

530
В-18

ЛЮИ ДЕ БРОГЛЬ

ВВЕДЕНИЕ
В ВОЛНОВУЮ
МЕХАНИКУ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО УКРАИНЫ

530
Б-88

Депозитарий

ЛЮИ ДЕ-БРОГЛЬ

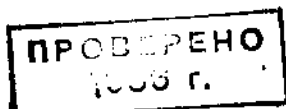
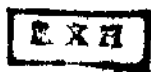
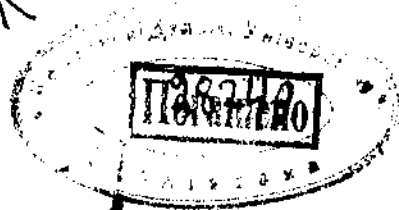
7

ВВЕДЕНИЕ В ВОЛНОВУЮ МЕХАНИКУ

59016011

ПЕРЕВОД С ФРАНЦУЗСКОГО ИЗДАНИЯ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
проф. Д. Д. ИВАНЕНКО



ОНТИ ГОСУДАРСТВЕННОЕ НКТП
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО УКРАИНЫ
Харьков 1934 Киев

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА

Библиографическое описание
этого издания помещено в
„Летописи Укр. печати“ „Кар-
точном реперт.“ и других ука-
зателях Укр. Книжн. Палаты.

Сектор Техно-теоретический
13 — 5 — 2

Ответственный редактор *Иршенко К.*
Техоформление *Ландсберг В.]*

Типография Государственного научно-технического издательства Украины
Киев, ул. Воровского, 42.

Уполномоч. Главлита № 5521(1014). Зак. № 227. Тираж 3000—15 листов

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Квантовая механика — весьма существенное и уже достаточно завершённое звено в цепи идейного развития современной физики — родилась и выросла в условиях современного кризиса естествознания, являющегося углублением и продолжением кризиса, связанного с появлением электронной теории, анализ которого дал Ленин.

Даже наиболее крупные современные физики щедро окружают квантовую механику целым рядом идеалистических выводов, характерных именно для эпохи кризиса естествознания в условиях буржуазного общества, кризиса, которым сопровождается современная революция в физических понятиях.

Но тем не менее никакие методологические попытки окрасить достижения квантовой механики в идеалистические цвета не могут скрыть ее действительного идейно революционного значения для физики.

Развитие квантовой механики наглядно показывает, как в физике стихийно выбиваются наружу ростки диалектического мировоззрения, которые стремятся преодолеть методологическую ограниченность и косность старого „классического“ метафизического мировоззрения.

Квантовая механика со всей остротой ревизует классические физические представления волны и частицы и показывает несостоятельность механистического одностороннего применения этих представлений к элементарным явлениям физического мира. Она сообщает громадную физическую общность идее о борьбе этих противоположных представлений, зародившейся в области учения о свете, — идее отражающей борьбу противоположностей прерывного и непрерывного, присущих изучаемым физикой объектам реального мира — квантам, электронам и другим элементарным частицам материи. Наши физические представления о кванте и электроны получают в настоящее время все большую физическую общность.

Таким образом, квантовая механика выдвигает для конкретного физического разрешения один из жгучих вопросов, проходящих через всю историю физики, философским содержанием которого является проблема диалектического единства прерывности и непрерывности.

Неизбежным следствием постановки этого вопроса, выдвинутого развитием экспериментальной физики, является отход от простенького метафизического понятия причинности в классической физике, философская критика которого была дана классиками марксизма и прекрасно отражена в следующих словах Ленина:

„... причина и следствие, егго, лишь моменты всемирной взаимозависимости, связи (универсальной), взаимосцепления событий, лишь звенья в цепи развития материи“; „... всесторонность и всеобъемлющий характер мировой связи, лишь односторонне, отрывчато и неполно выраженной каузальностью...“ (Ленинский сборник IX, стр. 161).

Естественно, что именно эти вопросы, имеющие огромное методологическое значение, являются тем пробным камнем, на котором выявляется кризис и методологическая беспомощность, характерные для развития физики в условиях империализма. Отвращаясь от механического понимания причинности в физике, явно не согласующегося с основами квантовой механики („принцип неопределенности“), даже такой гигант физической мысли как Бор, не будучи в состоянии подняться до диалектико-материалистического понимания причинности, приходит к идеалистическим высказываниям о свободе и своеволии в природе, а значит об отсутствии причинности, как основы реального физического понимания.

Ясно, что это раздвоение исследователя на гиганта-физика и на беспомощного идеалиста-философа не способствует развитию физики; оно выражает кризисное состояние естествознания в условиях капиталистического общества.

Нетрудно видеть, что эти выводы о свободе воли природы неизбежно ведут к признанию непознаваемости природы вообще. Последнее обстоятельство находит себе, например, выражение в позиции, занятой Дираком, который признает бессмысленным стремление к познанию единства противоположностей волны и частицы.

Он удовлетворяется признанием безисходной неразрешимости этого „дуализма“ и составлением уравнений между символами, „истинную сущность“ которых „нет никакой необходимости знать“.

Такая постановка вопроса мобилизует не мысль исследователя, а только тех буржуазных философов, которые опираются на слова Дирака, как на вывод крупного ученого.

Таким образом, физическая мысль от механистических попыток сведения частицы к волновому пакету (неудача этих попыток подчеркнула принципиальный характер вопроса) приходит к своеобразному агностицизму, приправленному математическим символизмом, и мы узнаем, что „задача физики — не разъяснять, а описывать явления“ (Гейзенберг).

Эта установка Гейзенберга включает в себе тем большую опасность для „мозгов“ некоторых физиков, что в своей односторонней тенденциозности она стремится перевести на идеалисти-

ческие рельсы ядровое убеждение исследователя, что высшим критерием теории является проверка ее опытом. „Практика,— писал Ленин,— выше (теоретического) познания, ибо оно имеет не только достоинство всеобщности, но и непосредственной действительности“ (Лен. сб. IX, стр. 261).

Установка Гейзенберга, заигрывая с этим стихийным убеждением физика-исследователя, непосредственно исходит из отказа от физической причинности. Теория, которая стремится не объяснить, а только описывать, стремится к тому, чтобы выбросить из себя свое конкретное причинное физическое содержание, свое живое взаимодействие с действительностью.

Приведенные примеры ясно показывают, как беспомощно колеблется исследовательская мысль в условиях буржуазного общества от одной крайности к другой, неизбежно соскальзывая с той вершины, на которую ее приводит ход исторического развития физики. Бесхребетность, эклектизм, легкая смена материалистических (обычно механистических) позиций на идеалистические, вплоть до поповщины — вот черты, характерные для идеологии ряда современных физиков.

Эта методологическая бесхребетность, осторожный бескровный объективизм не в малой мере характерны и для автора настоящей книги — творца ценнейшей физической идеи о волновой природе материи.

На стр. 11 и 12 де-Брогль знакомит читателя с безуспешностью своих попыток дать картину единства корпускулярных и волновых представлений и излагает физическое содержание „принципа неопределенности“ Бора-Гейзенберга, который является выражением невозможности решения этой задачи на современном уровне физических знаний. Брогль оказывается здесь бессильным отделить физическое содержание принципа неопределенности, являющееся достойным Бора-физика выражением основ квантовой механики, от той идеологической шелухи, которая принадлежит Бору-философу. Правда, здесь Брогль выступает еще с робкой критикой философского вывода Бора, что „волна не представляет физического явления... она есть скорее простое символическое представление“... (стр. 12); он находит, что это „довольно странное представление“. Однако в дальнейшем изложении Брогль сдается в плен философским выводам Бора: „...кажется совершенно необходимым следствием... и очень трудно не вывести из этого следующего заключения: волна не является физическим явлением в старом смысле слова, это некоторое символическое представление вероятности в пространстве и времени“. Не случайно эту свою капитуляцию де-Брогль сопровождает словечками „кажется“, „очень трудно“, ибо очень скоро мы все же узнаем, что физик де-Брогль не может удовлетвориться символами и не хочет сложить на этом свое исследовательское оружие; он все же считает, что „истинный смысл дуализма волн и частиц остается неясным“ (стр. 127).

Но, кроме забавной непоследовательности, прикрытой вводными словами и бояливой осторожности, изложение Брögля обладает чертами, выделяющими его книгу из ряда книг других авторов. Стихийное стремление Брögля к обогащению физического содержания теории, стремление найти за сложным аппаратом квантовой механики соответствующие физической реальности понятия и представления делают его книгу понятной и доступной и выделяют ее из ряда других как более подходящую к типу учебника.

ОБЩЕЕ ВВЕДЕНИЕ

За последние два года новая волновая механика получила прочную опытную поддержку благодаря открытию прекрасного явления до тех пор совершенно неизвестного: дифракции электронов в кристаллах.

Можно сказать, что это открытие является полной противоположностью более раннему открытию фотоэлектрического эффекта; для материи, также как и для света, мы до сих пор пренебрегали одной из сторон физической действительности.

В самом деле, после открытия фотоэлектрического эффекта выяснилось, что волновая теория света, установленная на прочных основах Френелем и перенесенная затем Максвеллом в электромагнитную теорию, несмотря на то, что содержит значительную долю истины, не является однако достаточной, и что необходимо в некотором смысле возвратиться к идее световых частиц, предложенной уже Ньютоном.

Планк, в своей знаменитой теории черного излучения, пришел к предположению, что всякое излучение частоты ν всегда испускается и поглощается равными и определенными количествами — квантами величины $h\nu$, где h константа, с которой всегда будет связано имя Планка. Для интерпретации фотоэлектрического эффекта Эйнштейну пришлось только допустить следующую гипотезу вполне соответствующую идеям Планка: свет состоит из частиц, и энергия частицы света частоты ν равна $h\nu$. Если при прохождении через вещество частица света встречает неподвижный электрон, она может передать ему свою энергию $h\nu$ и электрон, пришедший таким образом в движение, выйдет наружу с кинетической энергией, равной разности между полученной им энергией $h\nu$ и работой, которую он должен затратить для того, чтобы выйти из вещества. Но в этом именно и заключается тот экспериментальный закон фотоэффекта, который оправдывался последовательно на любом излучении от ультрафиолетовых до рентгеновых и γ -лучей.

Развивая свою идею, Эйнштейн показал, что если принять гипотезу частиц света или квант света, то каждой из этих частиц, наравне с энергией $W = h\nu$, нужно приписать количество движения $p = \frac{h\nu}{c}$. Эти два соотношения определяют энергетически частицу света частоты ν .

Недавно корпускулярная теория Эйнштейна была подтверждена открытием эффекта Комптона. Он состоит в следующем: пучок рентгеновских лучей, падающий на вещество, может претерпеть уменьшение частоты и привести в движение электроны. Явление легко объясняется, если допустить, что здесь происходит встреча, удар между частицей света и электроном, находящимся сперва в покое внутри вещества. Во время удара электрон заимствует энергию у частицы света и начинает двигаться. Частица света теряет при этом часть своей энергии и так как соотношение $W = h\nu$ должно всегда оправдываться, то частота кванта света будет меньше чем до удара. Теория явления Комптона, основанная на двух соотношениях $W = h\nu$ и $p =$

$\frac{h\nu}{c}$, была развита самим Комптоном и Дебаем: количественное

совпадение с опытом было другим замечательным успехом гипотезы корпускулярной природы света.

Несмотря на эти успехи, одна теория квант света сама по себе не может нас вполне удовлетворить. Прежде всего, совокупность явлений дифракции и интерференции требует введения понятия волны, и более того, оба основных соотношения $W = h\nu$ и $p = \frac{h\nu}{c}$

предполагают существование частоты ν . Этого достаточно, чтобы показать, что свет нельзя рассматривать состоящим из простых движущихся частиц. Тем не менее открытие фото-электрического эффекта Комптона показало необходимость введения понятия частицы наряду с понятием волны. Казалось, что природа света обладает странной „двойственностью“.

Но если в теории света, в течение целого столетия, слишком пренебрегали понятием „частицы“ для того, чтобы пользоваться исключительно понятием „волны“, не была ли допущена обратная ошибка в теории материи? Были ли вправе физики пренебрегать понятием „волны“ и думать только о понятии „частицы“? Эти вопросы, несколько лет тому назад, задал себе автор, обдумывая аналогию между принципом наименьшего действия и принципом Ферма, и ища смысл таинственных квантовых условий, введенных во внутриатомную динамику Планком, Бором, Вильсоном и Зоммерфельдом. Путем рассуждений, которые мы обойдем здесь молчанием, можно прийти к убеждению, что необходимо ввести волны в теорию материи, и что это нужно сделать следующим образом: пусть имеется материальная частица (например электрон) массы m , которая свободно движется с постоянной скоростью v . Если исходить из теории относительности, то энергия и количество движения частицы будут

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{W}{c^2} \vec{v}, \quad \left(\beta = \frac{v}{c} \right), \quad (1)$$

де c — скорость света в пустоте. Следуя новому воззрению, этой частицей нужно связать волну, распространяющуюся направлении движения, частота которой будет равна:

$$\nu = \frac{W}{h} \quad (2)$$

фазовая скорость:

$$V = \frac{c^2}{v} = \frac{c}{\beta} \quad (3)$$

Отсюда имеем:

$$\frac{h\nu}{V} = \frac{Wv}{c^2} = p \quad (4)$$

следовательно, если λ есть длина сопряженной волны, то

$$\lambda = \frac{V}{\nu} = \frac{h}{p} \quad (5)$$

Для того, чтобы применить эти формулы к частице света, не материи, нужно положить $v=c$ и тогда:

$$W = h\nu, \quad p = \frac{h\nu}{c} \quad (6)$$

Это и есть основные формулы теории квант света. Наши формулы от (2) до (5) совершенно общи: они одинаково хорошо применимы и к материи и к излучению и они выражают необходимость введения в обоих случаях понятия волны наряду с понятием частицы.

Как следует в частности из прекрасных работ Шредингера, старая механика соответствует тому случаю, когда распространение сопряженной волны происходит согласно законам геометрической оптики. В этом случае можно считать, что частица следует по одному из „лучей“ волны со скоростью равной групповой скорости Релея. В этих условиях можно считать, что частица образована группой волн очень близких частот; это дало бы очень удовлетворительное физическое представление частицы, если бы его можно было обобщить; к сожалению это не имеет места.

Нужно отметить, что если сопряженная волна распространяется по законам геометрической оптики, то никакой опыт не в состоянии доказать существование сопряженных волн, так как тогда результат опыта можно рассматривать только как доказательство точности законов старой механики. Но совсем иначе получается, если условия распространения сопряженной волны таковы, что приближения геометрической оптики уже недостаточны для того, чтобы учесть их. Согласно новым идеям мы

должны, следовательно, ожидать возможности наблюдать такие явления, которые старая механика была совершенно бессильна предвидеть и которые характерны для волновой концепции динамики.

В области новой динамики наилучше установленным представляется принцип, согласно которому вероятность, что сопряженная с волной частица находится в данный момент в данной точке, должна измеряться квадратом амплитуды волны, ее интенсивностью в каждой точке пространства в каждый момент времени. Достаточно немного размышления, чтобы увидеть необходимость этого принципа для учета явлений интерференции и дифракции света, ибо в оптике доказывается, что там, где волна Френеля имеет максимум интенсивности, там, в среднем, можно наблюдать и максимум лучистой энергии. Так как нашей руководящей идеей является возможно большее приближение теории света к теории материи, то совершенно естественно распространить принцип, необходимый в случае света, на случай материальных частиц.

Таким образом мы приходим к выводу, что материальные частицы должны давать явления аналогичные явлениям интерференции и дифракции света, и что методы подсчета в обоих случаях должны быть весьма аналогичны друг к другу. По новым представлениям, с плоской монохроматической волной должно быть связано облако электронов одной и той же скорости. Допустим, что это облако падает на среду с правильной структурой как у кристалла: если расстояния между элементами этой структуры будут такого же порядка величины, что и длина волны падающего света, то будет иметь место дифракция этой волны, и в некоторых направлениях, которые могут быть легко вычислены, будет лежать максимум амплитуды рассеянной волны. Нужно ожидать, что после рассеяния электроны будут сконцентрированы в некоторых направлениях. Таким образом будет иметь место точная аналогия опыта Лауэ с рентгеновыми лучами, и если результат совпадает с предсказаниями теории, получится очень сильное и непосредственное доказательство необходимости, даже и для материи, дополнения понятия частицы понятием волны.

Такие опыты были произведены различными методами и в различных условиях Дэвисоном и Джермером в Нью-Йорке, Томсоном в Aberдине и Руппом в Геттингене. Согласие между опытом и теорией превосходное. Отклонения, которые были констатированы в первых опытах Дэвисона и Джермера, оказались совершенно естественно объяснимыми, если принять во внимание показатель преломления волн в кристалле. Совсем недавно Рупп смог получить дифракцию пучка электронов при помощи обычной линейной решетки при скользящем падении. Экспериментальные подтверждения, следовательно, таковы, как только можно пожелать.

Таким образом, всей совокупностью великолепных экспериментальных результатов установлено, что везде в физике нужно зводить одновременно и частицы и волны. Но что же в самом деле означает эта двойственность? Это очень трудный вопрос, который еще далек от полного разъяснения.

Наиболее простой является идея, которую выдвинул Шредингер в начале своих исследований: частица, электрон образуются из группы волн, это есть „волновой пакет.“ Мы видим, что это представление оправдывается до тех пор, пока мы рассматриваем механические явления в согласии со старой динамикой, т. е., говоря на новом языке, явления, где распространение сопряженной волны повинуетя законам геометрической оптики. К сожалению, при переходе в область самой новой теории эта идея, соблазнительная по своей простоте, не может быть больше сохранена. В таких опытах, как дифракция электронов в кристалле, пакет волн должен совершенно рассеяться и разрушиться; в рассеянных пучках нельзя будет, следовательно, найти частицы. Другими словами: если бы существовали простые пакеты волн, существование частиц не было бы устойчивым.

Если не представляется возможным довести до конца идею Шредингера, то и другое мнение, которого долго придерживался автор, и согласно которому частица будет особой точкой в волновом образовании, оказалось не легко развить. В частном случае равномерного движения частицы можно найти решение волнового уравнения, представляющее собой движущуюся особую точку и могущее дать представление о частице. Но это очень трудно обобщить на случай неравномерного движения, и существуют вообще серьезные доводы против этой точки зрения.

Автор сделал также другую попытку в своем докладе на пятом Сольвейском конгрессе, где он исходил из следующей мысли: так как мы должны всегда связывать с частицей волну, то идеей, наиболее совпадающей с прежними физическими представлениями, будет рассмотрение волны как образования действительно существующего, занимающего некоторую область пространства, и частицы как материальной точки, имеющей определенное положение в волне. Так как интенсивность волны в каждой точке должна быть пропорциональна вероятности присутствия частицы, то нужно связать движение частицы с распространением волны таким образом, чтобы эта связь всегда автоматически была выполнена.

В самом деле, действительно возможно установить между движением частицы и распространением волны такую связь, что если в начальный момент интенсивность волны измеряет в каждой точке вероятность присутствия частицы, то тоже будет иметь место и во всякий последующий момент. Нужно, следовательно, считать, что частица как бы направляется волной, которая играет роль волны-пилота. Это представление наглядно иллюстрирует движение частиц в волновой механике,

не слишком отходя от классических идей. К сожалению и здесь также мы наталкиваемся на очень серьезные возражения, и рассматривать теорию „ведущей“ волны как вполне удовлетворительную — нельзя. Тем не менее, так как уравнения, на которых основана эта теория, неоспоримы, то можно рассмотреть некоторые из результатов этой теории, придавая им несколько иную, смягченную форму согласно идеям Кеннарда¹, развитым им независимо от автора. Вместо того, чтобы говорить о движении и о траектории частицы, говорят о движении и траектории „элемента вероятности“ и, таким образом, избегают указанных трудностей.

Наконец существует четвертая точка зрения, пользующаяся наибольшим признанием в настоящее время, и которая была развита Гейзенбергом и Бором. Эта точка зрения с первого взгляда приводит в замешательство, но тем не менее она как будто содержит большую долю истины. По этому воззрению волна совсем не представляет собой физического явления, разыгрывающегося в некоторой области пространства; она есть скорее простое символическое представление того, что мы знаем под именем частицы. Опыт или наблюдение никогда не позволяют точно сказать: такая-то частица занимает такое-то место в пространстве и она имеет такую-то скорость и направление. Все, что может дать нам эксперимент, это то, что положение и скорость частицы заключены в некоторых пределах, иначе говоря, что имеется такая-то вероятность того, что частица занимает такое-то положение, и другая вероятность того, что она имеет такую-то скорость. Сведения, которые нам дает первый опыт или наблюдение, сделанное в момент времени t_0 , могут быть представлены символической волной, интенсивность которой в этот момент t_0 дает в каждой точке вероятность присутствия частицы в этой точке, а весь спектр волн дает нам относительную вероятность различных состояний движения. Если мы изучаем распространение волны от момента t_0 до следующего момента t , то распределение интенсивностей и весь спектр волн в момент t позволяет нам сказать для следующего опыта или наблюдения, сделанного в момент времени t , какова вероятность локализации частицы в такой-то точке и приписать ей такое-то состояние движения.

Существенным следствием этой точки зрения является „соотношение неопределенности“ Гейзенберга. Ограниченный поток волн может рассматриваться как строго монохроматический, если только размеры его невелики по сравнению с длиной волны. Если, следовательно, мы локализуем частицу в некоторой области пространства, не слишком больших размеров по отношению к длине волны, то нужно представить частицу при помощи группы волн, которая отнюдь не будет монохроматической.

¹ Phys. Rev., 31, 876, 1928 г.

следовательно, с точки зрения Гейзенберга, чем больше будет точно определено положение, тем хуже будет определено состояние движения. Обратно, чем лучше определено состояние движения частицы, тем ближе будет сопряженная волна к плоской монохроматической волне с постоянной амплитудой. Следовательно, чем точнее будет определено состояние движения, тем с меньшей уверенностью может оценить положение частицы.

Бор говорит, что есть „две дополняющие друг друга стороны действительности“: локализация во времени — пространство, и динамическое определение через энергию и количество движения. Это как бы различные плоскости, на которых мы не можем находиться точно одновременно. Сделаем сравнение. Пусть мы имеем рисунок, некоторые части которого нарисованы на плоскости Π и другие части на плоскости Π' , параллельной и очень близкой к первой. Если мы будем рассматривать этот рисунок при помощи не очень точного оптического инструмента, мы сможем на промежуточной плоскости получить изображение довольно сходное с рисунком: нам будет казаться, что весь рисунок начерчен на одной и той же плоскости. Но если мы употребим очень точный оптический инструмент, мы не сможем видеть одновременно точки и на Π и Π' ; чем точнее мы будем видеть точку на Π , тем большая часть рисунка на Π' будет казаться неясной и обратно; в конце-концов мы принуждены будем признать, что рисунок лежит не в одной плоскости. Старая механика была аналогией мало точного инструмента: она нам давала иллюзию возможности точно определять сразу и положение частицы и ее состояние движения. Но с помощью новой механики, которая аналогична точному инструменту, мы принуждены признать, что локализация в пространстве и времени и точное определение энергетического состояния суть две стороны действительности, которые нельзя точно видеть в одно и то же время.

— Таковы; повидимому, основные идеи Бора и Гейзенберга.

Эта точка зрения имеет следствие, уже указанное прежде Борном, а именно, что мы не можем более говорить о существовании в природе строгого детерминизма, так как весь детерминизм старой динамики покоился на возможности одновременного определения положения и начальной скорости частицы, что невозможно, если согласиться с идеями Гейзенберга. Нет больше строгих законов, есть только законы вероятности.

При такой интерпретации волновой механики мы встречаемся с довольно странными обстоятельствами. Прежде всего, частицы существуют и всегда допускалось, что есть смысл говорить о их числе; тем не менее согласно идее Бора невозможно более нарисовать себе ясную и классическую картину, которая состоит в рассмотрении частиц как очень малых объектов, имеющих в пространстве некоторое положение, скорость и траекторию. Во-вторых, другой партнер в дуализме — волна есть уже не что

иное как чисто символическое и аналитическое представление некоторых вероятностей, и совсем не представляет собой физического явления в прежнем смысле слова. Следующий пример очень ясно иллюстрирует последний пункт.

Допустим, что в момент времени t поток волн занимает область пространства R и что некое наблюдение, сделанное в этот момент, позволяет утверждать, что частица находится в области R' конечно заключающейся в R ; тогда пакет волн должен быть „сведен“ по выражению Гейзенберга, т. е. вся часть волны внутри R , но вне R' исчезает, так как вероятность явления, которое не осуществляется, равняется нулю. Это достаточно ясно иллюстрирует не физический характер волны в представлениях Бора и Гейзенберга.

Резюмируя, можно сказать, что физическая интерпретация новой механики остается очень сложной проблемой. Тем не менее установлен тот крупный факт, что: для материи и для излучения нужно допустить дуализм волн и частиц; и что распределение частиц в пространстве может быть предсказано только с помощью волновых рассматриваний. К сожалению более глубокая природа двух партнеров дуализма и точное соотношение, существующее между ними, еще достаточно неясны.

ГЛАВА I

СТАРАЯ МЕХАНИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

I. Принцип Гамильтона

Существуют две старые механики. Первая, более старая, это классическая механика Ньютона. Вторая — релятивистская механика Эйнштейна. Для нужд науки долгое время было достаточно механики Ньютона, но глубокие исследования Эйнштейна показали, что ее следует изменить так, чтобы получить механику совпадающую со старой, когда скорость рассматриваемой материальной точки мала по сравнению со скоростью света в пустоте, но отличающуюся от нее для больших скоростей.

Две старые механики, несмотря на разделяющие их отличия, обладают также существенным сходством: общие уравнения имеют одну и ту же форму, обе механики исходят из одного и того же принципа — принципа наименьшего действия и т. д.; поэтому легко дать одновременное изложение главных принципов старых механик. Важным пунктом является то обстоятельство, что все формулы механики Ньютона выводятся из динамики Эйнштейна, если полагать, что скорость света в пустоте бесконечно велика; иначе говоря, исходя из релятивистских формул, можно всегда получить классические, разлагая в ряд по $\beta = \frac{v}{c}$ и пренебрегая членами высоких порядков.

Мы рассмотрим сперва динамику одной материальной точки, т. е. изучим движение частицы в силовом поле, которое считается заданным. Определим это силовое поле потенциальной функцией $F(x, y, z, t)$ от пространственных координат и от времени. В старых механиках материальные точки, частицы, считаются занимающими вполне определенное положение в пространстве, причем его можно задать тремя координатами.

Таким образом, если положение частицы вполне определено в каждый данный момент времени, можно очевидно определить также и ее скорость, как предел отношения пространственного отрезка, пробегаемого частицей вдоль ее пути, ко времени необходимому для этого, если время пробега стремится к нулю. Когда же положение частицы определяется с помощью прямоугольных координат, то $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$, где точки означают производные по времени. В общем случае, при употреблении криволинейных координат q_1, q_2, q_3 , скорость будет выражаться некоторой функцией от q_i и $\dot{q}_i$.

Основной принцип обоих старых механик — это принцип стационарного действия Гамильтона. Допустим, что в момент t_0 частица находится в точке пространства M_0 и что в более поздний момент t_1 она занимает точку пространства M_1 . Задача динамики материальной точки состоит в определении движения частицы за промежуток времени от t_0 до t_1 . Принцип Гамильтона утверждает, что существует некоторая функция $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ от q_i , $\dot{q}_i$ и времени, такая что движение точки между t_0 и t_1 характеризуется следующими свойствами: интеграл для действительного движения $\int_{t_0}^{t_1} L dt$ будет меньше, чем для всякого другого бесконечно мало отличного от него и приводящего частицу из точки M_0 с моментом времени t_0 в точку M_1 в момент времени t_1 .

Интеграл $\int_{t_0}^{t_1} L dt$ есть интеграл действия Гамильтона; функция L называется функцией Лагранжа и иногда также кинетическим потенциалом.

Принцип наименьшего действия Гамильтона выражается, следовательно, формулой:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0 \quad (1)$$

где t_0 и t_1 неизменны, а символ δ означает, что нужно варьировать вид функций $q_i(t)$ и, следовательно, $\dot{q}_i(t)$ так, чтобы начальные и конечные значения $q_i(t)$ и $\dot{q}_i(t)$ оставались неизменными.

2. Уравнения Лагранжа

Общий метод вариационного исчисления приводит нас к уравнениям Лагранжа. Если мы варьируем функцию $q_i(t)$ для каждого значения времени t таким образом, чтобы ее значение стало равным $q_i(t) + \delta q_i(t)$, то функция $q_i(t)$ примет вид $q_i(t) + \delta q_i(t)$ и мы будем иметь:

$$\delta L = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) \quad (2)$$

и как следствие (t_0 и t_1 остаются фиксированными):

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = 0 \quad (3)$$

или

$$\delta \dot{q}_i = \delta \left(\frac{dq_i}{dt} \right) = \frac{d \delta q_i}{dt}$$

Интегрируя по частям, получаем:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i dt = \left[\sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt. \quad (4)$$

Откуда получим выражение принципа Гамильтона:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^3 \delta q_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] dt = 0 \quad (5)$$

δq_i произвольны, и, следовательно, получается

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (i=1, 2, 3) \quad (6)$$

Это и есть уравнения Лагранжа. Они определяют движение частицы как функцию шести произвольных постоянных, например, трех начальных координат и трех составляющих начальной скорости.

3. Функция Лагранжа. Количество движения и энергия

До сих пор наша динамическая теория была только пустой формой без содержания, так как мы не определили точно вид функции Лагранжа L в зависимости от q_i и $\dot{q}_i$. Как раз здесь-то и расходятся обе старые механики (Ньютона и Эйнштейна), выбирая различно функцию L .

Механика Ньютона полагает:

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = \frac{1}{2} m v^2 - F(q_i, t), \quad (7)$$

где m константа, характеризующая частицу и называемая ее „массой“; функция $F(q_i, t)$ — потенциальная функция и v скорость частицы, которую надо определить в функции от q_i и $\dot{q}_i$.

Релятивистская механика, напротив, принимает для функции Лагранжа:

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} - F(q_i, t), \quad (8)$$

где $\beta = \frac{v}{c}$, так как $(1 - \beta^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2} \beta^2 + \dots$, то видно, что пренебрегая ненаписанными членами, имеем:

$$L = -mc^2 + \frac{1}{2} m v^2 - F(q_i, t), \quad (9)$$

так что релятивистская функция Лагранжа, в этой степени приближения, отличается от классической функции только на постоянный член $-mc^2$; в интеграле (1) из этой константы получается член $-mc^2 (t_1 - t_0)$, который не является объектом варьирования и может быть впоследствии отброшен. Отсюда видно, как мы уже оговаривали и раньше, что обе старые механики совпадают, если можно пренебречь высшими степенями β .

Теперь, когда мы знаем, чем заполнить пустую форму принципа Гамильтона для того чтобы получить ту или иную старую динамику, возвратимся к уравнениям Лагранжа.

По определению, полагаем:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i=1, 2, 3) \quad (10)$$

и мы будем говорить, что p_i есть момент сопряженный с переменной q_i .

Тогда уравнения Лагранжа дадут:

$$\frac{dp_i}{dt} = + \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (11)$$

Займемся немного частным случаем прямоугольных координат. При этом

$$q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad q_3 = z \text{ и } v^2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

При ньютоновском выборе L получается

$$p_x = mx, \quad p_y = my, \quad p_z = mz. \quad (12)$$

p_i — есть составляющие величины, называемые вектором „количества движения“ $\vec{mv}$.

Если взять релятивистскую функцию L , получается:

$$p_x = \frac{mx}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad p_y = \frac{my}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad p_z = \frac{mz}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (13)$$

p_i будет составляющими вектора „количества движения“ при условии определения последнего как $\frac{\vec{mv}}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

С другой стороны, в том и другом случае, из выбора прямоугольных координат следует, что L зависит от q_i только через функцию F . Следовательно:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial F}{\partial q_i}. \quad (14)$$

Если рассматривать вектор — grad F с составляющими $-\frac{\partial F}{\partial x}, -\frac{\partial F}{\partial y}, -\frac{\partial F}{\partial z}$ и если назвать этот вектор $\vec{f}$ „силой примененной к частице“, то уравнения (11) дают классические уравнения:

$$\frac{dp_x}{dt} = f_x, \quad \frac{dp_y}{dt} = f_y, \quad \frac{dp_z}{dt} = f_z, \quad (15)$$

применяющиеся в обоих старых динамиках.

Введем теперь понятие энергии. Для этого мы будем исходить из общего выражения уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (i=1, 2, 3) \quad (16)$$

Рассмотрим величину

$$W = \sum_{i=1}^3 p_i \dot{q}_i - L \quad (17)$$

и возьмем ее производную по времени:

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i \cdot \frac{dp_i}{dt} + \sum_{i=1}^3 p_i \cdot \frac{d\dot{q}_i}{dt} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial q_i} \cdot \frac{dq_i}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (18)$$

Первый и третий члены взаимно уничтожаются по уравнению Лагранжа, второй и четвертый по определению p_i . Остается

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial t}. \quad (19)$$

Отсюда получается теорема: „если функция F не зависит явно от времени, величина W остается постоянной“. W называется энергией частицы.

Посмотрим как определяется энергия в классической динамике. Мы имеем $L = \frac{1}{2}mv^2 - F$ и при выбранных нами координатах член $\frac{1}{2}mv^2$ есть однородная квадратичная функция $\dot{q}_i$, так как $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$, а каждый из членов $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ есть линейная функция $\dot{q}_i$. Если, следовательно $T = \frac{1}{2}mv^2$, мы будем иметь по формуле Эйлера

$$2T = \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{i=1}^3 p_i \dot{q}_i, \quad (20)$$

так как L зависит от $\dot{q}_i$ только через T . Следовательно:

$$W = 2T - L = 2T - (T - F) = T + F. \quad (21)$$

Энергия есть сумма членов $T = \frac{1}{2}mv^2$ — кинетической энергии частицы и F — потенциальной энергии.

Перейдем теперь к релятивистской динамике, где $L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} - F$. Мы не можем более рассуждать как прежде потому, что $\sqrt{1-\beta^2}$ не есть однородная квадратичная функция от $\dot{q}_i$, но мы можем написать:

$$\sum_{i=1}^3 p_i \dot{q}_i = \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i \frac{m}{2\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial (v^2)}{\partial \dot{q}_i} \quad (22)$$

и так как v^2 есть однородная квадратичная функция от $\dot{q}_i$, то

$$2v^2 = \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i \frac{\partial (v^2)}{\partial \dot{q}_i}; \quad \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i p_i = \frac{m\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} c^2. \quad (23)$$

Займемся немного частным случаем прямоугольных координат. При этом

$$q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z \text{ и } v^2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

При ньютоновском выборе L получается

$$p_x = m\dot{x}, p_y = m\dot{y}, p_z = m\dot{z}. \quad (12)$$

p_i — есть составляющие величины, называемые вектором „количества движения“ $\vec{mv}$.

Если взять релятивистскую функцию L , получается:

$$p_x = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\beta^2}}, p_y = \frac{m\dot{y}}{\sqrt{1-\beta^2}}, p_z = \frac{m\dot{z}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (13)$$

p_i будет составляющими вектора „количества движения“ при условии определения последнего как $\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

С другой стороны, в том и другом случае, из выбора прямоугольных координат следует, что L зависит от q_i только через функцию F . Следовательно:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial F}{\partial q_i}. \quad (14)$$

Если рассматривать вектор — grad F с составляющими $-\frac{\partial F}{\partial x}, -\frac{\partial F}{\partial y}, -\frac{\partial F}{\partial z}$ и если назвать этот вектор $\vec{f}$ „силой примененной к частице“, то уравнения (11) дают классические уравнения:

$$\frac{dp_x}{dt} = f_x, \frac{dp_y}{dt} = f_y, \frac{dp_z}{dt} = f_z, \quad (15)$$

применяющиеся в обоих старых динамиках.

Введем теперь понятие энергии. Для этого мы будем исходить из общего выражения уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (i=1, 2, 3) \quad (16)$$

Рассмотрим величину

$$W = \sum_{i=1}^3 p_i \dot{q}_i - L \quad (17)$$

и возьмем ее производную по времени:

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i \cdot \frac{dp_i}{dt} + \sum_{i=1}^3 p_i \cdot \frac{d\dot{q}_i}{dt} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{d\dot{q}_i}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (18)$$

Первый и третий члены взаимно уничтожаются по уравнению Лагранжа, второй и четвертый по определению p . Остается

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial t}. \quad (19)$$

Отсюда получается теорема: „если функция F не зависит явно от времени, величина W остается постоянной“. W называется энергией частицы.

Посмотрим как определяется энергия в классической динамике. Мы имеем $L = \frac{1}{2}mv^2 - F$ и при выбранных нами координатах член $\frac{1}{2}mv^2$ есть однородная квадратичная функция q_i , так как $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$, а каждый из членов $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ есть линейная функция $\dot{q}_i$. Если, следовательно $T = \frac{1}{2}mv^2$, мы будем иметь по формуле Эйлера

$$2T = \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{i=1}^3 p_i \dot{q}_i, \quad (20)$$

так как L зависит от $\dot{q}_i$ только через T . Следовательно:

$$W = 2T - L = 2T - (T - F) = T + F. \quad (21)$$

Энергия есть сумма членов $T = \frac{1}{2}mv^2$ — кинетической энергии частицы и F — потенциальной энергии.

Перейдем теперь к релятивистской динамике, где $L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} - F$. Мы не можем более рассуждать как прежде потому, что $\sqrt{1-\beta^2}$ не есть однородная квадратичная функция от $\dot{q}_i$, но мы можем написать:

$$\sum_{i=1}^3 p_i \dot{q}_i = \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i \frac{m}{2\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial (v^2)}{\partial \dot{q}_i} \quad (22)$$

и так как v^2 есть однородная квадратичная функция от $\dot{q}_i$, то

$$2v^2 = \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i \frac{\partial (v^2)}{\partial \dot{q}_i}; \quad \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i p_i = \frac{m\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} c^2. \quad (23)$$

Следовательно:

$$W = \sum_{i=1}^3 p_i \dot{q}_i - L = \frac{mv^2}{\sqrt{1-\beta^2}} c^2 - (-mc^2 \sqrt{1-\beta^2} - F) = \quad (24)$$

$$= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + F.$$

Член $\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ представляет собой энергию движущейся частицы в релятивистской динамике. Если частица принуждена оставаться в покое ($\beta=0$), то этот член будет равен mc^2 : это энергия, частицы находящейся в покое, т. е. ее внутренняя энергия соответствующая существованию „собственной“ массы m и равная произведению этой собственной массы на квадрат скорости света. Когда частица находится в движении, ее энергия будет $\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$, она равна произведению c^2 на величину $\frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}$, которую можно рассматривать как массу движущейся частицы. Важно отметить, что частица с „собственной“ массой не равной нулю должна иметь всегда скорость меньшую скорости света, так как ее энергия стремится к бесконечности, когда β стремится к единице.

Если развернуть $\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ в ряд по β^2 , пренебрегая высшими членами, то

$$W = mc^2 + \frac{1}{2} mv^2 + F, \quad (25)$$

откуда видно, что релятивистская энергия, в этой степени приближения, равна энергии ньютоновской механики *увеличенной на член mc^2* . Никогда не нужно забывать об этой существенной разнице и о том, что классическая динамика систематически пренебрегает членом внутренней энергии mc^2 .

4. Другое выражение принципа Гамильтона. Принцип Мопертюи

Мы покажем сейчас, что интегралу действия Гамильтона можно придать вид криволинейного интеграла. Для этого рассмотрим абстрактное четырехмерное пространство с тремя координатами частицы q_i и временем t . Движение частицы в этом пространстве будет представлено некоторой кривой потому что оно выражается тремя уравнениями $q_i = f_i(t)$. Это та кривая, которая в теории относительности называется мировой линией движущейся точки; вдоль этой кривой, каждая координата q_i является следовательно некоторой функцией времени.

Принимая во внимание выражение (17) для энергии, можно написать интеграл Гамильтона так:

$$\int_{P_0}^{P_1} \left(\sum_{i=1}^3 p_i dq_i - W dt \right). \quad (26)$$

Точки P_0 и P_1 соответствуют на мировой линии моментам времени t_0 и t_1 . Принцип стационарного действия утверждает, что этот криволинейный интеграл постоянен для всех бесконечно малых изменений кривой интегрирования, причем концы кривой остаются фиксированными, т. е. что ни начальные, ни конечные моменты времени и ни начальные, ни конечные положения точки не изменяются.

В случае постоянных полей, принцип стационарного действия принимает особенно важный вид. В самом деле, в этом случае $\frac{\delta F}{\delta t} = 0$ и как следствие $\frac{\delta L}{\delta t} = 0$. Энергия постоянна, и принципу наименьшего действия можно придать знаменитое выражение Мопертюи, которое дает возможность определить траекторию, не задумываясь о том, каким способом она описана частицей. Такое разделение траектории и движения может иметь место только для полей постоянных по времени; небольшое размышление позволит это сразу сообразить.

Для того, чтобы перейти от справедливого всегда принципа Гамильтона к принципу Мопертюи, имеющему место в постоянных полях, нужно сперва вывести формулу, которую иногда называют „принципом переменного действия“. Вместо того, чтобы рассматривать вариации, при которых начальные и конечные моменты времени и координаты фиксированы, заставим также и последние измениться на очень малые величины δt_0 , δt_1 , $(\delta q_i)_0$, $(\delta q_i)_1$.

Вариация интеграла Гамильтона есть сумма вариаций для не меняющихся пределов и вариации вследствие изменения пределов. Следовательно мы имеем:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt + \left[\sum_{i=1}^3 p_i \delta q_i - W \delta t \right]_0^1, \quad (27)$$

потому что при варьировании начального момента времени на δt_0 и начальных координат на $(\delta q_i)_0$, интеграл, рассматриваемый нами как криволинейный, изменяется очевидно на

$$-\left[\sum_{i=1}^3 (p_i)_0 (\delta q_i)_0 - W_0 \delta t_0 \right]$$

$$+\left[\sum_{i=1}^3 (p_i)_1 (\delta q_i)_1 - W_1 \delta t_1 \right]$$

и на

для вариаций δt_1 и $(\delta q_i)_1$ верхних пределов. Первый член правой части выражения (27) равен нулю по принципу Гамильтона, так что остается, следовательно:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \left| \sum_{i=1}^s p_i \delta q_i - W \delta t \right|_0^1. \quad (28)$$

Эта формула выражает собой принцип переменного действия.

