенно для того случая, когда β мало, ограничиваясь в (T) членами второй степени:

$$\left(\frac{v}{A}\right)_m = \text{Mod } I_0(y) = \sqrt{\left(1 - \frac{\beta^2}{4}\right)^2 + \beta^2} = 1 + \frac{\beta^2}{4} \dots \quad (U)$$

Наибольшая величина β , а следовательно, и левой части получается для $x = r$ — радиусу цилиндрического проводника, так как это есть наибольшее значение x , так что по уравнению (S) наибольшая величина

$$\beta_1 = \frac{ar^2}{4} = \frac{\pi \omega r^2}{\rho 10^9}.$$

Подставив в (U) значение β из (S) и введя при v индекс для обозначения места, где мы рассматриваем величину плотности тока, имеем

$$\left(\frac{v_x}{A}\right)_m = 1 + \frac{\alpha^2 x^4}{4 \cdot 16} = 1 + \frac{\beta_1^2}{4} \left(\frac{x}{r}\right)^4,$$

а для центра проводника, т. е. его оси, где $x=0$,

$$\left(\frac{v_0}{A}\right)_m = 1;$$

таким образом, деля первое на второе, получаем для отношения амплитуд плотностей тока

$$\frac{v_{xm}}{v_{0m}} = 1 + \frac{\beta_1^2}{4} \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^4. \quad (164,3)$$

Для $x=r$ получаем отношение амплитуды плотности тока на периферии к амплитуде плотности тока в центре:

$$\frac{v_{rm}}{v_{0m}} = 1 + \frac{\beta_1^2}{4}. \quad (164,4)$$

Не забудем, что это соотношение справедливо при условии, введенном перед уравнением (U), что β мало.

Сравнивая α с β , мы видим, что, для того чтобы β было мало, нужно, чтобы были малы μ и ω и велико ρ . Для медного проводника $\mu=1$, для железного — μ большая величина, поэтому для медного проводника при низкой частоте, например, обычной в 50 Hz, можно применять уравнение (164,4), а для железного — нельзя.

Если же частота тока велика, например, сотни тысяч периодов в секунду, то соотношения будут совсем другими; то же и при большом μ .

При этом α , а следовательно, и y будут велики, а для больших x y имеем вместо (R) приближенное решение;

$$I_0(y) = \frac{e^{iy}}{\sqrt{2\pi} y} \quad (164,5)$$

Из уравнения (Q) имеем

$$y^2 = -ix^2\alpha,$$

или

$$-y^2 = ix^2\alpha = (1-1+2j)x^2 \cdot \frac{\alpha}{2},$$

и, извлекая корень,

$$iy = (1+j)x\sqrt{\frac{\alpha}{2}}.$$

Поэтому

$$I_0(y) = \frac{e^{(1+j)x\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}}{\sqrt{2\pi(1+j)x\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}}. \quad (Z)$$

Возьмем отношение значений амплитуд v в точках $x=r$ и $x=r-\delta$; так как отношение модулей комплексных равно модулю отношения самих комплексных, то нам надо найти

$$\text{Mod} \left(\frac{v_{r-\delta}}{v_r} \right) = \text{Mod} \left| \frac{I_0(y)_{x=r-\delta}}{I_0(y)_{x=r}} \right|.$$

Подставляя вместо $I_0(y)$ только что полученное выражение (Z), а в него вместо x один раз $r - \delta$, другой раз r , получаем после сокращения

$$\begin{aligned} \text{Mod} \left(\frac{v_{r-\delta}}{v_r} \right) &= \text{Mod} \left| \frac{e^{(1+\beta)(r-\delta)\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{r}}}{e^{(1+\beta)r\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{r-\delta}}} \right| = \\ &= \text{Mod} \left| \frac{e^{-\delta\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} \cdot e^{-\beta\delta\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}}{\sqrt{1-\frac{\delta}{r}}} \cdot \frac{e^{-\beta r\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}}{\sqrt{1-\frac{\delta}{r}}} \right| = \frac{e^{-\delta\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}}{\sqrt{1-\frac{\delta}{r}}} \end{aligned} \quad (164,6)$$

Соотношение (164,6) справедливо, если δ не очень близко к r , так как иначе x , равное $r - \delta$, а следовательно, и y по уравнению (Q) становятся малыми, и уравнение (164,5) не имеет места.

Если δ мало сравнительно с r , то приближенно

$$\text{Mod} \left(\frac{v_{r-\delta}}{v_r} \right) = e^{-\delta\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} \quad (164,7)$$

На расстоянии $\delta_1 = \sqrt{\frac{2}{\alpha}}$ от поверхности проводника амплитуда плотности тока уменьшается до $\frac{1}{e}$ ее величины на поверхности.

Вообще же, каковы бы ни были β и x , из уравнений (164,2) и (T) мы всегда можем вычислить v_{xm} , задаваясь постоянной A , т. е. плотностью v_{0m} на оси.

§ 165. Уравнение плотности магнитного потока

Выводы настоящей главы нетрудно распространить и на переменный магнитный поток.

Внесем в обозначения фиг. 259 следующие изменения: будем считать, что вместо цилиндрического проводника с переменным током мы имеем цилиндрический „магнитопровод“ с переменным магнитным потоком вдоль него; материал сердечника магнитопровода пусть будет электропроводен (т. е. не диэлектрик, а например, металл); вместо прежнего результирующего напряжения u введем м. д. с. m на единицу длины; вместо плотности тока v — магнитную индукцию B ; вместо H по направлению, отмеченному крестиками или навстречу ему, — плотность тока v ; этот ток индуцируется переменным магнитным потоком Φ , который займет теперь положение прежнего тока i ; этот поток проходит через площадь радиуса x .