Обозначим пока интеграл Гамильтона через S и через S_1 криволинейный интеграл:

$$S_1 = \int_{M_0}^{M_1} \sum_{i=1}^s p_i \delta q_i \quad (29)$$

взятый вдоль траектории от начальной точки M_0 до конечной M_1 . Интеграл (29) есть интеграл действия Мопертюи; так как в постоянном поле формулы (21) и (24) позволяют выразить скорость, и как следствие p_i , в функции от постоянной энергии и координат q_i ; интеграл Мопертюи абсолютно не зависит от времени.

Мы имеем очевидно:

$$S = S_1 - \int_{t_0}^{t_1} W dt. \quad (30)$$

Из общего метода варьирования следует:

$$\delta S = \delta S_1 - \int_{t_0}^{t_1} \delta W dt - \left| W \delta t \right|_0^1. \quad (31)$$

Сравнивая с (28) получаем:

$$\delta S_1 = \left| \sum_{i=1}^s p_i \delta q_i \right|_0^1 + \int_{t_0}^{t_1} \delta W dt. \quad (32)$$

Если мы, следовательно, будем варьировать траекторию, зафиксировав M_0 и M_1 и сохраняя то же значение энергии, действие Мопертюи будет стационарно; это принцип Мопертюи.

Возьмем за q_i прямолинейные координаты; мы имеем:

$$\sum_{i=1}^s p_i dq_i = p_x dx + p_y dy + p_z dz \quad (33)$$

и мы видим, что интеграл S_1 обладает следующим инвариантным смыслом: это есть работа производимая на траектории вектором количества движения. В классической механике она выражается через $\int m v ds$ и в релятивистской механике через

$\int \frac{m v^2}{\sqrt{1-\beta^2}} ds$, где ds элемент дуги траектории.

5. Канонические уравнения Гамильтона

Мы покажем сейчас, что уравнения динамики могут быть получены в виде хорошо известном под именем канонических уравнений Гамильтона.

Так как функция L зависит от $\dot{q}_i$, q_i и t , то уравнения (10) позволяют нам выразить p_i в функциях от этих переменных, и вследствие этого мы можем написать также и вообще:

$$\dot{q}_i = f_i(q_i, p_i, t), \quad (i=1, 2, 3) \quad (34)$$

где f_i некоторые функции, которые мы сможем вычислять в каждом частном случае. Мы можем принять за переменные q_i , p_i и t вместо q_i , $\dot{q}_i$ и t . Обозначим через $H(q_i, p_i, t)$ энергию выраженную в функции переменных q_i , p_i , t , которые часто называют каноническими переменными. По определению энергии мы имеем:

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^3 p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t), \quad (35)$$

где во втором члене каждое $\dot{q}_i$ нужно считать выраженным в функции от q_i , p_i , t при помощи (34).

Вычислим производные $\frac{\partial H}{\partial p_j}$ и $\frac{\partial H}{\partial q_j}$, где j имеет определенное значение 1, 2 или 3.

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j + \sum_{i=1}^3 p_i \frac{\partial f_i}{\partial p_j} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial f_i}{\partial p_j} = \dot{q}_j, \quad (36)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^3 p_i \frac{\partial f_i}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial f_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial L}{\partial q_j} = - \frac{\partial p}{\partial t} \quad (37)$$

по уравнениям Лагранжа.

Таким образом мы получаем систему канонических уравнений Гамильтона:

$$\frac{d \partial q_i}{d \partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \frac{\partial p_i}{\partial t} = - \frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (i=1, 2, 3) \quad (38)$$

Отсюда легко снова получить закон сохранения энергии — нужно только взять $\frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial t}$:

$$\frac{d \partial H}{d \partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (39)$$

Из определения энергии (35) ясно, что если L не содержит явно времени, то тоже самое будет иметь место и для H , а, следовательно, $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, т. е. энергия постоянна. Этот же результат был получен и прежде.

Напишем теперь уравнения Гамильтона в обоих старых динамиках.

Возьмем сперва классическую механику с прямоугольными координатами:

Мы будем иметь

$$p_x = mv_x; \quad p_y = mv_y; \quad p_z = mv_z; \\ v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \frac{1}{m^2} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2), \quad (40)$$

откуда:

$$H = \frac{1}{2} mv^2 + F = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + F(q, t). \quad (41)$$

Уравнения:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

оправдываются сами собой, потому что, например:

$$\frac{dx}{dt} = v_x = \frac{p_x}{m} = \frac{\partial H}{\partial p_x} \text{ и т. д.} \quad (42)$$

Уравнения:

$$\frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

напишется так:

$$m \frac{dv_x}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial x} \text{ и т. д.} \quad (43)$$

Это основные уравнения динамики Ньютона.

Перейдем теперь к теории относительности, сохраняя прямоугольные координаты. Здесь мы имеем:

$$p_x = \frac{mv_x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad p_y = \frac{mv_y}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad p_z = \frac{mv_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (44)$$

$$H = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + F(q, t). \quad (45)$$

Прежде всего, требуется определить H в функции от $q, p, \text{ и } t$.

Из определения энергии (35) ясно, что если $\dot{L}$ не содержит явно времени, то тоже самое будет иметь место и для H , а, следовательно, $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, т. е. энергия постоянна. Этот же результат был получен и прежде.

Напишем теперь уравнения Гамильтона в обоих старых динамиках.

Возьмем сперва классическую механику с прямоугольными координатами:

Мы будем иметь

$$p_x = mv_x; \quad p_y = mv_y; \quad p_z = mv_z; \\ v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \frac{1}{m^2} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2), \quad (40)$$

откуда:

$$H = \frac{1}{2} mv^2 + F = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + F(q, t). \quad (41)$$

Уравнения:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

оправдываются сами собой, потому что, например:

$$\frac{dx}{dt} = v_x = \frac{p_x}{m} = \frac{\partial H}{\partial p_x} \text{ и т. д.} \quad (42)$$

Уравнения:

$$\frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

напишется так:

$$m \frac{dv_x}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial x} \text{ и т. д.} \quad (43)$$

Это основные уравнения динамики Ньютона.

Перейдем теперь к теории относительности, сохраняя прямоугольные координаты. Здесь мы имеем:

$$p_x = \frac{mv_x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad p_y = \frac{mv_y}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad p_z = \frac{mv_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (44)$$

$$H = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + F(q, t). \quad (45)$$

Прежде всего, требуется определить H в функции от q, p и t .

Мы имеем:

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = \frac{m^2 v^2}{1 - \beta^2},$$

откуда

$$\frac{1}{m^2 c^2} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2}. \quad (46)$$

Прибавим по единице к обоим членам последнего уравнения и извлечем квадратный корень. Мы получим:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{mc} \sqrt{m^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} \quad (47)$$

и

$$H(q_i, p_i, t) = c \sqrt{m^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} + F(q_i, t). \quad (48)$$

Мы имеем следовательно:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial F}{\partial q_i}; \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{c p_i}{\sqrt{m^2 c^2 + \sum_{i=1}^3 p_i^2}} = \frac{p_i}{m} \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (49)$$

Уравнения $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ удовлетворяются как и прежде, потому что.

$$\frac{dx}{dt} = v_x = \frac{p_x}{m} \sqrt{1 - \beta^2} \quad \text{и т. д.} \quad (50)$$

Уравнения $\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ дают уравнения движения динамики Эйнштейна:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{m v_x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right] = -\frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{и т. д.} \quad (51)$$

6. Касательное преобразование

Уравнения Гамильтона выражаются при помощи семи переменных: времени t , трех координат q_i и трех моментов p_i . Допустим, что мы заменяем переменные q_i, p_i новыми переменными α_i, β_i ($i=1, 2, 3$), определенными такими формулами, что

$$\alpha_k = f_k(p_i, q_i, t); \quad \beta_k = \varphi_k(p_i, q_i, t). \quad (52)$$

Мы не будем пока что приписывать α_i и β_i какие либо частные механические значения. Это просто шесть новых переменных. Формулы (52) можно переписать так:

$$p_i = F_i(\alpha_i, q_i, t), \quad \beta_i = \Phi_i(\alpha_i, q_i, t), \quad (53)$$

тогда получим следующую теорему:

Если возможно найти такую функцию $S(x_i, q_i, t)$, чтобы

$$\sum_{i=1}^3 p_i dq_i - \sum_{i=1}^3 \beta_i dx_i = -[dS]_t \quad (54)$$

(символ $[dS]_t$ означает производную S , полученную без варьаций t), то переменные α_i и β_i будут удовлетворять каноническим уравнениям:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial \beta_i}, \quad \frac{d\beta_i}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial x_i}, \quad (i=1, 2, 3) \quad (55)$$

где
$$K = H - \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Для того, чтобы это показать, заметим, что

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = \beta_i; \quad -\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i; \quad [dS]_t = dS - \frac{\partial S}{\partial t} dt \quad (56)$$

и вследствие (54)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 p_i dq_i - H dt &= \sum_{i=1}^3 \beta_i dx_i - H dt - dS + \frac{\partial S}{\partial t} dt \\ &= \sum_{i=1}^3 \beta_i da_i - K dt - dS. \end{aligned} \quad (57)$$

Рассмотрим сперва начальный момент времени t_0 и начальное положение, определенное тремя $(q_i)_0$, затем конечный момент времени t_1 и конечное положение определенное тремя $(q_i)_1$. Возьмем пространство четырех измерений, образованное при помощи четырех переменных q_i, t . По принципу Гамильтона, если движение частицы представлено в этом пространстве кривой C , соединяющей точку M_0 с координатами $t_0, (q_i)_0$ с точкой M_1 с координатами $t_1, (q_i)_1$, то криволинейный интеграл:

$$\int_{M_0}^{M_1} \left(\sum_{i=1}^3 p_i dq_i - H dt \right),$$

взятый вдоль этой кривой, не изменяется, при очень малых изменениях кривой C , в первом приближении, если считать точки M_0 и M_1 фиксированными.

Имеем:

$$\int_{M_0}^{M_1} \delta \left(\sum_{i=1}^3 p_i dq_i - H dt \right) = 0.$$

Рассмотрим также пространство четырех измерений, образованное при помощи времени t и трех переменных α_i . Кривой C

в этом новом пространстве соответствует кривая Γ , так как каждой точке первой соответствуют не только вполне определенные значения переменных q_i и t , но также и переменных p_i ; следовательно по (52) каждой точке C соответствует точка Γ .

Пусть $(x_i)_0$ и t_0 , $(x_i)_1$ и t_1 координаты концов кривой Γ . Когда, для того чтобы применить принцип Гамильтона, варьируют кривую C , считая ее концы фиксированными, тем самым варьируют кривую Γ , причем, вообще говоря, ее концы не остаются фиксированными, потому что начальные и конечные значения p_i вообще меняются благодаря вариации C и в результате получается изменение $(x_i)_0$ и $(x_i)_1$.

Мы имеем следовательно:

$$\int_{(q_i)_0, t_0}^{(q_i)_1, t_1} \delta \left(\sum_{i=1}^3 p_i dq_i - H dt \right) = \int_{(x_i)_0, t_0}^{(x_i)_1, t_1} \delta \left(\sum_{i=1}^3 \beta_i dx_i - K dt \right) + \left[\sum_{i=1}^3 \beta_i \delta x_i \right]_0^1 - \delta \left[S \right]_0^1, \quad (58)$$

потому что

$$\int_0^1 dS = |S|_0^1.$$

Вследствие того, что $(q_i)_0$ и $(q_i)_1$ фиксированы, имеем

$$\delta \left[S \right]_0^1 = \left[\sum_{i=1}^3 \frac{\partial S}{\partial x_i} \delta x_i \right]_0^1. \quad (59)$$

Два последние члена (58) уничтожаются по (56) и остается:

$$\int_{(q_i)_0, t_0}^{(q_i)_1, t_1} \delta \left(\sum_{i=1}^3 p_i dq_i - H dt \right) = \int_{(x_i)_0, t_0}^{(x_i)_1, t_1} \delta \left(\sum_{i=1}^3 \beta_i dx_i - K dt \right), \quad (60)$$

так что вариация второго члена получается при фиксированных значениях для x_i . Так как первый член (60) по принципу Гамильтона равен нулю, то второй член также равен нулю. И так как переменные β_i и x_i и функция K играют во втором интеграле, соответственно, ту же роль что и переменные p_i и q_i функции H в первом, то считаем, что уравнения (55) доказаны.

Резюмируем: при изменении переменных удовлетворяющих уравнению (54), называемому „касательным преобразованием“, форма уравнений Гамильтона сохраняется, при условии замены простой функции H функцией $K = H - \frac{\partial S}{\partial t}$.

ТЕОРИЯ ЯКОБИ

1. Уравнение Якоби

Теорема о касательном преобразовании позволяет нам подойти непосредственно к теории уравнения Якоби. В самом деле, допустим, что мы нашли такое касательное преобразование, что $K=0$. При этом новые канонические переменные α_i и β_i удовлетворяют уравнениям Гамильтона;

$$\frac{d\alpha_i}{dt}=0, \quad \frac{d\beta_i}{dt}=0. \quad (i=1, 2, 3) \quad (1)$$

α_i и β_i будут, следовательно, постоянными. Функция же K равна $H - \frac{\partial S}{\partial t}$ и p_i равны $-\frac{\partial S}{\partial q_i}$. Выражая энергию в функции q_i , p_i и t и заменяя p_i через $-\frac{\partial S}{\partial q_i}$ видим, что условие $K=0$ равноценно следующему:

$$H\left(q_i, -\frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) = \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (2)$$

Это уравнение в частных производных первого порядка от S и есть уравнение Якоби. Если мы найдем интеграл этого уравнения, зависящий от трех произвольных постоянных α_i , т. е. то что называют „полным интегралом“ уравнения (2), то при помощи функции $S(q_i, \alpha_i, t)$ определится касательное преобразование между переменными q_i , p_i , t и величинами α_i , $\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}$ и t , для которого $K=0$ и следовательно

$$\alpha_i = \text{const}; \quad \beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \text{const}. \quad (3)$$

Отсюда получается теорема Якоби:

„Если можно найти полный интеграл $S(q_i, \alpha_i, t)$ уравнения в частных производных первого порядка:

$$H\left(q_i, -\frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) = \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (4)$$

то будем иметь:

$$p_i = -\frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad (5)$$

где β_i три новых константы. Уравнения (5) определяют в функции времени и шести констант α_i , β_i шесть q_i , p_i , которые полностью дают движение частицы“.

2. Интеграл Гамильтона и функция Якоби

В теории касательного преобразования, описанной выше, уточнен динамический смысл шести переменных α_i, β_i . Мы можем, следовательно, положить, что α_i суть координаты, β_i — моменты. Так как в функции $S(q_i, \alpha_i, t)$ α_i являются константами, то мы приходим, естественно, к тому, чтобы считать их начальными значениями координат частиц. Для большей точности мы будем рассматривать далее не одну частицу, но облако совершенно одинаковых частиц, помещенных в одно и то же поле и не взаимодействующих друг с другом; движение этого облака представляет собой в общей сумме весь набор „возможных“ движений одной и той же частицы в данном поле. Следствием движения облака от момента t_0 до момента t является преобразование начальных координат частиц облака $(q_i)_0$ в момент времени t_0 в конечные координаты частиц (q_i) в момент времени t .

Возьмем теперь интеграл Гамильтона

$$I = \int \sum_{i=1}^3 p_i dq_i - H dt$$

вдоль траектории частицы от $(q_i)_0$ до q_i . Он является функцией $q_i, (q_i)_0$ и времени и удовлетворяет уравнениям:

$$\frac{\partial I}{\partial q_i} = p_i; \quad \frac{\partial I}{\partial (q_i)_0} = -(p_i)_0, \quad (6)$$

где $(p_i)_0$ означает начальные значения p_i . Функция I с измененным знаком определяет, следовательно, касательное преобразование переменных q_i, p_i в переменные $(q_i)_0, (p_i)_0$. Более того, функция $S[q_i, (q_i)_0, t] = -I$ удовлетворяет уравнению Якоби, потому что

$$S[q_i, (q_i)_0, t] = \int_0^1 \left(H dt - \sum_{i=1}^3 p_i dq_i \right) \quad (7)$$

отсюда

$$\frac{\partial S}{\partial t} = H(q_i, p_i, t); \quad \frac{\partial S}{\partial q_i} = -p_i. \quad (8)$$

Следовательно:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = H\left(q_i, -\frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right). \quad (9)$$

По теореме Якоби, $(q_i)_0$ должны быть постоянными во время движения, что согласуется с их смыслом начальных значений координат, $(p_i)_0$ также должны быть постоянными; это начальные моменты.

3. Сокращенная функция Якоби

Величины α_i не должны быть непременно начальными значениями. Полный интеграл можно найти также и в зависимости от начальных моментов или даже иных констант. Каждый раз, после нахождения такого интеграла, мы будем иметь:

$$p_i = -\frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \text{ const}, \quad (10)$$

и движение будет определяться этими уравнениями.

Каждым частным случаем является случай постоянного поля. Мы видим, что в этом случае энергия постоянна. Обозначая эту константу через W , находим интеграл Гамильтона:

$$\int \left(\sum_{i=1}^3 p_i dq_i - W dt \right);$$

если для функции S берут интеграл Гамильтона с измененным знаком, то $\frac{\partial S}{\partial t} = W$.

С другой стороны, если мы положим

$$S_1 = \int \sum_{i=1}^3 p_i dq_i, \quad (11)$$

то будем иметь:

$$S = Wt - S_1; \quad -\frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial S_1}{\partial q_i}. \quad (12)$$

Наконец, H не содержит явно времени. Следовательно S_1 называется сокращенной функцией Якоби и удовлетворяет уравнению:

$$H \left(q_i, \frac{\partial S_1}{\partial q_i} \right) = W. \quad (13)$$

Если можно найти полный интеграл (13), который будет зависеть от W и двух произвольных постоянных α_1 и α_2 , функция $S = Wt - S_1(q_1, \alpha_1, \alpha_2, W)$ будет полным интегралом с тремя произвольными постоянными α_1 , α_2 и $\alpha_3 = W$ полного уравнения Якоби, и по теореме Якоби движение определяется тремя соотношениями:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial S_1}{\partial q_i}; \quad \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_i} = -\beta_i = \text{const}; \\ \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_2} &= -\beta_2 = \text{const}; \quad \frac{\partial S}{\partial W} = t - \frac{\partial S_1}{\partial W} = -\beta_3 = \text{const}. \end{aligned} \quad (14)$$

Положим — $\beta_3 = t_0$; последнее уравнение даст:

$$\frac{\partial S_1}{\partial W} = t - t_0. \quad (15)$$

Это уравнение единственное, содержащее время, дает закон движения, тогда как два уравнения:

$$\frac{\partial S_1}{\partial x_1} = \text{const} \text{ и } \frac{\partial S_1}{\partial x_2} = \text{const}$$

зависят только от q_i и определяют собой форму траектории. Отсюда получается разделение изучения движения и изучения траектории, что характерно для постоянного поля.

4. Различные виды уравнения Якоби

Прежде чем изучать конкретные примеры, мы выясним выражение уравнений Якоби в классической механике и в механике Эйнштейна.

Займемся сперва динамикой Ньютона. Для большей общности мы допустим, что выбраны любые координаты q_i . В ньютоновской механике кинетическая энергия T есть однородная квадратичная функция скоростей $\dot{q}_i$. Следовательно:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k, l=1}^3 m_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l \quad (m_{kl} = m_{lk}) \quad (16)$$

где m_{kl} суть функции только q_i . Из (16) получаем:

$$L = T - F = \frac{1}{2} \sum_{k, l=1}^3 m_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l - F(q_i, t) \quad (17)$$

$$W = T + F = \frac{1}{2} \sum_{k, l=1}^3 m_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l + F(q_i, t). \quad (18)$$

По определению p_i можно написать:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1}^3 m_{ki} \dot{q}_k \quad (i=1, 2, 3) \quad (19)$$

Если мы решим линейные уравнения (19) по отношению к $\dot{q}_i$, мы получим:

$$\dot{q}_i = \sum_{k=1}^3 \frac{\mu_{ik}}{|m|} p_k \quad (i=1, 2, 3)$$

где $|m|$ означает определитель, образованный m_{ki} и где p_{ki} означает минор соответственного элемента m_{ki} в этом определителе. Положим:

$$\frac{p_{ki}}{|m|} = m^{ki} \quad m^{ki} = m^{ik}, \quad (20)$$

получим:

$$\dot{q}_i = \sum_{k=1}^3 m^{ki} p_k. \quad (i=1, 2, 3). \quad (21)$$

Заменяя $\dot{q}_i$ их значениями (21) получим вместо (16)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k, l, i, j=1}^3 m_{kl} m^{ki} p_i m_{li} p_j. \quad (22)$$

Из свойств определителей имеем:

$$\sum_{k=1}^3 m_{kl} m^{ki} = \sum_{k=1}^3 m_{kl} \frac{p_{ki}}{|m|} = \begin{cases} 1 & \text{если } i = l \\ 0 & \text{если } i \neq l. \end{cases} \quad (23)$$

Следовательно:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^3 m^{ij} p_i p_j, \quad (24)$$

и так как энергия определяется как функция q_i, p_i, t :

$$H(q_i, p_i, t) = \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^3 m^{ij} p_i p_j + F(q_i, t). \quad (25)$$

Для уравнения Якоби мы получаем, следовательно:

$$\frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^3 m^{ij} \frac{\partial S}{\partial q_i} \frac{\partial S}{\partial q_j} + F(q_i, t) = \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (26)$$

В частном случае прямоугольных координат мы имеем:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad (27)$$

очевидно $m_{kk} = m$; $m_{kl} = 0$ для $k \neq l$.

Отсюда получаем:

$$m^{kl}=0 \text{ для } k \neq l; \quad m^{kk}=\frac{1}{m} \quad (28)$$

и уравнение Якоби принимает свой простой классический вид:

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + F(q, t) = \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (29)$$

Перейдем теперь к релятивистской динамике. Так как мы в нашей книге не очень часто будем пользоваться этой динамикой, то ограничимся случаем прямоугольных координат. Мы нашли (глава I, уравнение 48):

$$H(q, p, t) = c \sqrt{m^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} + F(q, t). \quad (30)$$

Это выражение приводит к релятивистскому уравнению Якоби:

$$c \sqrt{m^2 c^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2} + F(q, t) = \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (31)$$

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} - F \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 = m^2 c^2. \quad (32)$$

5. Функция Якоби для прямолинейного, равномерного движения

Найдем выражение функции Якоби в двух важных простых случаях; одно нам понадобится позднее. Удовлетворимся классической динамикой и начнем со случая прямолинейного и равномерного движения при отсутствии всякого поля. При этом $F=0$ и уравнение (29) принимает вид:

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] = \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (33)$$

Легко показать, что полный интеграл дается формулой:

$$\begin{aligned} S(x, y, z, x_0, y_0, z_0, t) \\ = -\frac{m}{2t} [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]. \end{aligned} \quad (34)$$

По теории Якоби, мы должны иметь:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial S}{\partial x} &= \frac{m}{t} (x-x_0) = p_x; & -\frac{\partial S}{\partial y} &= \frac{m}{t} (y-y_0) = p_y; \\ -\frac{\partial S}{\partial z} &= \frac{m}{t} (z-z_0) = p_z. \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial x_0} &= \frac{m}{t} (x - x_0) = \text{const}; & \frac{\partial S}{\partial y_0} &= \frac{m}{t} (y - y_0) = \text{const}; \\ \frac{\partial S}{\partial z_0} &= \frac{m}{t} (z - z_0) = \text{const}.\end{aligned}\quad (36)$$

Константы в уравнениях (36) равны постоянным значениям p_x , p_y и p_z и уравнения движения принимают известный вид:

$$x = x_0 + v_x t, \quad y = y_0 + v_y t, \quad z = z_0 + v_z t. \quad (37)$$

Отсюда вытекает, что три константы $x_0 y_0 z_0$ полного интеграла суть три координаты частицы в момент времени $t=0$. Интеграл (34) есть ничто иное, как интеграл Гамильтона с обратным знаком. В самом деле, мы можем написать интеграл Гамильтона в следующем виде:

$$\int_0^t T dt = \int_0^t \frac{1}{2} m v^2 dt = \frac{1}{2} m v^2 t. \quad (38)$$

И так как движение равномерное, то

$$v_x = \frac{x - x_0}{t}; \quad v_y = \frac{y - y_0}{t}; \quad v_z = \frac{z - z_0}{t} \quad (39)$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \frac{1}{t^2} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]. \quad (40)$$

И действительно, интеграл Гамильтона с обратным знаком равен второму члену (34).

Можно также, в случае отсутствия поля, найти полный интеграл уравнения Якоби, где произвольные постоянные не будут более начальными координатами, но тремя моментами, здесь постоянными. Вот этот общий интеграл:

$$\begin{aligned}S(x, y, z, t, p_x, p_y, p_z) &= \frac{1}{2m} [p_x^2 + p_y^2 + p_z^2] t \\ &\quad - p_x x - p_y y - p_z z.\end{aligned}\quad (41)$$

Уравнения $-\frac{\partial S}{\partial x} = p_x$ и т. д. удовлетворяются тождественно; что касается трех других соотношений Якоби, то они будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial p_x} &= \frac{1}{m} p_x t - x = \text{const}; & \frac{\partial S}{\partial p_y} &= \frac{1}{m} p_y t - y = \text{const}; \\ \frac{\partial S}{\partial p_z} &= \frac{1}{m} p_z t - z = \text{const}.\end{aligned}\quad (42)$$

Если мы обозначим три константы через $-x_0$, $-y_0$, $-z_0$, то мы получим уравнения движения (37). Функция (41) получается еще из интеграла Гамильтона, потому что он получится прибавлением к

$$p_x x + p_y y + p_z z \text{ константы } -Wt.$$

Так как

$$p_x = mv_x, \quad p_y = mv_y, \quad p_z = mv_z \text{ и } W = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2m} [p_x^2 + p_y^2 + p_z^2],$$

то интеграл Гамильтона с измененным знаком и дает (41).

Наконец мы видим, что в постоянных полях (частным случаем которых будет поле равное нулю) функцию Якоби можно написать очевидно в виде $Wt - S_1(x, y, z, a_1, a_2, W)$, где S_1 интеграл уравнения (13). Для того, чтобы привести функцию Якоби к такому виду, отметим, что один из моментов, например p_z , можно выразить в функции от двух других и от W , так как

$$p_z^2 = 2mW - p_x^2 - p_y^2. \quad (43)$$

Вводя значение p_z данное (43) в интеграл Гамильтона с измененным знаком, получаем:

$$S(x, y, z, t, W, p_x, p_y) = Wt - p_x x - p_y y - \sqrt{2mW - p_x^2 - p_y^2} z, \quad (44)$$

$$S_1(x, y, z, p_x, p_y, W) = p_x x + p_y y + \sqrt{2mW - p_x^2 - p_y^2} z. \quad (45)$$

Уравнение движения (44) и (45) дают:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S_1}{\partial p_x} &= x - \frac{p_x z}{\sqrt{2mW - p_x^2 - p_y^2}} = \text{const}; \\ \frac{\partial S_1}{\partial p_y} &= y - \frac{p_y z}{\sqrt{2mW - p_x^2 - p_y^2}} = \text{const}; \\ \frac{\partial S_1}{\partial W} &= \frac{mz}{\sqrt{2mW - p_x^2 - p_y^2}} = t - t_0. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Два первые из этих уравнений дают прямолинейные траектории, определяемые из уравнений:

$$\frac{x - x_0}{p_x} = \frac{y - y_0}{p_y} = \frac{z - z_0}{p_z}. \quad (47)$$

Третье уравнение (46) определяет движение на траектории, потому что оно дает координату z в функции времени:

$$z = \frac{1}{m} \sqrt{2mW - p_x^2 - p_y^2} (t - t_0) = \frac{1}{m} p_z (t - t_0), \quad (48)$$

где t_0 означает, очевидно, момент времени, когда z было равно нулю.

6. Функция Якоби в постоянном и однородном поле

Возьмем теперь наиболее простой, после отсутствия поля, случай: это постоянное и однородное поле. Пусть k_x, k_y, k_z суть составляющие силы, одинаковые повсюду. Имеем:

$$F(x, y, z) = -k_x x - k_y y - k_z z = - \sum_{xyz} k_x, \quad (49)$$

потому что

$$f_x = - \frac{\partial F}{\partial x} = k_x \text{ и т. д.}$$

Напишем уравнение Якоби:

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] - k_x x - k_y y - k_z z = \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (50)$$

Полный интеграл этого уравнения будет:

$$\begin{aligned} S(x, y, z, t, x_0, y_0, z_0) = & - \frac{m}{2t} \sum_{xyz} (x - x_0)^2 \\ & - \frac{1}{2} t \sum_{xyz} k_x (x + x_0) + \frac{1}{24m} t^3 \sum_{xyz} k_x^2. \end{aligned} \quad (51)$$

Это легко проверяется подстановкой (51) в (50).

Уравнения теории Якоби дают прежде всего:

$$\left. \begin{aligned} p_x &= - \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{m}{t} (x - x_0) + \frac{1}{2} k_x t; \\ p_y &= - \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{m}{t} (y - y_0) + \frac{1}{2} k_y t; \\ p_z &= - \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{m}{t} (z - z_0) + \frac{1}{2} k_z t. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Эти уравнения тождественно выполняются, потому что при равномерно ускоренном движении

$$\begin{aligned}x &= x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2} \frac{k_x}{m} t^2; & y &= y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2} \frac{k_y}{m} t^2; \\z &= z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2} \frac{k_z}{m} t^2\end{aligned}\quad (53)$$

и

$$v_x = v_{0x} + \frac{k_x}{m} t; \quad v_y = v_{0y} + \frac{k_y}{m} t; \quad v_z = v_{0z} + \frac{k_z}{m} t, \quad (54)$$

откуда:

$$\begin{aligned}p_x &= mv_x = \frac{m}{t} (x - x_0) + \frac{1}{2} k_x t; & p_y &= \frac{m}{t} (y - y_0) + \frac{1}{2} k_y t; \\p_z &= \frac{m}{t} (z - z_0) + \frac{1}{2} k_z t,\end{aligned}$$

т. е. получаем уравнения (52).

Три других соотношения Якоби $\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \text{const}$ дают здесь:

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial x_0} &= \frac{m}{t} (x - x_0) - \frac{1}{2} k_x t = \text{const}; \\ \frac{\partial S}{\partial y_0} &= \frac{m}{t} (y - y_0) - \frac{1}{2} k_y t = \text{const}; \\ \frac{\partial S}{\partial z_0} &= \frac{m}{t} (z - z_0) - \frac{1}{2} k_z t = \text{const}.\end{aligned}\right\} \quad (55)$$

Если $x_0 y_0 z_0$ суть начальные координаты, то

$$\frac{\partial S}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial S}{\partial y_0} \text{ и } \frac{\partial S}{\partial z_0}$$

должны быть начальными моментами mv_{0x} , mv_{0y} и mv_{0z} и снова получаются уравнения (53) равномерно ускоренного движения.

Мы хотим показать теперь, что полный интеграл (51) получается из интеграла Гамильтона. В самом деле, после перемены знака, последний будет иметь вид:

$$\begin{aligned}& \int_{x, y, z}^{xyzt} [W dt - \sum_{xyz} p_x dx] \\&= \int_{x, y, z}^{xyzt} \left[\left(\frac{1}{2} m v^2 - \sum_{xyz} k_x x \right) dt - \sum_{xyz} m v_x dx \right].\end{aligned}\quad (56)$$

Формулы же (53) и (54) равномерно ускоренного движения дают:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \sum_{xyz} \left(\frac{x - x_0}{t} + \frac{1}{2} \frac{k_x}{m} t \right)^2 \quad (57)$$

и подставляя (57) в (56) находим:

$$\int_{x,y,z,0}^{xyz,t} \left\{ \left[\frac{1}{2} m \sum_{xyz} \left(\frac{x - x_0}{t} + \frac{1}{2} \frac{k_x}{m} t \right)^2 - \sum_{xyz} k_x x \right] dt - \sum_{xyz} m \left(\frac{x - x_0}{t} + \frac{1}{2} \frac{k_x}{m} t \right) dx \right\} \quad (58)$$

Величина под знаком интеграла есть полный дифференциал, потому что произвольная по какой либо из пространственных переменных при множителе dt равна производной по t при множителе-дифференциале этой пространственной координаты, что легко проверить. Производя интегрирование (58) хорошо известным из анализа методом, получаем из интеграла (58) значение (51). Полный интеграл (51) равен и здесь интегралу Гамильтона с обратным знаком.

Как и в случае равномерного движения, мы можем получить полный интеграл уравнения Якоби, где тремя произвольными постоянными будут начальные моменты вместо начальных координат. Эти начальные моменты суть:

$$p_{0x} = mv_{0x}; \quad p_{0y} = mv_{0y}; \quad p_{0z} = mv_{0z}. \quad (59)$$

Если мы напомним интеграл Гамильтона с обратным знаком пользуясь формулой (54), то получим:

$$\int \left\{ \left[\frac{1}{2m} \sum_{xyz} (p_{0x} + k_x t)^2 - \sum_{xyz} k_x x \right] dt - \sum_{xyz} (p_{0x} + k_x t) dx \right\}. \quad (60)$$

Условие интегрируемости тотчас же оправдывается, так как

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2m} \sum_{xyz} (p_{0x} + k_x t)^2 - \sum_{xyz} k_x x \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [-(p_{0x} + k_x t)] = -k_x \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (61)$$

и для интеграла (60) получаем значение:

$$\begin{aligned} & S(x, y, z, t, p_{0x}, p_{0y}, p_{0z}) \\ &= \frac{1}{6m} \sum_{xyz} \frac{(p_{0x} + k_x t)^3}{k_x} - \sum_{xyz} (p_{0x} + k_x t) x \end{aligned} \quad (62)$$

легко доказывать, (что конечно имеет место а priori в силу § 2 настоящей главы), что функция (62) удовлетворяет уравнению Якоби (50).

Уравнения $p_i = -\frac{\partial S}{\partial q_i}$ проверяются таким же образом, как была получена функция (62). Уравнения $\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \text{const}$ дают:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial p_{0x}} &= \frac{1}{2m} \frac{(p_{0x} + k_x t)^2}{k_x} - x = \text{const}; \\ \frac{\partial S}{\partial p_{0y}} &= \frac{1}{2m} \frac{(p_{0y} + k_y t)^2}{k_y} - y = \text{const}; \\ \frac{\partial S}{\partial p_{0z}} &= \frac{1}{2m} \frac{(p_{0z} + k_z t)^2}{k_z} - z = \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Так как

$$\frac{p_{0x}^2}{2mk_x}, \frac{p_{0y}^2}{2mk_y}, \frac{p_{0z}^2}{2mk_z}$$

константы, то можно также написать:

$$\left. \begin{aligned} x &= \text{const} + \frac{p_{0x}}{m} t + \frac{1}{2} \frac{k_x}{m} t^2; \\ y &= \text{const} + \frac{p_{0y}}{m} t + \frac{1}{2} \frac{k_y}{m} t^2; \\ z &= \text{const} + \frac{p_{0z}}{m} t + \frac{1}{2} \frac{k_z}{m} t^2, \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

т. е. классические уравнения (53),

Наконец мы найдем полный интеграл для (50) в виде:

$$S(x, y, z, t, \alpha_1, \alpha_2, W) = Wt - S_1(x, y, z, \alpha_1, \alpha_2, W). \quad (65)$$

Мы знаем, что это возможно, так как поле постоянно во времени. Мы можем еще получить функцию (65), вычислив интеграл Гамильтона с обратным знаком, но для упрощения подсчетов мы возьмем за направление однородного поля ось x . Тогда $k_y = k_z = 0$ и моменты p_x и p_y суть константы.

Выражение энергии

$$W = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - k_x x \quad (66)$$

дает нам

$$p_x = \sqrt{2m(W + k_x x) - p_y^2 - p_z^2}. \quad (67)$$

И поэтому интеграл Гамильтона с обратным знаком будет равен

$$\begin{aligned} & Wt - \int p_x dx + p_y dy + p_z dz = \\ & = Wt - p_y y - p_z z - \int \sqrt{2m(W + k_x x) - p_y^2 - p_z^2} dx = \\ & = Wt - p_y y - p_z z - \frac{1}{3mk_x} [2m(W + k_x x) - p_y^2 - p_z^2]^{3/2}. \end{aligned} \quad (68)$$

Приравнивая к (65) находим:

$$\begin{aligned} & S_1(x, y, z, a_1, a_2, W) \\ & = p_y y + p_z z + \frac{1}{3mk_x} [2m(W + k_x x) - p_y^2 - p_z^2]^{3/2}. \end{aligned} \quad (69)$$

Уравнения теории Якоби суть:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_1}{\partial p_y} &= y - \frac{p_y}{mk_x} \sqrt{2m(W + k_x x) - p_y^2 - p_z^2} = \text{const}; \\ \frac{\partial S_1}{\partial p_z} &= z - \frac{p_z}{mk_x} \sqrt{2m(W + k_x x) - p_y^2 - p_z^2} = \text{const}. \end{aligned} \quad (70)$$

Они определяют собой параболическую траекторию:

$$\frac{\partial S_1}{\partial W} = \frac{1}{k_x} \sqrt{2m(W + k_x x) - p_y^2 - p_z^2} = t - t_0 \quad (71)$$

или

$$p_x = k_x(t - t_0) \cdot p_{0x} + k_x t, \quad (72)$$

обозначая через p_{0x} начальное значение p_x ; это хорошо известный закон для скорости в функции времени (уравнение 54).

ГЛАВА III

ОСНОВНЫЕ ИДЕИ ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКИ

1. Исходная точка

Исходная точка волновой механики заключалась в желании связать с понятием частицы понятие периодичности так, чтобы неразрывно связать движение частицы с распространением волны.

Рассмотрим сперва наиболее простой случай, когда частица свободно движется вне какого-либо поля, и мы увидим, что способ установления связи между волной и частицей до некоторой степени предписан основными принципами теории относительности.

Вспомним прежде всего, что Галлилеевой системой отсчета называют прямоугольную систему осей, находящуюся в покое или движущуюся прямолинейно и равномерно по отношению к совокупности неподвижных звезд: уравнения динамики справедливы для этой системы осей. Из принципа инерции, который является видом скрытого определения, известно, что если частица не подвергается действию сил, она обязательно находится в покое или движется прямолинейно и равномерно по отношению к некоторой Галлилеевой системе.

Среди бесконечного множества Галлилеевых систем рассмотрим, в частности, две. Первая, по отношению к которой частица обладает скоростью $v = \beta c$, расположена так, что частица движется в ней по оси ox . Вторая, так называемая „собственная система“ частицы, обладает по отношению к первой системе скоростью v заданной по величине и по направлению, а ее ось z скользит вдоль оси z первой системы. Обозначим через x_0, y_0, z_0 координаты точки в собственной системе, тогда как x, y, z будут координаты точки в первой системе.

До Эйнштейна допускали существование абсолютного времени, так что наблюдатель, связанный с системой x, y, z , мог пользоваться той же координатой времени, что и наблюдатель, связанный с собственной системой. Пространственные и временные переменные этих обоих наблюдателей считались связанными формулами „группы Галлилея“

$$x = x_0; \quad y = y_0; \quad z = z_0 + vt; \quad t = t_0. \quad (1)$$

Глубокие изыскания Эйнштейна привели к мысли, что соотношения (1) нужно заменить следующими (группа Лоренца):

$$x = x_0; \quad y = y_0; \quad z = \frac{z_0 + vt_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad t = \frac{t_0 + \frac{\beta z_0}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \left(\beta = \frac{v}{c} \right). \quad (2)$$

откуда выводится обратно:

$$x_0 = x; \quad y_0 = y; \quad z_0 = \frac{z - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad t_0 = \frac{t - \frac{\beta z}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (3)$$

Мы принимаем формулы (2) и (3), не входя ни в какие более подробные обсуждения идей теории относительности, так как это выходит из рамок нашей работы.

Пусть мы находимся в системе со значками x_0, y_0, z_0 , которая связана с частицей. Так как нашей целью является наблюдение волны сопряженной с частицей, то совершенно естественно предположить, что эта волна в собственной системе имеет вид стационарной волны, т. е. ее математическое выражение зависит от времени только через множитель $\cos 2\pi\nu_0(t_0 - \tau_0)$; соответствующий

выбор начального момента времени позволяет положить $\tau_0 = 0$. Назовем константу ν_0 „собственной частотой“ частицы.

Перейдем теперь на точку зрения системы xuz , по отношению к которой частицы обладают скоростью $v = \beta c$ в направлении oz .

Важным моментом здесь является определение формы волны, сопряженной с частицей в системе xuz . В собственной системе фазовый множитель поля равен $\cos 2\pi\nu_0 t_0$; по последней из формул

$$(3) \text{ в системе } xuz \text{ он будет равен: } \cos 2\pi\nu_0 \frac{t - \frac{\beta z}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Положим:

$$\nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad V = \frac{c}{\beta} = \frac{c^2}{v}. \quad (4)$$

Фазовый множитель будет равен $\cos 2\pi\nu \left(t - \frac{z}{V} \right)$. Наблюдателю в системе xuz волна будет представляться распространяющейся в направлении oz с фазовой скоростью V и частотой ν . Этот результат получается просто и непосредственно из способа преобразования времени по теории относительности, при переходе из одной Галлилеевой системы в другую.

Фазовая скорость V , сопряженная с частицей волны, обратно пропорциональна скорости v самой частицы; в собственной системе, где скорость частицы равна нулю, она бесконечна. Мы уже отметили прежде, что согласно релятивистской динамике движение частицы не может никогда происходить со скоростью большей скорости света c . Следовательно, всегда

$$\beta \leq 1 \quad V \geq c. \quad (5)$$

Знак равенства может иметь место только тогда, когда масса частицы равна нулю: это случай частицы света или фотона; к этому мы еще возвратимся.

2. Другой метод получения предыдущих результатов

Предыдущие результаты, относящиеся к фазе сопряженной с частицей волны, можно получить при помощи немного более конкретного метода, уточняющего некоторые пункты.

Так как предполагается, что в собственной системе волна имеет в каждой точке одну и ту же частоту ν_0 и ту же самую фазу, то можно представить себе распределение фаз в этой системе, вообразив, что в каждой точке находятся маленькие часы и допустив, что все эти часы синхронны и обладают периодом $T_0 = \frac{1}{\nu_0}$. В системе xuz каждые из этих часов будут находиться в движении со скоростью $v = \beta c$ и вследствие этого будут претерпевать Эйнштейново „замедление“. Вот в че

стоит это „замедление“. Часы имеют координату z_0 , фиксированную в собственной системе, но в системе xuz их координата z увеличивается со временем t на vt . Таким образом изменение времени t_0 , отмеченное часами, связано с изменением времени t по формуле Лоренца (4):

$$\delta t_0 = \frac{\delta t - \frac{\beta}{c} \delta z}{\sqrt{1 - \beta^2}} = t \frac{1 - \beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \delta t \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (6)$$

Пока маятник часов совершил полное колебание, протекло время $\delta t_0 = T_0 - \frac{1}{\nu_0}$ в собственной системе и, следовательно, время

$$T_1 = \frac{T}{\sqrt{1 - \beta^2}} > T_0 \quad (7)$$

в системе xuz . Наблюдатель этой последней системы приписывает, следовательно, часам период более длинный, чем не делает наблюдатель, связанный с часами. Это и есть „замедление“ Эйнштейна.

Перейдем от периодов к частотам. Для наблюдателя xuz каждые маленькие часы обладают частотой:

$$\nu_1 = \frac{1}{T_1} = \nu_0 \sqrt{1 - \beta^2} < \nu_0 \quad (8)$$

и в то же время они находятся в движении со скоростью v . Мы увидим, что при этом движении они всегда остаются в фазе с волной:

$$\Psi = a \cos 2\pi \left(t - \frac{z}{V} \right). \quad (9)$$

Константы ν и V имеют величины (4)

Для того, чтобы это показать, допустим, что в некоторый момент t_1 времени t для наблюдателя xuz часы совпадают по фазе с волной Ψ , тогда

$$2\pi \left(t_1 - \frac{z_1}{V} \right) = 2\pi \nu_1 t_1, \quad (10)$$

где z_1 абсцисса часов во времени t_1 . В последующий момент времени t_2 часы занимают положение $z_2 = z_1 + v(t_2 - t_1)$; фаза волны Ψ в точке занимаемой часами равна $2\pi \left(t_2 - \frac{z_2}{V} \right)$ а фаза часов равна $2\pi \nu_1 t_2$. Для того чтобы было совпадение фаз, нужно, чтобы

$$\nu_1 t_2 = \nu \left(t_2 - \frac{z_2}{V} \right), \quad (11)$$

что, в силу (10), можно написать как

$$v_1(t_2 - t_1) = v(t_2 - t_1) - v \frac{v}{V}(t_2 - t_1) \quad (12)$$

или

$$v_1 = v \left(1 - \frac{v}{V} \right) = v(1 - \beta^2). \quad (13)$$

Уравнение же (13) удовлетворяется тождественно в силу определений (4) и (8) v и v_1 .

3. Показатель преломления. Основная теорема о групповой скорости волн Ψ

Фазовая скорость V может служить для определения показателя преломления волн Ψ в системе xyz . Мы определим этот показатель из обычного соотношения:

$$n = \frac{c}{V}, \quad (14)$$

которое по (4) дает:

$$n = \beta. \quad (15)$$

Вводя (15) в первую из формул (4), получаем:

$$n = \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{v^2}}. \quad (16)$$

Мы можем рассматривать эту формулу, как определяющую дисперсию в пространстве для волн Ψ , сопряженных с частицей, природа которых характеризуется константой v_0 . Иными словами, если мы рассматриваем совокупность прямолинейных и равномерных движений, которыми может обладать частица в системе xyz , частота и фазовая скорость сопряженной волны всегда связана соотношением (16).

Полученная нами формула дисперсии приводит к очень важной теореме. Но прежде чем говорить о ней, мы должны определить понятие „групповой скорости“, которое было введено Релеем для распространения волн в диспергирующей среде. Плоская, монохроматическая волна частоты ν , распространяющаяся в некотором направлении (напр. по оси ox), представляется формулой:

$$a \cos 2\pi \nu \left[t - \frac{n x}{c} \right],$$

где n есть показатель преломления среды для частоты ν . Вместо того чтобы рассматривать одну плоскую, монохроматическую волну, рассмотрим большое число таких волн, распространяющихся вдоль ox и имеющие частоты, заключающиеся в малом интервале $\nu - \delta\nu$, $\nu + \delta\nu$; это то, что мы назовем „группой волн“.

Одна из волн группы может быть представлена формулой

$$a(\nu + \varepsilon) d\varepsilon \cos 2\pi(\nu + \varepsilon) \left[t - n(\nu + \varepsilon) \frac{x}{c} + b(\varepsilon) \right]; \quad |\varepsilon| \leq \delta\nu,$$

где $b(\varepsilon)$ есть фазовая константа.

Допустим, что в некоторый момент и в некоторой точке все волны группы будут совпадать по фазе. В этом месте будет очень большая результирующая амплитуда. Так как среда диспергирующая, т. е. фазовые скорости различных волн изменяются слегка различно, то во время распространения волны разойдутся по отношению друг к другу; тем не менее мы покажем, что существует точка совпадения фаз, перемещающаяся со скоростью, вообще говоря, отличной от фазовой скорости.

Пусть в самом деле имеются две волны группы, соответствующие значениям ε_1 и ε_2 величины ε ($|\varepsilon_1| \leq \delta\nu$; $|\varepsilon_2| \leq \delta\nu$). По нашему предположению для некоторых значений x и t эти две волны совпадают по фазе. При изменении t на dt и x на dx фаза первой волны изменится на

$$2\pi(\nu + \varepsilon_1) \left[dt - n(\nu + \varepsilon_1) \frac{dx}{c} \right];$$

так как ε_1 очень мало, мы можем положить (считая функцию $n(\nu)$ непрерывной)

$$n(\nu + \varepsilon_1) = n(\nu) + \frac{dn}{d\nu} \varepsilon_1 \quad (17)$$

и пренебрегая величинами второго порядка, получаем изменение фазы первой волны:

$$2\pi \left[(\nu + \varepsilon_1) dt - (\nu + \varepsilon_1) n(\nu) \frac{dx}{c} - \nu \varepsilon_1 \frac{dn}{d\nu} \frac{dx}{c} \right].$$

Также и для второй волны находим:

$$2\pi \left[(\nu + \varepsilon_2) dt - (\nu + \varepsilon_2) n(\nu) \frac{dx}{c} - \nu \varepsilon_2 \frac{dn}{d\nu} \frac{dx}{c} \right].$$

Беря разность двух этих выражений, видим, что волны будут все еще совпадать по фазе, если dx и dt связаны соотношением:

$$(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \left[dt - \frac{n(\nu)}{c} dx \right] - (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \nu n'(\nu) \frac{dx}{c} = 0 \quad (18)$$

или еще

$$dt = \left[n(\nu) + \nu n'(\nu) \frac{dx}{c} \right]. \quad (19)$$

Это соотношение определяет скорость U :

$$\frac{1}{U} = \left(\frac{dx}{dt} \right)^{-1} = \frac{1}{c} [n(v) + v n'(v)] = \frac{1}{c} \frac{d(nv)}{dv}. \quad (20)$$

При перемещении вдоль оси x со скоростью U мы всегда будем видеть две волны ϵ_1 и ϵ_2 совпадающими по фазе. Но так как ϵ_1 и ϵ_2 произвольны, то наше рассуждение справедливо для всех пар волн входящих в группу.

Следовательно, при перемещении вдоль оси x со скоростью U , мы всегда видим все волны группы совпадающими по фазе; иными словами, максимум, получающийся вследствие совпадения фаз, перемещается в направлении ox со скоростью U ; это и есть скорость называемая „групповой скоростью“.

Получив этот результат, докажем следующую теорему: „Групповая скорость волн, сопряженных с частицей, равна скорости частицы“.

В самом деле, закон дисперсии (16) дает нам:

$$nv = \sqrt{v^2 - v_0^2} \quad (21)$$

$$\text{и} \quad \frac{d(nv)}{dv} = \frac{v}{\sqrt{v^2 - v_0^2}} = \frac{1}{n}; \quad (22)$$

следовательно по (20) и (15)

$$U = nc = \beta c, \quad (23)$$

что мы и хотели показать.

4. Связь между волновыми и механическими величинами

До сих пор мы не вводили никаких соотношений между механическими величинами — массой, энергией, количеством движения, характеризующих частицу, и волновыми величинами — частотой, фазовой скоростью, показателем преломления, определяющих сопряженную волну. Однако, для того, чтобы сопряженные волны служили для понимания квант, такие соотношения должны существовать и, в частности, мы должны ожидать, что энергия частицы W и частота ее сопряженной волны ν будут связаны формулой:

$$W = h\nu, \quad (24)$$

где h константа Планка, которая служит исходной точкой теории квант.

По теории относительности энергия частицы равна

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (25)$$

системе $x y z$. В собственной системе ее величины будут:

$$W_0 = mc^2, \quad (26)$$

откуда

$$W = \frac{W_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (27)$$

Формула (27), позволяющая перейти от W_0 к W , имеет то же значение что и первая формула (4), позволяющая перейти от v_0 к v , следовательно, так как энергии частиц, при изменении Галлилеевых систем отсчета, преобразуются как частоты сопряженных волн, мы имеем право связать энергию частицы с частотой сопряженной волны соотношением:

$$W = h\nu, \quad (28)$$

где h означает множитель пропорциональности, за который мы, естественно, примем постоянную Планка.

Перейдем к количеству движения. Это вектор, направленный по траектории и, в релятивистской динамике, равен

$$\vec{p} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (29)$$

Сравнивая (29) с (25) мы видим, что длина этого вектора равна:

$$|p| = \frac{W}{c^2} v. \quad (30)$$

Заменяя W через $h\nu$ и $\frac{c^2}{v}$ через V , мы можем сказать, что количество движения есть вектор направленный параллельно фазовой скорости v и имеющий длину

$$|p| = \frac{h\nu}{V} = \frac{h\nu}{c} n. \quad (31)$$

Здесь интересно также ввести длину волны λ сопряженной волны, полагая как обычно

$$\lambda = \frac{V}{\nu}, \quad (32)$$

тогда формула (31) дает:

$$|p| = \frac{h}{\lambda}. \quad (33)$$

5. Принцип наименьшего действия и принцип Ферма

Резюмируем: частице массы m , перемещающейся в некотором направлении со скоростью $v = \beta c$, нужно приписать волну с частотой

$$\nu = \frac{1}{h} \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

распространяющейся в том же направлении с фазовой скоростью

$$V = \frac{c}{\beta} = \frac{c^2}{v}.$$

Длина волны будет:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hV}{mv} \sqrt{1-\beta^2}$$

и групповая скорость равна v .

Когда β^2 можно пренебречь по сравнению с единицей (механика Ньютона), то можно положить:

$$h\nu = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \text{ и } \lambda = \frac{h}{mv}.$$

Для того, чтобы закончить главу, нужно сделать еще важное замечание. В среде с показателем преломления n , по правилам геометрической оптики, лучи определяются следующим условием (принцип Ферма): „луч, проходящий между двумя точками A и B , должен иметь такой вид, чтобы криволинейный интеграл

$$\int_A^B \frac{\nu}{V} dl = \frac{\nu}{c} \int_A^B n dl$$

был минимален“. Здесь показатель преломления n — постоянен во всем пространстве. Принцип Ферма утверждает, следовательно, что луч, соединяющий A и B , есть кривая наименьшей длины, т. е. прямая линия. Лучи прямолинейны и волны будут плоскими.

Важно отметить *пункт*, что так как $\frac{\nu}{V}$ равно $\frac{p}{h}$, то интеграл Ферма можно написать в виде интеграла

$$\frac{1}{h} \int p dl = \frac{1}{h} \int (p_x dx + p_y dy + p_z dz),$$

который тождествен с интегралом действия Мопертюи вплоть до постоянной $\frac{1}{h}$. Мы видим, что здесь намечается аналогия между принципом Мопертюи для частицы и принципом Ферма для сопряженной волны.

В этой главе мы установили связь между волнами и частицами только для очень простого случая отсутствия поля. Теперь нам нужно обобщить эту связь для случая частицы перемещающейся в некотором поле. Для этого мы используем аналогию между принципом наименьшего действия и принципом Ферма, а для этого прежде всего нужно изучить более близко вопрос о распространении волн.

ГЛАВА IV

ОБЩИЕ ЗАКОНЫ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН

1. Распространение волн в однородной и непрерывной среде

Займемся, сначала, наиболее простым случаем: распространением волн в однородной и непрерывной среде. Например, случаем обычного распространения световых волн в однородной преломляющей среде. При этом, условия распространения характеризуются некоторой величиной постоянной во времени и пространстве: показателем преломления n . Если c обозначает постоянную скорость света в пустоте ($c=3 \cdot 10^{10}$ cgs), то уравнение распространения волн чаще всего имеет хорошо известный вид:

$$\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Мы назовем „простой синусоидальной волной“ или „плоской монохроматической волной“ решение уравнения распространения данное в следующем виде:

$$\Psi(x, y, z, t) = a \cos 2\pi \left[\nu t - \frac{n}{c} \nu (x + \beta y + \gamma z) \right], \quad (2)$$

где a постоянная, называемая амплитудой волны, ν другая постоянная, называемая частотой волны, α, β, γ три константы, удовлетворяющие соотношению, которое связывает направляющие косинусы одного и того же направления: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. „Фазой“ плоской монохроматической волны называют величину

$$\Phi(x, y, z, t) = \nu t - \frac{n\nu}{c} (\alpha x + \beta y + \gamma z). \quad (3)$$

Легко проверить, что плоская монохроматическая волна (2) действительно является решением уравнения (1); прежде всего

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -4\pi^2 \nu^2 \Psi,$$

что позволяет написать уравнение (1) в виде:

$$\Delta \Psi + \frac{4\pi^2 n^2 \gamma^2}{c^2} \Psi = 0. \quad (4)$$

Далее:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} &= -\frac{4\pi^2 n^2 \gamma^2}{c^2} \alpha^2 \Psi; & \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} &= -\frac{4\pi^2 n^2 \gamma^2}{c^2} \beta^2 \Psi; \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} &= -\frac{4\pi^2 n^2 \gamma^2}{c^2} \gamma^2 \Psi. \end{aligned} \quad (5)$$

И вследствие соотношения между α , β и γ соотношение (4) доказано.

Положим:

$$\Phi_1(x, y, z, t) = \frac{n\gamma}{c} (\alpha x + \beta y + \gamma z). \quad (6)$$

В любой данный момент времени фаза (3) будет построена на плоскостях $\Phi = \text{const}$ или $\alpha x + \beta y + \gamma z = \text{const}$. Это — плоскости равной фазы или эквифазовые плоскости. Величины α, β, γ суть направляющие косинусы нормалей к этим плоскостям. С течением времени величины фазы Φ изменяются, переходя от одной эквифазовой плоскости к другой. Можно сказать, что фаза перемещается в направлении $\alpha\beta\gamma$, которое называется направлением распространения волны. Параллельные прямые, определяемые направляющими косинусами α, β, γ , суть „лучи“ волны, и можно легко вычислить фазовую скорость, т. е. скорость, с которой нужно перемещаться вдоль луча, чтобы быть постоянно связанным с некоторым значением величины фазы. В самом деле, если обозначить через dl элемент длины, отсчитанный вдоль луча, получим:

$$dl = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz. \quad (7)$$

Изменение фазы Φ для данных значений dt и dl будет:

$$d\Phi = \gamma dt - \frac{n\gamma}{c} dl. \quad (8)$$

Это изменение будет равно нулю, если мы будем перемещаться вдоль луча со скоростью:

$$V = \frac{dl}{dt} = \frac{c}{n}, \quad (9)$$

где V фазовая скорость.

Длина волны λ определится аналогичным способом: это та длина, которую нужно пробежать за *постоянное время* по лучу,

что бы изменить фазу Φ на единицу, вследствие чего Ψ получает свое начальное значение, Отсюда

$$\lambda = \frac{c}{n\nu} = \frac{V}{\nu}. \quad (10)$$

2. Дисперсия

В предыдущем параграфе мы предположили, что n является константой, но часто случается, что в уравнении распространения, написанном в виде (4), показателю преломления n нужно приписать величину, зависящую от ν ; иными словами, в этом уравнении (4) n , хотя и не зависит от x, y, z, t , но изменяется с частотой ν , рассмотренного простого синусоидального решения уравнения. Тогда говорят, что имеется дисперсия, и соотношение, задающее n в функции от ν , называется законом дисперсии. В частности этот случай имеет место, когда уравнение распространения в его общем виде имеет, например, вид:

$$\Delta\Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = K\Psi \quad (K = \text{const}) \quad (11)$$

вместо вида (1). Пользуясь уравнением (2), можно написать уравнение (11) в виде:

$$\Delta\Psi + \left(\frac{4\pi^2\nu^2}{c^2} - K \right) \Psi = 0 \quad (12)$$

и для того, чтобы найти уравнение (4) нужно положить

$$n^2 = 1 - \frac{Kc^2}{4\pi^2\nu^2} = f(\nu), \quad (13)$$

т. е. n изменяющееся с ν .

3. Поток волн и группа волн

Плоская монохроматическая волна должна рассматриваться, в некотором смысле, как абстракция, так как она должна была бы заполнять все пространство в целом и существовать вечно. В действительности, в данный момент времени, волна занимает определенную область пространства и всегда имеет начало и конец распространения в данной точке. Такая ограниченная во всех отношениях волна является тем, что называют „поток волн“.

Для того, чтобы представить себе поток волн, рассматривают не одну монохроматическую волну, а совокупность плоских монохроматических волн.

$$\Psi(x, y, z, t)$$

(11)

$$= \sum a(\nu, \alpha, \beta, \gamma) \cos 2\pi \left[\nu t - \frac{n\nu}{c} \alpha x + \beta y + \gamma z \right] + \Delta(\nu, \alpha, \beta, \gamma).$$

Значок Δ служит для того, чтобы обозначить, что различные монохроматические волны имеют в общем различные фазы. Если допускается, что α, β, γ всегда связаны соотношением $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, то из вычисления, сделанного выше, следует, что каждая плоская монохроматическая волна удовлетворяет уравнению распространения, и так как это уравнение линейно, то сумма монохроматических волн является также решением.

Вместо того, чтобы рассматривать конечную сумму членов, можно рассматривать интеграл:

$$\Psi(x, y, z, t)$$

(12)

$$= \iiint d\nu d\alpha d\beta a(\nu, \alpha, \beta) \cos 2\pi \left[\nu t - \frac{n\nu}{c} (\alpha x + \beta y + \gamma z) \right] + \Delta(\nu, \alpha, \beta),$$

где $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Понятно, что если n есть функция ν , то n в формулах 14 и 15 нужно рассматривать как сокращенное написание для $n(\nu)$.

Для того, чтобы уточнить представление потока волн, как суммы плоских монохроматических волн, рассмотрим следующий случай: пусть поток распространяется в направлении, которое мы примем за ось z , и представим функцией:

$$\Psi(x, y, z, t) = A(x, y, z, t) \cos 2\pi \left[\nu t - \frac{n\nu}{c} z \right] \quad (16)$$

с надлежащим выбором начального момента времени. Затем мы положим, что форма нашего потока волн симметрична по отношению к направлению z , т. е. что функция A есть четная функция двух переменных x и y

$$\begin{aligned} A(-x, y, z, t) &= A(x, y, z, t); \\ A(x, -y, z, t) &= A(x, y, z, t). \end{aligned} \quad (17)$$

Так как поток волн, по определению, ограничен в пространстве, то функция A будет отлична от нуля только тогда, когда переменные x, y, z заключены в пределах x_1 и x_2 , y_1 и y_2 , z_1 и z_2 соответственно. Эти пределы определяют область распространения потока волн в пространстве. Чтобы еще несколько упростить рассмотрение задачи, допустим, что в области, занимаемой потоком волн в данный момент, функция A точно постоянна везде, кроме границ, где она быстро спадает до нуля;

другими словами, для заданного значения yz и t функция Δ рассматриваемая как функция только x и равная нулю для $x < x_1$, при $x = x_1$, быстро переходит от нуля к постоянному значению и остается постоянной до $x = x_2$ и затем опять быстро падает до нуля (рис. 1).

Изменение Δ в функции от y и z будет такого же типа. Резюмируем: наш поток волн, в большей части своей области распространения, может быть отождествлен с плоской монохроматической волной, но он, естественно, отличается от нее на границах этой области.

По определению мы будем называть „группой волн“ совокупность плоских, монохроматических волн с очень близкими частотами и направлениями распространения. Мы покажем, что такой группой волн можно изобразить рассматриваемый нами сейчас поток волн при условии, что размеры потока волн в пространстве велики по отношению к длине волны $\frac{c}{n\nu}$, и что продолжительность его во времени в заданной точке велика по отношению к периоду $\frac{1}{\nu}$.

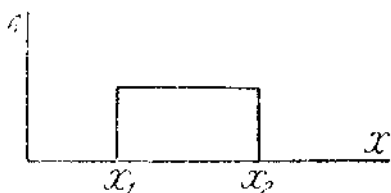


Рис. 1.

Если представлять себе поток волн как группу волн, то в силу, принимаемой для него симметрии вокруг оси z , эта группа будет иметь вид

$$\int_{-\gamma_1}^{+\gamma_1} dx \int_{-\beta_1}^{+\beta_1} d\beta \int_{-\alpha_1}^{+\alpha_1} d\alpha a(z, x, \beta) \cos 2\pi \left[(\nu + \varepsilon)t - \frac{(\nu + \varepsilon) \cdot n(\nu + \varepsilon)}{c} (xx + \beta y + \alpha z) + \Delta(z, x, \beta) \right]. \quad (18)$$

Мы написали ε а не γz , потому что, ввиду малости α и β , $\gamma = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}$ отличается от единицы только на величины второго порядка.

Ограничиваясь же величинами первого порядка, мы будем иметь:

$$(\nu + \varepsilon) \cdot n(\nu + \varepsilon) = \nu \cdot n(\nu) + \frac{d(n\nu)}{d\nu} \varepsilon \quad (19)$$

и аргумент косинуса в (18) принимает вид:

$$2\pi \left[\nu t - \frac{\nu \cdot n(\nu)}{c} (xx + \beta y + \alpha z) + \varepsilon \left(t - \frac{d(n\nu)}{d\nu} z \right) + \Delta(z, x, \beta) \right]. \quad (20)$$

Применяя формулу $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, можно написать (18) так:

$$\begin{aligned} & \cos 2\pi \left[\nu t - \frac{\nu \cdot n(\nu)}{c} z \right] \int_{-\eta_1}^{+\eta_1} dx \int_{-\eta_2}^{+\eta_2} d\beta \int_{-\eta_3}^{+\eta_3} dz a(\varepsilon, \alpha, \beta) \\ & \cos 2\pi \left[\varepsilon \left(t - \frac{d(n\nu)}{d\nu} z \right) - \frac{\nu \cdot n(\nu)}{c} (\alpha x + \beta y) + \Delta(\varepsilon, \alpha, \beta) \right] \\ & - \sin 2\pi \left[\nu t - \frac{\nu \cdot n(\nu)}{c} z \right] \int_{-\eta_1}^{+\eta_1} dx \int_{-\eta_2}^{+\eta_2} d\beta \int_{-\eta_3}^{+\eta_3} dz a(\varepsilon, \alpha, \beta) \\ & \sin 2\pi \left[\varepsilon \left(t - \frac{d(n\nu)}{d\nu} z \right) - \frac{\nu \cdot n(\nu)}{c} (\alpha x + \beta y) + \Delta(\varepsilon, \alpha, \beta) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Для того, чтобы идентифицировать это выражение (21) группы волн с выражением (16) нашего потока волн, нужно прежде всего уничтожить в (21) коэффициент при синусе. Для этого мы положим, что функция Δ имеет одно и то же значение для всех монохроматических волн группы и мы можем поэтому считать $\Delta = 0$; затем мы будем считать $a(\varepsilon, \alpha, \beta)$ четной функцией трех аргументов $\varepsilon, \alpha, \beta$. Четность по отношению к α и β соответствует симметрии потока волн относительно oz ; четность по отношению к ε соответствует симметрии спектрального разложения группы по отношению к центральной частоте ν . Чтобы окончить отождествление, необходимо положить

$$\begin{aligned} A(x, y, z, t) &= \int_{-\eta_1}^{+\eta_1} dx \int_{-\eta_2}^{+\eta_2} d\beta \int_{-\eta_3}^{+\eta_3} dz a(\varepsilon, \alpha, \beta) \\ & \cos 2\pi \left[\varepsilon \left(t - \frac{d(n\nu)}{d\nu} \frac{t}{c} \right) - \frac{\nu \cdot n(\nu)}{c} (\alpha x + \beta y) \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Когда выражение (22) вполне точно, т. е. когда поток волн может быть представлен группой волн, то при его помощи можно найти групповую скорость Релея. В самом деле, рассмотрим прямую, параллельную направлению z ; при перемещении на dz вдоль этой прямой мы будем все время связаны с постоянным значением амплитуды, если только затратим на прохождение элемента dz время равное

$$dt = \frac{1}{c} \frac{d(n\nu)}{d\nu} dz.$$

При нашей степени приближения¹ можно считать, что релаксирующая амплитуда потока волн перемещается вся в целом направлении z со скоростью U по формуле:

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{c} \frac{d(n\gamma)}{d\gamma}. \quad (23)$$

Это и есть групповая скорость, введенная прежде. Если n не зависит от γ , то $U = \frac{c}{n}$, и групповая скорость совпадает с фазовой скоростью.

Следовательно, если (22) справедливо, A зависит от z и t только в комбинации $t - \frac{z}{U}$ и естественно ввести переменную $z' = z - Ut$. Для данного значения времени z' измеряет, с точностью до постоянной, значение координаты z и если z_1' и z_2' будут значения z , соответствующие началу и концу потока волн, то

$$z_1' - z_2' = z_1 - z_2. \quad (24)$$

Легко видеть, что группа волн (22) симметрична относительно z' , также как и относительно x и y . Мы можем теперь написать (22) в таком виде:

$$A(x, y, z') = \int_{-\gamma_1}^{+\gamma_1} d\alpha \int_{-\gamma_2}^{+\gamma_2} d\beta \int_{-\gamma_3}^{+\gamma_3} dz a(z, \alpha, \beta) \cos 2\pi \left[\frac{z}{U} z' + \frac{n\gamma}{c} (\alpha x + \beta y) \right]. \quad (25)$$

Если разложить косинус на сумму произведений синуса и косинуса, то не будет равно нулю только интеграл с произведением трех косинусов в силу четности $a(z, \alpha, \beta)$. Следовательно, если мы положим

$$c(z, \alpha, \beta) = 2a(z, \alpha, \beta), \quad (26)$$

то мы получим

$$A(x, y, z') = \int_0^{+\gamma_1} d\alpha \int_0^{+\gamma_2} d\beta \int_0^{+\gamma_3} dz c(z, \alpha, \beta) \cos \frac{2\pi z}{U} z' \cdot \cos 2\pi \frac{n\gamma}{c} \alpha x \cdot \cos 2\pi \frac{n\gamma}{c} \beta y. \quad (27)$$

¹ В самом деле, для достаточно длинных промежутков времени поток волн всегда имеет тенденцию к размазыванию. Более точные подсчеты, сделанные в главе XIII, покажут это более ясно.

Так должно выражаться A , для того чтобы поток волн мог быть представлен группой волн. Но когда же можно выразить его таким образом? Такова задача, стоящая перед нами.

Из теории интегралов Фурье известно, что, при весьма общих условиях, функция, $f(x, y, z)$ четная по отношению к переменным xyz , может быть представлена в виде:

$$f(x, y, z) = \int_0^{\infty} d\lambda \int_0^{\infty} d\mu \int_0^{\infty} d\nu f(\lambda, \mu, \nu) \cos \lambda x \cos \mu y \cos \nu z, \quad (28)$$

$$f(\lambda, \mu, \nu) = \frac{1}{\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz f(x, y, z) \cos \lambda x \cos \mu y \cos \nu z. \quad (29)$$

Следовательно функцию $A(x, y, z')$, четную по отношению к переменным xyz' , можно написать в таком виде:

$$A(x, y, z') = \int_0^{+\infty} d\alpha \int_0^{+\infty} d\beta \int_0^{+\infty} d\varepsilon c(\varepsilon, \alpha, \beta) \cos \frac{2\pi\varepsilon}{U} z' \cdot \cos 2\pi \frac{ny}{c} \alpha x \cdot \cos 2\pi \frac{ny}{c} \beta y, \quad (30)$$

где

$$c(\varepsilon, \alpha, \beta) = 8 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{U} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ny}{c} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ny}{c} dy A(x, y, z') \cos \frac{2\pi\varepsilon}{U} z' \cdot \cos 2\pi \frac{ny}{c} \alpha x \cdot \cos 2\pi \frac{ny}{c} \beta y. \quad (31)$$

Но для того, чтобы представить наш поток волн группой волн, нужно иметь возможность отождествить (27) и (30), т. е. свести в (30) промежутки интегрирования по $\alpha, \beta, \varepsilon$ к очень малым интервалам $0 - \eta_1, 0 - \eta_2, 0 - \eta_3$. Для этого нужно, чтобы функция $c(\varepsilon, \alpha, \beta)$, определяемая (31), была равна нулю вне этих очень малых интервалов; по предположению же A постоянно для $x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2, z_1 < z < z_2$ и равно нулю вне этих интервалов. Если мы рассмотрим интервал по x в формуле (31), мы будем иметь

$$c(\varepsilon, \alpha, \beta) = \text{const} \int_{x_1}^{x_2} A \cos 2\pi \frac{ny}{c} \alpha x dx, \quad (32)$$

где A — константа. Если косинус имеет большое число периодов в интервале $x_1 - x_2$, $c(\varepsilon, \alpha, \beta)$ будет равно нулю. Для того, чтобы c имело заметную величину, нужно иметь:

$$\frac{x}{\lambda} (x_1 - x_2) \approx 1, \quad (33)$$

де знак $\approx$ означает „порядка единицы“. Для того, чтобы условие (33) было эквивалентно условию, что λ значительно меньше единицы, нужно чтобы

$$\lambda \text{ было значительно меньше, чем } x_1 - x_2. \quad (34)$$

Размеры потока волн в направлении x должны сильно превышать среднюю длину волны λ . Тот же результат получается для размеров в направлении оси y .

Для направления z получаем:

$$\frac{\varepsilon}{U} (z_1' - z_2') = \frac{\varepsilon}{U} (z_1 - z_2) \approx 1 \quad (35)$$

и так как ε значительно меньше γ , то нужно иметь

$$z_1 - z_2 > > \frac{U}{\gamma} = UT. \quad (36)$$

Произведение UT вообще не равно длине волны UT , но часто обе эти величины имеют один и тот же порядок величины. В этом случае можно говорить, что поток волн представляется группой волн тогда, когда все размеры велики по отношению к длине волны.

Время, затрачиваемое всем потоком волн для того, чтобы пройти через данную закрепленную точку, будет, очевидно:

$$t_1 - t_2 = \frac{z_1 - z_2}{U}. \quad (37)$$

По (36) это время должно быть очень велико по отношению к периоду.

По (33), (35) и аналогичному соотношению для y величин:

$$\frac{\eta_1}{\lambda} (x_1 - x_2), \quad \frac{\eta_2}{\lambda} (y_1 - y_2) \text{ и } \frac{\eta_3}{U} (z_1 - z_2)$$

должны быть по крайней мере порядка единицы. Назовем волновым числом для плоской монохроматической волны вектор N в направлении распространения волны и по длине равный числу волн на сантиметре, т. е. $\frac{1}{\lambda}$; его составляющие суть;

$$N_x = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad N_y = \frac{\beta}{\lambda}, \quad N_z = \frac{\gamma}{\lambda}. \quad (38)$$

В силу предположений, сделанных для α , β и γ , максимальные значения N_x , N_y и N_z , соответствующие различным монохроматическим составляющим потока волн, будут:

$$\partial N_x = \frac{\eta_1}{\lambda}, \quad \partial N_y = \frac{\eta_2}{\lambda}; \quad (39)$$

$$\partial N_z = \partial \left(\frac{1}{\lambda} \right) = - \frac{\partial \left(\frac{1}{\lambda} \right)}{\partial \gamma} \eta_3 = \frac{\eta_3}{U}.$$

Положим:

$$\delta x = x_1 - x_2; \quad \delta y = y_1 - y_2; \quad \delta z = z_1 - z_2. \quad (40)$$

Это максимальные изменения координат на протяжении всего потока волн. В этих обозначениях можно написать неравенства, справедливые в смысле порядка величины:

$$\delta N_x \delta x \geq 1; \quad \delta N_y \delta y \geq 1; \quad \delta N_z \delta z \geq 1. \quad (41)$$

Наконец обозначим через

$$\delta t = t_1 - t_2 \quad (42)$$

продолжительность прохождения потока волн через заданную точку, а через $\delta \nu$ обозначим величину η_0 — максимальное изменение частоты в группе. По (35) и (37) получим

$$\delta \nu \delta t \geq 1. \quad (43)$$

Значение формул (41) мы увидим ниже в теории Бора и Гейзенберга.

4. Распространение в непрерывной неоднородной среде

До сих пор мы считали показатель преломления независимым от x, y, z . Теперь мы положим, что n есть функция x, y, z постоянная во времени. В оптике — это случай неоднородных преломляющих сред. Вообще говоря, показатель преломления есть функция частоты; преломляющие неоднородные среды вообще тоже дают дисперсию. Уравнение распространения простых синусоидальных волн будет при этом

$$\Delta \Psi + \frac{4\pi^2 \nu^2}{c^2} n^2(x, y, z) \Psi = 0. \quad (44)$$

Рассмотрим синусоидальное решение:

$$\Psi = a(x, y, z) \cos 2\pi[\nu t - \Phi_1(x, y, z)], \quad (45)$$

где a — амплитуда, меняющаяся теперь от точки к точке. Величина:

$$\Phi(x, y, z, t) = \nu t - \Phi_1(x, y, z) \quad (46)$$

есть фаза линейная по времени, но не линейная более по отношению к x, y, z . Подставив (45) в (44); мы получаем:

$$\left[\Delta a - 4\pi^2 a \sum_{xyz} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{4\pi^2 \nu^2}{c^2} n^2 a \right] \cos 2\pi[\nu t - \Phi_1] + \left[4\pi \sum_{xyz} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial x} + 2\pi a \Delta \Phi_1 \right] \sin 2\pi[\nu t - \Phi_1] = 0. \quad (47)$$

Для того, чтобы это уравнение всегда имело место, коэффициенты при $\sin 2\pi[vt - \Phi_1]$ и $\cos 2\pi[vt - \Phi_1]$ должны быть порознь равны нулю, что даст:

$$\sum_{xyz} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2 = \frac{n^2 v^2}{c^2} + \frac{1}{4\pi^2} \frac{\Delta a}{a} \quad (48)$$

$$\sum_{xyz} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{1}{2} a \Delta \Phi_1 = 0. \quad (49)$$

По определению мы говорим, что длина волны в некоторой точке есть величина

$$\lambda = \frac{1}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial l}}, \quad (50)$$

где dl означает элемент длины, отсчитанный перпендикулярно к поверхности $\Phi_1 = \text{const}$ в рассматриваемой точке. Эта длина волны изменяется здесь от точки к точке. Наше определение содержит в себе обычное определение, в случае $n = \text{const}$, так как тогда поверхности:

$$\Phi_1 = \frac{nv}{c} (\alpha x + \beta y + \gamma z) = \text{const}$$

суть плоскости, нормаль к которым имеет направляющие косинусы α, β, γ и

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial l} = \frac{nv}{c} = \frac{v}{V}.$$

Как и в случае однородных сред, мы назовем поверхностями равной фазы или эквифазами поверхностями поверхности $\Phi_1 = \text{const}$, которые здесь, вообще говоря, не являются плоскостями. Кривые, нормальные к этим поверхностям, называются „лучами“ волны, а фазовой скоростью $V(x, y, z)$ мы назовем скорость, с которой нужно перемещаться от точки xyz вдоль луча, чтобы все время быть связанным с постоянным значением фазы. Величина V легко вычисляется; если элемент dl луча проходит за время dt , то изменение фазы Φ есть $v dt - \frac{\partial \Phi_1}{\partial l} dl$ и для того чтобы это изменение было равно нулю, нужно перемещаться со скоростью:

$$V = \frac{dl}{dt} = \frac{v}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial l}} = v \sqrt{\sum_{xyz} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2} = v \cdot \lambda(x, y, z) \quad (51)$$

функция (45) может быть тогда представлена в виде:

$$\Psi = \alpha(x, y, z) \cos 2\pi \left[\nu t - \nu \int \frac{dl}{v} \right], \quad (52)$$

причем интеграл берется вдоль луча, проходящего через рассматриваемую точку $M(x, y, z)$, до этой точки M от некоторой эквивалентной поверхности, взятой за начальную. Но, в общем, функция $V(x, y, z)$ а priori неизвестна, и ее определение требует определения функций $\alpha(x, y, z)$ и $\Phi_1(x, y, z)$ при помощи совместных уравнений в частных производных (48) и (49).

Тем не менее существует очень интересный случай, когда определение V и Φ_1 получается непосредственно без необходимости подсчета $\alpha(x, y, z)$. Это случай, когда на отрезке порядка *длины волны* среду можно рассматривать как однородную, а коэффициент преломления — как постоянный. Тогда мы будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \lambda \ll \alpha; \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} \lambda \ll \alpha; \quad \frac{\partial \alpha}{\partial z} \lambda \ll \alpha; \\ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \lambda^2 \ll \alpha \dots \Delta \alpha \cdot \lambda^2 \ll \alpha, \end{aligned} \quad (53)$$

Последнее неравенство (53), соединенное с определением (50), показывает, что в уравнении (48) можно пренебречь членом $\frac{1}{4\pi^2} \frac{\Delta \alpha}{\alpha}$ по сравнению с

$$\sum_{xyz} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Умножая уравнение (49) на λ^2 и принимая во внимание (50), получаем:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \lambda + \frac{1}{2} \lambda^2 \Delta \Phi_1 = 0 \quad (54)$$

и, в силу (53), можно пренебречь первым членом в (54). Окончательно систему (48), (49) можно написать так:

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right)^2 = \frac{n^2 \nu^2}{c^2} \quad \Delta \Phi_1 \cdot \lambda^2 = 0 \quad (55)$$

по (51) мы положим следовательно:

$$V(x, y, z) = \frac{\nu}{\partial \Phi_1 / \partial t} = \frac{c}{n}; \quad \lambda = \frac{V}{\nu} = \frac{c}{n\nu}. \quad (56)$$

Тогда второе уравнение (55) будет обязательно удовлетворено, так как, по (56) Φ_1 , линейно по x, y, z на отрезках порядка длины волны и величинами типа $\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} \cdot \lambda^2$ можно пренебречь.

По формуле (52) мы получаем здесь приближенное решение:

$$V(x, y, z, t) = a(x, y, z) \cos 2\pi \left(\nu t - \nu \int \frac{ndl}{c} \right) \quad (57)$$

и в итоге, определение Φ_1 производится a priori (потому что и $n(x, y, z)$ задано) без необходимости подсчета $a(x, y, z)$.

Когда предыдущее приближение достаточно, говорят, что геометрическая оптика справедлива. Тогда можно сказать, что при распространении волны на расстояния (порядка длины волны она будет плоской и монохроматической; однако при распространении ее на расстояния порядка многих длин волн происходит постепенное изменение условий распространения, которое приводит к изменению амплитуды и не линейному виду фазы.

5. Построение огибающих волн-обверток и принцип Ферма

Допустим, что имеют место условия применимости геометрической оптики и посмотрим, как при этом можно изучить распространение волны. Зная поверхность равной фазы, можно построить другие бесконечно близкие, описывая из каждой точки M данной поверхности сферу радиуса $\epsilon V(M)$, где ϵ бесконечно малая постоянная и $V(M)$ значение V в точке M . Две огибающие этих маленьких сфер поверхности равных фаз, так как на этих поверхностях во времена $t - \epsilon$ и $t + \epsilon$ имеет место значение фазы, которое существует во время t на данной поверхности. Две прямые, соединяющие каждую точку M с точками касания сферы, центром которой является M , с ее огибающей, суть элементы „луча“. Таким образом, двигаясь шаг за шагом, можно построить все эквифазные поверхности, и тем самым определить лучи волны как пределы линий, составленных из бесконечно большого числа отрезков ломаной линии.

Предыдущий метод, известный под именем „построения обвертывающих волн“, позволяет доказать одно предположение, принимаемое геометрической оптикой, как постулат: принцип Ферма. По этому принципу все лучи проходящие через две точки пространства A и B таковы, что криволинейный интеграл:

$$\int_A^B \frac{dl}{V} = \int_A^B \frac{ndl}{c}, \quad (58)$$

взятый вдоль луча AB , стационарен. По теории волн это означает, что время, затраченное фазой на прохождение от A до B вдоль луча — минимально. Для доказательства этого предположения рассмотрим поверхность равной фазы $\Phi_1(x, y, z) = c_1$, проходящей через A , и поверхность равной фазы $\Phi_2(x, y, z) = c_2$, проходящей через B , затем представим себе все промежуточные,

лежащие между двумя предыдущими, поверхности равной фазы $\Phi_1(x, y, z) = c$ с бесконечно близкими значениями c , заключенными между c_1 и c_2 . Луч идущий от A до B можно рассматривать обзаванным из маленьких прямолинейных отрезков, нормальных к поверхностям бесконечно близким к $\Phi_1 = c$. Всякая варьируемая бесконечно близкая к лучу кривая, образована из бесконечно малых прямолинейных отрезков, вид которых мы сейчас определим и, по крайней мере из двух прямолинейных отрезков не перпендикулярных к тем поверхностям равной фазы, которые проходят через их концы. Величина $\frac{dl}{V}$, взятая по некоторому участку сегмента первого рода на варьируемой кривой, равна величине $\frac{dl}{v}$, взятой по сегменту соответствующему лучу. В самом деле, оба элемента dl перпендикулярны к поверхностям $\Phi_1 = c$ и $\Phi_1 = c + dc$, проходящих через их конечные точки и для обоих мы имеем:

$$\frac{dl}{V} = \frac{1}{v} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} dl = \frac{dc}{v}.$$

Напротив, если сравнивать элемент варьируемой кривой, не перпендикулярной к бесконечно близким эквифазным поверхностям с соответствующим элементом луча, то величина $\frac{dl}{V}$ будет больше для сегментов первого рода, чем для второго, так как перпендикуляр короче всякой наклонной. Таким образом принцип Ферма доказан; он не является более постулатом в волновой теории, это есть теорема, но справедливая только тогда, когда применима геометрическая оптика.