Тогда будем иметь

$$m = \frac{B}{\mu}$$

и дифференцируя по x ,

$$\frac{dm}{dx} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{dB}{dx};$$

с другой стороны, $\frac{dm}{dx} \cdot dx$ есть приращение м. д. с. на стороне rs прямоугольника

$mtrs$ сравнительно со значением ее на стороне mn ; это приращение можно выразить и иначе, именно через $0,4 \pi v dx$. Поэтому

$$\frac{dm}{dx} = 0,4 \pi v,$$

и следовательно,

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{dB}{dx} = 0,4 \pi v.$$

Отсюда

$$v = \frac{1}{0,4 \pi \mu} \cdot \frac{dB}{dx}, \quad (I)$$

и затем

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{0,4 \pi \mu} \cdot \frac{d^2 B}{dx^2}; \quad (II)$$

э. д. с. в круговом контуре, оцепляющем поток Φ , может быть выражена, с одной стороны, через Φ , с другой стороны, — через силу тока и сопротивление в этом круговом контуре следующим образом:

$$-\frac{d\Phi}{dt} \cdot 10^{-8} = v dx \cdot \frac{2 \pi x \rho}{dx} = 2 \pi v x.$$

На основании соображений, аналогичных приведенным после уравнения (162,D), отбрасываем в левой части знак минус, считая, что v положительно, когда индуцированный ток помогает внешней м. д. с., и отрицательно — в обратном случае; дифференцируя затем по x , получаем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\Phi}{dx} \right) 10^{-8} = 2 \pi \rho \left(x \frac{dv}{dx} + v \right). \quad (III)$$

Но $\frac{d\Phi}{dx} \cdot dx$ есть приращение потока, равное потоку через кольцо $2 \pi x dx$; поэтому

$$\frac{d\Phi}{dx} = 2 \pi x B.$$

Подставляя это выражение в левую часть уравнения (III), получаем

$$\frac{dB}{dt} 2 \pi x 10^{-8} = 2 \pi \rho \left(x \frac{dv}{dx} + v \right).$$

Подставляя в это уравнение вместо v и $\frac{dv}{dx}$ их выражения (I) и (II), имеем

$$\frac{dB}{dt} x 10^{-8} = \frac{\rho}{0,4 \pi \mu} x \frac{d^2 B}{dx^2} + \frac{\rho}{0,4 \pi \mu} \cdot \frac{dB}{dx},$$

или окончательно

$$\frac{d^2 B}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{dB}{dx} = \frac{0,4 \pi \mu}{\rho 10^8} \cdot \frac{dB}{dt}. \quad (IV)$$

Это уравнение совершенно подобно уравнению (162,G), а потому для значений B в различных точках поперечного сечения магнитопровода имеют место те же соотношения, что и для v в проводнике.

Таким образом переменный магнитный поток распределяется по площади неравномерно, а убывая в своей плотности от периферии к центру с увеличением при этом запаздывания в фазе.

Следствием этого является, между прочим, и то, что при токах высокой частоты, проходящих через катушку с железным сердечником, магнитного потока в железе практически совсем не будет, — магнитный поток будет иметься только в промежутке между сердечником и катушкой.

Если материалом сердечника магнитопровода будет служить диэлектрик, то эффект будет обратный: магнитная индукция будет больше у оси, чем у периферии, но количественно это явление крайне слабо.

§ 166. Вывод формулы Стефана для сопротивления проводника при переменном токе

Следует отметить, что часто утверждается, что при явлении поверхностного эффекта ток оттекает из центра проводника к его поверхности; таким утверждением вызывается иногда неправильное представление о величине плотности тока у поверхности. Нужно помнить, что плотность тока в поверхностном слое при этом явлении имеет величину не большую, чем определяемая сопротивлением и величиной э. д. с. самоиндукции для поверхностного слоя и приложенным напряжением, но чем глубже в проводнике находится точка, плотность тока в которой мы определяем, тем э. д. с. самоиндукции больше, а потому эта плотность тока становится все меньше по величине и все более запаздывает по фазе.

Из предыдущего следует, что вследствие неравномерного распределения переменного тока по поперечному сечению проводник представляет для переменного тока сопротивление большее, чем для постоянного тока.

Для определения величины R' сопротивления провода при переменном токе служит формула Стефана, которую мы теперь и выведем, слегка лишь изменив вывод, данный им.

Будем рассматривать случай не слишком малого радиуса r поперечного сечения провода и частоты достаточно большой, чтобы приближенно можно было принять, что при $x < r$ плотность тока u становится настолько малой, что ею можно пренебречь и положить ее равной нулю. При этом условии в уравнении (162, G) множитель $\frac{1}{x}$ при $\frac{dv}{dx}$ можно заменить через $\frac{1}{r}$; как увидим в конце, несмотря на большую ограниченность условий, вывод дает формулу, применимую во всех случаях практики с достаточно большой точностью. Уравнение (162, G) теперь напишется так:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{0,4 \pi i}{\rho \cdot 10^9} \frac{dv}{dt}. \quad (a)$$

Интегралом этого уравнения будет

$$v = A \cdot e^{kx} \cdot \sin(\omega t + mx). \quad (b)$$

Постоянные k и m определим следующим образом:

Подставим в уравнение (a) выражения производных, полученные из уравнения (b), и сгруппируем члены с $\sin(\omega t + mx)$ и с $\cos(\omega t + mx)$. Ввиду произвольности t и x коэффициенты при этих $\sin$ и $\cos$ должны быть равны нулю; отсюда мы получаем два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} k^2 - m^2 + \frac{k}{r} &= 0, \\ 2mk + \frac{m}{r} &= a. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Здесь через a обозначена, как и ранее, величина $\frac{0,4 \pi i \omega}{\rho \cdot 10^9}$.

Решая эти уравнения, находим

$$\left. \begin{aligned} m &= \sqrt{-\frac{1}{8r^2} + \sqrt{\frac{1}{64r^4} + \left(\frac{a}{2}\right)^2}}, \\ k &= -\frac{1}{2r} + \sqrt{\frac{1}{4r^2} + m^2}. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Перед радикалами берем знаки плюс, чтобы уравнение (b) выражало уже известное нам обстоятельство уменьшения плотности тока и запаздывания ее в фазе с уменьшением x .

Умножив основное уравнение (162,G) на $x \cdot dx$, получим

$$d\left(x \frac{dv}{dx}\right) = \frac{a}{\omega} \cdot \frac{dv}{dt} \cdot x \cdot dx.$$

Выделим в правой части группу множителей $2\pi x dx$, что представит собой площадь кольца; тогда

$$d\left(x \frac{dv}{dx}\right) = \frac{a}{2\pi\omega} \cdot \frac{d}{dt} (2\pi\omega x dx);$$

теперь проинтегрируем в пределах от $x=0$ до $x=r$

$$r \left| \frac{dv}{dx} \right|_{x=r} = \frac{a}{2\pi\omega} \cdot \frac{di}{dt};$$

здесь i означает всю силу тока через поперечное сечение провода, т. е.

$$i = \int_{x=0}^{x=r} 2\pi\omega x dx.$$

Полученное нами уравнение перепишем так:

$$\frac{di}{dt} = \frac{2\pi\omega r}{a} \left| \frac{dv}{dx} \right|_{x=r}$$

и подставим в него значение производной от v при $x=r$, которое определим из уравнения (b); получим

$$\frac{di}{dt} = \frac{2\pi\omega r}{a} A e^{kr} [k \sin(\omega t + mr) + m \cos(\omega t + mr)].$$

Интегрируя, имеем

$$i = \frac{2\pi r}{a} A e^{kr} [m \sin(\omega t + mr) - k \cos(\omega t + mr)].$$

Умножим первое уравнение на k , а второе на $m\omega$ и результаты сложим, получится

$$m\omega i + k \frac{di}{dt} = \frac{2\pi\omega r}{a} A e^{kr} (k^2 + m^2) \sin(\omega t + mr),$$

или, обозначая через v_1 плотность тока в поверхностном слое, т. е. при $x=r$

$$m\omega i + k \frac{di}{dt} = \frac{2\pi\omega r}{a} (k^2 + m^2) v_1. \quad (e)$$

Выделим теперь мысленно в проводе, в поверхностном слое его, прямолинейную нить бесконечно малого поперечного сечения ds и составим для нее уравнение напряжений на единицу длины.

Так как сила тока в нити равна $v_1 \cdot ds$, сопротивление единицы длины нити равно $\rho \cdot ds$, то мгновенное значение активного падения напряжения равно $v_1 \cdot \rho$.

Весь ток в проводе, распределенный вокруг оси концентрически, действует индуктирующим образом на все внешнее пространство, в том числе и на эту нашу нить так, как будто бы весь он был сосредоточен на оси.

Поэтому, пренебрегая бесконечно малой э. д. с. „самоиндукции“ нити, находим, что мгновенное значение реактивного падения напряжения в нити равно

$M \frac{di}{dt}$, где M есть „величина взаимной индукции“ оси и нити на единицу длины,

равная, как известно из курса электричества, приблизительно $2 \left(\lg \frac{2l}{r} - 1 + \frac{r}{l} \right)$, где l есть длина провода.

Таким образом, обозначив через u_1 мгновенное значение приложенного извне напряжения на единицу длины, будем иметь:

$$u_1 = v_1 \rho + M \frac{di}{dt}.$$

Вставим сюда вместо v_1 его выражение из уравнения (e); тогда получим

$$u_1 = \frac{m \alpha \rho}{2\pi r (k^2 + m^2)} i + \left(\frac{k \alpha \rho}{2\pi \omega r (k^2 + m^2)} + M \right) \frac{di}{dt}. \quad (f)$$

В последнее уравнение вошла вся сила тока i через поперечное сечение провода; уравнение напряжений через активное сопротивление R на единицу длины и индуктивность L' тоже на единицу длины пишется так:

$$u_1 = R' i + L' \frac{di}{dt};$$

поэтому в уравнении (f) коэффициент при i есть R' , а коэффициент при $\frac{d}{dt}$ есть L' .

Итак

$$R' = \frac{m \alpha \rho}{2\pi r (k^2 + m^2)},$$

или, после подстановки вместо α его выражения,

$$R' = \frac{2m\mu\omega}{10^9 r (k^2 + m^2)}.$$

Это выражение преобразуем следующим образом.

Пренебрегая в уравнении (d) величиной $\frac{1}{8r^2}$ в сравнении с $\frac{a}{2}$, получим

$$m = \sqrt{\frac{a}{2}}$$

и

$$k = -\frac{1}{2r} + \sqrt{\frac{a}{2}}.$$

Тогда приближенно

$$\frac{m}{r(k^2 + m^2)} = \frac{1}{r\sqrt{2a-1}} = \frac{1}{r\sqrt{2a}} + \frac{1}{2r^2a}.$$

Подставляя это выражение в формулу для R' , а вместо α вставляя его значение, получаем

$$R' = \frac{\rho}{\pi r^2} \left(\pi r \cdot 10^{-9} \sqrt{\frac{f\mu}{0,1\rho} + \frac{1}{4}} \right).$$

Стоящий перед скобками множитель $\frac{\rho}{\pi r^2}$ есть сопротивление R единицы длины провода при постоянном токе. Обозначим отношение R' к R через K , затем заменим r перед радикалом через $\frac{d}{2}$, где d есть диаметр поперечного

сечения провода, и введем эту величину под корень; тогда для отношения сопротивлений имеем

$$K = \frac{R'}{R} = \pi \cdot 10^{-5} \sqrt{\frac{\mu f d^2}{0,4\rho} + \frac{1}{4}}.$$

Это соотношение и называется формулой Стефана.