6. Группы волн в неоднородной, неизменной во времени среде

Теперь мы должны спросить себя, как должно обобщаться понятие группы волн в случае неоднородной среды, неизменной во времени. Пусть справедлива геометрическая оптика; тогда функция Φ , подчиняется уравнению:

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\right)^2 = \frac{v^2}{V^2} = \frac{n^2 v^2}{c^2}. \quad (59)$$

Это уравнение часто называется уравнением геометрической оптики. Поверхность равной фазы, служащая начальной при построении обертывающих волн, входит в семейство полных интегралов:

$$\Phi_1(x, y, z, a, b) = \text{const.} \quad (60)$$

Уравнения (59) и эквифазные поверхности, выведенные при этом построении, принадлежат к семейству (60), причем при переходе

от одной поверхности к другой, изменяется только константа во втором члене. Следовательно, для определенной распространения, аквифазные поверхности образуют семейство, зависящее от двух параметров. В частном случае однородных сред мы будем иметь $\Phi_1 = \frac{ny}{c} (zx + \beta y + \gamma z)$; оба параметра α и β суть тогда

направляющие косинусы α и β , если принимать $\gamma = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}$.

Рассмотрим группу волн, образованную следующим образом: она содержит в себе бесконечное число простых синусоидальных волн с частотами, заключенными в очень малом интервале $-\delta\nu$, $\nu + \delta\nu$, для которых оба параметра α и β имеют значения, заключенные в очень малых интервалах $\alpha - \delta\alpha$, $\alpha + \delta\alpha$ и $\beta - \delta\beta$, $\beta + \delta\beta$. Допустим, что в момент времени t_0 все эти волны совпадают по фазе в точке $x_0 y_0 z_0$. Как будет перемещаться затем это состояние совпадения фаз? Функция Φ_1 , которая зависит от V , в общем зависит и от ν и, для того, чтобы волны группы совпадали по фазе в момент времени t_0 в точке $x_0 y_0 z_0$ нужно иметь:

$$t_0 d\nu - \left[\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} \right)_0 d\alpha + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} \right)_0 d\beta + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \nu} \right)_0 d\nu \right] = 0. \quad (61)$$

Здесь значок 0 означает, что производные взяты в точке $x_0 y_0 z_0$, где $d\alpha$, $d\beta$, $d\nu$ имеют соответственно абсолютные значения меньше чем $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\nu$. Для того, чтобы найти в последующий момент времени это состояние совпадения фаз в точке x, y, z , нужно иметь:

$$t d\nu - \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \nu} d\nu \right] = 0. \quad (62)$$

В этот раз производные от Φ_1 взяты в точке x, y, z , $d\alpha$, $d\beta$, $d\nu$ имеют те же значения, что и в предыдущей формуле. Соотношение (62) будет следствием (61), если:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} = c_1; \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} = c_2; \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial \nu} = t = c_3. \quad (63)$$

Два первые соотношения определяют кривую, описываемую в пространстве рассматриваемой точкой совпадения фаз; третье соотношение определяет движение этой точки на траектории. Аналогия с теорией Якоби для постоянных полей бросается в глаза.

Легко доказать, что траектория, определяемая двумя первыми уравнениями (63), перпендикулярна к поверхностям равной фазы. В самом деле, дифференцируя эти два уравнения, получаем:

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \alpha \partial x} dx + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \alpha \partial y} dy + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \alpha \partial z} dz = 0, \quad (64)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \beta \partial x} dx + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \beta \partial y} dy + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \beta \partial z} dz = 0. \quad (64')$$

Если же взять производную (59) по a и b , удовлетворяемую Φ_1 , то получим:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial a} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y \partial a} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z \partial a} = 0, \quad (65)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial b} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y \partial b} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z \partial b} = 0. \quad (65')$$

Сравнивая систему (65), (65') с системой (64), (64'), мы видим, что производные:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}$$

соответственно пропорциональны дифференциалам dx , dy , dz , взятым по траектории; следовательно, траектория перпендикулярна к поверхностям $\Phi_1 = \text{const.}$

Если справедлива геометрическая оптика, то на протяжении длины волны имеет место распространение такое же, как при постоянном показателе преломления и даже в области, содержащей некоторое число длин волн, волны (45) можно рассматривать как плоские с постоянной амплитудой. В обычных же случаях длина волны гораздо меньше, чем самые малые размеры, которые мы можем непосредственно измерить. Следовательно, можно рассматривать потоки волн, размеры которых в человеческом масштабе очень малы, и которые тем не менее заключают в себе большое число длин волн. Эти потоки могут быть представлены группой волн с очень близкими частотами и направлениями распространения, которые в каждый момент можно считать плоскими волнами с постоянной амплитудой; но вполне понятно, что амплитуда и фаза этих волн медленно изменяется в течение распространения группы вследствие изменения на больших отрезках показателя преломления.

7. Распространение волн в среде, изменяющейся со временем

Нам остается рассмотреть самый общий случай, когда условия распространения изменяются не только от одного места к другому, но также и во времени: это случай преломляющей неоднородной среды со свойствами, зависящими от времени.

Возьмем, например, уравнение распространения следующего вида:

$$\Delta \psi = \frac{n^2(x, y, z, t)}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (66)$$

Так как время не играет уже здесь никакой особенной роли мы не можем более исключать его, пользуясь синусоидальным решением, фаза которого будет линейной функцией времени

За общий вид синусоидальных решений мы примем вид:

$$\Psi(x, y, z, t) = a(x, y, z, t) \cos 2\pi \Phi(x, y, z, t). \quad (67)$$

Подставим это выражение в уравнение распространения и приравняем к нулю отдельно члены с синусом и косинусом. Получим:

$$\sum_{xyz} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 = \frac{n^2}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{4\pi^2 a} \left[\Delta a - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} \right], \quad (68)$$

$$\sum_{xyz} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{c^2}{n^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{1}{2} a \left(\Delta \Phi - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) = 0. \quad (69)$$

По определению мы положим:

$$v(x, y, z, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}; \quad \lambda(x, y, z, t) = \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^{-1} \quad (70)$$

где dt элемент перпендикулярный к поверхности $\Phi = \text{const}$ в точке, рассматриваемой в настоящий момент. Частота и длина волны, определяемая (70), это две переменные; в случае n постоянных они совпадают с частотой и длиной волны в обычном смысле слова.

Мы будем говорить, что приближения геометрической оптики справедливы, если для пространственных перемещений порядка λ и интервалов времени порядка периода $\frac{1}{v}$ условия распространения изменяются очень мало. Тогда можно написать:

$$\sum_{xyz} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 = \frac{n^2}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 \quad (71)$$

и считать вторые производные от Φ равными нулю. Уравнение (71) есть вид уравнения геометрической оптики пригодного к общему случаю. На протяжении длины волны и, за промежуток времени не слишком большой по отношению к периоду, волну (67) можно рассматривать как плоскую и монохроматическую. Отсюда получается возможность представить в этом случае потоки волн, размеры которых и продолжительность во времени меньше того, что мы можем измерить и которые тем не менее удовлетворяют всем условиям необходимым для того, чтобы быть представленным группой волн.

Пусть $\Phi(x, y, z, t, a, b, c)$ будет полным интегралом уравнения (71). Пусть существует группа волн, образованная синусоидальными волнами, для которых три постоянные a, b, c заключены в малых интервалах $a - \delta a, a + \delta a, b - \delta b, b + \delta b, c - \delta c, c + \delta c$.

Допустим, что в момент t_0 все эти волны совпадают по фазе в точке $x_0 y_0 z_0$, мы должны тогда иметь:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial a}\right)_0 da + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial b}\right)_0 db + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial c}\right)_0 dc = 0, \quad (72)$$

где значки 0 означают, что производные взяты в точке $x_0 y_0 z_0$ в момент времени t_0 и где da, db, dc соответственно меньше $\delta a, \delta b, \delta c$ по абсолютному значению. Чтобы найти то же состояние совпадения фазы в точке x, y, z в момент времени t , нужно чтобы:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} da + \frac{\partial \Phi}{\partial b} db + \frac{\partial \Phi}{\partial c} dc = 0, \quad (73)$$

на этот раз производные берутся в точке x, y, z в момент времени t . Для того, чтобы (73) было следствием (72), нужно чтобы:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = c_1; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b} = c_2; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c} = c_3. \quad (74)$$

Эти три уравнения дают движение точки совпадения фаз. Аналогия с теорией Якоби очевидна.

После этого анализа распространения волн мы будем искать, какие уравнения распространения мы должны применить в волновой механике для волн сопряженных с частицей.

ГЛАВА V

УРАВНЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНЫ СОПРЯЖЕННОЙ С ЧАСТИЦЕЙ

1. Критерий выбора уравнений распространения

В частном случае движения частицы, в отсутствии поля, мы смогли установить соответствие между волнами и частицами. Это соответствие устанавливается следующим образом: с частицей энергии W и количеством движения $\vec{p}$ мы должны связать волну, распространяющуюся в направлении движения (направлении вектора $\vec{p}$) с частотой $\nu = \frac{W}{h}$ и длиной волны $\lambda = \frac{h}{|\vec{p}|}$. Все происходит таким образом, как если бы для этой сопряженной волны пустота обладала показателем преломления

$$n = \sqrt{1 - \frac{\nu_0^2}{\nu^2}},$$

где ν_0 означает константу, характерную для частицы и связанную с ее собственной массой m соотношением $\nu_0 = \frac{mc^2}{h}$. Скорости

частицы равна скорости группы, соответствующей этому закону преломления.

С другой стороны, мы видели намечающуюся связь между принципом наименьшего действия и принципом Ферма (глава III, параграф 5) и эта аналогия между старой механикой и геометрической оптикой подтверждалась тем фактом, что при приближениях геометрической оптики движение группы волн выражается уравнениями, сходство которых с уравнениями теории Якоби чрезвычайно велико.

Найдем уравнения распространения для таких сопряженных волн, лучи которых в приближениях геометрической оптики совпадают с траекториями частиц, задаваемых старой динамикой.

Сделаем следующее важное замечание: длина λ сопряженных волн и их период $T = \frac{1}{\nu}$ пропорциональны постоянной Планка h и будут стремиться к нулю одновременно с последней. Если же длина волны и период бесконечно малы, то из рассуждений последней главы следует, что геометрическая оптика вполне справедлива. Следовательно, когда можно пренебречь h , старая механика должна быть вполне пригодной. Мы должны так выбрать наши уравнения, чтобы при стремлении h к нулю, они давали бы уравнения старой механики. В этом обстоятельстве и заключается критерий для выбора уравнений распространения.

2. Уравнение распространения в отсутствии поля

Возьмем сперва наиболее простой случай движения вне всякого поля. Можно допустить, что уравнение распространения должно писаться так:

$$\Delta \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2 m^2 c^2}{h^2} \Psi. \quad (1)$$

В самом деле, подставим в это уравнение выражение для плоской монохроматической волны. Так как $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -4\pi^2 \nu^2 \Psi$, мы получаем:

$$\Delta \Psi + \frac{4\pi^2 \nu^2}{c^2} \left[1 - \frac{m^2 c^4}{h^2 \nu^2} \right] \Psi = 0. \quad (2)$$

По определению $mc^2 = h\nu_0$, и поэтому можно также написать (2) в виде:

$$\Delta \Psi + \frac{4\pi^2 \nu^2}{c^2} \left[1 - \frac{\nu_0^2}{\nu^2} \right] \Psi = 0. \quad (3)$$

Если положить

$$n = \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{v^2}}, \quad (4)$$

то это уравнение приводится к виду (4) предыдущей главы. Этот результат мы и должны получить для того, чтобы оказаться в согласии с предыдущими выводами, которые мы напомнили. Напишем простую синусоидальную волну в виде:

$$\Psi(x, y, z, t) = a \cos 2\pi \left[\nu t - \frac{n\nu}{c} (\alpha x + \beta y + \gamma z) \right] = a \cos \frac{2\pi}{h} \varphi. \quad (5)$$

Здесь $\frac{\varphi}{h}$ будет то, что в предыдущей главе мы называли Φ . Впредь название фазы будет сохранено за φ . Мы видим, что

$$\varphi = h\nu t - h\nu \frac{n}{c} (\alpha x + \beta y + \gamma z) \quad (6)$$

и как следствие:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = h\nu; \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \alpha \frac{n}{c} h\nu; \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \beta \frac{n}{c} h\nu; \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \gamma \frac{n}{c} h\nu. \quad (7)$$

Мы должны положить ввиду прежних результатов:

$$h\nu = W, \quad \frac{n}{c} h\nu = \frac{h}{\lambda} = |p|. \quad (8)$$

Следовательно:

$$W = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad p_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad p_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad p_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (9)$$

Это как раз будут соотношения, которым должна удовлетворять функция Якоби.

Таким образом мы принуждены отождествить фазу φ с функцией Якоби.

3. Уравнение распространения в постоянном поле

Возьмем немного более сложный случай постоянного поля: он соответствует случаю неоднородных сред с постоянным показателем преломления. Силовое поле характеризуется потенциальной функцией $F(x, y, z)$. Как мы покажем, закон дисперсии, который нужно здесь принять, будет:

$$n = \sqrt{\left(1 - \frac{F(x, y, z)}{h\nu}\right)^2 - \frac{v_0^2}{v^2}}, \quad (10)$$

де всегда $mc^2 = h\nu_0$. Естественно, что для $F \equiv 0$ мы возвращаемся к закону дисперсии (4) справедливому для поля равного улю.

Уравнение распространения монохроматических волн частотой ν нужно написать так:

$$\Delta\Psi + \frac{4\pi^2\nu^2}{c^2} \left[\left(1 - \frac{F}{h\nu}\right)^2 - \frac{\nu^2}{\nu^2} \right] \Psi = 0. \quad (11)$$

Из того, что мы уже знаем, следует, что геометрическая оптика будет справедлива, если функция $F(x, y, z)$ изменяется достаточно медленно для того, чтобы она могла рассматриваться как постоянная в области содержащей большое число длин волн. а решение тогда можно взять:

$$\Psi(x, y, z, t) = a \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{\nu}{c} \int n dl \right), \quad (12)$$

где интеграл берется вдоль кривой нормальной к семейству полных интегралов (зависящих от двух параметров α и β) уравнения:

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2 = \frac{n^2(x, y, z)}{c^2} \nu^2. \quad (13)$$

В группе волн траектория точки совпадения фаз определяется по уравнениям:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} = c_1, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} = c_2$$

и движение на траектории по уравнению

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \nu} = t + c_3.$$

Для того, чтобы найти законы старой механики, нужно допустить, что фаза

$$h\Phi = \varphi = h\nu t - \frac{h\nu}{c} \int n dl = h\nu t - \varphi_1(x, y, z) \quad (14)$$

должна быть отождествлена с функцией Якоби:

$$\begin{aligned} S(x, y, z, t, W, \alpha, \beta) &= Wt - \int (p_x dx + p_y dy + p_z dz) \\ &= Wt - S_1(x, y, z, W, \alpha, \beta). \end{aligned} \quad (15)$$

Это заставляет нас положить:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\frac{\partial S}{\partial t} = W = h\nu; \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial S_1}{\partial x} = p_x = \hbar \cdot \frac{n}{c} \cdot h\nu; \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\partial S_1}{\partial y} = p_y = \hbar \cdot \frac{n}{c} \cdot h\nu; \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \frac{\partial S_1}{\partial z} = p_z = \hbar \cdot \frac{n}{c} \cdot h\nu, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

откуда:

$$|p| = \frac{\hbar h\nu}{c} = \frac{h\nu}{v} = \frac{h}{\lambda}. \quad (17)$$

Из отождествления S и φ и S_1 и φ_1 выводится несколько важных теорем.

1 теорема. Принцип наименьшего действия Мопертюи совпадает с принципом Ферма.

В самом деле:

$$\begin{aligned} \int dS_1 &= \int (p_x dx + p_y dy + p_z dz) = \int d\varphi_1 \\ &= \int \frac{n}{c} h\nu (x dx + y dy + z dz) = \frac{h\nu}{c} \int n dl \end{aligned} \quad (18)$$

и условие Мопертюи $\delta S_1 = 0$ совпадает с условием Ферма $\delta \int n dl = 0$. Другими словами, лучи сопряженных волн совпадают с возможными траекториями частицы, соответствующими одному и тому же полному интегралу уравнения Якоби.

2-ая теорема. Уравнение геометрической оптики совпадает с уравнением Якоби.

В самом деле, в релятивистской форме последнее уравнение имеет вид:

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} - F(x, y, z) \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 = m^2 c^2. \quad (19)$$

Здесь оно напишется так

$$\frac{1}{c^2} (h\nu - F)^2 - \left(\frac{\partial S_1}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial S_1}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial S_1}{\partial z} \right)^2 = \frac{\hbar^2 \nu_0^2}{c^2}$$

или

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial z} \right)^2 &= \frac{\hbar^2 \nu^2}{c^2} \left[\left(1 - \frac{F(x, y, z)}{h\nu} \right)^2 - \frac{\nu_0^2}{\nu^2} \right] \\ &= n^2 \frac{\hbar^2 \nu^2}{c^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Если в (13) заменить Φ_1 через $\frac{\varphi_1}{h} = \frac{S_1}{h}$, получаем (20) и т. д.

3-я теорема. По теории Якоби уравнения траектории и движения совпадают с уравнениями траектории и движения точек совпадения фазы в группе волн. Это следует непосредственно из соотношения $\varphi = S$.

4-ая теорема. Скорость частицы, определяемая старой динамикой, совпадает со скоростью группы сопряженных волн.

Для того, чтобы непосредственно доказать это, будем исходить из уравнения движения по Якоби:

$$\frac{\partial S_1}{\partial W} = t + c_3. \quad (21)$$

Если dl есть элемент траектории, проходимый частицей за время dt , то мы имеем:

$$\frac{\partial^2 S_1}{\partial W \partial l} dl = dt. \quad (22)$$

И так как $\frac{\partial S_1}{\partial l} = p$, скорость частицы будет:

$$v = \frac{dl}{dt} = \left[\frac{\partial^2 S_1}{\partial W \partial l} \right]^{-1} = \left[\frac{\partial p}{\partial W} \right]^{-1}. \quad (23)$$

Это соотношение можно также написать так:

$$\frac{1}{v} = \frac{\partial p}{\partial W} = \frac{\partial \left(\frac{n}{c} h\nu \right)}{\partial (h\nu)} = \frac{1}{c} \frac{\partial (n\nu)}{\partial \nu} = \frac{1}{U}, \quad (24)$$

что и требовалось доказать.

По предыдущему релятивистская форма уравнения распространения в постоянном поле дается формулой (11). Для случаев же, когда достаточна механика Ньютона, можно написать:

$$h\nu = mc^2 + E = mc^2 + \frac{1}{2} m v^2 + F(x, y, z) \quad (25)$$

и частные $\frac{E}{h\nu}$ и $\frac{F}{h\nu}$ очень малы по сравнению с единицей; следовательно можно написать:

$$\begin{aligned} n &= \sqrt{\left(1 - \frac{F}{h\nu} \right)^2 - \frac{\nu_0^2}{\nu^2}} = \sqrt{1 - \frac{2F}{h\nu} - \left(\frac{h\nu - E}{h\nu} \right)^2} \\ &= \sqrt{1 - \frac{2(E - F)}{h\nu}} = \sqrt{\frac{2(E - F)}{mc^2}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Таков будет закон дисперсии в приближении классической механики.

В той же степени приближения произведение $n^2 v^2$ может быть написано как $\frac{2(E-F)}{h^2} mc^2$ и мы получаем для уравнения распространения монохроматической волны с частотой $\nu = \frac{mc^2 + E}{h}$ в постоянном поле определяемой потенциальной функцией $F(x, y, z)$ нерелятивистскую форму:

$$\Delta \Psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - F) \Psi = 0. \quad (27)$$

Это и есть классическое ныне уравнение Шредингера.

4. Уравнение распространения в переменных полях

Мы нашли выше вид уравнения, пригодный для распространения *монохроматических* волн в постоянных полях. Как мы уже говорили, этот вид должен рассматриваться как вырожденная форма более общего вида, в который не входит частота и который годится не только для случая наложения монохроматических волн, но также и для случая полей меняющихся со временем.

Ведущей мыслью при нахождении этого общего уравнения должно быть то, что в приближениях геометрической оптики и в частности, если считать h бесконечно малым, уравнение геометрической оптики должно совпадать с уравнением Якоби так, что фаза φ может быть отождествлена с функцией Якоби.

Общим релятивистским уравнением, удовлетворяющим этому условию, является следующее:

$$\begin{aligned} \Delta \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \frac{4\pi i}{hc^2} F(x, y, z, t) \frac{\partial \Psi}{\partial t} \\ - \frac{4\pi^2}{h^2} \left[m^2 c^2 - \frac{F^2(x, y, z, t)}{c^2} \right] \Psi = 0; \end{aligned} \quad (28)$$

для $F \equiv 0$ оно совпадает с уравнением (1). Если F зависит только от x, y, z и не зависит от t , то можно принять такое монохроматическое решение:

$$\Psi(x, y, z, t) = a(x, y, z) \cos 2\pi[\nu t - \Phi_1(x, y, z)] \quad (29)$$

или, написав это в комплексном виде, $\Psi = ae^{2\pi i(\nu t - \Phi_1)}$ получаем:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = 2\pi i \nu \Psi; \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -4\pi^2 \nu^2 \Psi, \quad (30)$$

при этом уравнение (28) принимает вырожденную форму:

$$\Delta \Psi + \frac{4\pi^2 \nu^2}{c^2} \Psi - \frac{8\pi^2 \nu}{hc^2} F \Psi - \frac{4\pi^2}{h^2} \left(m^2 c^2 - \frac{F^2}{c^2} \right) \Psi = 0, \quad (31)$$

которое совпадает с (11).

Рассмотрим общий случай, когда F зависит также и от времени (переменное поле). Мы покажем, что если функция ψ , записанная в комплексной форме, удовлетворяет уравнению (28), то, считая $\hbar$ бесконечно малым, мы снова получим для φ уравнение Якоби.

В самом деле, подставляя $\psi = ae^{\frac{2\pi i}{\hbar} \varphi}$ в уравнение (28) и приравняв нулю действительную часть полученного выражения, имеем:

$$\Delta a - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \frac{4\pi^2}{\hbar^2} a \left[\sum_{xyz} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] - \frac{8\pi^2}{\hbar^2 c^2} F a \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{4\pi^2}{\hbar^2} \left[m^2 c^2 - \frac{F^2}{c^2} \right] a = 0. \quad (32)$$

Если $\hbar$ считается бесконечно малым, члены, содержащие $\frac{1}{\hbar^2}$, сильно превосходят остальные; сокращая на общий множитель, получаем:

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - F \right)^2 - \sum_{xyz} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 = m^2 c^2. \quad (33)$$

Функция φ подчиняется релятивистскому уравнению Якоби.

Уравнение (33) может быть рассматриваемо как уравнение геометрической оптики для рассматриваемых волн.

Как мы видели, если $\varphi(x, y, z, t, \alpha, \beta, \gamma)$ означает полный интеграл этого уравнения (33), то три соотношения:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = c_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = c_2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} = c_3 \quad (34)$$

определяют движение состояний совпадения фазы в группе волн, и эти три соотношения суть ни что иное как уравнения движения по Якоби. И здесь также, в совершенно общем виде, в приближении геометрической оптики, движение частицы может быть рассматриваемо как движение группы сопряженных волн.

Специальным свойством уравнения (28) является то, что оно содержит мнимый коэффициент, и для того, чтобы удовлетворить ему, волновая функция должна быть написана в комплексной форме. В уравнениях классической волновой теории, коэффициенты действительны, и уравнению распространения должна удовлетворять действительная волновая функция $\psi = a \cos 2\pi\Phi$, комплексная форма Ψ есть также решение и с ней вообще делают подсчеты, чтобы снова вернуться к веществен-

ной части в конце подсчета. Употребление комплексной части является просто математическим приемом. Но в квантовом случае это уже не имеет места: вещественная волновая функция не удовлетворяет уравнению (28) и решением его является только комплексная функция.

Также как и в случае постоянных полей мы перешли от релятивистского уравнения (11) к нерелятивистскому уравнению Шредингера (27), мы можем и в общем случае перейти от релятивистского уравнения (28) к нерелятивистской форме. Вспомним, что в релятивистской динамике энергия выражается так:

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + F(x, y, z, t) = mc^2 + T + F = mc^2 + E, \quad (25)$$

где T — кинетическая энергия движения, F — потенциальная энергия; E — энергия определяемая ньютоновской динамикой; она равна релятивистской энергии, уменьшенной на внутреннюю энергию mc^2 , а классическая ньютоновская динамика справедлива, когда отношение $\frac{E}{mc^2}$ мало. Чтобы перенести все это в волновую механику, мы напишем волновую функцию в форме:

$$\Psi(x, y, z, t) = e^{\frac{2\pi i}{h} mc^2 t} \Psi_r(x, y, z, t). \quad (26)$$

Выражение Ψ_r , следовательно, получается, если выбросить из комплексной фазы волны член $\frac{mc^2}{h} t$, т. е. уменьшая частоту $\frac{W}{h}$ на $\frac{E}{h}$.

Мы назовем Ψ_r приведенной волновой функцией и $\frac{E}{h}$ приведенной частотой. Подставляя (26) в (28), получаем:

$$\Delta \Psi_r - \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial^2 \Psi_r}{\partial t^2} + \frac{4\pi i}{h} mc^2 \frac{\partial \Psi_r}{\partial t} - \frac{4\pi^2}{h^2} m^2 c^4 \Psi_r \right] + \frac{4\pi i}{h c^2} F \left[-\frac{\partial \Psi_r}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h} mc^2 \Psi_r \right] - \frac{4\pi^2}{h^2} \left[m^2 c^2 - \frac{F^2}{c^2} \right] \Psi_r = 0. \quad (27)$$

Членом $F^2 \Psi_r$ можно пренебречь по сравнению с $F mc^2 \Psi_r$, также как и членом $F \frac{\partial \Psi_r}{\partial t}$ можно пренебречь по сравнению с членом $mc^2 \frac{\partial \Psi_r}{\partial t}$, потому что все производные Ψ_r по времени малы по сравнению с mc^2 . Остается, следовательно:

$$\Delta \Psi_r - \frac{8\pi^2}{h^2} m F \Psi_r = \frac{4\pi i m}{h} \frac{\partial \Psi_r}{\partial t}. \quad (28)$$

Таково нерелятивистское уравнение¹, которому должна подчиняться приведенная волновая функция. Если поле не зависит от времени, мы можем положить:

$$\Psi_r = a(x, y, z) e^{\frac{2\pi i}{h} [Et - \varphi(x, y, z)]} \quad (39)$$

и легко получим затем уравнение Шредингера (27).

Уравнение (38) очень часто пишут без значка r , но никогда не нужно забывать, что это *приведенная* волновая функция, частота которой, следовательно, уменьшена на $\frac{mc^2}{h}$.

5. Способ автоматического написания уравнения

Мы можем найти нерелятивистское уравнение распространения, употребляя прием некоторым образом автоматический, который имеет большое значение при сравнении матриц Гейзенберга с волновой механикой. Вот в чем состоит этот прием. Мы знаем, что уравнение Якоби в ньютоновской динамике будет таково:

$$H\left(q_i, t, -\frac{\partial S}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (40)$$

где $H\left(q_i, t, -\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)$ означает выражение, которое получается из энергии H , выраженной в функции от координат q_i , времени t и моментов p_i , если каждый момент p_i заменить через $-\frac{\partial S}{\partial q_i}$.

Возьмем первый член (40). Заменим $\frac{\partial S}{\partial q_i}$ символам $\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_i}$ и $\frac{\partial S}{\partial t}$ символом $\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t}$. Мы получаем, таким образом, оператор. Подействуем этим оператором на волновую функцию Ψ (приведенную) и приравняем результат нулю. Если q_i суть прямоугольные координаты, мы получим уравнение распространения (38).

В самом деле, в прямоугольных координатах мы имеем:

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (41)$$

¹ Нерелятивистское уравнение распространения первого порядка относительно t , тогда как релятивистское второго порядка относительно t . В этом заключается важное различие их, на которое обратил специальное внимание Дирак.

Вследствие этого

$$H(q, p, t) = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + F(x, y, z, t) \quad (42)$$

и для уравнения Якоби получаем:

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + F - \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (43)$$

Оператор полученный указанным методом:

$$-\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] + F - \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} \quad (44)$$

и мы приходим к уравнению распространения:

$$\frac{1}{m} \Delta \Psi - \frac{8\pi^2}{\hbar^2} F \Psi = \frac{4\pi i}{\hbar} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad (45)$$

которое вполне совпадает с (38). Легко проверить, что тот же прием, приложенный к прямоугольным координатам, дает неверное уравнение распространения.

ГЛАВА VI

МЕХАНИКА КЛАССИЧЕСКАЯ И МЕХАНИКА ВОЛНОВАЯ

1. Значение амплитуды a в классической механике

Как мы теперь хорошо знаем, старая механика соответствует случаю распространения Ψ волн по законам геометрической оптики. Тогда фазовая функция φ может быть отождествлена с функцией Якоби. Но теперь мы должны посмотреть, какое значение нужно приписать амплитуде a , если мы хотим сохранить пока классическое понятие частиц, вполне локализованных в пространстве.

Допустим, что мы можем удовлетвориться нерелятивистскими уравнениями. Наши рассуждения не относятся, естественно, к очень быстро движущимся частицам, например, к частицам света, и когда мы займемся фотонами, то должны будем снова вернуться к нашим релятивистским доказательствам.

Будем, следовательно, исходить из общего нерелятивистского уравнения:

$$\Delta \Psi - \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} F(x, y, z, t) \Psi = \frac{4\pi i}{\hbar} m \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (1)$$

и подставим сюда выражение

$$\Psi = ae^{\frac{2\pi i}{\hbar} \varphi}, \quad (2)$$

де a и φ две вещественные функции, модуль и аргумент комплексной величины Ψ .

Разделяя мнимую и вещественную часть, получаем:

$$-\Delta a \frac{4\pi^2}{h^2} a \sum_{xyz} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{8\pi^2 m}{h^2} F a = \frac{8\pi^2}{h^2} a \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\frac{4\pi i}{h} \sum_{xyz} \frac{\partial a}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{2\pi i}{h} a \Delta \varphi = \frac{4\pi i}{h} m \frac{da}{dt}. \quad (4)$$

Из главы IV' (где $\Phi = \frac{\varphi}{h}$) следует, что если справедлива геометрическая оптика, числом Δa можно пренебречь по сравнению с членом:

$$\frac{4\pi^2}{h^2} \sum_{xyz} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2.$$

Мы можем следовательно написать наши соотношения (3) и (4) так:

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + F(x, y, z, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{2} a \Delta \varphi = m \frac{da}{dt}. \quad (6)$$

Уравнение (5) показывает, что φ совпадает с функцией Якоби; это мы уже знаем. Уравнение (6) дает нам значение a .

Пусть $S(x, y, z, t, \alpha, \beta, \gamma)$ — полный интеграл уравнения Якоби, где α, β, γ — три постоянные. По теории Якоби уравнения движения суть:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = c_1; \quad \frac{\partial S}{\partial \beta} = c_2; \quad \frac{\partial S}{\partial \gamma} = c_3. \quad (7)$$

Следовательно, существует бесконечное множество возможных движений частицы, соответствующих одной и той же функции Якоби, т. е. одним и тем же постоянным α, β, γ , но для различных постоянных c_1, c_2, c_3 . Мы будем говорить, что эти движения частиц принадлежат одному и тому же классу.

Вместо того, чтобы иметь дело с одной частицей, описывающей некоторую траекторию, представим себе совокупность тождественных частиц, которые совершают движения одного и того же класса. Мы знаем, что моменты p_x, p_y, p_z выводятся из функции S при помощи соотношений:

$$p_x = -\frac{\partial S}{\partial x}, \quad p_y = -\frac{\partial S}{\partial y}, \quad p_z = -\frac{\partial S}{\partial z} \quad (8)$$

или векторно:

$$\vec{p} = -\text{grad } S. \quad (9)$$

Так как в механике Ньютона $\vec{p} = m\vec{v}$, то

$$\vec{v} = -\frac{1}{m} \text{grad } S. \quad (10)$$

Следовательно, движение облака частиц вполне известно, если известна функция S . Так как здесь мы можем совместить φ и S , то уравнение (6) эквивалентно следующему:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} v_x + \frac{\partial a}{\partial y} v_y + \frac{\partial a}{\partial z} v_z + \frac{1}{2} a \text{div } \vec{v} = 0. \quad (11)$$

Умножая на $2a$ легко получаем:

$$\frac{\partial(a^2)}{\partial t} + \text{div} (a^2 \vec{v}) = 0. \quad (12)$$

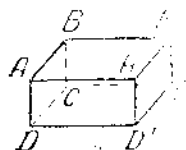


Рис. 2.

С другой стороны, движение облака частиц должно совершаться по гидродинамическому уравнению непрерывности, утверждающему, что увеличение числа частиц за единицу времени, в некоторой области пространства, равно разности между числом частиц, входящих в эту область, и числом частиц, выходящих из этой области за единицу времени. Рассмотрим маленький параллелепипед $ABCD A'B'C'D'$, плоскости которого перпендикулярны координатным осям, а ребра имеют бесконечно малые длины dx, dy, dz .

Обозначим через ρ, v_x, v_y, v_z значения плотности и составляющих скорости облака в центре параллелепипеда. Через плоскость $ABCD$, с площадью $dydz$, перпендикулярную оси x , поток частиц за время dt будет:

$$\left(\rho v_x + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dt dy dz.$$

Поток через $A'B'C'D'$ за то же время будет:

$$\left(\rho v_x + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dx dy dz.$$

Излишек частиц, входящих через грань $ABCD$, по отношению к числу частиц, выходящих через $A'B'C'D'$, будет следовательно:

$$-\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dt dx dy dz.$$

Делая тот же подсчет для двух других пар плоскостей, находим, что общий прирост, входящих частиц за время dt , будет:

$$-\operatorname{div}(\rho \vec{v}) dt dx dy dz.$$

Это должно быть равно увеличению числа частиц $\rho dx dy dz$ за $\frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx dy dz$ в некотором малом объеме, за время dt . Отсюда приходим к гидродинамическому уравнению непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (13)$$

Сравнивая с (12), мы принуждены положить:

$$\rho = K a^2(x, y, z, t), \quad (14)$$

где K константа пропорциональности, которую можно считать равной единице, так как a определяется с точностью до постоянного множителя. Таким образом мы приходим к следующему результату: „нужно считать, что квадратом амплитуды волны ψ , т. е. ее интенсивностью, измеряется плотность облака частиц в каждый момент времени в каждой точке“.

2. Вероятность присутствия частицы в данной точке

Изображенное в предыдущем параграфе облако частиц служит для наглядного представления совокупности возможных движений одного и того же класса, одной частицы. Плотность этого облака в некоторой точке, в некоторый момент времени, можно рассматривать как вероятность присутствия в этой точке частицы, движение которой принадлежит к рассматриваемому классу, но точное положение которой неизвестно. Результат, полученный в конце предыдущей главы, мы можем, следовательно, выразить так: „интенсивностью волны ψ в каждой точке и в каждый момент времени измеряется вероятность присутствия в этой точке и в этот момент времени сопряженной с ней частицы“.

Во введении мы называли эту формулировку „принципом интерференции“. Мы видим, что когда волна ψ распространяется согласно законам геометрической оптики, точность принципа интерференции действительно гарантируется автоматически уже тем фактом, что законы старой динамики справедливы для движения частицы. Таким образом представляется, что облако частиц, связанных всегда с одной и той же волной ψ , имеет смысл вероятности. Можно представить себе, что это облако образует некоторый фиктивный поток, „поток вероятности“, плотность которого, равная по (14) a^2 , дает в каждой точке и в каждый момент времени вероятность присутствия в этой точке частицы, связанной с рассматриваемой волной. Бесконечно малые частицы этого потока, „элементы вероятности“,

как мы будем их обозначать, описывают траектории, совпадающие с возможными траекториями частицы, точное положение которой считается неизвестным. Вся эта теория очень ясна, в случае, который мы здесь рассматриваем, когда для распространения волны справедлива геометрическая оптика. Мы увидим, что трудности начинаются в тот момент, когда мы покидаем область геометрической оптики.

Мы должны подчеркнуть один важный пункт. Фазовая функция определяется совершенно независимо от амплитуды a ; из теории Якоби следует, что движение частицы по ее траектории совершенно не зависит от функции a . Это необходимо для того, чтобы по старой механике можно было считать движение частицы вполне заданным 6-ю начальными условиями положения и скорости (т. е. 6-ю постоянными теории Якоби): если бы определение φ не было независимым от a , то выражение φ зависело бы от значений функции a в различных точках пространства в начальный момент времени и это значило бы, что движение частицы зависит не только от начальных условий, но также и от вероятности того, что начальные координаты имеют такие то и такие то значения. Это и есть то парадоксальное обстоятельство, которое появляется при переносе идей старой механики в область собственно новой механики.

Уточним способ, которым должна быть определена функция $a(x, y, z, t)$, если полный интеграл уравнения (5), т. е. функция Якоби $S(x, y, z, t, \alpha, \beta, \gamma)$ считается известной. Нам нужно найти такую функцию, удовлетворяющую уравнению (6), чтобы в начальный момент времени t_0 , $a(x, y, z, t_0)$ давало бы распределение вероятности присутствия частиц. Допустим, например, что мы в момент t_0 проделали какой то опыт для того, чтобы определить положение частицы; результат опыта включает всегда некоторую возможную ошибку и можно было бы сказать, что вероятность присутствия частицы в точке x, y, z , в момент времени t_0 , дается функцией $f(x, y, z)$, причем область пространства, где эта функция f имеет значение отличное от нуля, тем меньше, чем точнее был опыт. Следовательно, за начальные условия нужно взять:

$$a^2(x, y, z, t_0) = f(x, y, z). \quad (15)$$

По самому своему смыслу функция f удовлетворяет условию:

$$\int f(x, y, z) dv = 1, \quad (16)$$

причем интеграл распространяется на всю область пространства, и функция a всегда удовлетворяет условию

$$\int a^2(x, y, z, t) dv = 1, \quad (17)$$

потому что (17) измеряется общая вероятность того, что частица в момент времени t существует в некоторой области пространства, что очевидно всегда будет равно единице.

3. Конкретные примеры

Для того чтобы уточнить предыдущие рассуждения, мы дадим два примера. Рассмотрим сначала случай, когда поле равно нулю. Тогда решением волнового уравнения является монохроматическая волна. Амплитуда ее постоянна: это означает, что если рассматривать бесконечное множество частиц, обладающих в одном и том же направлении одной и той же скоростью, которые образуют однородное облако, то плотность этого облака не будет претерпевать изменений вследствие движения.

Далее, поучителен случай движения неограниченного облака частиц одной и той же энергией, перемещающихся в направлении действующего на них однородного поля. Мы можем писать все это явление при помощи одной переменной x .

Вернемся к обозначениям главы II, параграф 6. Мы имеем;

$$F(x) = kx, \quad (18)$$

причем абсцисса каждой точки задается выражением:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \frac{k}{m} t^2, \quad (19)$$

где x_0 абсцисса, а v_0 — скорость этой частицы в момент времени $t=0$.

Мы нашли, что полный интеграл уравнения Якоби, где W играло роль произвольной постоянной, был равен:

$$S(x, t, W) = Wt - \frac{1}{3mk} [2m(kx + W)]^{3/2}. \quad (20)$$

С другой стороны, уравнения (6), в котором мы можем заменить φ через S , дает нам:

$$\frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} a = m \frac{\partial a}{\partial t}. \quad (21)$$

Так как мы ищем движение неопределенного облака частиц, мы можем считать движение независимым от времени, так что a будет тоже независимо от времени. Тогда (21) переписывается в виде:

$$\frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} a = 0. \quad (22)$$

согласно (20)

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -\sqrt{2m(kx + W)}; \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{-mk}{\sqrt{2m(kx + W)}} \quad (23)$$

и амплитуда a должна удовлетворять уравнению:

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dx} = - \frac{k}{4(kx + W)}. \quad (24)$$

Следовательно его интеграл будет

$$a = \frac{\text{const}}{\sqrt[4]{kx + W}} \quad (25)$$

и по (14) плотность облака:

$$\rho = a^2 = \frac{\text{const}}{\sqrt{kx + W}} = \rho_0 \frac{\sqrt{kx_0 + W}}{\sqrt{kx + W}}, \quad (26)$$

где ρ_0 значение ρ для некоторого значения x равного x_0 . Следовательно плотность облака уменьшается по направлению поля.

Так как мы рассматриваем тот случай, когда волновая механика совпадает с классической механикой, мы должны суметь снова найти уравнение (26) при помощи классического уравнения движения. Покажем, что это действительно так.

Рассмотрим некоторую абсциссу x_0 и те частицы, которые находятся в плоскости x_0 в момент времени $t=0$; эти частицы обладают скоростью v_0 . По (19) в момент времени t они будут находиться в плоскости $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \frac{k}{m} t^2$. Частицы, которые в момент времени 0 находились в плоскости $x_0 - \delta x_0$, обладают некоторой скоростью $v_0 - \delta v_0$ и в момент времени t они достигнут плоскости с абсциссой:

$$x' = x_0 - \delta x_0 + (v_0 - \delta v_0)t + \frac{1}{2} \frac{k}{m} t^2. \quad (27)$$

Следовательно частицы, которые в начальный момент времени занимали цилиндр с основанием равным единице, ограниченный плоскостями x и $x_0 - \delta x_0$, займут в момент времени t цилиндр с основанием равным единице и ограниченный плоскостями x и x' . Если N есть число этих частиц, то плоскость при абсциссе x_0 в первом цилиндре будет:

$$\rho_0 = \frac{N}{\delta x_0}, \quad (28)$$

а плотность во втором цилиндре при абсциссе x :

$$\rho = \frac{N}{x - x'} = \frac{N}{\delta x_0 + \delta v_0 t} = \frac{N}{\delta x_0} \frac{1}{1 + \frac{\delta v_0}{\delta x_0} t} = \frac{\rho_0}{1 + \frac{\delta v_0}{\delta x_0} t}. \quad (29)$$

Но, так как по предположению все частицы облака обладают одной и той же энергией W , скорость и абсцисса каждой из них связаны соотношением:

$$\frac{1}{2} mv^2 - kx = W \quad (30)$$

или

$$v = \sqrt{\frac{2(W + kx)}{m}}. \quad (31)$$

δv_0 есть изменение скорости при изменении абсциссы на δx_0 . Следовательно, по (31)

$$\delta v_0 = \frac{k \delta x_0}{\sqrt{2m(kx_0 + W)}} \quad (32)$$

и формула (29) принимает вид:

$$\rho = \rho_0 \frac{1}{1 + \frac{kt}{\sqrt{2m(kx_0 + W)}}} = \rho_0 \frac{\sqrt{kx_0 + W}}{\sqrt{kx_0 + W} + \frac{k}{\sqrt{2m}} t}, \quad (33)$$

но мы имеем также

$$v = v_0 + \frac{k}{m} t \quad (34)$$

и по (31)

$$\sqrt{kx + W} = \sqrt{kx_0 + W} + \frac{k}{\sqrt{2m}} t. \quad (35)$$

Окончательно находим для ρ выражение:

$$\rho(x) = \rho(x_0) \frac{\sqrt{kx_0 + W}}{\sqrt{kx + W}},$$

а это и есть формула (28), полученная с помощью амплитуды сопряженной волны.

4. Итоги главы

Таким образом мы установили параллелизм между старой механикой и распространением волн в том случае, когда оно происходит по законам геометрической оптики. Тогда функция Якоби совпадает с фазовой функцией волн Ψ и если мы хотим сохранить классическое представление, что частицы описывают вполне определенные траектории с вполне определенной скоростью, то можно вообразить облако частиц, описывающих все траектории, соответствующие одной и той же функции Якоби; тогда плотность этого облака всегда может быть измерена интенсивностью сопряженной волны χ . Можно также вообразить

поток вероятности, элементы которого описывают траектории, которые по старой механике должны соответствовать функции Якоби заданного вида, и сказать, что плотностью этого потока измеряется вероятность присутствия одной единственной частицы в данной точке в данный момент времени, причем известно только то, что она описывает одну из этих траекторий, но какую, точно неизвестно.

Все эти представления очень ясны и вполне совпадают с классическими понятиями, но можно ли распространять их на случай, когда условия геометрической оптики не имеют места?

Мы увидим, что, прежде всего, необходимо сохранить представление, что вероятность присутствия частицы измеряется интенсивностью волны Ψ , даже если для этого придется отступить от традиционной идеи, приписывающей частице вполне определенные положения, скорость и траекторию.

ГЛАВА VII

ПРИНЦИП ИНТЕРФЕРЕНЦИИ И ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОНОВ В КРИСТАЛЛАХ

1. Принцип интерференции

Основным принципом, служащим в теории света для предсказаний результатов интерференции или дифракции, является положение, что интенсивностью, квадратом амплитуды, измеряется количество световой энергии в каждой точке пространства. Даже интерференционные опыты в оптике всегда давали один и тот же результат как бы ни была мала была интенсивность употребляемого света. Следовательно, если допустить существование частиц световой энергии, фотонов, необходимо предположить, что для каждого фотона вероятность присутствия в каждой точке пропорциональна интенсивности сопряженной световой волны. Это то, что мы называем принципом интерференции. Как мы говорили во введении, вполне естественно попытаться перенести этот принцип, пригодный для света, в волновую механику на случай материальных частиц, т. е. допустить, что всегда, даже когда законы геометрической оптики для распространения волны не имеют места, вероятность присутствия частицы в рассматриваемый момент времени и в рассматриваемой точке измеряется интенсивностью волны Ψ . Обозначим через $P(x, y, z, t) dv$ вероятность того, что частица в момент времени t находится внутри объема dv , центр которого имеет координаты x, y, z ; полагая всегда:

$$\Psi = a(x, y, z, t) e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi(x, y, z, t)} \quad (1)$$

мы должны иметь формулу:

$$P(x, y, z, t) = K a^2(x, y, z, t) = K \Psi(x, y, z, t) \cdot \bar{\Psi}(x, y, z, t). \quad (2)$$

Ψ означает комплексную величину сопряженную с Ψ . Выбирая надлежащим способом произвольную постоянную, являющуюся множителем содержащимся в a , всегда можно сделать $K=1$. Соотношение (2) выражает собой принцип интерференции.

Все опыты, произведенные с частицами в таких условиях, когда распространение сопряженных волн происходит согласно законам геометрической оптики, по существу оправдывают принцип интерференции, как это следует из результатов предыдущей главы. Для того, чтобы получить экспериментальное доказательство действительности этого принципа, необходимо, следовательно, обратиться к явлениям, в которых распространение не происходит более по законам геометрической оптики. Это как раз то, что имеет место в недавно произведенных опытах с дифракцией электронов в кристаллах; эти опыты могут рассматриваться как одновременное доказательство необходимости введения сопряженных волн и выполнения принципа интерференции для материальных частиц.

2. Дифракция электронов кристаллами

Дэвиссону и Джермеру первым принадлежит честь открытия, в начале 1927 г., дифракции электронов в кристаллах. В своих опытах они употребляли пучок электронов одинаковых скоростей, нормальный к той поверхности кристалла никеля, на которую падали электроны, причем эта поверхность была одной из поверхностей правильного октаэдра. Электроны, с которыми первоначально работали Дэвиссон и Джермер, были очень медленные — от 50 до 200 вольт; далее оба американских физика производили исследования с электронами в несколько сот вольт. Полученные результаты очень ясно показали, что имеет место концентрация электронов, рассеянных различными центрами кристалла. Это явление вполне подобно явлению Лауэ для рентгеновых лучей. Анализ численных значений ясно показывает, что для объяснения положения максимумов рассеяния, полученных по теории Лауэ-Брэгга, необходимо приписать длине волны, сопряженной с электронами скорости v , значение:

$$\lambda = \frac{h}{mv}, \quad (3)$$

предсказанное общей теорией главы III. Это и было решающим успехом для волновой механики.

Тем не менее, в результатах Дэвиссона и Джермера можно также усмотреть некоторые расхождения между предсказаниями теории Лауэ-Брэгга, полученными при помощи длины волны λ значением (3) и экспериментальными фактами. Расхождения эти, как будто, можно объяснить тем, что показатель преломления волн Ψ внутри кристалла существенно отличается от единицы.

Подобные же эксперименты были блестяще повторены Дж. П. Томсоном, который пользовался, как мы это объясним далее, методом аналогичным методу кристаллического порошка, употреблявшимся Дебаем и Шеррером для рентгеновых лучей. Падающие электроны обладали большими скоростями, соответствующими нескольким тысячам вольт; при этих условиях затруднения с коэффициентом преломления должны были исчезнуть. В самом деле, ранее мы нашли, что в поле с потенциальной функцией $F(x, y, z)$ коэффициент преломления сопряженных волн равен:

$$n(x, y, z) = \sqrt{\frac{2[E - F(x, y, z)]}{mc^2}}. \quad (4)$$

При отсутствии поля $F=0$ и коэффициент преломления имеет значение

$$n_0 = \sqrt{\frac{2E}{mc^2}}. \quad (5)$$

Относительный показатель преломления кристалла, по отношению к пустоте, для волны, сопряженной с электроном энергии E , в точке x, y, z должен быть равен:

$$\frac{n(x, y, z)}{n_0} = \sqrt{1 - \frac{F(x, y, z)}{E}}, \quad (6)$$

где $F(x, y, z)$ потенциальная энергия электрона относительно кристаллической ячейки в точке x, y, z . Так как $F(x, y, z)$ не зависит от $\frac{n}{n_0}$, то, очевидно, что при возрастании E до бесконечности $\frac{n}{n_0}$ стремится к нулю.

В опытах Дэвиссона-Джермера оказалось, что относительный коэффициент преломления $\frac{n}{n_0}$ может отличаться от единицы до $\frac{1}{10}$. Для томсоновских электронов, обладающих энергией в 50 и 100 раз большей, разностью между $\frac{n}{n_0}$ и единицей можно пренебречь, и в этом случае, как мы дальше увидим более подробно, результаты будут вполне совпадать с расчетами лауэ-брегговской теории и формулой (3).

Другие весьма замечательные опыты с дифракцией электронов были сделаны Руппом в Германии, который пропускал медленные электроны сквозь металлические пленки. И здесь блестяще оправдались теоретические расчеты, но с небольшим систематическим отклонением, которое также было приписано существованию показателя преломления,

Совсем недавно при помощи метода, так счастливо примененного Комптоном и Тибо для рентгеновых лучей, Рупп смог получить дифракцию пучка электронов, падающего на обычную дифракционную решетку под углом скольжения; при этом формула (3) оправдывается с большой точностью и длина волны, сопряженной с электроном, может быть непосредственно определена эталоном, начерченным человеческой рукой.

Наконец мы упомянем о прекрасных диаграммах, полученных Кикучи и об опытах Понта, к которым мы вернемся позднее.

Мы не можем здесь подробно рассматривать всю совокупность экспериментальных результатов. Мы должны ограничиться исключительно изучением опытов Томсона и Понта, в которых устранены все трудности, относящиеся к показателю преломления. Что касается других опытов, то мы отошлем читателя к оригинальным работам.

Для нас важно, что опыт дает нам прекрасное подтверждение существовавшей волн, сопряженных с электронами, и формулу, дающую длину волны в функции скорости, и что он далее показывает справедливость принципа интерференций, даже для материальных частиц.

3. Предварительные сведения, необходимые для анализа опытов Дж. П. Томсона

Метод Томсона заключается в том, что на очень тонкую металлическую пленку пускается строго однородный пучок электронов. По современным представлениям такая пленка образована из очень маленьких неправильно расположенных кристалликов. Для того, чтобы предвидеть, какие явления рассеяния сопряженных волн этими маленькими кристалликами должны иметь место, нам, прежде всего, нужно вспомнить некоторые кристаллографические обозначения.

По работам Браве можно считать, что все кристаллы образованы из материальных центров размещенных по определенным законам и образующих решетку. Ноибо ее простой тип решеток тот, при котором перенос вида $n_1\vec{a} + n_2\vec{b} + n_3\vec{c}$ дает возможность перейти от одного кристаллического центра к другому, где $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ три вектора, не лежащие в одной плоскости, и n_1 , n_2 , n_3 три любых целых числа. Центры или узлы образуют тогда вершины бесконечного числа параллелепипедов, приложенных друг к другу. Если мы рассмотрим два узла A и B простой решетки, то для того, чтобы перейти от одного центра к другому, нужен перенос вида $n(h\vec{a} + j\vec{b} + k\vec{c})$, где n — целое число; h , j , k три числа, не имеющие общего делителя; прямая AB составляется, таким образом, из бесконечно большого числа центров, получающихся друг из друга переносом $h\vec{a} + j\vec{b} + k\vec{c}$. Отсюда

следует, что вся плоскость, содержащая три узла расположенных не по прямой линии, включает в себе бесконечно большое число узлов, расположенных в вершинах параллелограммов, соединенных друг с другом: это будет „сетчатая плоскость“. Подвергая „сетчатую плоскость“ переносу $n_1\vec{a} + n_2\vec{b} + n_3\vec{c}$, получаем другую параллельную узловую плоскость. Параллельные узловые плоскости образуют семейство параллельных плоскостей.

Для того, чтобы отметить местоположение семейства узловых плоскостей, возьмем три координатные оси, проходящие через узел решетки и параллельные, соответственно, трем векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$; затем рассмотрим плоскость из семейства ближайшего к началу координат, пересекающую три оси в трех узлах, расположенных в положительной части осей. Эта плоскость пересекает ось x в узле с абсциссой $m_1 a$, ось y в узле с абсциссой $m_2 b$, ось z в узле с абсциссой $m_3 c$. „Индексами“ рассматриваемого семейства узловых плоскостей называют наименьшие целые числа h_1 , h_2 , h_3 , пропорциональные числам обратным m_1 , m_2 , m_3 .

Плоскость служащая для определения m_1 , m_2 , m_3 дается уравнением:

$$\frac{x}{m_1 a} + \frac{y}{m_2 b} + \frac{z}{m_3 c} = 1. \quad (1)$$

Обозначим через k наименьшее кратное m_1 , m_2 , m_3 ; мы имеем:

$$h_1 = \frac{k}{m_1}; \quad h_2 = \frac{k}{m_2}; \quad h_3 = \frac{k}{m_3}, \quad (8)$$

и уравнение (7) напишется так:

$$h_1 \frac{x}{a} + h_2 \frac{y}{b} + h_3 \frac{z}{c} = k. \quad (9)$$

Все узловые плоскости одного и того же семейства выражаются уравнением:

$$h_1 \frac{x}{a} + h_2 \frac{y}{b} + h_3 \frac{z}{c} = \text{const.} \quad (10)$$

Теперь легко видеть, что через всякий узел решетки проходит плоскость рассматриваемого семейства. Пусть, в самом деле, P — плоскость этого семейства, проходящая через узел A , и пусть B другой узел, не расположенный в P . От A к B мы переходим при помощи переноса $n_1\vec{a} + n_2\vec{b} + n_3\vec{c}$ и этот перенос преобразует P в параллельную плоскость P' , проходящую через B ; всякий узел, лежащий в P , преобразовался в узел лежащий в P' . Плоскость P' , содержащая бесконечно большое число узлов, является узловой плоскостью того же самого семейства, что и P , и она проходит через узел B , выбранный произвольно.

Вычислим расстояние между параллельными плоскостями P и P' , сохраняя употребляемые обозначения, но вводя некоторое ограничение: допустим, что вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ взаимно перпендикулярны; это единственный случай, в котором мы будем применять наши формулы; плоскость P задается уравнением:

$$h_1 \frac{x}{a} + h_2 \frac{y}{b} + h_3 \frac{z}{c} = 0, \quad (11)$$

где h_1 , h_2 , h_3 индексы того семейства плоскостей, куда входит P . Координаты B суть $n_1 a$, $n_2 b$, $n_3 c$. Так как наши координаты прямоугольны, то расстояние от точки B до плоскости P по известной формуле аналитической геометрии будет:

$$d = \frac{|h_1 n_1 + h_2 n_2 + h_3 n_3|}{\sqrt{\frac{h_1^2}{a^2} + \frac{h_2^2}{b^2} + \frac{h_3^2}{c^2}}}. \quad (12)$$

За B мы можем принять любой узел, т. е. мы можем взять для n_1 , n_2 , n_3 любые целые числа положительные или отрицательные. Следовательно, числитель (12) может иметь любое целое значение. Мы заключаем отсюда, что узловые плоскости семейства (h_1, h_2, h_3) суть равноотстоящие плоскости, отделенные друг от друга равными расстояниями:

$$d_{h_1 h_2 h_3} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{h_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{h_2}{b}\right)^2 + \left(\frac{h_3}{c}\right)^2}}. \quad (13)$$

В случае кубической решетки $a=b=c$ и

$$d_{h_1 h_2 h_3} = \frac{a}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}. \quad (14)$$

Простая кубическая решетка образуется из узлов, расположенных в вершинах бесконечно большого числа прилегающих друг к другу кубов. Она определяется тремя взаимно перпендикулярными векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ одной и той же длины a . Наиболее важными семействами узловых плоскостей являются:

- (100) плоскость куба,
- (111) плоскость октаэдра,
- (110) плоскость додекаэдра.

Соответствующие расстояния суть:

$$d_{100} = a,$$

$$d_{111} = \frac{a}{\sqrt{3}},$$

$$d_{110} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Но очень часто случается, что реально существующие кубические решетки имеют более сложную структуру. Может случиться, например, что в каждом элементарном кубе, в каждой ячейке решетки, узлы сидят не только в их вершинах, но также и в центре ячейки. При этом мы имеем решетку центрированного куба. Все происходит так, как если бы мы имели дело с двумя простыми кубическими решетками, сдвинутыми друг относительно друга на $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. Для того чтобы перейти от одного узла к другому, необходим перенос, наиболее общий вид которого будет:

$$\left(n_1 + \frac{\varepsilon_1}{2}\right)\vec{a} + \left(n_2 + \frac{\varepsilon_2}{2}\right)\vec{b} + \left(n_3 + \frac{\varepsilon_3}{2}\right)\vec{c},$$

где n_1, n_2, n_3 целые числа и $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ равны 0 или 1.

Возвращаясь к рассуждениям, сделанным выше, легко найдем, что расстояние между плоскостями семейства (h_1, h_2, h_3) будет равно:

$$d_{h_1 h_2 h_3} = \frac{a}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}, \quad \text{если } h_1 + h_2 + h_3 \text{ четно};$$

$$d_{h_1 h_2 h_3} = \frac{1}{2} \frac{a}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}, \quad \text{если } h_1 + h_2 + h_3 \text{ нечетно.} \quad (15)$$

Наконец, можно иметь дело с такой кубической решеткой, где узел сидит в середине каждой из шести сторон элементарного куба (это и есть случай являющийся местом в опыте Томсона); это кубическая решетка с центрированными гранями.

Наиболее общий вид переноса, необходимого для перехода от одного узла к другому, будет:

$$\left(n_1 + \frac{\varepsilon_1}{2}\right)\vec{a} + \left(n_2 + \frac{\varepsilon_2}{2}\right)\vec{b} + \left(n_3 + \frac{\varepsilon_3}{2}\right)\vec{c},$$

где n_1, n_2, n_3 целые числа, ε_i или все равны нулю или два равны 1, а третье 0.

Расстояние от узла B до узловой плоскости $P(h_1, h_2, h_3)$, проходящей через узел A , равно:

$$d = \frac{\left(n_1 + \frac{\varepsilon_1}{2}\right)h_1 + \left(n_2 + \frac{\varepsilon_2}{2}\right)h_2 + \left(n_3 + \frac{\varepsilon_3}{2}\right)h_3}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}. \quad (16)$$

Если h_1, h_2, h_3 имеют одну четность, то

$$d_{h_1 h_2 h_3} = \frac{a}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}. \quad (17)$$

Если из трех индексов некоторые четны, некоторые нечетны, то

$$d_{h_1 h_2 h_3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}} = \frac{a}{\sqrt{(2h_1)^2 + (2h_2)^2 + (2h_3)^2}}. \quad (18)$$

Можно сказать, что формула (17) приложима и к этому случаю при условии удвоения индексов.

4. Опыты Томсона

Возвратимся к опытам Томсона. Допустим, что при прохождении тонкой металлической пленки, однородный пучок катодных лучей встречает в одном из маленьких кристалликов, образующих эту пленку, плоскость с индексами h_1 , h_2 , h_3 под углом скольжения θ , дополнительным к углу падения, обычно рассматриваемому в оптике. Волна, сопряженная с падающими электронами, будет претерпевать сильное рассеяние в направлении правильного отражения, если имеется совпадение фаз элементарных волн, рассеянных узлами различных узловых плоскостей с индексами h_1 , h_2 , h_3 .

Прежде всего, волны рассеянные двумя центрами A и B , расположенными в одной и той же узловой плоскости, всегда совпадают по фазе, в направлении правильного отражения; это следует из того, что оптические пути AB и AB' оба равны одной и той же величине $AB \cos \theta$ (рис. 3). Далее, если волны рассеянные двумя центрами A и C , расположенными так, как показано на рисунке, будут совпадать по фазе, то все волны рассеянные узлами кристалла будут совпадать по фазе, и в направлении правильного отражения мы будем иметь большой максимум интенсивности. Условие этого заключается в том, чтобы оптические пути лучей, рассеянных в A , и лучей, рассеянных в C , различались на целое кратное длины волны; это дает

$$\overline{BC} + \overline{CD'} = n\lambda, \quad (n \text{ целое число})$$

т. е.

$$2d_{h_1 h_2 h_3} \sin \theta = n\lambda. \quad (19)$$

Это соотношение Брэгга, хорошо известное для рентгеновых лучей. При доказательстве его допускается, что разностью между показателем преломления в кристалле и в пустоте можно пренебречь. Мы видели, что это справедливо для опыта Томсона.

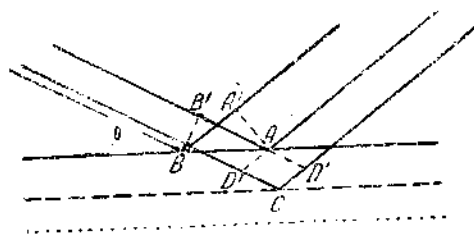


Рис. 3.

Пусть L расстояние от металлической пленки до фотографической пластинки, на которую собираются электроны; можно ожидать, что для каждого отражения от маленького кристалла получится пятно на расстоянии $\frac{D}{2}$ от следа падающего катодного пучка, где

$$\frac{D}{2} = L \operatorname{tg} 2\theta,$$

если принцип интерференций справедлив для электронов, т. е. если вероятность присутствия электронов измеряется в каждой точке квадратом амплитуды волны.

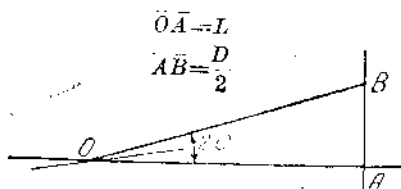


Рис. 4.

Главную роль в этом явлении играет длина волны λ , волны сопряженной с падающими электронами. Из общих формул мы должны иметь:

$$\lambda = \frac{h}{|p|} = \frac{h \sqrt{1 - \beta^2}}{mv}. \quad (20)$$

Скорость электронов определяется, вообще говоря, разностью потенциалов P , необходимой для того, чтобы заставить их двигаться. Мы имеем:

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - mc^2 = eP, \quad (21)$$

откуда:

$$\frac{1}{1 - \beta^2} - 1 = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} = \frac{2eP}{mc^2} + \frac{e^2 P^2}{m^2 c^4} \quad (22)$$

и

$$\frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta c} = \frac{1}{\sqrt{2 \frac{eP}{m} + \frac{e^2 P^2}{m^2 c^2}}}. \quad (23)$$

Откуда, наконец

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meP \left(1 + \frac{eP}{2mc^2} \right)}}. \quad (24)$$

Член $\frac{eP}{mc^2}$ всегда мал, и можно написать

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meP}} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{eP}{mc^2} \right), \quad (25)$$

если выразить P в вольтах, то (25) нужно заменить через

$$\lambda = h \sqrt{\frac{150}{mcP}} \left(1 - \frac{eP}{1200 mc^2} \right). \quad (26)$$

В опытах Томсона поправочный член никогда не превосходил 3%. Поэтому всегда можно положить с достаточным приближением:

$$\lambda = h \sqrt{\frac{150}{mcP}}. \quad (27)$$

Эту формулу можно получать непосредственно, исходя из нерелятивистских обозначений:

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} mv^2 = eP.$$

Применяя предыдущие соотношения, получаем для длины волны электронов с 25 000 вольт величину $0,73 \cdot 10^{-8}$ см, которая соответствует очень жестким рентгеновым лучам. Так как у обычных кристаллических решеток постоянная решетка порядка 10^{-8} см, то углы должны быть очень малы, достаточно малы для того, чтобы можно было заменить $\sin \theta$ на θ и $\lg 2\theta$ на 2θ . Отсюда достаточно точно получаем:

$$2d\theta = n\lambda \quad \text{и} \quad \frac{D}{2} \approx L \cdot 2\theta,$$

откуда

$$D = \frac{2n\lambda L}{d_n \sin \theta_n}. \quad (28)$$

Если микрокристаллики металлической пленки ориентированы совершенно беспорядочно, то на фотографической пластинке мы получаем не пятно, но бесконечно большое число пятен, образующих непрерывное кольцо вокруг следа падающего пучка, с диаметром равным D .

Если металлическая пленка состоит из кристалликов с некоторой степенью ориентации, то будут иметь место более сложные явления: некоторые кольца исчезнут, некоторые станут прерывистыми. Все это было прекрасно наблюдало. Нужно отметить, что металлические пленки должны быть очень тонкими для того, чтобы пучок электронов не слишком поглощался и не претерпевал бы нескольких последовательных отражений.

Первые, действительно убедительные опыты Томсона, были сделаны с алюминием и золотом. Нужно было доказать, что для данного кольца, происшедшего от данного семейства узловых плоскостей, отношение $\frac{D}{\lambda}$ постоянно. Другими словами,

что при последовательном увеличении напряжения P , система колец сужается, и если наблюдать все время сужение одного из колец, то должно оправдываться соотношение:

$$\frac{D}{\lambda} = \text{const}$$

или

$$L\sqrt{P}\left(1 + \frac{1}{1200} \frac{eP}{mc^2}\right) = \text{const.} \quad (29)$$

Вот таблицы приводимые Томсоном:

P (вольты)	D (см)	$D\sqrt{P}\left(1 + \frac{1}{1200} \frac{eP}{mc^2}\right)$
--------------	----------	--

А л ю м и н и й

61 000	1,47	384
57 600	1,62	398
45 000	1,78	388
34 500	2,00	378

З о л о т о

58 000	1,50	371
55 000	1,58	381
44 000	1,75	376
33 700	2,00	374

П л а т и н а

45 000	1,85	402
40 000	1,96	400
34 500	2,23	421
25 500	2,46	398

А л ю м и н и й (с другим значением L)

34 500	1,64	310
27 500	1,84	310
26 200	1,86	305
21 800	2,09	312

П л а т и н а (с другим значением L)

29 000	1,84	319
24 000	1,98	311

Следовательно, изменение длины волны с потенциалом P , т. е. со скоростью электронов, вполне доказано.

Для данного потенциала диаметры D и D' , соответствующие отражениям от узловых плоскостей с индексами (h_1, h_2, h_3) (h_1', h_2', h_3') , относятся как:

$$\frac{D'}{D} = \frac{d_{h_1 h_2 h_3}}{d_{h_1' h_2' h_3'}} \quad (30)$$

так как употребляемые металлы кристаллизуются в системе куба с центрированными гранями, то:

$$d_{h_1 h_2 h_3} = \frac{a}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}, \quad (31)$$

где a — ребро куба и индексы должны быть удвоены, если они будут все три одной и той же четности. Следовательно, при том условии:

$$\frac{D'}{D} = \frac{\sqrt{h_1'^2 + h_2'^2 + h_3'^2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}} \quad (32)$$

нескольких сериях опытов с алюминием Томсон получил такие отношения для квадратов диаметров кольца:

$$\begin{array}{cccccc} \sqrt{4} & \sqrt{8,00} & \sqrt{10,9} & \sqrt{16,5} & \sqrt{27} \\ \sqrt{4} & \sqrt{7,65} & \sqrt{10,6} & \sqrt{14,8} & \\ \sqrt{4} & \sqrt{8,05} & \sqrt{11,05} & \sqrt{15,8} & \sqrt{28} \\ \sqrt{4} & \sqrt{7,93} & \sqrt{11,4} & \sqrt{16} & \\ \sqrt{4} & \sqrt{7,95} & \sqrt{10,8} & \sqrt{15,8} & \sqrt{26,6} \\ \sqrt{4} & \sqrt{8,00} & \sqrt{10,9} & \sqrt{15,4} & \sqrt{27,4} \end{array}$$

Эти ряды сильно приближающиеся к ряду, соответствующему узловым плоскостям:

$$\sqrt{4} \quad \sqrt{8} \quad \sqrt{11} \quad \sqrt{16} \quad \sqrt{27}.$$

Соответственно узловым плоскостям

$$200 \quad 220 \quad 311 \quad 400 \quad 511.$$

Также для платины Томсон получил ряды:

$$\begin{array}{cccccccc} \sqrt{3} & \sqrt{4,00} & \sqrt{7,95} & \sqrt{11,1} & \sqrt{16,2} & \sqrt{18,8} & \sqrt{23,2} & \sqrt{26,8} \\ \sqrt{3} & \sqrt{4,05} & \sqrt{8,05} & \sqrt{11,4} & \sqrt{15,2} & \sqrt{18,4} & \sqrt{22,5} & \sqrt{26,3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{3,98} & \sqrt{7,95} & \sqrt{10,8} & \sqrt{15,2} & \sqrt{18,3} & \sqrt{23,8} & \sqrt{23,4} \end{array}$$

аналогичные ряду:

$$\sqrt{3} \quad \sqrt{4} \quad \sqrt{8} \quad \sqrt{11} \quad \sqrt{16} \quad \sqrt{19} \quad \sqrt{24} \quad \sqrt{27}$$

соответствующему плоскостям с индексами

111 200 220 311 400 331 422 333.

Для золота имеют место два ряда:

$$\sqrt{3} \quad \sqrt{12} \quad \sqrt{7,9} \quad \sqrt{11,5} \quad \sqrt{19,9}$$

$$\sqrt{3} \quad \sqrt{4,08} \quad \sqrt{8} \quad \sqrt{11,1} \quad \sqrt{19,9}$$

очень похожие на ряд:

$$\sqrt{3} \quad \sqrt{4} \quad \sqrt{8} \quad \sqrt{11} \quad \sqrt{20}$$

соответствующий плоскостям с индексами

111 200 220 311 420.

Определив таким образом индексы отражающих граней, можно вычислить ребро куба и сравнить его с величиной полученной из опытов с рентгеновыми лучами.

Томсон нашел также данные:

	Al	Au	Pt
при помощи катодных лучей	$a = 4,035 \text{ \AA}$	$a = 4,20 \text{ \AA}$	$a = 3,89 \text{ \AA}$
при помощи рентгеновых лучей . .	$a = 4,033 \text{ \AA}$	$a = 4,06 \text{ \AA}$	$a = 3,51 \text{ \AA}$

Томсон доказал также, очень интересным способом, что на пластинку действовали именно электроны, рассеянные пленкой, а не вторичные рентгеновы лучи. Для этого он установил между пленкой и фотографической пластинкой магнитное поле и заметил, что под действием поля все кольца перемещаются. Таким же образом он смог доказать, что скорость рассеянных электронов была равна скорости падающих.

Первые опыты Томсона были сделаны с целлулоидом и дали чистые, но скорее качественные результаты. Один из его учеников, Рейд, повторил эти опыты и получил что в целлулоиде существуют две постоянные решетки, равные $3,67 \text{ \AA}$ и $4,35 \text{ \AA}$, тогда как постоянные решетки, измеренные Мюллером, для жирных кислот — $3,67$ и $4,08 \text{ \AA}$. Наконец, другой сотрудник Томсона — М. Айронсайд также получил подтверждение теории для пленок меди, серебра и свинца, которые также кристаллизуются в кубах с центрированными гранями. Вот, например, сравнение значений стороны элементарного куба, которые он получил для этих трех металлов, со значениями полученными при помощи рентгеновых лучей.

	Серебро	Медь	Свинец
при помощи катодных лучей	$4,11 \text{ \AA}$	$3,66 \text{ \AA}$	$2,88 \text{ \AA}$
при помощи рентгеновых лучей . .	$4,08 \text{ \AA}$	$3,60 \text{ \AA}$	$2,91 \text{ \AA}$

5. Опыты Понта (1929 г.)

Понт получил прекрасные дифракционные кольца с электродами, рассеянными окисью цинка. Вот как производился опыт. Узкий катодный пучок, испускаемый горячим катодом, падал на тонкую металлическую плиту, покрытую тонким слоем окиси цинка, или на край диффрагмы, на которую была нанесена окись; иногда пучок проходил также сквозь окись цинка, образованную вне всякой подкладки. Опыты производились при напряжениях от 7,6; 11,17; 13,92; и 17,25 киловольт. Решетка окиси цинка принадлежит к гексагональной системе: расчет дифракционных колец по теории Лауэ сложнее чем для кубических кристаллов, изученных Томсоном, но он легко может быть произведен, если для длины волны сопряженной волны принять формулу (3). Понт смог доказать таким образом, что для электронов, прошедших падения потенциала от 7,6 до 17,25 киловольт, что соответствует длинам волн примерно от $0,14 \text{ \AA}$ до $0,009 \text{ \AA}$; формула (3) справедлива с точностью до одного процента.

В конце этой книги помещены некоторые из прекрасных фотографий Понта, которые он очень любезно предоставил в мое распоряжение. Я пользуюсь случаем выразить ему сердечную благодарность.

ГЛАВА VIII

ПРИНЦИП ИНТЕРФЕРЕНЦИИ И РАССЕЯНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ НЕПОДВИЖНЫМ ЦЕНТРОМ

I. Рассеяние заряженных частиц по классической механике

Мы дадим другой пример значения принципа интерференций для материальных частиц; мы покажем, что, прилагая принцип интерференций к заряженным частицам (электроны или α -лучи), можно найти экспериментально проверенный закон Резерфорда для рассеяния, претерпеваемого этими частицами при прохождении их сквозь материю. Мы начнем с изложения классического метода, которым Резерфорд вывел свой закон, затем покажем, что, пользуясь представлениями юнговской механики и принципом интерференций, можно, при помощи подсчета Венцеля, прийти к тем же результатам.

Итак займемся классическим выводом. Пусть e и m заряд и масса падающих частиц, e_1 заряд закрепленного рассеивающего центра, вблизи которого должны пройти падающие частицы при прохождении их сквозь материю. В согласии с экспериментальными условиями мы допускаем, что в начале их движения все заряженные частицы обладают в некотором направлении одной и той же скоростью $\vec{v}$. Мы примем положение

неподвижного центра за начало полярной оси ox , параллельной направлению начального движения.

Выйдя из области действия закрепленного центра, каждая частица будет двигаться снова прямолинейно и равномерно со скоростью v , но в направлении, образующем угол α с направлением начального движения. Закон сохранения момента количества движения относительно точки O дает нам:

$$m v b = - m r^2 \frac{d\theta}{dt}, \quad (1)$$

где r и θ — полярные координаты частицы в момент времени t , b ее начальное расстояние от полярной оси.

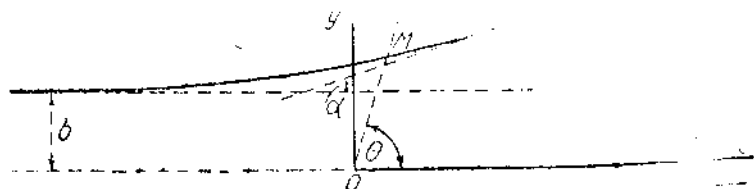


Рис. 5.

С другой стороны, принимая во внимание закон Кулона, имеем уравнение движения по оси Oy перпендикулярной в точке O полярной оси:

$$m \frac{dv_y}{dt} = \frac{ee_1}{r^2} \sin \theta = - \frac{ee_1}{vb} \sin \theta \frac{db}{dt}. \quad (2)$$

Интегрируя получаем:

$$m v \sin \alpha = \frac{ee_1}{vb} (1 + \cos \alpha), \quad (3)$$

так как во время взаимодействия θ изменяется от π до α и v_y от 0 до $v \sin \alpha$.

Из (3) получаем:

$$b = \frac{ee_1}{m v^2 \sin \alpha} (1 + \cos \alpha) = \frac{ee_1}{m v^2} \cotg \frac{\alpha}{2}, \quad (4)$$

потому что

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \text{ и } \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Вероятность того, чтобы величина расстояния от начальной траектории до Ox заключалась между b и $b + db$ очевидно равна $2\pi b db$; кроме того, она равна $P(\alpha, d\alpha)$ вероятности того, что конечный угол скорости с осью Ox заключен в интервале $\alpha - \alpha + d\alpha$, который по формуле (4) соответствует интервалу $b - b +$

db . Принимая во внимание то, что α и b изменяются взаимно противоположно, получаем:

$$P(x)dx = -\text{const } 2\pi b db = -\text{const } \frac{d(b^2)}{d\alpha} d\alpha \quad (5)$$

$$= -\text{const } \frac{e^2 e_1^2}{m^2 v^4} \frac{d}{d\alpha} \left[\cotg^2 \frac{\alpha}{2} \right] d\alpha.$$

Число частиц, претерпевающих отклонение заключающееся между α_1 и α_2 , пропорционально $\cotg^2 \frac{\alpha_1}{2} - \cotg^2 \frac{\alpha_2}{2}$. Это и есть закон Резерфорда, прекрасно оправдавшийся на опыте. Однако, здесь имеется некоторая трудность: если интегрировать выражение (5) для $P(\alpha, d\alpha$ от 0 до α , то оказывается, что число частиц, претерпевающих отклонение меньше чем α_0 , должно быть бесконечным. Может показаться, что это обстоятельство говорит против результатов подсчета. Но это ничего не значит: мы в самом деле подразумевали, что падающий пучок частиц неограничен с боковых сторон, а тогда, действительно, имелось бы бесконечно большое число частиц, проходящих достаточно далеко от центра, чтобы не претерпевать какое-либо заметное отклонение. Но практически пучки частиц всегда ограничены с боковых сторон, так что подсчет несправедлив для больших значений b , т. е. для малых α или точнее для малых значений α интеграл $\int P(\alpha) d\alpha$ расходится.

2. Подсчет по волновой механике

Перейдем теперь на точку зрения волновой механики. Мы должны связать с падающими частицами волну:

$$\Psi_0(x, t) = a_0 e^{\frac{2\pi i}{h} [Wt - mvx]}, \quad (6)$$

где a_0 константа, и W имеет величину:

$$W = mc^2 + \frac{1}{2} mv^2 = mc^2 + E. \quad (7)$$

Причем второй член нужно считать очень малым по сравнению с первым, если мы, как в предыдущем параграфе, ограничимся ньютоновскими приближениями. Длина волны равна:

$$\lambda = \frac{h}{mv}. \quad (8)$$

В обычных экспериментальных условиях она всегда очень мала, а именно — порядка длины волны рентгеновых лучей.

Вблизи рассеивающего центра O существует силовое поле и потенциальная функция $F(r)$; следовательно уравнение Гамильтона имеет вид:

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2m}{h^2} (E - F)\psi = 0. \quad (9)$$

При прохождении волной ψ этой области все происходит так, как если бы световая волна проходила в преломляющей, неоднородной среде. На падающую волну ψ_0 налагается рассеянная волна ψ_1 . Мы допускаем, что рассеяние не ослабляет заметно падающей волны. Отсюда имеем:

$$\psi = \psi_0 + \psi_1, \quad \psi_1 \ll \psi_0. \quad (10)$$

Так как ψ_0 удовлетворяет уравнению:

$$\Delta\psi_0 + \frac{8\pi^2m}{h^2} E\psi_0 = 0, \quad (11)$$

то рассеянная волна ψ_1 удовлетворяет уравнению:

$$\Delta\psi_1 + \frac{8\pi^2m}{h^2} E\psi_1 = -\frac{8\pi^2m}{h^2} F\psi_0 \quad (12)$$

как это следует из (9) и (10). Частота же $\frac{W}{h}$ и для падающей, и для рассеянной волны равна $\frac{mc^2}{h}$, откуда:

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2} = -4\pi^2 \frac{m^2c^2}{h^2} \psi_1; \quad \frac{8\pi^2m}{h^2} \psi_1 = -\frac{2}{mc^2} \frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2} \quad (13)$$

и, подставляя (13) в (12), имеем:

$$\Delta\psi_1 - \frac{2E}{mc^4} \frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2} = \frac{8\pi^2m}{h^2} F\psi_0, \quad (14)$$

так как $2E = mc^2$, то:

$$\Delta\psi_1 - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2} = \frac{8\pi^2m}{h} F\psi_0, \quad (15)$$

где всегда

$$V = \frac{c^2}{v}. \quad (16)$$

$\psi_0(x, t)$ и $F(r)$ заданы, и уравнение (15) принимает вид:

$$\Delta\psi_1 - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2} = \sigma(x, y, z, t), \quad (17)$$

где

$$\sigma(x, y, z, t) = \frac{8\pi^2 m}{h^2} F(r) \Psi_0(x, t). \quad (18)$$

Решение уравнения (17) дается хорошо известной формулой Кирхгофа (формула для запаздывающего потенциала):

$$\Psi_1(P, t) = -\frac{1}{4\pi} \iiint \left[\frac{\sigma(x, y, z, t)}{r} \right]_{t-\frac{r}{V}} d\tau, \quad (19)$$

где $d\tau$ — элемент интегрируемого объема вокруг точки M и r — расстояние MP . Значок $t - \frac{r}{V}$ означает, что величину σ нужно рассматривать не в момент времени t , но в момент $t - \frac{r}{V}$.

Здесь мы должны положить:

$$[F\Psi_0]_{t-\frac{r}{V}} = F(r) a_0 e^{2\pi i \left[\frac{\omega}{h} t - \frac{x}{\lambda} r \right]}. \quad (20)$$

Следовательно, по (18) и (19)

$$\Psi_1(P, t) = -\frac{2\pi m}{h^2} a_0 e^{\frac{2\pi i}{h} \omega t} \iiint \frac{F}{r} e^{-\frac{2\pi i}{\lambda} (x:r)} d\tau. \quad (21)$$

Здесь появляется некоторое затруднение; было бы совершенно естественно положить:

$$F(r) = \frac{ee_1}{r} \quad (22)$$

потому, что рассеивающий центр действует на падающую частицу по закону Кулона. Но если принять (22), то тройной интеграл будет расходящимся, как это будет вытекать из вычислений. Для того, чтобы избежать этой трудности, Венцель положил:

$$F(r) = \frac{ee_1}{r} e^{-kr}, \quad (23)$$

где k таково, что $k\lambda \ll 1$. В области вблизи центра O и обладающей большими размерами по отношению к длине волны λ выражение (23) вполне совпадает с законом Кулона. Но в областях, более удаленных от O , множитель при показательной функции начинает играть роль, и быстрое убывание F с r препятствует тому, чтобы рассеяние было бесконечным.

По нашему мнению искусственный прием Венцеля можно интерпретировать следующим образом. Представляя себе па-

дающую волну как монохроматическую, мы считаем тем самым падающий пучок неограниченным с боковых сторон, а это не может соответствовать действительности; падающий пучок непременно будет ограничен с боковых сторон, и его можно представлять себе потоком волн с конечными размерами. Если, для упрощения подчетов, желательно сохранить представление о падающем пучке, как о монохроматической плоской волне, то это представление необходимо исправить как неточное, вводя показательный множитель Венцеля для того, чтобы отбросить влияние удаленных частей монохроматической волны, которых и в самом деле не существует.