Госпиталье вычислил K как функцию fd^2 для круглого проводника из чистой меди, исходя из других формул, именно — В. Томсона; эти значения K сведены в нижеследующую таблицу:

fd^2	K	fd^2	K	fd^2	K
20	1,0000	720	1,3180	2 880	2,3937
80	1,0001	980	1,4920	5 120	3,0958
180	1,0258	1 280	1,6778	8 000	3,7940
320	1,0805	1 620	1,8628	18 000	5,5732
500	1,1747	2 000	2,0480	32 000	7,3250

Из таблиц мы видим, что для обычной частоты в 50 Hz в медных проводах до 1 см диаметром влияние поверхностного эффекта еще незаметно.

Формула Стефана дает величины K несколько меньшие, чем приведенные в таблице: при $fd^2 = 500$ на 6%, при $fd^2 = 2 000$ на 3,5%; с ростом fd^2 ошибка все более уменьшается; вычисление k и m по уравнениям (d) тоже несколько уменьшает ошибку. Для магнитных материалов формула вообще приближена, ибо точное значение μ , которое надо в нее подставить, нам никогда неизвестно.

Заметим, что предыдущая теория не учитывает влияния обратного провода.

Из уравнения (f) мы можем вывести заключение об изменении индуктивности провода под влиянием поверхностного эффекта. С ростом частоты L' уменьшается, приближаясь к M .

В заключение заметим, что с влиянием поверхностного эффекта не нужно смешивать влияние токов Фуко в массивных проводниках (например, в обмотках машин), индуцируемых посторонними полями, например, какими-нибудь полями рассеяния. Эти токи Фуко тоже вызывают неравномерное распределение тока и увеличение сопротивления, часто большое — до 50% и более; существенную роль в этом вопросе играют конструктивные детали, определяющие величину и направление магнитных потоков; учитывается влияние неравномерного распределения тока в этом случае, главным образом, по эмпирическим данным.

ОТВЕТЫ К ПРИМЕРАМ

1. $2p=40$. 2. $I_m=27$ А. 3. $L=0,191$ Н. 4. $f=52$; $I_m=25,6$. 16. $\dot{v}=e^{-j45^\circ}$.
 17. $\dot{v}=e^{+j60^\circ}$. 18. $v=\frac{1}{2}e^{-j30^\circ}$. 19. $e^{+j\frac{2\pi}{3}}=-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$. 20. $e^{+j\frac{\pi}{2}}=+j$. 21. $e^{j\pi}=-1$. 22. $e^{-j\frac{2\pi}{2}}=+j=e^{+j\frac{\pi}{2}}$. 23. $e^{j75^\circ}=0,259+j0,966$. 24. $e^{-j50^\circ}=0,643-j0,766$.
 42. $\dot{Y}=0,903 e^{+j20^\circ 15'}$; $\dot{U}=58,5 e^{+j31^\circ}$; $I=52,8 e^{j31^\circ 15'}$; $\cos \varphi = \cos 20^\circ 15' = 0,938$.

Искомая емкость в третьей ветви, необходимая для получения $\cos \varphi = 1$, находится следующим путем. Если $\cos \varphi = 1$, то

$$b = \sum \frac{X_k}{Z_k^2} = 0,$$

а так как

$$b_1 = \frac{X_1}{Z_1^2} = 0,1, \quad b_2 = \frac{X_2}{Z_2^2} = 0,083,$$

то

$$b_3 = \frac{X_3}{Z_3^2} = -0,188,$$

или

$$\frac{X_3}{R_3^2 + X_3^2} = -0,188;$$

$R_3=1$, поэтому получаем уравнение

$$X_3^2 + 5,3 X_3 + 1 = 0,$$

откуда

$$X_3' = -0,195 \text{ и } X_3'' = -5,105.$$

Полагая абсолютное значение X равным $\frac{1}{\omega C}$, получаем

$$C_1 = \frac{1}{\omega X_3'} = 0,0163 \text{ F} = 16\,300 \text{ pF}.$$

$$C_2 = \frac{1}{\omega X_3''} = 0,00062 \text{ F} = 620 \text{ pF}.$$

Как видим, необходимая емкость получается чрезвычайно большой!

44. $a^3 = +1$. Умножив вектор, например, $\vec{E}_1$ три раза на a , мы переведем его через положения сначала $\vec{E}_2$, затем $\vec{E}_3$ снова в первоначальное положение, другими словами, повернув три раза на 120° , всего повернем его на 360° , т. е. оставим без изменения. 45. $1 + a + a^2 = 0$, что является символическим выражением той геометрической теоремы, что геометрическая сумма трех векторов, сдвинутых в фазе на одну треть периода, равна нулю. Уравнения

$$1 + a + a^2 = 0$$

и

$$\sin(\omega t) + \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$$

выражают одно и то же, первое в символической, второе в тригонометрической форме.
52. Воспользуемся формулами (B), (C), (D) и (F):

$$X + jV = \frac{c + jd}{a + m + j(b + n)},$$

$$a + jb = \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3 = \text{const},$$