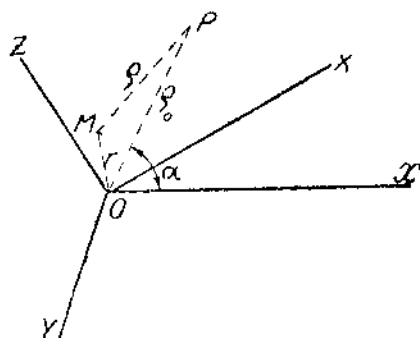


Рис. 6.

Примем гипотезу Венцеля и вычислим волну ψ_1 , рассеянную в точке I , — очень удаленной от O (рис. 6).

Вследствие наличия множителя e^{-kr} , тройное интегрирование, имеющее место в формуле 21, затрагивает только область в непосредственной близости к O , поэтому в медленно изменяющемся множи-

теле $\frac{1}{r}$, r можно заменить через $\overline{OP} = r_0$, а в показательном множителе положить:

$$r = r_0 - r \cos \widehat{MOP}. \quad (24)$$

Тогда формула (21) принимает вид:

$$\Psi_1(P, t) = -\frac{2\pi m}{h^2} e e_1 \quad (25)$$

$$\frac{e_0}{r_0} e^{2\pi i \left[\frac{W}{h} t - \frac{r_0}{\lambda} \right]} \iiint e^{-kr} \frac{2\pi i}{h} (r \cos \widehat{MOP} - x) \frac{d\tau}{r}.$$

Введем систему прямоугольных координат, определенную так, что плоскость XOZ совпадает с плоскостью xoP , ось OX будет внутренней биссектрисой угла $xoP = \alpha$, а ось OZ будет внешней биссектрисой. Наконец OY перпендикулярен к плоскости xoP в точке O . Для того, чтобы отметить положение точки интегрирования M , мы используем полярные координаты r, θ, φ с полярной осью OZ . В системе $OXYZ$ мы будем иметь следующую таблицу направляющих косинусов прямых Ox, OM, Of :

	OX	OY	OZ
ox	$\cos \frac{\alpha}{2}$	0	$-\sin \frac{\alpha}{2}$
OM	$\sin \theta \cos \varphi$	$\sin \theta \sin \varphi$	$\cos \theta$
OP	$\cos \frac{\alpha}{2}$	0	$+\sin \frac{\alpha}{2}$

Отсюда заключаем:

$$\begin{aligned}\cos \widehat{MOP} &= \sin \theta \cos \varphi \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \theta \sin \frac{\alpha}{2} \\ x &= r \cos \widehat{Mox} = r \left(\sin \theta \cos \varphi \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \theta \sin \frac{\alpha}{2} \right) \\ r \cos \widehat{MOP} - x &= 2r \cos \theta \sin \frac{\alpha}{2}.\end{aligned}\quad (26)$$

Тогда тройной интеграл (25) принимает вид:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{+\infty} e^{-kr - \frac{4\pi i}{\lambda} r \cos \theta \sin \frac{\alpha}{2}} r dr. \quad (27)$$

Интегрирование по φ даст 2π . Интегрируя по частям, замечаем, что действительная часть показательного множителя отрицательна, и получаем для интеграла по r :

$$\frac{1}{\left(-k + \frac{4\pi i}{\lambda} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \theta\right)^2} \quad (28)$$

в силу малого значения величины k :

$$-\frac{1}{\frac{16\pi^2}{\lambda^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \theta}. \quad (29)$$

Но

$$\int_0^{\pi} -\frac{\sin \theta d\theta}{\cos^2 \theta} = \left[-\frac{1}{\cos \theta} \right]_0^{\pi} = 2. \quad (30)$$

Откуда, наконец, величина интеграла (27) будет:

$$\frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad (31)$$

Подставляя (31) в (25) находим:

$$\Psi_1(P, t) = -\frac{\lambda^2 m e e_1}{2 \hbar^2} \cdot \frac{a_0}{\rho_0} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} e^{2\pi i \left(\frac{W}{\hbar} t - \frac{\alpha}{2} \right)}. \quad (32)$$

Так как:

$$\frac{m \hbar^2}{h^2} = \frac{1}{m v^2},$$

то квадрат амплитуды, рассеянной в P , имеет значение:

$$\alpha_1^2(P) = \frac{e^2 e_1^2}{4 m^2 v^4} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{a_0^3}{\rho_0^2}. \quad (33)$$

Рассмотрим сферу с центром в O и с радиусом ρ_0 . Число рассеянных частиц, проходящих за единицу времени сферическую зону, соответствующую угловому интервалу $\alpha - \alpha + d\alpha$, должно быть равно:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \frac{e^2 e_1^2}{m^2 v^4} \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \frac{a_0^3}{\rho_0^2} \cdot v \cdot 2 \pi \rho_0^2 \sin \alpha d\alpha = \\ & = \frac{\pi}{2} \frac{e^2 e_1^2}{m^2 v^4} \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} v a_0^3 \sin \alpha d\alpha, \end{aligned} \quad (34)$$

так как a_0^3 измеряет плотность облака рассеянных частиц.

С другой стороны, число частиц, проходящих за единицу времени плоскость $x = \text{const}$, расположенную очень далеко влево от центра O , очевидно, пропорционально $a_0^2 v$. Вероятность отклонения на угол между α и $\alpha + d\alpha$ будет, следовательно:

$$\begin{aligned} P(\alpha) d\alpha &= \text{const} \frac{e^2 e_1^2}{m^2 v^4} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} d\alpha \\ &= -\text{const} \frac{e^2 e_1^2}{m^2 v^4} \frac{d}{d\alpha} \left(\cotg^2 \frac{\alpha}{2} \right) d\alpha. \end{aligned} \quad (35)$$

Мы снова получаем формулу (5) Резерфорда. Так как она оправдана опытом, то мы видим, что и здесь также принцип интерференции, примененный к материальным частицам, находится в согласии с фактами.

В нашем подсчете сделаны некоторые приближения, но Гордон показал, что формулу Резерфорда можно получить и строго, не производя подсчетов рассеянных волн.

ДВИЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ ПРИСУТСТВИЯ ПО ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКЕ

1. Облако вероятности

В главе VI мы видели, что в предельном случае, где для распространения сопряженной волны были справедливы предположения геометрической оптики, т. е. в предельном случае старой механики, можно представить себе поток вероятности перемещающийся в пространстве таким образом, что плотностью этого потока измеряется в каждой точке и в каждый момент времени вероятность присутствия частицы. Мы увидим, что этот результат справедлив во всей полноте и в новой механике, если мы допустим принцип интерференции, подтвержденный опытами над дифракцией электронов в кристаллах.

В наших доказательствах далее будем придерживаться нерелятивистских уравнений. Мы исходим, следовательно, из уравнения распространения:

$$\Delta \Psi - \frac{8\pi^2 m}{h^2} F\Psi = \frac{4\pi i m}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (1)$$

и подставляем в это уравнение функцию

$$\Psi(x, y, z, t) = a(x, y, z, t) e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi(x, y, z, t)}, \quad (2)$$

где a и φ вещественные функции.

Мы получаем тогда, как мы уже видели, два уравнения, которые могут быть написаны так:

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + F(x, y, z, t) - \frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{\Delta a}{a} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial a}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial t} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} a \Delta \varphi = m \frac{\partial a}{\partial t}. \quad (4)$$

Обратно тому, что имеет место в приближении геометрической оптики, здесь возможно только одновременное определение функций a и φ . Так как все эти уравнения первого порядка относительно времени, то функция $\Psi(x, y, z, t)$ будет вполне определена, если известен ее вид $\Psi(x, y, z, 0)$ в начальный момент времени. Допустим, следовательно, что мы определили таким образом функцию $\Psi(x, y, z, t)$ и, следовательно, функции a и φ ; вообразим „поток вероятности“, молекулы которого или, если угодно, „элементы“ обладают массой m изучаемой частицы. Как и в главе VI уравнение (4) показывает нам, что если мы

принишем элементам вероятности скорость, определенную в каждой точке и в каждый момент соотношением:

$$\vec{v} = - \frac{1}{m} \text{grad } \varphi, \quad (5)$$

то плотность ρ облака вероятности останется всегда пропорциональной $a^2(x, y, z, t)$, если она была равна $a^2(x, y, z, 0)$ в начальный момент. В самом деле, если принять (5), то уравнение (4) можно переписать так:

$$\frac{\partial (a^2)}{\partial t} + \text{div} (a^2 \vec{v}) = 0 \quad (6)$$

и оно будет уравнением гидродинамической непрерывности, если положить $\rho = K a^2$. Константа K определится из условия, что $\int K a^2 dv$, распространенный на все облако вероятности, будет равен 1; так как a определяется с точностью до постоянного множителя, то константу K можно ввести в a^2 и сказать, что плотность облака вероятности равна квадрату амплитуды волны ψ .

Возвратимся к уравнению (3). Мы можем рассматривать его как уравнение Якоби для движения элементов вероятности, причем потенциальная энергия этих элементов будет

$$F(x, y, z, t) + F_1(x, y, z, t),$$

если положить:

$$F_1(x, y, z, t) = - \frac{\hbar^2}{8 \pi^2 m} \frac{\Delta a}{a}. \quad (7)$$

Мы видим, что эта потенциальная энергия зависит от плотности облака вероятности, так как она зависит от a . Можно также сказать, что для получения движения элементов вероятности, нужно к обычному потенциалу $F(x, y, z, t)$ прибавить добавочный потенциал заданный (7), который можно назвать „квантовым потенциалом“ для того, чтобы лучше отметить, что он зависит от $\hbar$ и что им можно пренебречь, если $\hbar$ бесконечно мало.

2. Уравнение движения элементов вероятности

Если мы отождествляем уравнение (3) с уравнением Якоби для элементов вероятности, то для изучения их движения мы, естественно, введем функцию Лагранжа, зависящую от их координат, скорости и времени; это функция:

$$L(x, y, z, t, v_x, v_y, v_z) = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \quad (8)$$

$$- F(x, y, z, t) - F_1(x, y, z, t).$$

Величины:

$$\frac{\partial L}{\partial v_x} = mv_x; \quad \frac{\partial L}{\partial v_y} = mv_y; \quad \frac{\partial L}{\partial v_z} = mv_z \quad (9)$$

могут быть названы „моментами“ или „составляющими количества движения“ элементов вероятности.

Величину:

$$W = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i = L = \frac{1}{2} mv^2 + F' + F_1 \quad (10)$$

можно сравнить с энергией элемента вероятности. По (5) мы будем иметь:

$$F_x = mv_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad p_y = mv_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad p_z = mv_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (11)$$

Элементы вероятности описывают в пространстве траекторию согласно определенному закону, и их движение подчиняется уравнению типа Лагранжа. В самом деле, мы имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} &= \frac{\partial p_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial p_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial p_x}{\partial z} v_z + \frac{\partial p_x}{\partial t} \\ &= \frac{1}{m} \left(p_x \frac{\partial p_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial p_x}{\partial y} + p_z \frac{\partial p_x}{\partial z} \right) + \frac{\partial p_x}{\partial t} \end{aligned} \quad (12)$$

или в силу (11)

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} &= \frac{1}{m} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \right] - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{1}{2m} \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Так как φ есть решение (3), получается;

$$\frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial F'}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial L_1}{\partial x}. \quad (14)$$

И также

$$\frac{dp_y}{dt} = -\frac{\partial F'}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial L}{\partial y}, \quad (15)$$

$$\frac{dp_z}{dt} = -\frac{\partial F'}{\partial z} - \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial L}{\partial z}. \quad (16)$$

Первые члены с правой стороны суть составляющие силы в классическом смысле; вторые члены, которые происходят от квантового потенциала F_1 , также как составляющие классической силы, происходящие от потенциала F , могут быть названы

составляющими квантовой силы. Эта квантовая сила зависит от плотности потока вероятности и характерна для новой механики; когда ею можно пренебречь, мы возвращаемся к старой динамике, и движения элементов вероятности суть различные движения, рассматриваемые классической механикой, как возможные.

Если квантовой силой нельзя пренебречь, то движение элементов вероятности очень отличается от движения частиц в старой динамике. В частности, для этого движения мы не найдем больше общих теорий сохранения количества движения и энергии. Допустим, например, что поле равно нулю ($F \equiv 0$), отсюда не следует более, что p_x , p_y и p_z будут постоянными, ввиду того, что в уравнениях (14—16) имеется квантовая сила. Всякий раз, когда волна не будет плоской монохроматической волной, например, если имеется наложение плоских волн и интерференция, амплитуда не будет постоянной, и хотя поля в старом смысле слова и нет, тем не менее будет налицо изменение составляющих количества движения (11); следовательно мы не имеем более сохранения количества движения.

Точно также нет места и сохранению энергии, так как по (10), (9) и (14—16):

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \sum_{xyz} \left(p_x \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dp_x}{dt} \frac{dx}{dt} \right) - \sum_{xyz} \frac{\partial L}{\partial x} \frac{dx}{dt} \\ &= - \sum_{xyz} \frac{\partial L}{\partial v_x} \frac{dv_x}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t} = + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \end{aligned} \quad (17)$$

Для того, чтобы имело место сохранение энергии, мало только иметь дело с постоянным полем ($\frac{\partial F}{\partial t} = 0$); нужно также чтобы амплитуда a волны Ψ не зависела бы от времени, что не будет осуществляться, если Ψ представляет собой совокупность нескольких плоских монохроматических волн. В общем, движение вероятности, вследствие существования квантовой силы, происходит даже в отсутствии внешней силы без сохранения энергии и количества движения.

3. Теорема Эренфеста

Квантовую силу можно исключить при помощи интегрирования, распространенного на совокупность элементов вероятности; таким образом мы приходим к важной теореме Эренфеста. Умножим уравнения (14—16) на $a^3(x, y, z) dx dy dz$ и проинтегрируем их по всему пространству, считая, что мы имеем дело с ограниченным потоком волн, вследствие чего на бесконечности амплитуда равна нулю.

Получаем:

$$\begin{aligned} \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 \frac{dp_x}{dt} dx dy dz &= - \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 \frac{\partial F}{\partial x} dx dy dz \\ - \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 \frac{\partial F_1}{\partial x} dx dy dz &= - \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 \frac{\partial F}{\partial x} dx dy dz \quad (18) \\ &+ \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h^2}{8\pi^2 m} a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Delta a}{a} \right) dx dy dz. \end{aligned}$$

Мы покажем, что интеграл:

$$\int \int \int a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Delta a}{a} \right) dx dy dz$$

и два другие, аналогичные ему, равны нулю. Для того, чтобы доказать это, вспомним один из видов формулы Грина: если U и V непрерывные и однородные функции, x, y, z , заданные внутри области пространства D , ограниченной замкнутой поверхностью S ,

$$\text{то} \quad \int \int \int_D (U \Delta V - V \Delta U) dv = \int \int_S \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS, \quad (19)$$

где n переменная, отсчитываемая наружу по внешней нормали к S .

Положим здесь

$$U = a; \quad V = \frac{\partial a}{\partial x}. \quad (20)$$

По предположению обе эти функции на бесконечности равны нулю, и если мы за область D примем внутреннюю часть сферы, радиус которой будет стремиться к бесконечности, то в пределе второй член исчезнет; остается следовательно:

$$\int \int \int_{-\infty}^{+\infty} a \Delta \left(\frac{\partial a}{\partial x} \right) dv = \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial a}{\partial x} \Delta a dv. \quad (21)$$

Интеграл же $\int \int \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Delta a}{a} \right) dv$, который можно написать как

$$\int \int \int \left[a \frac{\partial}{\partial x} (\Delta a) - \frac{\partial a}{\partial x} \Delta a \right] dv,$$

равен нулю, как мы уже указали. Следовательно уравнение (14) приводится к такому:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 \frac{dp_x}{dt} dv &= m \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 \frac{d^2x}{dt^2} dv \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 \frac{\partial F}{\partial x} dv = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 f_x dv. \end{aligned}$$

Но плотность облака равна a^2 , если произвольный постоянный множитель при a выбрать так, чтобы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 dv = 1.$$

Интегралы (22) суть, следовательно, средние значения величин

$$\frac{dp_x}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, -\frac{\partial F}{\partial x} \text{ и } f_x$$

в облаке вероятности.

Отмечая средние значения чертой, получаем из (22) и из двух аналогичных уравнений, вытекающих из (15) и (16), соотношения:

$$\frac{dp_x}{dt} = m \bar{\gamma}_x = \bar{f}_x; \quad \frac{dp_y}{dt} = m \bar{\gamma}_y = \bar{f}_y; \quad \frac{dp_z}{dt} = m \bar{\gamma}_z = \bar{f}_z. \quad (23)$$

Это и есть теорема Эренфеста, интересные приложения которой мы опишем в дальнейшем.

Здесь мы покажем, что теорему Эренфеста можно выразить в следующем виде: „центр тяжести потока вероятности перемещается в пространстве с течением времени, так как это продолжала бы по законам классической механики материальная точка m под действием силы со средним значением в облаке вероятности“.

В самом деле, пусть R будет область, занимаемая в момент времени t потоком вероятности, и R' область, занимаемая им в момент $t+dt$. Пусть каждому элементу $d\tau$ области R соответствует элемент $d\tau'$ области R' , где в момент времени $t+dt$ находится элементы вероятности, которые были в $d\tau$ в момент t . Отметим значками величины относящиеся к элементам R' в момент $t+dt$; мы будем иметь $\rho d\tau = \rho' d\tau'$. Тогда изменение интеграла $\int \int \int v_x \rho d\tau$ за время dt будет:

$$\begin{aligned} dt \frac{d}{dt} \int \int \int v_x \rho d\tau &= \int \int \int_{R'} v_x' \rho' d\tau' - \int \int \int_R v_x \rho d\tau \\ &= \int \int \int_R (v_x - v_x') \rho d\tau = dt \int \int \int_R \frac{dv_x}{dt} \rho d\tau, \end{aligned}$$

так как $v'_x - v_x = \frac{dv_x}{dt} dt$. Следовательно,

$$\frac{d}{dt} \iiint v_x \rho d\tau = \frac{d\bar{v}_x}{dt} = \iiint \frac{dv_x}{dt} \rho d\tau = \frac{d\bar{v}_x}{dt} = \bar{\gamma}_x.$$

Повторяя рассуждения, покажем также, что

$$\bar{v}_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d\bar{x}}{dt}.$$

Мы имеем, следовательно, $\bar{\gamma}_x = \frac{d^2\bar{x}}{dt^2}$ и две аналогичные формулы для $\bar{\gamma}_y$ и $\bar{\gamma}_z$; тогда формулы (23) можно написать так:

$$m \frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = \bar{f}_x; \quad m \frac{d^2\bar{y}}{dt^2} = \bar{f}_y; \quad m \frac{d^2\bar{z}}{dt^2} = \bar{f}_z. \quad (23a)$$

и теорема доказана.

Рассмотрим теперь несколько частных случаев:

Если классическая сила равна нулю ($F \equiv 0$, $f \equiv 0$), мы имеем

$$\frac{d\bar{p}_x}{dt} = 0, \quad \frac{d\bar{p}_y}{dt} = 0, \quad \frac{d\bar{p}_z}{dt} = 0. \quad (24)$$

Для *всего облака* мы получаем здесь теорему, аналогичную закону сохранения количества движения в старой теории. Это связано с тем, что мы могли исключить квантовую силу, благодаря интегрированию по всему облаку.

Таким же образом мы можем найти теорему аналогичную закону сохранения энергии. Мы напишем в самом деле (ур. 17):

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial t}.$$

Умножим это уравнение на $a^2 dv$ и проинтегрируем по всему пространству, считая его равным нулю на бесконечности. Имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 \frac{dW}{dt} dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 \frac{\partial F}{\partial t} dv + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 \frac{\partial F_1}{\partial t} dv. \quad (25)$$

По формуле (7) мы имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 \frac{\partial F_1}{\partial t} dv = - \frac{h^2}{8\pi^2 m} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\Delta a}{a} \right) dv. \quad (26)$$

Мы утверждаем, что интеграл (26) равен нулю; в самом деле, положим в формуле Грина (19)

$$U = a; \quad V = \frac{\partial a}{\partial t} \quad (27)$$

имеем:

$$\int \int \int_{-\infty}^{+\infty} a \Delta \frac{\partial a}{\partial t} dv = \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} a \frac{\partial}{\partial t} (\Delta a) dv = \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial a}{\partial t} \Delta a dv. \quad (28)$$

Интеграл (26) действительно равен нулю, потому что

$$\int \int \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\Delta a}{a} \right) dv = \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \left[a \frac{\partial}{\partial t} (\Delta a) - \Delta a \frac{\partial a}{\partial t} \right] dv. \quad (29)$$

Окончательно уравнение (25) приводится к следующему

$$\int \int \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 \frac{dW}{dt} dv = \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 \frac{\partial F}{\partial t} dv. \quad (30)$$

Если поле постоянно $\left(\frac{\partial F}{\partial t} \equiv 0 \right)$, то

$$\int \int \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 \frac{dW}{dt} dv = \frac{dW}{dt} = 0. \quad (31)$$

Формула (31) выражает собой теорему аналогичную закону сохранения энергии.

4. Подсчет функций ψ и a

Если выражение волны дано в форме

$$\Psi = a e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi}, \quad (32)$$

где a и φ вещественны, движение облака вероятности и его плотность определяются из формул двух первых параграфов. Но очень часто случается, что Ψ известно в виде:

$$\Psi = \sum_k a_k e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi_k}, \quad (33)$$

который, в случае постоянного поля, соответствует спектральному разложению на монохроматические волны. Полезно, сле-

довательно, подсчитать α и φ , когда волновые функции заданы в виде (33). Обозначим через Ψ^* комплексные величины сопряженные с Ψ . Мы имеем:

$$\Psi^* = a e^{-\frac{2\pi i}{h} \varphi} = \sum_k a_k e^{-\frac{2\pi i}{h} \varphi_k}. \quad (34)$$

Умножим Ψ на Ψ^* , получаем:

$$\begin{aligned} \alpha^2 = \Psi \cdot \Psi^* &= \sum_{kl} a_k a_l e^{-\frac{2\pi i}{h} (\varphi_k - \varphi_l)} \\ &= \sum_k a_k^2 + \sum_{l < k} a_k a_l \cos \frac{2\pi}{h} (\varphi_k - \varphi_l). \end{aligned} \quad (35)$$

Этой формулой определяется результирующая интенсивность, которая, по принципу интерференции, дает вероятность присутствия частицы.

Если напротив мы разделим Ψ на Ψ^* и возьмем логарифм частного, то получим:

$$\varphi = \frac{h}{4\pi i} \log \frac{\Psi}{\Psi^*} = \frac{h}{4\pi i} \log \frac{\sum_k a_k e^{-\frac{2\pi i}{h} \varphi_k}}{\sum_k a_k e^{-\frac{2\pi i}{h} \varphi_k}}. \quad (36)$$

Обозначив через q одну из 4-х переменных $x y z t$, мы будем иметь:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q} = \frac{h}{4\pi i} \frac{\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial q} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial q}}{\Psi^* \Psi} = \frac{h}{4\pi i} \frac{\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial q} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial q}}{\alpha^2}. \quad (37)$$

Эта формула дает нам одновременно составляющие вектора $\text{grad } \varphi$ и производной $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, величины, которые представляют собой, соответственно, составляющие количества движения и энергии элементов вероятности.

5. Теория волны-пилота

Мы видели, что в области приложения геометрической оптики облако вероятности можно было считать эквивалентным облаку частиц, совершающих в данном поле движения, соответствующие одному и тому же полному интегралу уравнения Якоби. Можно также рассматривать только одну частицу и говорить, что облако вероятности получается, если представить себе одновременно все движения соответствующие одному и тому же виду функции Якоби.

Если, следовательно, мы сохраним в этом случае классическое представление частицы локализованной в пространстве и обладающей некоторой скоростью и траекторией, то мы можем отождествить частицу с одним из элементов вероятности; в самом деле, эти элементы описывают различные, возможные пути частицы и следовательно частица должна все время совпадать с одним из них.

Если мы хотим сохранить и классическое понятие частицы в области собственно новой механики, т. е. вне приближения геометрической оптики, то, совершенно естественно, что мы стремимся сохранить отождествление частицы с одним из элементов вероятности и мыслить положение вещей следующим образом:

Представим себе с одной стороны волну и с другой стороны частицу локализованную в пространстве и свяжем движение частицы с распространением волны следующим соотношением:

$$\vec{v} = - \frac{1}{m} \text{grad } \varphi, \quad (38)$$

где φ фаза волны определяемая соотношением (32). Таким образом скорость частицы в каждый момент вполне определена, если известно ее начальное положение и, как следствие, также вполне определена и ее траектория. Далее (как следует из формул § 1), если нам известен вид волны Ψ , сопряженной с частицей, и если мы знаем, что в начальный момент вероятность присутствия частицы в некоторой точке равна интенсивности волны в этой точке, то это же будет автоматически иметь место и во все последующие моменты времени; принцип интерференции будет следовательно удовлетворен. Эту теорию можно назвать теорией волны-пилота, потому что волна здесь фигурирует в качестве направляющей движение частицы.

С первого взгляда теория волны-пилота может показаться удовлетворительной, ибо она позволяет сохранить классическое представление частицы в согласии с принципом интерференции. Но, рассмотрев ее поближе, увидим, что здесь также возникают серьезные препятствия, которые мы сейчас вкратце опишем.

Основная трудность получается от того, что в области новой механики определение функции φ не является независимым от определения функции a . Следовательно, если мы допускаем, что движение частицы задается соотношением (38), то оно будет зависеть не только от начального положения, но также и от его вероятности, потому что оно зависит от $a(x, y, z, 0)$. Таким образом, мы здесь, больше чем это можно было подумать с первого взгляда, уклоняемся от классических представлений, так как следуя им невозможно представить себе, что большая или меньшая точность знания начального положения может влиять на последующие стадии движения.

Далее, с того момента, как мы приняли принцип интерференции во всей его полноте, становится очень трудно сохранить понятие волны как физического явления в старом смысле слова. Вообразим, например, частицу с сопряженной волной, падающей на не вполне отражающее зеркало: часть волны проходит сквозь зеркало, часть отражается. В силу значения, которое мы приписываем интенсивности волны, это разделение падающей волны на волну прошедшую и волну отраженную означает, что частица обладает некоторой вероятностью пройти сквозь зеркало и некоторой вероятностью отразиться. Допустим, что нашим опытом обнаружено присутствие частицы в прошедшем пучке, тогда вероятность нахождения частицы в отраженном пучке становится равной нулю, и, начиная с этого момента, отраженный пучок должен обладать нулевой интенсивностью. Таким образом опыт проведенный над прошедшим пучком привел к исчезновению отраженного пучка. Это кажется совершенно необходимым следствием принципа интерференций в случае одной частицы. Не трудно вывести из этого следующее заключение: волна не является физическим явлением в старом смысле слова, это некоторое символическое представление вероятности в пространстве и во времени. Но при этом представление частицы, направляемой волной, становится гораздо менее удовлетворительным. Пока считали возможным рассматривать волну как физическое явление, можно было легко понять, что это физическое явление может управлять частицей во время ее движения. Но если волна есть только символическое представление вероятности, то управление частицы волной становится менее понятным и менее согласованным со старыми физическими представлениями.

Мы видели, что в общем, для элементов вероятности, законы сохранения энергии и количества движения не имеют места даже в отсутствие поля. То же самое будет очевидно и для частицы, если мы отождествляем ее движение с движением элемента вероятности. Это отнимает от теории волны-пилота большую часть ее полезности. Рассмотрим, например, случай, когда внешнее поле равно нулю и когда волна образована наложением плоских монохроматических волн: из теории волны-пилота мы знаем бы, что энергия и количество движения частицы, когда последняя находится в точке x, y, z в момент времени t , имеют для этих значений переменных выражения $\frac{d\varphi}{dt}$ и $-\text{grad } \varphi$. Это легко произвести при помощи формулы (37), причем мы найдем, что энергия и количество движения частицы изменяются некоторым сложным образом с течением времени и, кроме того, будут зависеть от вида потока волн; полученное таким образом движение частицы очень мало правдоподобно. Далее, есть основания думать, что если бы мы пытались определить измерением энергию частицы, то мы нашли бы то или

инное значение соответствующее частотам плоских монохроматических волн, образующих поток волн, а не значение данное выражением $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$.

Мы вернемся в следующей главе, когда будем заниматься светом, к этому важному пункту, и увидим в дальнейшем, что в этом-то и заключается одно из важных различий между точкой зрения волны-пилота и точкой зрения Бора и Гейзенберга.

Короче говоря, теория волны-пилота, которая хочет локализовать частицу в некоторой точке волны, приписывая ей вполне определенное движение в каждый момент времени, наталкивается на большие трудности. Но нет никаких затруднений (напротив есть преимущества наглядного представления) в сохранении картины облака вероятности, элементы которого имеют движение, вполне определенное формулой (5), и плотность которого, равная интенсивности сопряженной волны, измеряет вероятность присутствия частицы в каждый момент и в каждой точке согласно принципу интерференции.

ГЛАВА X

ВОЛНОВАЯ МЕХАНИКА СВЕТОВЫХ ЧАСТИЦ

1. ФОТОНЫ И ИХ СОПРЯЖЕННЫЕ ВОЛНЫ

В настоящей главе мы разовьем понятие облака вероятности для частиц света. Но, потому что доказательства предыдущего параграфа производились при помощи нерелятивистских уравнений, мы должны будем проделать их снова, так как не может быть сомнений в необходимости приложения релятивистских уравнений к движению фотонов.

Для релятивистского уравнения распространения волны сопряженной с частицей, при отсутствии поля, мы нашли выражение:

$$\Delta \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2 m^2 c^2}{h^2} \Psi, \quad (1)$$

вводя обозначение:

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (2)$$

можно переписать (1)

$$\square \Psi = -\frac{4\pi^2 m^2 c^2}{h^2} \Psi. \quad (3)$$

Простое синусоидальное решение этого уравнения, соответствующее прямолинейному и равномерному движению, будет:

$$\Psi = ae^{\frac{2\pi i}{h} \left[Wt - m \frac{v_x x + v_y y + v_z z}{c^2} \right]}. \quad (4)$$

Энергия частицы W и ее количество движения $\vec{p}$ выражаются в функции массы m и скорости βc формулами Эйнштейна:

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (5)$$

Вспомнив это, рассмотрим последовательно ряд частиц с постепенно уменьшающейся массой. При этом всегда будут иметь место простые синусоидальные решения типа (4), соответствующие данному значению энергии W , но по мере стремления массы m к нулю, скорость v стремится к c , так как W остается постоянной. Перейдем к пределу: мы можем вообразить частицы с массой равной нулю, волна которых будет обладать частотой $\nu = \frac{W}{h}$ и скорость которых будет равна c . Нужно предположить, что m и β одновременно стремятся одно к 0, другое к 1 таким образом, что частное $\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ сохраняет постоянное значение $h\nu$. Следовательно, для этих частиц с нулевой массой мы будем иметь:

$$W = h\nu; \quad p = \lim \left(\frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \frac{h\nu}{c^2} \cdot c = \frac{h\nu}{c}. \quad (6)$$

Это основные уравнения теории „квант света“ Эйнштейна, которые позволили интерпретировать фотоэлектрический эффект и эффект Комптона. Мы пришли, следовательно, к тому, что свет состоит из частиц с нулевой массой; мы будем называть их „фотонами“. Уравнение распространения фотонов получается, если положить в уравнении (3) $m=0$, что дает нам классическое уравнение световых волн

$$\square \Psi = 0. \quad (7)$$

Следовательно, мы всегда будем связывать с фотоном волну Ψ , являющуюся решением уравнения (7) и отождествлять эту волну с классической световой волной. Конечно в общем случае она не является плоской монохроматической волной, но будет каким то более общим решением уравнения (7).

2. Облако вероятности сопряженное с фотоном

Мы всегда принимаем принцип интерференции: интенсивность волны Ψ должна давать вероятность присутствия сопряженного фотона, так что в явлениях, где участвует большое число фотонов, интенсивностью измеряется количество энергии, которое может быть найдено в одной точке; таким образом получается полное согласие со значением, приписываемым интенсивности световой

волны классической теории. Естественно, что для фотонов, также как и для электронов и других частиц, нужно построить картину облака вероятности, связанного с волной Ψ таким образом, чтобы принцип интерференции был удовлетворен.

Чтобы избежать некоторых усложнений, допустим, что волна Ψ образуется очень приближенно, наложением плоских монохроматических волн одной и той же частоты ν ; это случай обычно имеющий место в опытах с интерференцией. Тогда можно положить:

$$\begin{aligned}\Psi(x, y, z, t) &= \sum_k a_k e^{2\pi i \nu \left(t - \frac{\sqrt{k^2 + \frac{8\pi^2 \nu^2}{c^2}} z}{c} \right)} \\ &= e^{2\pi i \nu t} a(x, y, z) e^{-\frac{2\pi i}{h} \varphi(x, y, z)} \\ &= a e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi} = a(x, y, z) e^{\frac{2\pi i}{h} [h\nu t - \varphi(x, y, z)]}.\end{aligned}\quad (8)$$

Подставим (8) в (7); разделим мнимые и вещественные части. Получаем:

$$\frac{h^2 \nu^2}{c^2} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 = -\frac{h^2}{4\pi^2} \frac{\Delta a}{a}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial a}{\partial z} + \frac{1}{2} a \Delta \varphi = \frac{h\nu}{c^2} \frac{\partial a}{\partial t}. \quad (10)$$

Из уравнения (10) следует сразу, что если элементам вероятности приписать скорость:

$$\vec{v} = -\frac{c^2}{h\nu} \text{grad } \varphi, \quad (11)$$

то принцип интерференции будет удовлетворен. В самом деле, принимая во внимание (11) и полагая $a^2(x, y, z) = \rho(x, y, z)$, можно написать уравнение (10) так:

$$\text{div}(\vec{\rho} \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (12)$$

Это равенство выражает собой гидродинамическую непрерывность движения потока вероятности, если положить по принципу интерференции, что $\varphi(x, y, z)$ есть плотность вероятности.

Соотношение (11) показывает определение количества движения и энергии элементов вероятности при помощи формул:

$$\vec{p} = -\text{grad } \varphi; \quad W = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = h\nu, \quad (13)$$

потому что при этом:

$$|p| = \frac{h\nu}{c^2} v = \frac{W}{c^2} v.$$

и мы снова получаем формулу связывающую энергию и количество движения в релятивистской динамике. Если применить определения (13), то уравнение (9) окажется уравнением Якоби для элементов вероятности. Легко получить уравнение движения вероятности; для этого подсчитаем например $\frac{dp_x}{dt}$:

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} &= \frac{\partial p_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial p_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial p_x}{\partial z} v_z + \frac{\partial p_x}{\partial t} \\ &= \frac{c^2}{h\nu} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} \right] = \frac{c^2}{2h\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{xyz} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Откуда, принимая во внимание (9), имеем:

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{hc^2}{8\pi^2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\Delta a}{a} \right] = - \frac{\partial F_1}{\partial x}, \quad (15)$$

полагая

$$F_1 = - \frac{hc^2}{8\pi^2\nu} \frac{\Delta a}{a}.$$

Для p_y и p_z находим два аналогичных уравнения.

Эти три уравнения определяют движение элементов вероятности в функции от a и φ . Вторые их члены могут быть названы составляющими квантовой силы, возникающей от квантового потенциала F_1 . Совершенно очевидно, что вообще величины p_x, p_y, p_z не постоянны, и закон сохранения количества движения для элементов вероятности не имеет места, так как в общем квантовая сила не равна нулю.

3. Интерпретация явлений интерференции

Если мы имеем дело с очень длинным потоком волн, причем никакие препятствия не мешают его распространению, то плоскую монохроматическую волну можно выразить через:

$$\Psi = a e^{2\pi i \left[\nu t - \frac{\nu}{c} (x + \beta y + \gamma z) \right]} \quad (16)$$

и для фазы φ написать выражение:

$$\varphi = h\nu t - \frac{h\nu}{c} (x + \beta y + \gamma z). \quad (17)$$

Все элементы вероятности имеют одну и ту же скорость с направлением, определенным косинусами α, β, γ и равную:

$$v = - \frac{c^2}{h\nu} \text{grad } \varphi = c. \quad (18)$$

Если мы рассматриваем большое число фотонов, сопряженные волны которых имеют все вид (16), то со статистической точки зрения все происходит так, как если бы фотоны описывали прямолинейные траектории со скоростью c , т. е. мы снова приходим к прямолинейному распространению света.

Но иное получается, когда волна при своем распространении встречает препятствие (зеркало, экран и т. д.). Математическое выражение волны должно быть при этом изменено так, чтобы удовлетворить некоторым граничным условиям и в результате получаются явления интерференции и дифракции. Если допустить, что препятствия, встречаемые волной, фиксированы, то никакого изменения падающей частоты нет и волна всегда может быть выражена в комплексной форме:

$$\Psi = a(x, y, z) e^{i \frac{2\pi}{h} [h\nu t - \varphi(x, y, z)]}.$$

Фаза есть линейная функция времени, амплитуда же от него не зависит. Уравнение (11) напишется здесь так:

$$\vec{v} = \frac{c^2}{h\nu} \text{grad } \varphi. \quad (19)$$

Оно определяет движение элементов вероятности в области интерференции; вероятность нахождения фотона в элементе объема dv равна:

$$Pdv = a^2(x, y, z) dv, \quad (20)$$

где a — произвольно выбранный постоянный множитель.

Из формулы (20) можно снова получить интерпретацию явлений интерференции и дифракции света по классической теории. Из нее следует, в самом деле, что если рассматривать совокупность фотонов сопряженных с тождественными между собой волнами, то число фотонов, проходящих за секунду через некоторую точку области интерференции, пропорционально интенсивности волны в этой точке. Следовательно, отождествляя волну фотонов Ψ с классической световой волной, как это и естественно сделать, новая динамика должна привести к тем же самым темным и светлым полосам, что и классическая теория.

Для того, чтобы наблюдать полосы интерференции, например, при помощи фотографирования, можно произвести опыт малой продолжительности с сильным освещением или опыт большой продолжительности со слабым освещением; в первом случае производит усреднение по пространству, во втором — по времени; по результаты должны быть очевидно одними и теми же; этим объясняется, почему опыты с интерференцией и дифракцией не зависят от употребляемой интенсивности.

Остановимся немного на этом важном пункте. Рассмотрим один из таких опытов, где интерференция получается от очень

слабого источника света и с очень большой выдержкой. Время от времени источником света испускается фотон, и эти испускания так отделены друг от друга, что, в общем, через интерференционный прибор проходит всегда только один фотон со своим потоком сопряженных волн. Вероятность того, что присутствие фотона в интерференционном приборе обнаружится фотографическим действием, пропорциональна в каждой точке результирующей интенсивности потока волн. За время очень продолжительного опыта процесс испускания повторяется огромное число раз N и в интерференционном аппарате появляются друг за другом N тождественных потоков волн. Очевидно, что фотографический эффект будет тем же, как если бы в приборе появился один поток волн с N фотонами, распределенными в нем пропорционально квадрату амплитуды. Следовательно, опыт большой продолжительности, произведенный с очень слабым источником света, должен давать тот же результат, соответствующий классической теории, что и в случае быстро сделанного опыта с сильным источником света. Почти наверняка такие же рассуждения справедливы и для дифракции материальных частиц. Из уравнений движения вероятности (15) видно, что в поле интерференции с закрепленными на месте препятствиями элементы вероятности перемещаются не по прямой; их траектория искривляется под действием квантовой силы, которая в свою очередь определяется изменениями амплитуды. Возьмем простой пример: дифракция плоской волны от прямого края бесконечного экрана. Со времени Френеля известно, что свет проникает в область геометрической тени; следовательно, неизбежно существуют элементы вероятности, огибающие край экрана, и для них очевидно нельзя рассматривать сохранение количества движения в обычном смысле слова. Это приводит нас к замечанию интересному с исторической точки зрения. Приверженцы теории испускания Ньютона говорили когда-то, что край экрана действует на частицы света; с нашей квантовой силой, которая есть следствие присутствия экрана, мы как бы возвращаемся к этой идее; но квантовая сила имеет весьма специальный смысл, трудности, связанные с ней, нам известны, и мы не можем считать, что квантовая сила прилагается к самой частице в собственном смысле слова.

4. Интерференция света вблизи отражающего плоского зеркала

Очень поучительно изучить движение вероятности в частном случае интерференции, получающейся вблизи плоского зеркала, на которое падает пучок света. Мы возьмем сперва случай отражающего зеркала. Плоскость зеркала примем за плоскость xy ; плоскость xz , или плоскость рисунка будет плоскостью падения; наконец ось z будет нормалью лежащей вне рисунка.

Падающая плоская волна будет:

$$\Psi_1 = a_0 e^{2\pi i \nu \left[t - \frac{x \sin \theta + z \cos \theta}{c} \right]}, \quad (21)$$

а плоская отраженная волна:

$$\Psi_2 = a_0 e^{2\pi i \nu \left[t - \frac{x \sin \theta - z \cos \theta}{c} \right]} + a \quad (22)$$

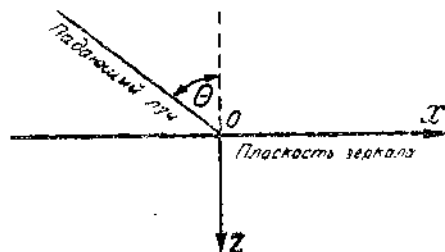


Рис. 7.

Амплитуда будет одна и та же в обеих волнах, так как зеркало совершенно отражающее. Что касается a , то это константа, соответствующая возможному изменению фазы в момент отражения.

Вблизи зеркала волны Ψ_1 и Ψ_2 налагаются друг на друга и мы имеем:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = a e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi}, \quad (23)$$

$$a = 2a_0 \cos \left[2\pi \frac{\nu z}{c} \cos \theta + \frac{\alpha}{2} \right], \quad (24)$$

$$\varphi = h\nu \left[t - \frac{x \sin \theta}{c} \right] + \frac{h\alpha}{4\pi}. \quad (25)$$

По формуле (11) скорость элементов вероятности в области интерференции имеет составляющие:

$$v_x = -\frac{c^2}{h\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = c \sin \theta, \quad v_y = v_z = 0. \quad (26)$$

Следовательно, вблизи зеркала, вероятность перемещается параллельно зеркалу и ее плотность, измеряемая через a^2 , обладает на плоскостях, параллельных отражающей поверхности, максимумами и минимумами, отстоящими друг от друга на $\frac{\lambda}{4 \cos \theta}$ (по 24). Поток вероятности, однородный в падающем пучке, где все положения для фотонов равновероятны, входя в область интерференции, разделяется на параллельные плоскости. Конечно, на практике мы всегда имеем дело с ограниченным потоком волн, обладающим фронтом волны, и движение вероятности, которое мы описывали, будет существовать только тогда, когда после отражения фронта волны от зеркала режим интерференции восстанавливается.