$$c + jd = \dot{U}_{12} \dot{Y}_2 - \dot{U}_{31} \dot{Y}_3 = \text{const},$$

$$m + jn = Y_1.$$

Так как $\varphi_1 = \text{const}$, то

$$\text{tg } \varphi_1 = \frac{n}{m} = k = \text{const},$$

$$n = mk,$$

$$X + jV = \frac{c + jd}{a + m + j(b + km)}.$$

Приравнявая отдельно мнимые и действительные части, получаем:

$$(a + m)X - (b + km)V = c,$$

$$(b + km)X + (a + m)V = d,$$

или

$$m(X - kV) + aX - bV - c = 0, \quad (1)$$

$$m(kX + V) + bX + aV - d = 0. \quad (2)$$

Из последнего определяем m :

$$m = \frac{-bX - aV + d}{kX + V},$$

подставляем в (1):

$$-bX^2 - aXV + dX + kbXV + kaV^2 - kdV + kaX^2 +$$

$$+ aXV - kbXV - bV^2 - ckX - cV = 0,$$

по преобразовании

$$X^2(ak - b) + V^2(ak - b) + X(d - ck) - V(c + kd) = 0,$$

что представляет уравнение круга, проходящего через начало координат.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автотрансформатор 287.
- Активная составляющая тока по отношению к напряжению 254.
- — — — — э. д. с. 255.
- Амперметр тепловой 48.
- типа Деппе-Дарсонваля 48.
- Амплитуда результирующей м. д. с. 191.
- результирующего многофазного магнитного поля 198.
- синусоиды 21.
- силы тока 29.
- э. д. с. 28.
- э. д. с. самоиндукции 31.
- Анализатор кривых сложной формы 220, 223.
- Анализ кривой тока, намагничивающего железо 249.
- Анализ кривой сложной формы графическим методом 227.
- Апериодический разряд конденсатора 379.
- Асимметрия кривых сложной формы относительно точки перехода через нуль 218.
- Асинхронный генератор реактивной мощности 110.
- двигатель 200, 210, 276.
- Баланс мощностей в тр-ре 267.
- Бифилярная обмотка 16.
- Вектор 33.
- активной составляющей э. д. с. 39.
- вращающийся в символической форме 104.
- единичный 179.
- Векторная диаграмма длинной линии передачи 122.
- — для разветвленной цепи с активным сопротивлением, индуктивностью и с активным сопротивлением, емкостью 113.
- — — цепи с параллельно включенными активным сопротивлением и емкостью 111.
- — — цепи с последовательно включенными активным сопротивлением и емкостью 111.
- Векторная диаграмма для цепи, содержащей активное сопротивление, индуктивность и емкость 75.
- — катушки с железным сердечником 251.
- — напряжений в цепи с активным и индуктивным сопротивлениями 39.
- Векторная диаграмма для последовательно соединенных участков цепи из активных и индуктивных сопротивлений 44.
- — приближенная для длинной линии передачи энергии 122.
- — разветвленной цепи с активным сопротивлением, индуктивностью и емкостью 108.
- — синхронного генератора 46, 138.
- — двигателя 142.
- — трансформатора 262, 264.
- — приближенное построение 272.
- Векторное уравнение прямой 132, 133.
- — окружности 134, 307.
- Вектор реактивной составляющей э. д. с. 39.
- Векторы второго рода 96.
- первого рода 96.
- Вибратор открытый 379.
- Включение переменного тока 383, 384.
- постоянного тока 381.
- трансформатора 283, 285.
- трехфазного генератора 285.
- Волновое сопротивление 394.
- — контура 84.
- — линии передачи энергии 354.
- Волны, блуждающие от атмосферных влияний 403, 405.
- стоячие в линии передачи энергии 402.
- Вращающееся круговое магнитное поле Н. Тесла и Феранти 197.
- магнитное поле многофазное 196.
- — — — — случай II: несимметричные составляющие 192.
- — — — — случай I: симметричные составляющие 190.
- — — — — составляющие высших порядков 245.
- Вторичная цепь 264.
- Вынужденные электрические колебания 377.
- Вынужденный ток 382.
- Вычитание векторов 38.
- Гейслерова трубка 353.
- Генератор двухфазного тока 147.
- Генератор переменного тока — принцип устройства 9.
- Геометрическое место конца вектора — понятие 131.