В изучаемом нами случае очень соблазнительно сказать, что траектории вероятности в действительности ни что иное, как траектории самих фотонов; это точка зрения теории волны-пилота. Фотоны, распределенные неравномерно в падающей волне, образуют в области интерференции полосы, располагающиеся параллельно поверхности зеркала. Но, как мы уже сказали, это отождествление движения частиц с движением элементов вероятности наталкивается на принципиальные затруднения. Как только мы допустили, что зеркало отражает несовершенно, мы увидим, что теория волны-пилота приводит к мало вероятным следствиям относительно скорости фотонов.

5. Интерференция света вблизи несовершенно отражающего зеркала

Перейдем к случаю несовершенно отражающего зеркала. Часть фотонов пройдет сквозь зеркало в среду, расположенную позади него, а остальные отразятся. Мы будем рассматривать поверхность зеркала как очень тонкий „переходный слой“, где происходит частичное отражение волны. Для последующего нам неважно знать, тождественна ли среда за этим переходным слоем со средой со стороны падения (пустота или воздух), или же напротив она представляет собой преломляющее тело.

Со стороны плоскости падения существует область, где, вследствие наложения падающей и отраженной волны, имеет место интерференция. Мы хотим попытаться понять, каким образом элементы вероятности проходят сквозь область интерференции так, что часть из них оказывается в отраженном пучке, а часть в прошедшем.

Падающая волна Ψ_1 всегда задается выражением (21), но для упрощения подсчетов мы положим $a_0=1$. Нам легко будет заменить во всех формулах a_0 и a_0^2 — единицей.

Для падающей волны мы напишем, следовательно:

$$\Psi_1 = e^{2\pi i \nu \left[t - \frac{x \sin \theta}{c} - \frac{z \cos \theta}{c} \right]}, \quad (27)$$

для отраженной волны:

$$\Psi_2 = \eta e^{2\pi i \nu \left[t - \frac{x \sin \theta}{c} - \frac{z \cos \theta}{c} \right]}. \quad (28)$$

Если $\eta=1$, зеркало совершенно и мы снова получаем случай изученный выше. Если $\eta=0$, зеркало легко проходимое без всякого отражения, в итоге зеркала не существует. В промежуточном случае, когда $0 < \eta < 1$, доля элементов вероятности, преломляющих отражение, равна по принципу интерференции η^2 . В области интерференции, расположенной вблизи зеркала со стороны падения, результирующая волна имеет вид:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = a e^{\frac{2\pi i}{h} \cdot}. \quad (29)$$

Для сокращения положим:

$$u = \frac{4\pi\nu}{c} z \cos \theta + \lambda.$$

Для подсчета a и φ мы воспользуемся формулами (35) и (37) предыдущей главы и легко найдем, что:

$$a^2 = 1 - \eta^2 + 2\eta \cos \theta \quad (30)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{h\nu}{c} \sin \theta; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{h\nu}{c} \cos \theta \frac{1 - \eta^2}{a^2}. \quad (31)$$

По формуле (11) составляющие скорости элементов вероятности будут:

$$v_x = c \sin \theta, \quad v_y = 0, \quad v_z = c \cos \theta \frac{1 - \eta^2}{a^2}, \quad (32)$$

следовательно, движение элементов вероятности совершается в плоскости падения и скорость их параллельно зеркалу такая же, как если бы оно было совершенно отражающим. Но здесь составляющая v_z не равна больше нулю, она является периодической функцией z , и отсюда мы заключаем, что траектории вероятности, в области интерференции, будут волнообразные кривые, аналогичные кривым, изображенным на рис. 8. Легко видеть, что средний наклон этих волнообразных кривых заключается между значением 0, соответствующим уже упомянутому случаю $\eta = 1$ и значением $\operatorname{tg} \theta$, соответствующим случаю $\eta = 0$ полной прозрачности.

На рис. 8 хорошо видно как, равномерно распределенные в падающем пучке элементы вероятности, попадают одни в прошедший пучок, другие в пучок отраженный, причем плотность распределения их в этих обоих последних пучках снова равномерна. В области интерференции плотность вероятности задается выражением (30) для a^2 . Следовательно, существуют темные и светлые полосы, параллельные поверхности зеркала, но темные полосы не будут уже черными, так как в этом случае минимумы a^2 равны $(1 - \eta^2) > 0$. Следовательно, нет ни одной такой области интерференции, где бы не проходила хотя бы один элемент вероятности. Из рис. 8 эти результаты почти очевидны, так как если бы темные полосы, параллельные зеркалу, были бы черными, не было бы видно, как элементы вероятности могут попасть в прошедший пучок.

И здесь было бы очень соблазнительно изобразить фотоны как вполне локализованные точки, описывающие траектории вероятности. Но, кроме уже описанных трудностей, здесь появляется еще одно весьма интересное затруднение. Рассмотрев выражение (32) для составляющей v_z , увидим, что она больше нежели $c \cos \theta$ в темных полосах; отсюда следует, что в этих

полосах скорость v элементов вероятности больше чем скорость c , так как:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = c^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta \left(\frac{1+\gamma_1}{1-\gamma_1} \right)^2 > c^2. \quad (33)$$

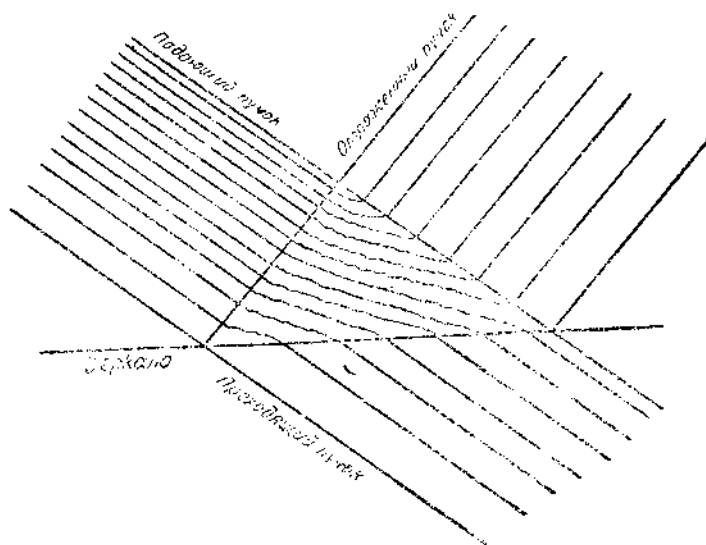


Рис. 8.

Следовательно, если мы хотим связать с фотонами движение вероятности, то нужно придать им в темных полосах скорость большую c , что будет очень трудно совместить с теорией относительности.

6. Наложение (суперпозиция) двух плоских монохроматических волн

Рассмотрим световую волну, образованную наложением двух плоских монохроматических волн, распространяющихся в направлении z :

$$\Psi = a_1 e^{2\pi i \nu_1 \left(t - \frac{z}{c}\right)} + a_2 e^{2\pi i \nu_2 \left(t - \frac{z}{c}\right)}. \quad (34)$$

Ψ можно представить в виде $a e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi}$ и мы находим:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos 2\pi (\nu_1 + \nu_2) \left(t - \frac{z}{c}\right). \quad (35)$$

Следовательно, существуют максимумы и минимумы результирующей амплитуды, расположенные на расстоянии $\frac{c}{\nu_1 - \nu_2}$ друг

от друга и перемещающиеся вдоль оси z со скоростью c . Вероятность присутствия сопряженного фотона должна быть равна a^2 по принципу интерференции и для тех же максимумов и минимумов.

Подсчитаем величину $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, которая играет роль энергии для элементов вероятности. Мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{h}{4\pi i} \frac{1}{a^2} \left[\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right] \\ &= \frac{a_1^2 h \nu_1 + a_2^2 h \nu_2 + a_1 a_2 (h \nu_1 + h \nu_2) \cos 2\pi (\nu_1 - \nu_2) \left(t - \frac{z}{c} \right)}{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos 2\pi (\nu_1 - \nu_2) \left(t - \frac{z}{c} \right)}, \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

если $\nu_1 = \nu_2$, то $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ равно, конечно, постоянной $h\nu$. Но в общем

случае $\nu_1 \neq \nu_2$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ и меняется сложным образом. По теории волны-пилота, где движение частицы пытаются отождествить с движением элементов вероятности, эта энергия частицы $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$

должна была бы быть всегда переменной. Однако же ясно, что если на некоторый участок вещества падает волна (34), то можно получать фотоэлектрический эффект, соответствующий или кванту $h\nu_1$ или кванту $h\nu_2$. Все будет происходить так, как если бы частица, сопряженная с волной, обладала энергией $h\nu_1$ или $h\nu_2$, но не энергией $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$. Таким образом, чтобы получить вероят-

ность нахождения частицы, нужно рассмотреть результирующую амплитуду a , проходящую от наложения (суперпозиции) двух монохроматических волн; наоборот, для того, чтобы представить различные значения энергии, с которыми частица может быть обнаружена, нужно рассматривать не результирующие фазы φ , а частоты различных монохроматических волн, т. е. спектральное разложение волны ψ . Но, однако, для значения энергии частицы есть несколько возможностей (в выбранном примере их две). Следовательно, нельзя приписывать частице, как это делает теория волны-пилота, вполне определенную энергию, но можно говорить только о вероятности того, что она проявляет себя с какой-то энергией.

Аналогичные рассуждения могут быть применены и к количеству движения.

ТЕОРИЯ ГЕЙЗЕНБЕРГА И БОРА

1. Принцип спектрального разложения

Резюмируем результаты полученные до сих пор. Мы видим, что с движением частицы следует всегда связывать распростра-

нение волны $\Psi = a e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi}$, и что для интерпретации экспериментальных результатов необходим важный принцип — принцип интерференции, согласно которому результирующей интенсивностью волны $a^2 = \psi \cdot \psi^*$, всегда и везде, и для материи и для света, измеряется вероятность присутствия частицы. Далее, мы пришли к рассмотрению фиктивной жидкости — потока вероятности, движение которого определяется распространением волны и плотность которого равная a^2 дает, по принципу интерференции, вероятность присутствия. Когда для изучения волны справедливы приближения геометрической оптики, движение элементов потока вероятности совпадает с траекториями частицы определенными по старой динамике. Соблазнительно допустить, что частицы являются вполне определенными точками, описывающими траектории вероятности, но при ближайшем рассмотрении этот образ мыслей (теория волны-пилота) приводит к затруднениям. Истинный смысл дуализма волн и частиц остается, следовательно, неясным. Наступил подходящий момент для изложения теории Гейзенберга и Бора, предложенной ими для рассмотрения дуализма.

Теория Гейзенберга и Бора основывается на двух принципах: прежде всего на принципе интерференции, который мы уже знаем и, затем, на другом принципе — принципе спектрального разложения, первое представление о котором мы уже дали в конце последней главы, и который мы рассмотрим более полно, прилагая его к случаю поля равного нулю.

Плоская монохроматическая волна соответствует прямолинейному и одностороннему движению частицы; это и есть справной пункт волновой механики. Но ограниченный поток волн может быть рассматриваем как суперпозиция (наложение) плоских монохроматических волн вида:

$$\Psi = \sum_k a_k \Gamma_k = \sum_k a_k e^{2\pi i \gamma_k t - \left[\frac{n_k}{c} (x_k x + y_k y + z_k z) \right] + i \beta_k}, \quad (1)$$

где константы α_k , β_k , γ_k , ν_k и n_k связаны соотношениями

$$\alpha_k^2 + \beta_k^2 + \gamma_k^2 = 1, \quad n_k = \nu_k \sqrt{1 - \frac{\nu_0^2}{\nu_k^2}}, \quad (2)$$

и где ν_0 собственная частота частицы $\frac{mc^2}{h}$.

В начале развития волновой механики Макс Борн предложил считать, что каждая величина a_k^2 дает относительную вероятность того, что частица обладает количеством движения соответствующим Φ_k . Таким образом, в противоположность теории волны-пилота, волна Ψ будет давать не движение частицы, а только вероятность того или иного состояния движения. Если принять гипотезу Борна, то трудности, отмеченные в конце последней главы и относящиеся к фотоэлектрическому эффекту, вызываемому волной, проходящей от наложения двух или нескольких монохроматических волн, исчезают сами собой. Мы будем называть этот борновский постулат „принципом спектрального разложения“; если принять его, то определение частицы по ее сопряженной волне связывается с двойной неопределенностью: с одной стороны, по принципу интерференции, неопределенно положение частицы, так как существует некоторая вероятность, измеряемая результирующей интенсивностью a^2 , того, что частица находится в некоторой области, занимаемой потоком волн; с другой стороны, состояние движения частицы, определяемое ее энергией и ее количеством движения, также неопределенно, по принципу спектрального разложения, так как существует несколько возможных движений, и вероятность каждого из них задается квадратом амплитуды монохроматической составляющей, входящей в спектральное разложение потока волн.

Как нужно понимать эту двойную неопределенность? Теория Гейзенберга и Бора пытается объяснить ее при помощи точного и глубокого анализа тех совокупностей наблюдений и измерений.

2. Теория Гейзенберга и Бора. Соотношения неопределенности

Наблюдать явление значит обязательно нарушать его, по крайней мере в некоторой степени. В самом деле, наблюдать можно только установив взаимодействие между явлением, которое хотим изучать, и окружающей средой, частью которой является сам наблюдатель. Если процесс измерения очень мало искажает изучаемое явление, то значения величин, характеризующих явление, можно считать хорошо известными из измерений, конечно, в пределах экспериментальных ошибок. Но если процесс измерения сильно изменяет изучаемый объект, то результат наблюдения не дает уже точного знания о состоянии после измерения. Это состояние отмечено неопределенностью, происходящей из незнания того, насколько процесс измерения нарушил явление.

В частности, вполне возможно допустить, что процесс измерения, позволяющий определить величину A , обязательно нарушает значение другой величины B , таким образом, что если

улучшать метод измерения так, чтобы получать все более и более точные значения A , то значение B будет все менее и менее известно из измерений. По классическим воззрениям, состояние частицы определяется восемью величинами: $x, y, z, t, p_x, p_y, p_z$ и W , которые задают положение частицы в определенный момент и ее количество движения. Эти восемь величин образуют две группы: с одной стороны, — координаты пространства и времени x, y, z, t , с другой стороны — величины сопряженные соответственно этим координатам p_x, p_y, p_z и W . Мы покажем, что если принять принцип интерференции и принцип спектрального разложения, то все способы, служащие для измерения одной из восьми величин, обязательно изменяют значение сопряженных величин, и это изменение тем больше, чем точнее сделано измерение. Неопределенность, следуемая отсюда, не должна рассматриваться как *случайная*, получающаяся из несовершенства наших способов измерений, которой можно избежать при помощи улучшенных способов; напротив это *существенная* неопределенность, получающаяся из нарушения явления самим измерением и вытекающая из глубокого закона природы.

Для доказательства необходимости этой неопределенности, при условии принятия двух принципов — интерференции и спектрального разложения — мы будем исходить из следующего замечания. Нужно всегда иметь возможность представить себе при помощи потока волн то, что наши измерения дают нам для частицы, а именно: неопределенность положения движущейся частицы после наблюдения, — нужно представить, как пространственное протяжение потока волн, а неопределенность состояния движения, — представить, как величину спектральной области, занимаемой частотами простых синусоидальных волн, наложение которых образует поток волн.

Согласно основным идеям волновой механики, прямолинейное и равномерное движение частицы должно быть связано с распространением плоской монохроматической волны с частотой $\nu = \frac{W}{h}$ и длиной волны $\lambda = \frac{h}{|p|}$, W и p суть энергия и количество движения частицы. Выведем новый вектор „волновое число“ плоской монохроматической волны, вектор, направленный как и $\vec{p}$ и по абсолютной величине равный $\frac{1}{\lambda}$. Тогда мы будем иметь;

$$\nu = \frac{W}{h}; \quad N_x = \frac{p_x}{h}; \quad N_y = \frac{p_y}{h}; \quad N_z = \frac{p_z}{h}. \quad (3)$$

Однако, как это уже следует из подсчетов главы IV § 3 и как можно показать в более общем виде, для математического представления потока волн, размеры которого по трем осям суть δx ,

δy , δz , и продолжительность прохождения до некоторой точки есть δt , необходима совокупность плоских монохроматических волн, частота которых и составляющие вектора волнового числа заключены самое меньшее в интервалах $\delta \nu$, δN_x , δN_y и δN_z , связанных с δx , δy , δz и δt неравенствами справедливыми по порядку величины:

$$\begin{aligned} \delta N_x \cdot \delta x &\geq 1; & \delta N_y \cdot \delta y &\geq 1; \\ \delta N_z \cdot \delta z &\geq 1; & \delta \nu \cdot \delta t &\geq 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Так как мы считаем, что каждой плоской монохроматической волне соответствует состояние прямолинейного и равномерного движения частицы, то мы должны рассматривать величины:

$$\begin{aligned} \delta W &= h \delta \nu; & \delta p_x &= h \delta N_x; \\ \delta p_y &= h \delta N_y; & \delta p_z &= h \delta N_z, \end{aligned} \quad (5)$$

как неопределенности в значениях энергии и количества движения. Соотношения принимают тогда следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta W \cdot \delta t &\geq h; & \delta p_x \cdot \delta x &\geq h; \\ \delta p_y \cdot \delta y &\geq h; & \delta p_z \cdot \delta z &\geq h. \end{aligned} \quad (6)$$

Это и есть соотношения неопределенности Гейзенберга. Чем меньше неопределенность одной из восьми величин x , y , z , t , p_x , p_y , p_z , W , тем больше должна быть неопределенность сопряженной величины в силу значения, приданного волне.

3. Смысл волны в теории Бора и Гейзенберга

Резюмируя мы должны представить себе значение волны Ψ , по воззрениям Гейзенберга и Бора, следующим образом: допустим, что в момент времени t_0 было сделано первое наблюдение, позволяющее установить в некоторых пределах положение и состояние движения частицы; мы принимаем (оставляя за собою право вернуться к этому пункту), что неопределенность в сопряженных величинах, вытекающих из этого наблюдения, удовлетворяет, в наилучшем случае, соотношениям Гейзенберга (6). Для того, чтобы расшифровать результаты этого первого наблюдения, мы должны построить поток волн, результирующая интенсивность которого, в каждой точке, равна вероятности того, что частица находится в этой точке, а спектральное разложение даст относительные вероятности различных состояний движения частицы. Чтобы уяснить себе, какие выводы следуют из неполной определенности начального состояния, мы должны проследить за распространением потока волн и вспомнить, что в течение всего времени распространения вероятность присутствия частицы в каждой точке измеряется интенсивностью α^2 , и что вероятность каждого состояния движе-

ния измеряется интенсивностью соответствующей спектральной составляющей. Следовательно, можно предсказать, что если второе измерение, сделанное в момент времени t , более поздний, чем t_0 , дает нам новые сведения о положении или состоянии движения частицы, то имеется такая-то вероятность того, что частица находится в данной области пространства и какая-то другая вероятность того, что она обнаруживает такое-то состояние движения. Мы можем получить только эти предсказания, дающие вероятность, а не достоверность; но Бору и Гейзенбергу нельзя представлять себе частицу как точку, описывающую вполне определенную траекторию с вполне определенной скоростью.

По Гейзенбергу поток волн можно называть „пакетом вероятности“. Мы видели, что с ним можно связать облако вероятности, причем плотность представляемого таким образом потока вероятности равна в каждой точке интенсивности потока волн a^2 и измеряет, следовательно, вероятность присутствия. Элементы потока вероятности описывают траектории, зависящие от начальных размеров потока волн, т. е. от начальной неопределенности положения частицы. То, что движение вероятности зависит от знания начального состояния, не вызывает никаких трудностей, так как вероятность события всегда зависит от более или менее точного знания предшествующих состояний.

Изучение распространения потока волн позволяет определить вероятность различных возможных положений частицы в момент времени t . Если производится новое наблюдение для уточнения положения частицы, оно должно быть согласовано с нашими предсказаниями вероятности, но, будучи проделано, это наблюдение вообще говоря ограничивает неопределенность положения частицы. Если, например, в момент времени t , поток волн занимает область пространства R , мы знаем до измерения, что частица должна находиться в этой области R , но после измерения, вообще говоря, мы будем знать, что она находится в области R_1 , заключенной в R . Для того, чтобы представить себе состояние наших знаний после наблюдения, нужно, следовательно, сделать „приведение (редукцию) пакета волн“ таким образом, что поток волн будет занимать теперь только область R_1 , следовательно, целая часть прежнего потока волн внезапно исчезает, вследствие только самого факта нового наблюдения. Как мы отметили во введении, это прекрасно показывает абстрактный и символический характер волны при таких воззрениях.

С другой стороны, эта теория пробивает брешь в старом представлении детерминированности физических явлений, так как эта последняя идея покоилась на возможности точного определения начальных данных, откуда, на основании точных законов динамики, можно было точно вывести последующие явления. Если начальная скорость и положение частицы были

известны, то движение частицы было безусловно определено. Но по теории Бора и Гейзенберга невозможно определить одновременно и с абсолютной точностью положение и начальную скорость частицы, и, следовательно, невозможно утверждать, что движение частицы точно определено, так как на этот счет мы можем делать только предположения о вероятности событий.

4. Связь со старой механикой

Существует, однако, основной факт, который должна объяснить новая теория: для всех механических явлений больших масштабов старые представления совершенно удовлетворительны. Невозможно отрицать, что для этих явлений, по нашим обычным измерениям, существует строгий детерминизм. Как объяснить этот факт? Прежде всего нужно отметить, что, по новым представлениям, мы имеем практически два рода неопределенностей: первая, уже допущенная классическими теориями и, так сказать, случайная неопределенность, происходящая от неизбежного несовершенства наших методов измерения, которые принципиально могли бы быть бесконечно уменьшены бесконечным усовершенствованием нашей экспериментальной техники; вторая является существенной и неустранимой неопределенностью, введенной соотношениями неопределенности Гейзенберга (6). Оказывается, что в области, где воззрения старой механики хорошо оправдываются, случайная неопределенность гораздо больше, чем неопределенность по существу, и совершенно ее покрывает. Отсюда следует, что все происходит так, как будто неопределенности Гейзенберга не существует; *в пределах экспериментальных ошибок* все происходит так, как будто детерминистические воззрения старой динамики точны. Но если бесконечное улучшение экспериментальной техники позволит все больше и больше уточнять значения динамических величин, то наступит момент, когда мы столкнемся с неопределенностью Гейзенберга.

Поясним это на численном примере. Рассмотрим движение вдоль оси *ox* маленького шарика весом в один миллиграмм, размерами которого мы пренебрегаем. Для того, чтобы определить его начальное положение, мы должны измерить положение центра шара и его скорость.

Допустим, что мы определили абсциссу центра с точностью до тысячной миллиметра, что было бы вполне достаточной точностью. Соотношение Гейзенберга утверждает, что мы не можем знать скорость шара в этот момент с неопределенностью меньшей, чем:

$$\Delta v = \frac{h}{m\Delta x} = \frac{6,55 \cdot 10^{-27}}{10^{-3} \cdot 10^{-4}} = 6,55 \cdot 10^{-20} \text{ см/сек.}$$

Совершенно очевидно, что практически никаким методом измерения не достигнем подобной точности в определении величины скорости: неопределенность Гейзенберга вполне перекрывается экспериментальными ошибками и все происходит так, как будто этой неопределенности не существует.

Математический переход от новой механики, изложенной в духе Бора и Гейзенберга, к старой механике делается очень изящно при помощи теоремы Эренфеста (глава IX, § 3). Мы видели, что старая динамика соответствует случаю, когда геометрическая оптика справедлива для распространения сопряженной волны. Но геометрическая оптика имеет место, когда условия распространения не меняются заметно на протяжении нескольких длин волн. Так как в обычных случаях длина волны гораздо меньше всего того, что мы можем непосредственно измерить, мы можем вообразить поток волн, занимающий некоторую область, размеры которого содержат большое число длин волн, и который тем не менее может считаться в наших масштабах точечным. Поток волн, следовательно, может быть представлен группой волн, перемещающихся с групповой скоростью Релея; он образует маленький шарик вероятности, размеры которого будут слишком малы для того, чтобы мы могли их измерить.

Напишем затем уравнения (23) главы IX, выражающие теорему Эренфеста:

$$m \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = \bar{f}_x; \quad m \frac{d^2 \bar{y}}{dt^2} = \bar{f}_y; \quad m \frac{d^2 \bar{z}}{dt^2} = \bar{f}_z. \quad (7)$$

Вследствие крайне малых размеров потока волн, можно совместить его с его центром тяжести и заменить средние значения $\bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z$ значениями f_x, f_y, f_z , составляющих силы в центре тяжести. Следовательно поток волн можно рассматривать как точку, перемещающуюся согласно уравнениям:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = f_x, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = f_y, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = f_z. \quad (8)$$

Шарик вероятности перемещается весь в целом, как и материальная точка в поле сил, заданном по законам старой динамики. Вполне понятно, что положение частицы внутри потока волн неопределенно, но если размеры потока волн меньше того, что мы можем измерить, то практически все происходит так, как будто частица имеет в каждый момент вполне определенное положение и перемещается по классическим уравнениям Ньютона.

Мы видим, с каким изяществом теорема Эренфеста позволяет соединять старую механику с теорией Гейзенберга и Бора.

5. Возражение Эйнштейна. Частица не локализуема вообще или просто не локализована?

Столь новые воззрения как воззрения Гейзенберга и Бора не могут не вызвать ряда возражений. Мы приводим здесь одно из них, высказанное Эйнштейном на Сольвейском конгрессе в октябре 1927 г. Пусть частица и плоская монохроматическая волна, сопряженная с нею, падают перпендикулярно на экран с круглым отверстием; позади экрана помещена фотографическая пластинка в форме полусферы большого радиуса (рис. 9).

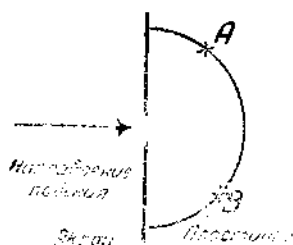


Рис. 9.

Если отверстие имеет достаточно малые размеры, волна при прохождении сквозь нее дифрагирует и распространяется во всех направлениях вправо от экрана. С точки зрения Гейзенберга и Бора имеется, следовательно, некоторая вероятность того, что частица обнаружится по фотографическому эффекту в какой либо точке A полусферической пленки. Но если, в некоторый момент времени t , фотографическое действие будет произведено в точке A пленки, никакой фотографический эффект не может произойти ни в какой другой точке пленки, потому что по предположению существует только одна падающая частица. Но по нашим обычным представлениям пространства и времени (даже в релятивистской форме) невозможно понять, каким образом тот факт, что фотографический эффект, произведенный в точке A , мгновенно исключает возможность появления эффекта во всякой другой точке B пленки, если не допустить того, что частица в действительности локализована в пространстве и занимает в каждый момент некоторую вполне определенную точку в сопряженной волне. Всякое другое воззрение кажется несовместимым с мыслью, что физические явления могут быть полностью изображены в рамках пространства и времени и даже в рамках пространства и времени Эйнштейна.

Очень интересное и очень простое рассуждение Эйнштейна ясно показывает, что мы должны принять одно или другое из двух следующих положений, которое я обозначаю через A и через B .

A . Мы сохраняем представление, что частица вполне локализована в пространстве в каждый момент времени, и что, следовательно, она обладает скоростью и траекторией. Тогда мы должны выразить идеи Бора и Гейзенберга в таком виде: поскольку частица имеет в каждый момент времени вполне определенную скорость и траекторию, некий основной закон природы, выражающийся соотношениями (6) Гейзенберга, препятствует нам точно определить одновременно это положение и это

состояние движения; по этой причине мы можем дать только вероятность положения и будущих состояний движения частицы. С этой точки зрения нет настоящей неопределенности, но существует простая неточность, заложенная в самой природе вещей. Мы не могли бы утверждать, что в движении частицы существует строгий детерминизм, так как мы никогда не сможем вполне точно изучить это движение, но мы не можем более отрицать этот детерминизм.

В. Гораздо более радикальное воззрение, принадлежащее Бору и многим другим выдающимся физикам, заключается напротив в том, что частица, сопряженная с потоком волн, в действительности не локализована в пространстве и времени: в некотором смысле слова она будет присутствовать на всем протяжении потока волн. В самом деле, для Бора частицы суть: „unsharp, *defined individuals within finite space-time regions*“ (в конечных областях времени-пространства частицы суть нерезко определенные индивидуальности). В примере Эйнштейна частица будет некоторым образом размазана, будет находится в скрытом состоянии по всей области занимаемой дифрагирующей волной; в момент, когда она производит фотографический эффект в *A*, частица так сказать конденсируется в этой точке, чтобы произвести там наблюдаемый эффект. Никакой механизм, согласующийся с нашим обычным понятием пространства-времени, не в состоянии объяснить нам эту внезапную концентрацию; если мы принимаем воззрение *B*, то нужно сказать, что пространство-время недостаточно для полной интерпретации явлений природы.

Далее, эффект, производимый частицей, всегда подчиняется закону сохранения энергии; если, например, частицей является фотон, то фотоэлектрический эффект, произведенный в *A*, произойдет по фотоэлектрическому закону Эйнштейна. Именно эту способность частицы конденсироваться в одной точке, производя в ней эффект, сообразный с каузальными законами сохранения энергии, Бор сформулировал словами: „*The individuality of the particles transcending the space-time description meets the claim of causality*“ (индивидуальность частицы, выходя из пределов пространства-времени, отвечает однако требованиям причинности).

В момент, когда частица приходит в соприкосновение с окружающей средой для того, чтобы произвести наблюдаемое явление, она, по представлению *B*, совершает род выбора, между несколькими возможностями. Рассмотрим, например, отражение от несовершенного отражающего зеркала *M* (рис. 10).

Падающая волна разделяется на волну отраженную и волну прошедшую. Не обязательно говорить, что попадая на зеркало частица делает выбор между волной отраженной и волной прошедшей, так как попадание частицы на зеркало не является наблюдаемым явлением. Отраженный и прошедший пучок су-

ществуют оба до того момента, пока частица обнаружится в одном или другом при помощи наблюдаемого явления; выбор производится только в этот момент, так как, по замечанию Гейзенберга, пока частица никак себя не обнаружила, мы можем получить интерференцию в затененной области (рис. 10), направляя при помощи зеркала M' отраженный пучок на прошедший, что и доказывает необходимость рассмотрения двух пучков.

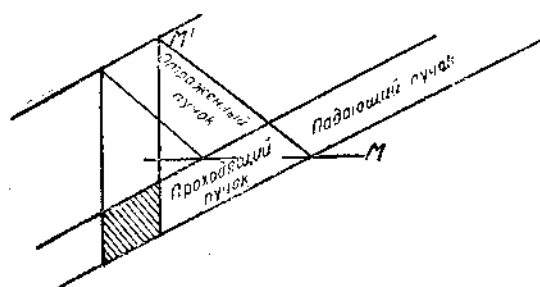


Рис. 10.

6. Заключение

Таковы, в своих общих чертах, теория Бора и Гейзенберга о природе и взаимном отношении частиц и волн. Конечно и в этой теории имеется ряд трудностей и темных мест. В частности, еще не объяснено достаточно удовлетворительно, как можно учесть опыты Гейгера-Бора и опыты Комптона и Симона, доказавших закон сохранения энергии и количества движения при отдельных встречах между фотонами и электронами¹.

Следует однако надеяться, что введение нескольких новых идей позволит найти более ясную интерпретацию дуализма волн и частиц, чем предположенная Бором и Гейзенбергом. Тем не менее представляется несомненным, что соотношения неопределенности заключают в себе нечто фундаментальное.

ГЛАВА XII

ВОЗМОЖНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ И СООТНОШЕНИЯ ГЕЙЗЕНБЕРГА

1. Методы измерения и соотношения Гейзенберга

В предыдущей главе мы все время принимали, что никакое наблюдение не могло дать нам возможности одновременного определения координаты и сопряженного с ней момента с точностью превышающей ту, которая выражается соотношениями неопределенности Гейзенберга. Теперь нам нужно доказать это

¹ *Примечание редактора.* Толкование указанных экспериментов с точки зрения принципа неопределенности дано Гейзенбергом в книге „Физические принципы квантовой теории“ (русский перевод изд. ЛОНТИ 1932 г.).

утверждение путем разбора методов измерений, которыми мы располагаем, как это и проделал впервые Гейзенберг.

Будем рассуждать о материальной частице, например, об электроны. Для того, чтобы определить его положение с большой точностью, имеем только одно средство: употребление оптических методов; но эти оптические методы позволяют измерить координату только с приближенным порядком длины волны. Для того, чтобы увеличить точность измерений координат частицы, мы должны все больше и больше уменьшать длину волны, но тогда частица будет претерпевать все более и более ясно выраженный эффект Комптона; количество движения частицы будет все более и более изменяться, вследствие изменения ее положения. Если, наоборот, мы задаемся целью измерить скорость и количество движения, можно будет употребить эффект Доплера, но этот эффект, как мы это увидим в дальнейшем, всегда сопровождается эффектом Комптона, изменяющим скорости; для того, чтобы уменьшить роль эффекта Комптона, нужно употреблять большие длины волн, но тогда положение частицы в момент измерения будет определено плохо.

2. Микроскоп Гейзенберга

Гейзенберг дал первую иллюстрацию своих общих представлений, вообразив, что рассматривается электрон, перемещающийся на предметном столике микроскопа, который освещается снизу монохроматическим светом частоты ν (рис. 11).

Когда электрон будет рассеивать фотон, в микроскоп войдет расходящаяся волна; по хорошо известной классической оптической теории угол 2ε , под которым виден предметный столик, мал, и измерение длины в плоскости предметного столика не может быть сделано точнее, чем с неопределенностью, равной $\frac{\lambda}{2 \sin \varepsilon}$ или, что достаточно точно,

$\frac{\lambda}{2\varepsilon}$ (формула разрешающей силы).

Возьмем за ось y —направление оси микроскопа (направление падающего света) и за ось x —направление начальной скорости электрона в плоскости предметного столика. Из измерения положения электрона на оси x в момент рассеяния можно будет узнать только с неопределенностью равной по меньшей мере $\delta x = \frac{\lambda}{2\varepsilon}$.

До рассеяния фотон обладает энергией $h\nu$ и количеством движения $\frac{h\nu}{c}$, направленным по oy ; электрон имеет скорость

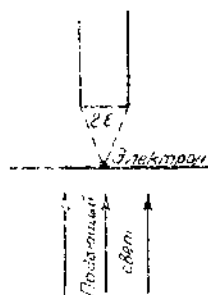


Рис. 11.

$\vec{v}$, направленную по оси x , и если v достаточно мало, по сравнению с c , то его количество движения равно $m\vec{v}$ и его кинетическая энергия равна $\frac{1}{2}mv^2$. Вследствие эффекта Комптона при рассеянии меняется частота фотона и скорость электрона. После рассеяния фотон имеет частоту ν' , энергию $h\nu'$ и количество движения $\frac{h\nu'}{c}$, направленное под очень малым углом α к оси микроскопа, который обязательно заключается внутри ϵ , так как рассеянный фотон должен пройти через объектив. Что касается электрона, то его скорость будет v' , его количество движения mv' и его энергия $\frac{1}{2}mv'^2$. Следуя методу Комптона, мы напишем, что во время процесса рассеяния имеет место закон сохранения энергии и количества движения; пренебрегая α^2 по сравнению с единицей, мы получаем

$$\left. \begin{aligned} h\nu + \frac{1}{2}mv_x^2 &= h\nu' + \frac{1}{2}m(v_x'^2 + v_y'^2) \\ \frac{h\nu}{c} &= \frac{h\nu'}{c} + mv_y' \\ mv_x &= \alpha \frac{h\nu'}{c} + mv_x' \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Подставляя в первое уравнение значение $\frac{1}{2}m(v_x'^2 + v_y'^2)$, полученное из двух последних, имеем:

$$\frac{h^2}{mc^2}(\nu - \nu')^2 - 2h(\nu - \nu') - 2\alpha \frac{v}{c}h\nu' + \alpha^2 \frac{h^2\nu'^2}{mc^2} = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) показывает, что ν отличается от ν' только членами порядка α и соотношение (1) можно написать так:

$$mv_x - mv_x' = p_x - p_x' = \alpha \frac{h\nu}{c} = \alpha \frac{h}{\lambda}. \quad (3)$$

Так как мы не знаем точного значения α , которое может изменяться от $-\alpha$ до $+\alpha$, то в значении p_x после рассеяния имеется неопределенность:

$$\Delta p_x = 2\alpha \frac{h}{\lambda}. \quad (4)$$

Следовательно, при наиболее благоприятных условиях мы имеем:

$$\delta x \cdot \delta p_x = \frac{\lambda}{2\varepsilon} \cdot 2\varepsilon \frac{h}{\lambda} = h, \quad (5)$$

а это и есть соотношение неопределенности Гейзенберга.

3. Измерение скорости электрона при помощи эффекта Доплера

Рассмотрим теперь измерение скорости электрона при помощи эффекта Доплера. Допустим, что некоторый электрон перемещается со скоростью v в положительном направлении оси ox . Направим на этот электрон поток световых волн со средней длиной волны λ , распространяющийся вдоль оси ox в отрицательном направлении. Если имеет место рассеяние, то рассеянный фотон может претерпеть изменение скорости и может снова направиться по положительной оси x . Допустим, что это и происходит, и что мы будем измерять точно частоту ν' рассеянного излучения. Для упрощения мы допустим, что скорость электрона гораздо меньше скорости света. Закон сохранения энергии и количества движения в момент рассеяния дает нам:

$$\left. \begin{aligned} h\nu + \frac{1}{2} m v^2 &= h\nu' + \frac{1}{2} m v'^2 \\ m v - \frac{h\nu}{c} &= m v' + \frac{h\nu'}{c} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где v' — скорость электрона после рассеяния. Исключая v' из обоих уравнений, получаем:

$$h(\nu - \nu') = \frac{1}{2m} \left[\frac{h^2}{c^2} (\nu + \nu')^2 - 2mv \frac{h}{c} (\nu + \nu') \right]. \quad (7)$$

В процессе рассеяния частота изменяется очень мало; следовательно, мы можем положить: $\nu' = \nu - \varepsilon$ и пренебречь $\varepsilon \frac{v}{c}$ и ε^2 . Тогда остается:

$$\varepsilon \left(1 + 2 \frac{h\nu}{mc^2} \right) = 2 \frac{h\nu^2}{mc^2} - 2\nu \frac{v}{c}. \quad (8)$$

Обычно частное $\frac{h\nu}{mc^2}$ очень мало, так как для света $h\nu$ будет порядка 10^{-18} и mc^2 близко к $8 \cdot 10^{-7}$. Мы можем пренебречь $2 \frac{h\nu}{mc^2}$ по сравнению с единицей в первом члене (8) и положить:

$$\nu' = \nu - \varepsilon = \nu \left[1 - 2 \frac{h\nu}{mc^2} + 2 \frac{v}{c} \right]. \quad (9)$$

Член $2 \frac{v}{c}$ соответствует эффекту Допплера: он существовал бы

даже, если h было бы бесконечно мало. Член $-2 \frac{h\nu}{mc^2}$ выражает эффект Комптона для рассматриваемого случая. Оба эффекта налагаются друг на друга. Так как эффект Комптона влияет на скорость электрона, мы должны найти способ сделать его ничтожно малым, и взять достаточно большую длину волны, чтобы

отношение $\frac{\frac{v}{c}}{\frac{c}{h\nu/mc^2}} = \frac{mv}{h} \lambda$ было очень велико. Тогда только эффект Допплера будет заметной величиной и мы сможем положить:

$$\nu' = \nu \left[1 + 2 \frac{v}{c} \right], \quad \text{где } \lambda' = \lambda \left(1 - 2 \frac{v}{c} \right). \quad (10)$$

Но падающий поток обязательно имеет конечную длину l ; следовательно, он не строго монохроматичен, и если мы выведем волновое число $\frac{1}{\lambda}$, то для различных монохроматических волн потока это волновое число будет меняться на величину $\delta \left(\frac{1}{\lambda} \right)$, где

$$\delta \left(\frac{1}{\lambda} \right) \simeq \frac{1}{l}. \quad (11)$$

Знак $\simeq$ означает „порядка“.

Следовательно, даже если мы измеряем λ' без всякой экспериментальной ошибки, все таки в значении v остается неопределенность, так как по (10) v дается формулой:

$$v = \frac{c}{2} \left(1 - \frac{\lambda'}{\lambda} \right), \quad (12)$$

а неопределенность в λ влечет за собой неопределенность в v равную:

$$|\delta v| = \frac{c}{2} \lambda' \delta \left(\frac{1}{\lambda} \right). \quad (13)$$

Неопределенность в количестве движения электрона после измерения равна:

$$\delta p_x = \frac{m \delta v}{2l}. \quad (14)$$

Но и одновременное значение координаты также известно только с некоторой неопределенностью. В самом деле, эффект Комптона, хотя и слаб, согласно предположению, по сравнению

эффектом Доплера, но тем не менее существует и вызывает изменение скорости электрона равное по второму уравнению (8):

$$v' - v = - \frac{h(\gamma + v)}{mc} = - \frac{2h}{m\lambda}. \quad (15)$$

Допустим, что положение частицы в начале измерения хорошо известно: это наиболее благоприятный случай. В положении ее после измерения будет иметься неопределенность ввиду ледующего факта. Мы не знаем в какой момент времени всего промежутка $\frac{l}{c}$ падения потока волн на электрон происходит рассеяние и, в зависимости от того произойдет ли прохождение ветового потока в начале или в конце, мы будем иметь разницу в положении электрона после измерения равную $(v - v') \frac{l}{c} = \frac{2h}{m\lambda} \cdot \frac{l}{c}$. Координата электрона в конце измерения имеет, следовательно, неопределенность:

$$\delta x = \frac{2h}{m\lambda} \cdot \frac{l}{c}. \quad (16)$$

Комбинируя (16) с (14), мы получаем в наиболее благоприятном случае:

$$\delta x \cdot \delta p_x = \frac{mc\lambda}{2l} \cdot \frac{2h}{m\lambda} \cdot \frac{l}{c} = h. \quad (17)$$

Так всегда, мы опять находим уравнение Гейзенберга.