- Гипербола равнобокая 355.
 Гиперболические функции 355.
 Гиперболический косинус 356.
 — синус 356.
 — тангенс 359.
 Гистерезис 247.
 Гистерезиса петля 248.
 Гистерезис диэлектрический 111.
 Главная волна в линии передачи энергии 350.
 Госпитанье 419.
 Графический метод анализа кривых 227.
 — способ перехода от треугольника к звезде 173.
 Двигатель асинхронный 200, 210, 276.
 — первичный 147.
 — синхронный 106.
 Двойной осциллограф 255.
 Действующее значение напряжения 50.
 — значение тока 49.
 Деление комплексных чисел 95, 102.
 Диаграмма Беделя и Крехора 64.
 — Потье 43.
 — синхронного генератора 42.
 — — двигателя 67.
 Дифференцирование вектора 105.
 Диэлектрик емкости-потери 111.
 Длина вектора 51.
 — волны в линии передачи энергии 396.
 — — — — — наибольшая 394.
 — волны в проводе 351.
 Длинной линии передачи энергии приближен-
 ная векторная диаграмма 122.
 Единичный вектор 179.
 Емкость в цепи переменного тока 68.
 — действующая в трехфазной линии передачи
 энергии 344.
 — проводника 344.
 Закон ОМА для всей цепи с активным
 индуктивным сопротивлениями 29.
 — — — участка цепи с активным и индуктив-
 ным сопротивлениями 31.
 — — — цепи, содержащей активное сопро-
 тивление и емкость 68.
 — — — — — индуктивность и емкость
 74.
 — Кирхгофа 127, 154, 162, 164.
 Замкнутый вибратор 378.
 Зарядный ток 340.
 Затухающие колебания 374.
 Измерение мощности тремя амперметрами 125.
 — — — вольтметрами 124.
 Индуктивность для двухжильного кабеля 344.
 Индуктивность для трехжильного кабеля 344.
 — трехфазной линии при расположении про-
 водов в вершине равностороннего треуголь-
 ника 342.
 — трехфазной линии при расположении про-
 водов в одной плоскости 342
 Искровой промежуток 377.
 Кабель силовой трехжильный 344.
 — — двухжильный 344.
 Кабель телеграфный 353.
 — телефонный 353.
 Кажущаяся мощность 60.
 Катушка с железным сердечником 251.
 Кенели А. Е. 162, 171, 360.
 Кинетическая энергия ротора 140.
 Кирхгофа закон второй 127.
 — — первый 127.
 Колебания полуволной 393.
 — четверть волны 392.
 Компенсатор синхронный 142.
 Компенсация сдвига фаз 108.
 — — — точное решение 113
 Комплексный множитель в раскрытой форме 98.
 — — в символической форме 96.
 Комплексных чисел — графическое умножение
 и деление 102.
 Кон 413.
 Координаты центра обращенной окружности
 292.
 Коэффициент индукции 394.
 — мощности ($\cos \varphi$) 63, 75, 103, 239.
 — полезного действия трансформатора 268.
 — самоиндукции 346.
 — отражения волны 406.
 — трансформации асинхронного двигателя 276.
 — — трансформатора 263, 275.
 Коэффициенты в ряде Фурье 123.
 Коэффициент формы кривой (Formfaktor) 238.
 Крауп 357.
 Кривая результирующей м. д. с. 197.
 — тока сложной формы 238.
 — тока сложной формы — влияние индуктив-
 ности и емкости 241.
 — э. д. с. сложной формы 238.
 Кривые взаимнообратные 288.
 — мгновенных значений мощности в цепи,
 содержащей активное сопротивление и
 емкость 73.
 — мощностей 57.
 — магнитного поля 20.
 — магнитной индукции 197.
 — сложение различных синусоид, симметрич-
 ные относительно оси абсцисс 217.
 Кривые э. д. с. 20.

- Круговая диаграмма Blondеля 144, 159.
 — — второй эквивалентной схемы 305.
 — — диаграмма — вычитание одной окружности из другой 321.
 — — пример нахождения окружностей различных переменных величин первой эквивалентной схемы 323.
 — — тока — аналитический вывод 278.
 — — тока — векторные соотношения между различными величинами 318.
 — — тока — пример построения по первой схеме 308.
 — — тока — экспериментальное построение 315.
 — — трансформатора по первой эквивалентной схеме 305.
- Линия вторичных потерь мощности 332.
 — мощности Гергеса 145, 159.
 — первичной мощности 329.
 — полезной мощности 333.
 — потерь мощности в круговой диаграмме 325.
 — суммарных потерь мощности 381.
 — передачи энергии 339.
- Логарифмический декремент затухания колебаний 374.
- Магнитная индукция — радиальная слагающая 11.
 — проницаемость 255.
- Магнитного поля энергия 388.
- Магнитное поле вращающееся 190, 199.
 — — круговое 154.
 — — пульсирующее 192, 195, 207.
 — поле — скорость движения относительно обмотки 11.
- Магнитное поле синусоидальное 192.
 — — эллиптическое 194.
 — — поле — форма кривой и ее изменение 20.
- Магнитный поток — уравнение плотности 416.
- Максвелл 407.
- Масштаб 51.
- Масштаб для к. п. д. 333.
 — — мощности 331.
- Метод алгебраический 91.
 — графический 173.
 — комплексных величин 91.
 — — величин — простейшие примеры применения метода 98.
 — обращений 288.
 — обращений — применение к изображению соотношения в цепях переменного тока 293.
 — символический 91, 164, 205.
 — симметричных составляющих 204.
- Метод топографический 129, 159.
- Модуль комплексного числа 93.
- Момент вращающий, средний 51, 56.
 — противодействия 51, 56.
- Мостик переменного тока 129.
 — Уитстона 129.
- Многофазная система неуравновешенная 157.
 — — связанная 157.
 — — симметричная 156.
 — — уравновешенная 157.
- Многофазной системы несимметричной разложение на симметричные составляющие — общий случай 212.
- Мощности коэффициент 63, 75, 103, 239.
- Мощность активная 60.
- Мощность вторичная, полезная 335.
- Мощность в цепи с емкостью 73.
 — генератора электрическая 64.
 — — механическая 64.
- Мощность — измерение тремя амперметрами 124.
- Мощность — измерение тремя вольтметрами 124.
 — индикаторная 54.
 — кажущаяся 55, 60, 103.
 — машины механическая 138, 139, 141.
 — машины электрическая 137, 141.
- Мощность — мгновенное значение 57.
 — механическая 200, 203.
 — — отдаваемая двигателем 142.
 — первичная 329.
 — первичной обмотки 267.
 — передаваемая первичной обмоткой в магнитное поле 276.
 — подведенная 329.
 — полезная 329, 331, 333.
 — полезная вторичной обмотки 268.
 — реактивная 60.
 — средняя 54, 57, 61, 75.
 — трехфазного тока 152.
 — — тока — измерение одним ваттметром 153.
 — — тока — измерение двумя ваттметрами 155.
 — холостого хода 337.
- Нагрузка безиндукционная 16, 19.
 — симметричная 150.
 — трансформатора 263.
- Наибольшая длина волны линии 392.
- Напряжение активное 58, 60, 89.
 — линейное 152.
 — междофазовое 151.
- Напряжение при включении фаз генератора звездой, нагрузка треугольником 167.
 — — — — и нагрузки звездой 165, 174.
 — реактивное 58, 60, 89.

- Напряжение результирующее 76.
Напряжение фазовое 151, 152, 161.
Нейтральная точка 150.
Неуравновешенная многофазная система 157.
Неустановившийся режим тока 371.
— ток 380.
Нулевая точка 150, 185.
- Обмотка генератора 10.
— трехфазного тока 148.
Обращение сфер 292.
Окружность вторичного напряжения 320.
— падения напряжения 320.
— первичной э. д. с. 320.
ОМА закон 27, 30, 47, 68, 71, 74, 89.
— — для всей цепи с активным и индуктивным сопротивлениями 29.
— — — участка цепи с активным и индуктивным сопротивлениями 31.
— — — цепи, содержащей активное сопротивление и емкость 68.
— — — — индуктивность и емкость 74.
Опрокидывание фаз 261.
Осциллограмма 19.
— тока 17.
— напряжение 17.
— э. д. с. 17.
Осциллограф 17, 223.
— двойной 255.
— электромагнитный 17.
Открытый вибратор 379.
Отраженная волна в линии передачи энергии 350.
Отражение волн в линии передачи энергии 405.
Отставание машины от сети 158.
Очищение тока 243.
- Падение напряжения в проводах линии передачи энергии 66.
Параллельные ветви — общий вид задачи 117.
Первичная цепь 64.
Переходные процессы в синхронном генераторе 137.
Период собственных колебаний контура 82.
— тока 10, 13, 14, 15.
— э. д. с. генератора 14.
Петля гистерезиса 248.
Плотность тока в проводнике 406.
— магнитного потока 414.
П-образная схема 370.
Поворачивающий множитель 96.
Поверхностный эффект 377, 416.
Полюсное деление 10.
Полуполюара 326.
Поляра окружности 325.
- Поляры сопряженные 326.
Постоянная времени контура 379.
— — цепи тока 382.
Постоянные линии передачи энергии 351, 355, 363.
Постоянный ток 400.
Порядок синусоиды 217.
Потери в диэлектрике 111.
— в железе трансформатора 267.
— мощности в генераторе 64.
— — в машине на тепло Джауля 133.
Потери на гистерезис 138.
Потери энергии в диэлектрике от утечки 111.
Потеря напряжения в проводах линии передачи энергии 66.
Потенциал нулевой точки нагрузки 185, 187.
Потенциал-регулятор 277.
Поток рассеяния первичный 265.
Принцип наложения или суперпозиций 128.
Проводимость активная 88.
Проводимость двух параллельных ветвей 280.
— намагничивания 275.
— — активная 255.
— — полная 255.
— — реактивная 255.
— — полная 89, 167.
— — реактивная 88.
— — цепи активная 254.
— — — полная 254.
— — — реактивная 254.
Провод нулевой или нейтральный 149.
Проекция вектора 34.
Производная вектора 105.
Пусковой реостат 200.
Пуск синхронной машины 136.
Пучность напряжения 354.
Пучность тока 354.
Пятифазная система 214.
- Работа 58.
Разветвление тока 242.
Радиус обращенной окружности 292.
Разложение пульсирующего магнитного поля 246.
Разность фаз 28.
Разряд конденсатора 371.
Реактивное падение напряжения в одном проводе 344.
Резонанс 261.
— для составляющих различных порядков 241.
— токов 112, 118.
— напряжений 78, 83.
Результирующая м. д. с. 191.
Ротор 10, 20.
Ряд Фурье 219, 220, 245.

- Самоиндукция 252, 341.
 — одного провода 342.
 Сванбурн 125.
 Свободные электрические колебания 377.
 Свободный ток 382.
 Связанная многофазная система 157.
 Связанный колебательный контур 378.
 Сдвиг фаз 29.
 — — по способу Гёргеса 125.
 — — — — Гумеля 125.
 Сеть бесконечно большой мощности 136.
 Символический метод — векторно-аналитическое обоснование 422.
 — метод — применение к трехфазному току 164.
 — метод — решение задачи для цепи с активным сопротивлением индуктивностью и емкостью с параллельно подключенным активным сопротивлением 121.
 Сименс (S) 89.
 Симметрия кривых сложной формы относительно оси абсцисс 217.
 Синхронная машина — диаграмма Блонделя 143.
 Синхронного генератора соотношения E, U, I, P 106.
 Синхронный генератор — векторная диаграмма 46, 138.
 — генератор — включение на параллельную работу 136.
 Синхронный генератор — работа на бесконечно сильную сеть 137.
 — генератор — работа на бесконечно сильную сеть при переменном возбуждении 141.
 Синхронный двигатель 67, 106.
 — двигатель — векторная диаграмма 142.
 — — перевозбужденный 110.
 Синхронный компенсатор 142.
 Синусоида 21.
 Система векторов (фаз) обратной последовательности 204.
 — — — — прямой последовательности 204.
 Система нулевой последовательности 208.
 Скольжение 201.
 Скорость движения волны в линии передачи энергии 350, 396.
 — — магнитного поля 198.
 — — света 353.
 Сложение векторов 34.
 — комплексных чисел 92, 102.
 Сложная форма кривых 231.
 Собственный период колебаний линии передачи энергии без потерь 390.
 Соединение звездой 150.
 — треугольником 151.
 Сопротивление активное 31, 60, 89.
 Сопротивление индуктивное 31.
 — кажущееся 31.
 — конденсатора 111.
 — омическое (активное) 31.
 — полное 31.
 — реактивное 31, 60, 72, 74, 89.
 Составляющие высших порядков во вращающемся поле 245.
 — синусоиды 217.
 Среднее значение ординат кривой за период 222.
 — — силы тока 53.
 — — синусоидальной величины 52.
 Средней мощности зависимость от других величин цепи 61.
 Статор 10.
 Степень обращения 288, 292.
 Стефан 416, 419.
 Стоячие волны в линии передачи энергии 352, 402.
 Суперпозиции принцип 128.
 Сэмплиер 125.
 Тахометр 136.
 Телеграфный кабель 353.
 Телефонный кабель 353.
 Тесла Н. 195.
 Тихий разряд 340.
 Т-образная схема 370.
 Ток активный 88, 90.
 — в разветвленной цепи 107.
 — вторичный 264.
 — двухфазный 146.
 Токи неперiodические 24.
 — Фуко в железе трансформатора 268.
 Ток линейный 153.
 — намагничивающий 264, 275, 391.
 — первичный 264.
 Ток переменный 10.
 — переменный — действующее значение 49.
 — — разветвляющейся цепи 107.
 — — сложной сети 107.
 — реактивный 88, 89.
 — синусоидальный 24.
 — трехфазный 148.
 — — при включении фаз генератора звездой, нагрузки треугольником 167.
 — — — — — и нагрузки звездой 165, 174.
 Ток утечки 340.
 Токи Фуко 245, 250, 254.
 — — в железе трансформатора 268.
 — уравнивающие, внутренние 141.
 Ток холостого хода трансформатора 265.
 — эквивалентный 238.
 — эффективный 49.

- Томсон 421.
 Топографический метод — применение для включения нагрузки звездой 161.
 Топографический метод — применение для случая включения нагрузки треугольником 259.
 Тороид 247.
 Точка короткого замыкания 333.
 — синхронизма 333.
 — холостого хода 333.
 Транспозиция 343, 346.
 Трансформатор 262, 372.
 Трансформатора к. п. д. 268.
 Трансформатор — аналитическое выражение круговой векторной диаграммы 274.
 Трансформатор — векторная диаграмма 262, 264.
 — всеобщий 200.
 Трансформатор — круговая диаграмма 288, 305.
 — многообмоточный 283.
 Трансформатор — потери в железе 267.
 — трехобмоточный 283.
 — трехфазный несимметричный 284.
 — трехфазного тока — схема включения первого рода 283.
 — трехфазный — четыре комбинации включения обмоток 285.
 Трапеция равнобокая — разложение в ряд Фурье 225.
 Трехфазная цепь — наиболее общий случай расчета 179.
 Трехфазной системы несимметричной разложение на симметричные составляющие 204.
 Трехфазный ток — составляющие высших порядков 243.
 Треугольник ампервитков 273.
 — мощностей 61.
 — напряжений 39, 45, 266.
 — проводимостей 90.
 — сопротивлений 32.
 Трехфазная линия передачи энергии 365.
 Турбогенератор 20.
 Угол гистерезиса 250.
 — опережения 140.
 — потерь в диэлектрике 112.
 — сдвига фаз 30.
 Удлы напряжения 352.
 — тока 352.
 Уравнения линии передачи энергии 348.
 — — — в гиперболической форме 361.
 Уравнение прямой 325, 227.
 — цепи переменного тока 380.
 Установившийся ток 382.
 Фазовые лампы 136.
 Фазовый угол 30.
 Фазорегулятор 277.
 Ферранти 123.
 Ферранти — явления в длинных линиях передачи энергии 123, 352.
 Феррарис 192, 195.
 Феррорезонанс 261.
 Физико-механический процесс синхронной машины 140.
 Флеминг 125.
 Формула Стефана 416, 419.
 Формула Томсона 375, 392.
 — э. д. с. трансформатора 252.
 Формула Эйлера 95, 347, 75.
 Фортескью 204.
 Фурье ряд 197, 231.
 Характеристика линии передачи энергии 405.
 Характеристическое уравнение 372.
 Хивисайд 355.
 Холостая работа трансформатора 263.
 Холостой ход трансформатора 263.
 Центр обращения 288.
 Частота 14.
 Частота резонанса напряжений 78, 81, 83.
 — — тока 112, 118.
 Число периодов колебаний в линии 393.
 Частота собственных колебаний контура 82.
 Число оборотов 14.
 Число полюсов 14.
 Штейнмец 103.
 Эйлера формула 192, 349.
 Эйртон 125.
 Эквивалентная звезда 171.
 — схема 280, 282.
 — — трехобмоточного трансформатора 283.
 — — трансформатора — первый ее вид 280.
 — — трансформатора — второй ее вид 282.
 Эквивалентные схемы линии передачи энергии 370.
 Эквивалентный треугольник 171.
 Экспериментальное построение окружности тока 315.
 Электродвижущая сила в контуре при синусоидальном изменении магнитного потока 45.
 — — генератора — форма кривой 20.
 Электродвижущая сила самоиндукции 29.
 — — — в цепи с индуктивностью 26.
 Электродинамический ваттметр 55.
 Электромагнитный осциллограф 17.
 Электростатический вольтметр 162.
 Энергия заряженного конденсатора 73.

Энергия магнитного поля 59, 390.

Энергия электрического поля 390.

Эффект Джоуля 59.

Эффект Джоуля во вторичной обмотке трансформатора 268.

— — в первичной обмотке трансформатора 267.

Явления в длинных линиях передачи энергии 355.

— заряда емкости 371.

— когоны 342.

— резонанса 241.

— Феранты 123, 352.