4. Прохождение частицы сквозь диафрагму

Как другой пример, мы возьмем определение положения частицы, например фотона, при помощи прохождения его сквозь твердое, проделанное в плоском экране. Для определения координат частицы в плоскости экрана, мы будем принуждены взять очень малое отверстие, но чем меньше взятое отверстие, тем больше выражены явления дифракции, которыми, по волновой механике, сопровождается прохождение частицы сквозь твердое. С другой стороны, для определения момента прохождения частицы в плоскости экрана, мы будем употреблять подвижную заслонку, которая позволит открывать отверстие, просверленное в экране, на очень короткое время; чем быстрее мы будем орудовать с заслонкой, тем точнее мы определим время прохождения частицы, но в то же время, так как поток сопряженных волн будет соответственно сокращен, монохроматичность этого потока волн будет все более и более меняться, и, вследствие этого, энергия частицы будет определяться все хуже и хуже.

Произведем подсчеты в том простом случае, когда частица падает на экран в нормальном направлении и когда отверстие, просверленное в экране, представляет собой прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$.

Примем центр отверстия за начало координат; пусть ось x параллельна большой стороне $2a$ и ось y параллельна малой стороне $2b$, ось z перпендикулярна экрану и направлена противоположно к падающей волне (рис. 12). Пусть M с координатами X, Y, O будет какая-то точка отверстия и $dXdY$ маленький прямоугольник, окружающий эту точку. Сосчитаем по при-

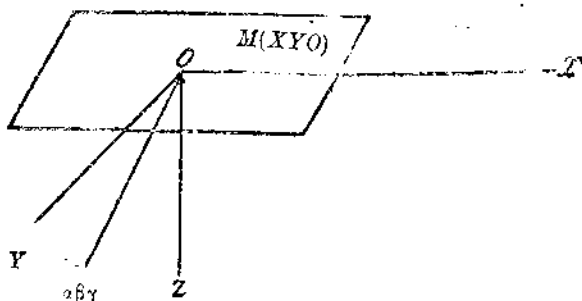


Рис. 12.

ципу Гюйгенса значение элементарной волны, посылаемой маленьким прямоугольником $dXdY$ в направлении α, β, γ и составляющей очень малый угол с осью z . Если x, y, z означают координаты очень удаленной точки в направлении α, β, γ , то искомая элементарная волна выражается через:

$$dF_{\alpha\beta} = K dXdY \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{\alpha(x-X) + \beta(y-Y) + z}{\lambda} \right), \quad (18)$$

где K коэффициент изменяющийся с α, β, γ , но гораздо медленнее чем $\cos$; в формуле (18) γ практически равно единице.

Результирующая волна, посылаемая в направлении α, β, γ всеми точками отверстия, будет:

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha\beta} = \iint dF_{\alpha\beta} &= A \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{\alpha x + \beta y + z}{\lambda} \right) \\ &+ B \sin 2\pi \left(\nu t - \frac{\alpha x + \beta y + z}{\lambda} \right), \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} A &= K \iint dXdY \cos 2\pi \frac{\alpha X + \beta Y}{\lambda}; \\ B &= -K \iint dXdY \sin 2\pi \frac{\alpha X + \beta Y}{\lambda}. \end{aligned} \quad (20)$$

B равно нулю, так как оба входящие в интеграл элемента поверхности дают по отношению к O равные и противоположные значения. В A мы можем положить:

$$\cos 2\pi \frac{\alpha X + \beta Y}{\lambda} = \cos 2\pi \frac{\alpha X}{\lambda} \cdot \cos 2\pi \frac{\beta Y}{\lambda} - \sin 2\pi \frac{\alpha X}{\lambda} \sin 2\pi \frac{\beta Y}{\lambda}, \quad (21)$$

а интеграл от произведения синусов равен нулю. Следовательно, остается:

$$\begin{aligned} A &= 4K \int_0^a dX \cos 2\pi \frac{\alpha X}{\lambda} \int_0^b dY \cos 2\pi \frac{\beta Y}{\lambda} = \\ &= \frac{K\lambda^2}{\pi^2 \alpha \beta} \sin 2\pi \frac{\alpha a}{\lambda} \sin 2\pi \frac{\beta b}{\lambda}, \end{aligned} \quad (22)$$

откуда:

$$\Psi_{\alpha\beta} = \frac{K\lambda^2}{\pi^2 \alpha \beta} \sin 2\pi \frac{\alpha a}{\lambda} \sin 2\pi \frac{\beta b}{\lambda} \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{\alpha x + \beta y + z}{\lambda} \right), \quad (23)$$

$\Psi_{\alpha\beta}$ равно, следовательно, нулю в таких направлениях, для которых $2\pi \frac{\alpha a}{\lambda} = k\pi$ (k целое) и $2\pi \frac{\beta b}{\lambda} = k\pi$, т. е. в таких направлениях, для которых или $\alpha = \frac{k\lambda}{2a}$, или $\beta = \frac{k\lambda}{2b}$ равно нулю. Напротив в направлениях, для которых или $\alpha = (2k+1)\frac{\lambda}{2a}$, или $\beta = (2k+1)\frac{\lambda}{2b}$,

$\Psi_{\alpha\beta}$ имеет максимум.

Таким образом мы получаем то, что называют явлением дифракции локализованной на бесконечности. Для того, чтобы наблюдать его, возьмем, например, линзу, оптическая ось которой совпадает с осью oz . Если бы дифракции не было, то мы наблюдали бы только изображение прямоугольного отверстия, расположенное в фокальной плоскости линзы на оптической оси. Но вследствие существования плоских монохроматических волн, наклонных к оптической оси, мы получаем также ряд других изображений, соответствующих максимумам $\Psi_{\alpha\beta}$. Когда порядок k увеличивается, ясность этих изображений быстро падает.

Резюмируя, мы можем сказать, что плоская монохроматическая волна, которая падает на экран, имеет вид:

$$\Psi = a \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{z}{\lambda} \right). \quad (24)$$

Прохождение сквозь прямоугольное отверстие преобразует ее затем в группу плоских волн, слегка наклоненных к оси z и имеющих вид:

$$\Psi = \sum a(\alpha, \beta) \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{\alpha x + \beta y + z}{\lambda} \right), \quad (25)$$

где амплитуды составляющих волн $a(\alpha, \beta)$ представляют собой последовательные максимумы и минимумы в функции от α и β . Так как интенсивность последовательных порядков быстро спадает, мы видим, что размер группы по отношению к переменной α измеряется величиной:

$$\delta\alpha = k_1 \frac{\lambda}{2a} \gg \frac{\lambda}{2a}, \quad (26)$$

где k_1 означает малое целое число, соответствующее наибольшему порядку дифракции, с еще заметной интенсивностью. Точно также размер группы по отношению к β будет:

$$\delta\beta = k_2 \frac{\lambda}{2b} \gg \frac{\lambda}{2b}. \quad (27)$$

Если $\vec{N}$ означает вектор „волнового числа“ монохроматической волны характеризуемой углами α и β , мы имеем:

$$N_x = \frac{\alpha}{\lambda}; \quad N_y = \frac{\beta}{\lambda}; \quad N_z = -\frac{1}{\lambda}. \quad (28)$$

Максимальные изменения N_x и N_y в группе волн после прохождения сквозь экраны будут:

$$\delta N_x = \frac{\delta\alpha}{\lambda} = \frac{k_1}{2a}; \quad \delta N_y = \frac{\delta\beta}{\lambda} = \frac{k_2}{2b}. \quad (29)$$

Следовательно, по порядку величины мы имеем:

$$\delta N_x \gg \frac{1}{2a}; \quad \delta N_y \gg \frac{1}{2b}. \quad (30)$$

Положение же частицы во время прохождения в прямоугольном отверстии определено с неточностью δx , равной $2a$, и неточностью δy , равной $2b$. Следовательно, по порядку величины мы имеем:

$$\delta N_x \cdot \delta x \gg 1; \quad \delta N_y \cdot \delta y \gg 1. \quad (31)$$

По принципу спектрального разложения неопределенности на составляющие p_x и p_y , количества движения связаны с неопределенностями δN_x и δN_y соотношениями:

$$\delta p_x = h \delta N_x, \quad \delta p_y = h \delta N_y \quad (32)$$

и (31) принимает форму соотношений Гейзенберга:

$$\delta p_x \cdot \delta x \gg h; \quad \delta p_y \cdot \delta y \gg h. \quad (33)$$

С другой стороны, если мы хотим определить координату частицы z и время ее прохождения сквозь экран t , мы должны употребить подвижную заслонку, как это было уже объяснено

выше. Пусть τ время, на которое была поднята заслонка. Неопределенность в t будет очевидно равна τ , неопределенность в z будет $U\tau$, где U групповая скорость волн, которая, как мы знаем, равна скорости частицы. Следовательно:

$$\delta t = \tau; \quad \delta z = U\tau. \quad (34)$$

Но открывая отверстие в течение времени τ , мы позволяем пройти сквозь него только ограниченному потоку волн, а этот поток составлен из монохроматических волн, занимающих спектральный интервал, по меньшей мере порядка $\frac{1}{\tau}$. Соответ-

ствующий интервал в длинах волн таков, что $\delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{\lambda}\right) \delta \nu$

будет порядка $\frac{1}{U\tau}$, потому что по определению $\frac{1}{U} = -\frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{\lambda}\right)$. Следовательно, мы имеем:

$$\delta \nu \geq \frac{1}{\tau}; \quad \delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) \geq \frac{1}{U\tau}. \quad (35)$$

По принципу же спектрального разложения, неопределенность в конечной энергии частицы есть $h\delta\nu$ и неопределенность в конечном значении составляющей p_z ее количества движения будет $h\delta N_z = h\delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ по (28).

Следовательно, имеем еще два соотношения Гейзенберга:

$$\delta W \cdot \delta t \geq h; \quad \delta p_z \cdot \delta z \geq h. \quad (36)$$

5. Замечание об измерении скорости

Выше мы заключили из некоторых примеров, что методы измерения, которыми мы могли пользоваться, все приводят к соотношениям неопределенности Гейзенберга. Однако мы можем попробовать сделать следующее рассуждение. В момент времени t_1 можно сделать опыт, показывающий, что частица расположена в непосредственной близости к некоторой точке пространства A , затем в последующий момент времени t_2 можно сделать другой опыт, показывающий, что частица находится теперь в непосредственной близости к другой точке пространства B . Если время $t_2 - t_1$ достаточно велико, то мы будем довольно точно определять скорость, принимая:

$$v = \frac{AB}{t_2 - t_1} \quad (37)$$

и измерение количества движения по z как будто не сопровождается при этом неопределенностью Гейзенберга.

Но мы должны прежде всего отметить, что если снова начать то же измерение скорости, при таких же точно условиях, то каждый раз получится иной результат. В самом деле, как это будет строго следовать из подсчетов ближайшей главы, поток волн очень малых размеров, соответствующий в момент времени t_1 локализации частицы возле точки A при первом опыте, расширяется во время распространения и занимает большее пространство в конце очень длинного промежутка времени $t_2 - t_1$; в момент второго опыта, по принципу интерференции, существует большая область пространства, где можно найти частицу, и ряд идентичных опытов дает ряд других точек B .

Далее, и это есть существенный пункт, скорость, заданная (37) соответствует только движению между моментом времени t_1 и моментом t_2 ; ее никоим образом нельзя рассматривать как скорость частицы *после* второго опыта, потому что этот второй опыт, локализуя частицу возле точки B , совершенно нарушает его движение. Скорость v совсем не есть начальная скорость частицы после второго измерения, следовательно, она не может служить ни для какого предсказания того, что произойдет после момента времени t_2 . При помощи наших двух измерений положения мы не можем определить одновременно положение и количество движения движущейся частицы: первое наблюдение вполне позволяет нам локализовать частицу в A во время t_1 , но оно не дает нам никаких сведений о количестве движения в этот момент; второе наблюдение позволяет нам локализовать частицу в B во время t_2 и определить скорость v , с которой частица будет перенесена из A в B , но количество движения *то* иное чем то, которым обладает движущаяся частица после наблюдения. Можно сказать, что частица от A до B обладала скоростью v . Но это никоим образом не позволяет точно *предвидеть* движение частицы в интервале времени $t_2 - t_1$, т. е. что претендовала старая детерминистская механика, потому что v имеет вполне определенное значение только после конца того явления, которое нужно предсказать.

ГЛАВА XIII

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОТОКА ВОЛН Ψ В ОТСУТСТВИИ ПОЛЯ И В ОДНОРОДНОМ ПОЛЕ

1. Точное решение уравнения распространения в отсутствии поля

Мы приступим теперь к строгому изучению распространения потока волн Ψ в отсутствии поля; мы удовлетворимся нерелятивистскими уравнениями. Уравнение, из которого мы должны исходить:

$$\Delta \Psi = -\frac{4\pi i}{h} m - \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (1)$$

Это уравнение имеет тот же самый вид, что и классическое уравнение распространения тепла, но с минимым коэффициентом теплопроводности. Для его решения можно применить метод совершенно аналогичный методу решения уравнения теплопроводности.

Так как уравнение (1) первого порядка по времени, то для определения интеграла, который нужно найти, нужно знать значение функции $\Psi(x, y, z, t)$ в начальный момент взятый за начало отсчета по времени. Задача, которую нужно решить, заключается в следующем: зная функцию $\Psi(x, y, z, 0)$, нужно найти $\Psi(x, y, z, t)$. Положим, что $\Psi(x, y, z, 0)$ равно $f(x, y, z)$. Метод решения задачи заключается в нахождении функции преобразования $T(x, y, z, x_0, y_0, z_0, t)$ от двух рядов переменных x, y, z и x_0, y_0, z_0 , и времени t такой, что

$$\Psi(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int f(x_0, y_0, z_0) T(x, y, z, x_0, y_0, z_0, t) dx_0 dy_0 dz_0 \quad (2)$$

(Кенширд, Гейзенберг). Для этого нужно удовлетворить следующим двум условиям:

1. Функция $\Psi(x, y, z, t)$, определенная в (2), должна удовлетворять уравнению распространения (1). Это требует, чтобы и функция T , которую мы считаем функцией от x, y, z, t , сама удовлетворяла (и уравнению (1)).

2. Функция Ψ , определяемая в (2), должна сводиться к $f(x, y, z)$ для $t=0$.

Мы начнем с отыскания функции T , которая будет решением уравнения распространения. Изучая классическое движение частицы в нулевом поле, мы видим, что функция:

$$S(x, y, z, t, x_0, y_0, z_0) = -\frac{m}{2t} [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2], \quad (3)$$

зависящая от трех начальных координат x_0, y_0, z_0 , является полным интегралом уравнения Якоби и, следовательно, позволяет вычислить движение, которое „преобразует“ начальные координаты x_0, y_0, z_0 в момент времени 0 в координаты x, y, z в момент времени t . Мы можем, таким образом, ожидать, что эта функция S играет здесь важную роль.

Но с другой стороны, так как функция преобразования T должна удовлетворять уравнению распространения, мы имеем:

$$\Delta T = \frac{4\pi i}{h} m \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (4)$$

Если мы теперь положим:

$$T = R e^{\frac{2\pi i}{h} S}, \quad (5)$$

где R и S суть вещественные функции, пока что неопределенные, то, подставляя (5) в (4) и разделяя действительную часть от мнимой, получим:

$$-\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \frac{\Delta R}{R}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial S}{\partial z} + \frac{1}{2} R \Delta S = m \frac{\partial R}{\partial t}. \quad (7)$$

Попробуем взять для S функцию (3); так как она подчиняется уравнению Якоби:

$$\frac{1}{2m} \sum_{xyz} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (8)$$

то для того, чтобы (6) было удовлетворено, нужно чтобы ΔR было равно нулю. Наиболее простое предположение заключается в том, что R зависит исключительно от времени и не зависит от переменных x, y, z . По этой гипотезе уравнение (7) приводится к:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{2m} R \Delta S. \quad (9)$$

Это уравнение может быть удовлетворено потому, что функция (3), которую мы выбрали для S , квадратична по xyz , так что ΔS является только функцией времени. Подсчитаем ΔS :

$$\Delta S = -\frac{m}{2t} \Delta \left[\sum_{xyz} (x-x_0)^2 \right] = -\frac{m}{2t} \cdot 6 = -\frac{3m}{t}. \quad (10)$$

$R(t)$ определяется, таким образом, из уравнения:

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{3}{2t} R. \quad (11)$$

Интегрируя находим:

$$R = Ct^{-3/2}. \quad (12)$$

Мы получаем, следовательно, по (5), (3) и (12) функцию T , полагая:

$$\begin{aligned} T(x, y, z, t, x_0, y_0, z_0) &= Ct^{-3/2} e^{-\frac{2\pi i m}{\hbar} \sum_{xyz} [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]} \\ &= \frac{C}{t^{3/2}} e^{-\frac{2\pi i m}{\hbar} \sum_{xyz} (x-x_0)^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Функция

$$\Psi(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int f(x_0, y_0, z_0) \frac{C}{t^{3/2}} e^{-\frac{2\pi i m}{\hbar} \sum_{xyz} (x-x_0)^2} dx_0 dy_0 dz_0 \quad (14)$$

удовлетворяет поэтому уравнению распространения, но нужно еще, чтобы она приводилась к $f(x, y, z)$ для $t=0$. Для того, чтобы проверить действительно-ли это так,¹ сделаем замену переменных:

$$r_1 = \frac{x_0 - x}{\sqrt{t}}; \quad r_2 = \frac{y_0 - y}{\sqrt{t}}; \quad r_3 = \frac{z_0 - z}{\sqrt{t}}. \quad (15)$$

Тогда тройной интеграл (14) переищется так:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(r_1 \sqrt{t} + x, r_2 \sqrt{t} + y, r_3 \sqrt{t} + z) \\ & \frac{C}{t^{3/2}} e^{-\frac{\pi i m}{h} (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)} \frac{D(x_0, y_0, z_0)}{D(r_1, r_2, r_3)} dr_1 dr_2 dr_3, \end{aligned} \quad (16)$$

так как

$$\frac{D(x_0, y_0, z_0)}{D(r_1, r_2, r_3)} = \begin{vmatrix} \sqrt{t} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{t} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{t} \end{vmatrix} = t^{3/2}. \quad (17)$$

У нас остается

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, z, t) = C \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(r_1 \sqrt{t} + x, r_2 \sqrt{t} + y, r_3 \sqrt{t} + z) \\ e^{-\frac{\pi i m}{h} (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)} dr_1 dr_2 dr_3, \end{aligned} \quad (18)$$

пусть t стремится к нулю; в пределе мы имеем:

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, z, 0) = f(x, y, z) \cdot C \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi i m}{h} r_1^2} dr_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi i m}{h} r_2^2} dr_2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi i m}{h} r_3^2} dr_3. \end{aligned} \quad (19)$$

Интегралы:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi i m}{h} r_k^2} dr_k = \sqrt{\frac{h}{\pi i m}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\frac{h}{i m}} \quad (20)$$

легко берутся.

¹ Дальнейшие вычисления были сделаны Фурье. Переход к пределу, приводящий от формулы (18) к формуле (19), не совсем строг, но рассуждение можно сделать вполне удовлетворительным. По этому вопросу см. три Эмilia Пикара: "Лекции о некоторых простых типах уравнений в частных производных" Paris, Gauthier-Villars, 1927, 2-ая лекция.

Произведение трех интегралов (19) равно следовательно $\left(\frac{\hbar}{im}\right)^{3/2}$ и, если для произвольной постоянной C мы выберем значение:

$$C = \left(\frac{im}{\hbar}\right)^{3/2}, \quad (21)$$

то получим:

$$\Psi(x, y, z, 0) = f(x, y, z). \quad (22)$$

Окончательно функция:

$$\Psi(x, y, z, t) = \left(\frac{im}{\hbar t}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0, y_0, z_0) e^{-\frac{\pi im}{\hbar t} [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]} dx_0 dy_0 dz_0 \quad (23)$$

является тем решением уравнения распространения (1), которое для $t \rightarrow 0$ приводится к $f(x, y, z)$. Задача распространения потока волн, сопряженных с частицей, решается таким образом совершенно строго.

2. Дальнейшие вычисления Дарвина для некоторого частного случая

Для того, чтобы развить вычисления, мы сделаем частную гипотезу о начальной форме потока волн.

Мы допустим, что $f(x, y, z)$ имеет вид:

$$f(x, y, z) = e^{-\frac{\lambda^2 + v^2 + z^2}{2\lambda^2}} e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} [mv_x x + mv_y y + mv_z z]}. \quad (24)$$

Нужно объяснить почему мы делаем такой выбор f . Мы допускаем, что в моменты времени близкие к $t \rightarrow 0$, поток волн имеет вид изученный в главе IV, § 3:

$$\Psi(x, y, z, t) = A(x, y, z, t) e^{2\pi i \left[v_x x + v_y y + \frac{mv_z z}{\hbar} \right]}, \quad (25)$$

где $\lambda = \frac{\hbar}{mv}$, следовательно, в момент времени $t \rightarrow 0$ этот поток волн приводится к

$$\Psi(x, y, z, 0) = A(x, y, z, 0) e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} [mv_x x + mv_y y + mv_z z]} \quad (26)$$

и вероятность присутствия частицы в точке x, y, z в этот начальный момент равна $A^2(x, y, z, 0)$. Мы принимаем момент времени

$t=0$ за начальный нашего подсчета потому, что мы полагаем, что в этот момент было сделано наблюдение над частицей. Результат этого начального наблюдения позволяет нам утверждать, что наиболее вероятным положением частицы после наблюдения является некоторая точка пространства P , которую мы примем для простоты за начало координат. Но здесь будет возможна некоторая ошибка, и по закону ошибок Гаусса результат начального наблюдения следует выразить так: вероятность того, что частица будет находиться в точке $x y z$ в момент времени 0 равна $e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2\sigma^2}}$, где σ тем меньше, чем опыт точнее.¹

Как только расстояние точки $x y z$ от начала координат станет равно некоторому кратному от σ , вероятность того, что начальные координаты суть x, y, z становится очень малой; можно, следовательно, сказать, что область, в которой может находиться частица в начальный момент времени, имеет размеры порядка σ . По принципу интерференции мы должны иметь:

$$A^2(x, y, z, 0) = e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2\sigma^2}}; \quad (27)$$

$$A(x, y, z, 0) = e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4\sigma^2}}$$

и в конце концов мы приходим к тому, что для $f(x, y, z)$ нужно взять выражение (21).

Общая формула (23) напишется здесь так:

$$\psi(x, y, z, t) = \left(\frac{im}{ht}\right)^{3/2} \prod_{xyz} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma^2} - \frac{2\pi i}{h} m v_x x_0 - \frac{\pi i m}{ht} (x-x_0)^2} dx_0. \quad (28)$$

Знак $\prod_{xyz}$ означает, что нужно взять произведение множителей, полученных из выражения, написанного после знака, путем замещения x через x_0 , y через y_0 и z через z_0 .

Пологая:
$$a = \frac{1}{2\sigma^2} + \frac{\pi im}{ht}; \quad b_x = \frac{2\pi im}{ht} (x - v_x t) \quad (29)$$

формулу (28) напомним более просто:

$$\psi(x, y, z, t) = \left(\frac{im}{ht}\right)^{3/2} \prod_{xyz} e^{-\frac{\pi im}{ht} x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a x_0^2 - b_x x_0} dx_0. \quad (30)$$

¹ В дальнейшем мы будем оценивать вероятности в относительных значениях и оставим в стороне постоянный множитель, который всегда легко найти.

Таким образом, мы имеем:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx} dx &= e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x-\frac{b}{2a})^2} dx \\ &= e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = e^{\frac{b^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \end{aligned} \quad (31)$$

и следовательно:

$$\Psi(x, y, z, t) = \left(\frac{\pi im}{ahl} \right)^{3/2} \prod_{xyz} e^{\frac{b_x^2}{4a} - \frac{\pi im}{ht} x^2}, \quad (32)$$

так как множитель $\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ входит три раза.

Подсчитаем $\left(\frac{\pi im}{ahl} \right)^{3/2}$.

$$\left(\frac{\pi im}{ahl} \right)^{3/2} = \left[-\frac{1}{1 + \frac{ht}{2\pi im \sigma^2}} \right]^{3/2} = \left[\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \frac{ht}{2\pi im}}} \right]^3. \quad (33)$$

Подсчитаем также $\frac{b_x^2}{4a}$

$$\frac{b_x^2}{4a} = \frac{\left(\frac{2\pi im}{ht} \right)^2 (x - v_x t)^2}{4 \cdot \frac{2\pi im}{ht} \left(\frac{1}{2} + \frac{ht}{4\pi im \sigma^2} \right)} = \frac{\frac{\pi im}{ht} (x - v_x t)^2}{1 - i \frac{ht}{2\pi m \sigma^2}}. \quad (34)$$

Умножая это на величину сопряженную знаменателю, получим:

$$\frac{b_x^2}{4a} = \frac{\frac{\pi im}{ht} \left(1 + \frac{iht}{2\pi m \sigma^2} \right)}{1 + \left(\frac{ht}{2\pi m \sigma^2} \right)^2} (x - v_x t)^2 = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{\pi im}{ht} \sigma^2}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m \sigma} \right)^2} (x - v_x t)^2. \quad (35)$$

Откуда наконец:

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, z, t) &= \left[\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \frac{ht}{2\pi im}}} \right]^3 e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-v_x t)^2 + (y-v_y t)^2 + (z-v_z t)^2}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m \sigma} \right)^2}} \\ &= e^{\frac{\pi im}{ht} \left[\frac{(x-v_x t)^2 + (y-v_y t)^2 + (z-v_z t)^2}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m \sigma} \right)^2} - x^2 - y^2 - z^2 \right]}. \end{aligned} \quad (36)$$

Положим, как обычно, $\Psi = a e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi}$, где a и φ вещественны. Легко найти, что:

$$a(x, y, z, t) = \sqrt{\Psi \Psi^*} = \left[\frac{\sigma}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m \sigma} \right)^2} \right]^{1/2} \quad (37)$$

$$e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-v_x t)^2 + (y-v_y t)^2 + (z-v_z t)^2}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m \sigma} \right)^2}}$$

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{m}{2t} \quad (38)$$

$$\left[\frac{\sigma^2 [(x-v_x t)^2 + (y-v_y t)^2 + (z-v_z t)^2] + (x^2 + y^2 + z^2)}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m \sigma} \right)^2} \right] + \Delta(t),$$

где $\Delta(t)$ есть некоторая функция времени, которую нам не имеет смысла вычислять точно.

Допустим на минуту, что размеры потока волн очень велики по отношению к длине волны $\lambda = \frac{h}{mv}$. Тогда σ много больше чем $\frac{h}{mv}$. Рассмотрим значение времени t , не очень большое по отношению к приведенному периоду $\frac{h}{\frac{1}{2} mv^2}$; мы будем иметь:

$$\sigma^2 \gg \frac{h^2}{m^2 v^2} \approx \frac{ht}{m}.$$

$\frac{ht}{2\pi m \sigma}$ можно пренебречь по сравнению с σ и выражение (36) для Ψ сведется к следующему:

$$\Psi(x, y, z, t) = e^{-\frac{(x-v_x t)^2 + (y-v_y t)^2 + (z-v_z t)^2}{2\sigma^2}} \quad (39)$$

$$e^{\frac{2\pi i}{h} \left[\frac{1}{2} m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) t - mv_x x - mv_y y - mv_z z \right]}.$$

Поток волн будет сохранять ту же форму, что и в начальный момент времени, так как амплитуда вся в целом будет перенесена в направлении распространения со скоростью v_x, v_y, v_z . В этих-то условиях и справедливы приближенные результаты, полученные в главе IV. Но здесь мы видим, что они

справедливы только в течение ограниченного времени. Всегда наступает момент, когда множителем $\left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2$ нельзя уже пренебрегать по сравнению с σ^2 ; амплитуда в точке с координатами $x=v_x t$, $y=v_y t$, $z=v_z t$ выражается еще функцией Гаусса, но σ^2 должно быть заменено через $\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2$; существует прогрессивное расплывание потока волн.

Такой же результат можно получить, рассматривая движение вероятности. Скорость элементов вероятности равна $-\frac{1}{m} \text{grad } \varphi$; ее составляющие, которые мы назовем ξ , η , ζ для того, чтобы не смешивать их с данными константами v_x , v_y , v_z , равны по (38):

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -\frac{1}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = v_x + \left(\frac{x}{t} - v_x\right) \frac{\left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2}; \\ \eta &= -\frac{1}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v_y + \left(\frac{y}{t} - v_y\right) \frac{\left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2}; \\ \zeta &= -\frac{1}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = v_z + \left(\frac{z}{t} - v_z\right) \frac{\left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Для достаточно малого t элементы вероятности все перемещаются практически со скоростью $\vec{v}$; облако вероятности перемещается все в целом в направлении распространения с этой скоростью. Но с увеличением времени элементы вероятности приобретают составляющую центробежной скорости в направлении перпендикулярном к их распространению, что влечет за собой расширение потока волн; одновременно элементы вероятности, расположенные впереди потока волн, в направлении их распространения получают большую скорость, чем скорость элементов, расположенных позади, откуда получается постепенное удлинение потока. Все это легко усмотреть из уравнений (40), если за направление распространения принять, например, ось z и положить, следовательно, $v_x=v_y=0$. Поток волн разворачивается таким образом по всем направлениям.

Кроме того, значение $a(x, y, z, t)$, заданное (37), находится в согласии с соотношениями неопределенности Гейзенберга.

В самом деле, неопределенность положения в начальный момент может быть измерена через σ . С другой стороны, мы можем допустить, по соотношениям Гейзенберга, что начальная неопределенность скорости равна:

$$\delta v = \frac{1}{m} \delta p = \frac{1}{m} \frac{h}{2\pi\sigma}.$$

Из этой неопределенности начальной скорости следует неопределенность положения равная $\frac{ht}{2\pi m\sigma}$ в момент времени t , и так как эта вторая неопределенность не зависит от неопределенности σ , то к σ^2 в знаменателе показателя степени в законе Гаусса нужно прибавить $\left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2$ для того, чтобы иметь вероятность положения в момент времени t , так как для независимых неопределенностей складываются их квадраты. Но это вполне согласуется с формулой (37), по которой, следуя принципу интерференции, вероятность найти частицу в момент времени t на расстоянии r от точки $x=v_x t$, $y=v_y t$, $z=v_z t$ пропорциональные

$$e^{-\frac{r^2}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2}}.$$

3. Измерение скорости двумя последовательными наблюдениями

Мы сохраним гипотезу (24) о форме $f(r, y, z)$ и следовательно о выражении (36) для Ψ . Тогда по (37) вероятность того, что опыт, сделанный в момент времени t , локализует частицу в элементе объема $dx dy dz$, будет равна

$$P(x, y, z, t) dx dy dz = \sigma^2(x, y, z, t) dx dy dz \quad (41)$$

$$= \left[\frac{\sigma}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2} \right]^3 e^{-\frac{(x-v_x t)^2 + (y-v_y t)^2 + (z-v_z t)^2}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2}} dx dy dz.$$

Мы используем эту формулу для того, чтобы математически проанализировать вопрос, затронутый в конце предыдущей главы, т. е. определение скорости частицы при помощи двух последовательных определений ее положения. Мы допускаем, что первое наблюдение, сделанное в момент времени 0, позволило локализовать частицу в начале координат с возможной ошибкой порядка σ . Второе наблюдение, сделанное в момент времени t , приписывает частице положение xuz ; тогда естественно сказать,

что частица после первого наблюдения обладала скоростью u с составляющими:

$$u_x = \frac{x}{t}; \quad u_y = \frac{y}{t}; \quad u_z = \frac{z}{t} \quad (42)$$

и количеством движения с составляющими:

$$p_x = \frac{mx}{t}; \quad p_y = \frac{my}{t}; \quad p_z = \frac{mz}{t}. \quad (43)$$

Эти значения на самом деле верны с точностью порядка $\frac{\sigma}{t}$, вследствие неопределенности, имеющей место в самом начальном положении; но, если мы возьмем очень большой интервал времени t между двумя наблюдениями, то этой неопределенностью можно будет пренебречь. Так как поток волн имеет теперь достаточное время на то, чтобы заметно расплестись между двумя наблюдениями, то второе наблюдение может локализовать частицу в какой угодно точке области пространства и отсюда следует, что, повторяя то же наблюдение в тех же условиях, мы будем находить разные значения для x, y, z и, следовательно, и для p_x, p_y, p_z ; мы не можем следовательно сказать, что p_x, p_y, p_z имеет вполне определенные значения и существует только некоторая вероятность того, что они имеют такие-то или такие-то значения.

Мы можем построить „пространство моментов“ при помощи трех переменных p_x, p_y, p_z . Каждое определение x, y, z дает одну точку этого пространства вследствие соотношений (43), а элементу объема $dx dy dz$ соответствует по хорошо известной теории анализа элемент объема пространства моментов $d\omega$ равный:

$$d\omega = dx dy dz \frac{D(p_x, p_y, p_z)}{D(x, y, z)} = \frac{m^3}{t^3} dx dy dz. \quad (44)$$

Вероятность $P(p_x, p_y, p_z, t)$ того, что второе наблюдение, сделанное в момент времени t , даст значение составляющих количества движения, соответствующих точке элемента объема $d\omega$, равна вероятности найти частицу в $dx dy dz$.

Отсюда: $I(p_x, p_y, p_z, t) d\omega = a^2(x, y, z, t) dx dy dz,$ откуда (45)

$$P(p_x, p_y, p_z, t) = \frac{t^3}{m^3} a^2(x, y, z, t). \quad (46)$$

Так как t предполагается очень большим, то мы можем удовлетвориться тем, что напомним:

$$a^2(x, y, z, t) = \left(\frac{2\pi m \sigma^2}{ht} \right)^3 e^{-\frac{4\pi^2 m^2 \sigma^4}{h^2 t^2} [(x-v_x t)^2 + (y-v_y t)^2 + (z-v_z t)^2]} \quad (47)$$

и, следовательно, принимая во внимание (43):

$$\begin{aligned} \frac{t^3}{m^3} a^2(x, y, z, t) &= P(p_x p_y p_z) \\ &= \left(-\frac{2\pi\sigma^2}{h} \right)^3 e^{-\frac{4\pi\sigma^2}{h} \cdot [(p_x - mv_x)^2 + (p_y - mv_y)^2 + (p_z - mv_z)^2]}. \end{aligned} \quad (48)$$

Таким образом, наиболее вероятные значения p_x, p_y, p_z суть mv_x, mv_y, mv_z ; если через $\delta p_x, \delta p_y, \delta p_z$ мы обозначим разности между действительными значениями и значениями наиболее вероятными, а через $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0$ неопределенности в начальных координатах, которые равны σ , то:

$$\begin{aligned} &P(\delta p_x, \delta p_y, \delta p_z) \\ &= \left(\frac{2\pi\sigma^2}{h} \right)^3 e^{-4\pi\sigma^2 \left[\left(\frac{\delta p_x}{h} \right)^2 + \left(\frac{\delta p_y}{h} \right)^2 + \left(\frac{\delta p_z}{h} \right)^2 \right]}. \end{aligned} \quad (49)$$

Из формулы (49) непосредственно следует, что произведение неопределенности в координате и неопределенности в соответствующем моменте после первого наблюдения должно быть порядка h , и мы опять приходим к идее Гейзенберга.

4. Точное решение для распространения потока волн Ψ в однородном постоянном поле

Распространение потока волн Ψ в однородном и постоянном поле определяется потенциальной функцией:

$$V(x, y, z) = -k_x x - k_y y - k_z z. \quad (50)$$

Найдем функцию преобразования для этого случая. Уравнение распространения имеет здесь вид:

$$\Delta \Psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (k_x x + k_y y + k_z z) \Psi = \frac{4\pi i m}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (51)$$

и функция $\Psi(x, y, z, t)$ вполне определена, если дается ее начальное значение $\Psi(x, y, z, 0) = f(x, y, z)$. Функция преобразования $T(x, y, z, t, x_0, y_0, z_0)$ должна быть такова, что:

$$\Psi(x, y, z, t) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0, y_0, z_0) T(x, y, z, t, x_0, y_0, z_0) dx_0 dy_0 dz_0. \quad (52)$$

Функция T , рассматриваемая как функция x, y, z , должна, следовательно, удовлетворять уравнению:

$$\Delta T + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (k_x x + k_y y + k_z z) T = \frac{4\pi i m}{h} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (53)$$

Положим как прежде:

$$T(x, y, z, t, x_0, y, z_0) = R(t) e^{\frac{2\pi i}{h} S(x, y, z, t, x_0, y, z_0)} \quad (54)$$

подставляя (54) в (53), получаем:

$$-\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + k_x x + k_y y + k_z z = \frac{\partial S}{\partial t} \quad (55)$$

и

$$m \frac{dR}{dt} = -\frac{1}{2} R \Delta S. \quad (56)$$

Для S можно, следовательно, взять функцию Якоби из старой механики. Мы видели (глава I, § 6), что функция:

$$S(x, y, z, t, x_0, y_0, z_0) = -\frac{m}{2t} \sum_{xyz} (x-x_0)^2 - \frac{t}{2} \sum_{xyz} k_x (x+x_0) + \frac{1}{24m} t^3 \sum_{xyz} k_x^2 \quad (57)$$

является решением уравнения (55). Тогда как в § 1 мы находили:

$$\Delta S = -\frac{3m}{t} \quad (58)$$

и для того, чтобы оправдывалось уравнение (56), нужно взять как и прежде:

$$R(t) = C t^{-3/2}. \quad (59)$$

Остается доказать, что функция:

$$\Psi(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0, y_0, z_0) e^{\frac{2\pi i}{h} \left[-\frac{m}{2t} \sum_{xyz} (x-x_0)^2 - \frac{t}{2} \sum_{xyz} k_x (x+x_0) + \frac{1}{24m} t^3 \sum_{xyz} k_x^2 \right]} dx_0 dy_0 dz_0 \quad (60)$$

приводится к $f(x, y, z)$ для $t=0$. Для этого мы воспользуемся еще раз заменю переменных (15) и следующую отсюда формулу (17); тогда выражение (60) принимает вид:

$$\Psi(x, y, z, t) = C \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+r_1 \sqrt{t}, y+r_2 \sqrt{t}, z+r_3 \sqrt{t}) e^{\frac{2\pi i}{h} \left[-\frac{m}{2} \sum_{1,2,3} r_i^2 - \frac{t}{2} \sum_{1,2,3} k_x (x+V_i \sqrt{t}) + \frac{t^3}{24m} \sum_{xyz} k_x^2 \right]} dr_1 dr_2 dr_3. \quad (61)$$

При стремлении t к нулю мы получаем в пределе:

$$\Psi(x, y, z, 0) = Cf(x, y, z) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi im}{h} r_1} dr_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi im}{h} r_2} dr_2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi im}{h} r_3} dr_3. \quad (62)$$

Мы видели, что для того, чтобы $\Psi(x, y, z, 0)$ равнялась $f(x, y, z)$, достаточно взять произвольную постоянную C равной $\left(\frac{im}{h}\right)^{3/2}$. Окончательно функция:

$$\Psi(x, y, z, t) = \left(\frac{im}{ht}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0 y_0 z_0) \quad (63)$$

$$e^{\frac{2\pi i}{h} \left[-\frac{m}{2t} \sum_{xyz} (x-x)^2 - \frac{t}{2} \sum_{xyz} k_x (x-x) + \frac{t}{2im} \sum_{xyz} k_x^2 \right]} dx_0 dy_0 dz_0$$

будет решением уравнения распространения и принимает для $t=0$ значение $f(x, y, z)$. Это и есть искомое решение.

5. Вычисление некоторого частного случая

Примем для $f(x, y, z)$ вид:

$$f(x, y, z) = e^{-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2a^2}} e^{-\frac{2\pi im}{h} (v_x^0 x + v_y^0 y + v_z^0 z)}, \quad (64)$$

где v_x^0, v_y^0, v_z^0 скорости соответствующие начальному движению частицы.

Получаем:

$$\Psi(x, y, z, t) = \left(\frac{im}{ht}\right)^{3/2} \prod_{xyz} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2a^2} - \frac{2\pi im}{h} v_x^0 x} e^{\frac{2\pi i}{h} \left[-\frac{m}{2t} (x-x)^2 - \frac{t}{2} k_x (x-x) + \frac{t}{2im} k_x^2 \right]} dx_0. \quad (65)$$

Положим:

$$a = -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi im}{ht}; \quad b_x = \frac{2\pi im}{ht} (x - v_x^0 t - \frac{1}{2} \frac{k_x}{m} t^2) \quad (66)$$

(65) преобразуется в выражение:

$$\Psi(x, y, z, t) = \left(\frac{im}{ht}\right)^{3/2} \prod_{xyz} e^{-\frac{\pi im}{ht}x - \frac{\pi i k_x t}{h}x + \frac{\pi i t}{12mh}k_x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a x^2 + b x} dx. \quad (67)$$

Вычисления, сделанные раньше, дают нам здесь:

$$\Psi(x, y, z, t) = \left(\frac{\pi im}{hta}\right)^{3/2} \prod_{xyz} e^{\frac{b x^2}{4a}} e^{-\frac{\pi im}{ht}x - \frac{\pi i k_x t}{h}x + \frac{\pi i t}{12mh}k_x}. \quad (68)$$

Для $\left(\frac{\pi im}{hta}\right)^{3/2}$ мы снова находим значение (33) и формула (35) заменяется здесь через:

$$\frac{b x^2}{4a} = \frac{1}{2} + \frac{\pi im}{ht} \sigma^2 \left(x - v_x t - \frac{1}{2} \frac{k_x}{m} t^2\right)^2. \quad (69)$$

Следовательно, для Ψ мы получаем:

$$\Psi(x, y, z, t) = \left[\sqrt{\frac{\sigma}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi im}\right)^2}} \right]^3 e^{-\frac{1}{2} \frac{\sum_{xyz} \left(x - v_x t - \frac{1}{2} \frac{k_x}{m} t^2\right)^2}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi im}\right)^2}} \cdot e^{\frac{\pi im}{ht} \left[\frac{\sum_{xyz} \left(x - v_x t - \frac{1}{2} \frac{k_x}{m} t^2\right)}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi im}\right)^2} - \frac{\sum_{xyz} \left(x + \frac{k_x}{m} t - \frac{k_x t^2}{12m}\right)}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi im}\right)^2} \right]}. \quad (70)$$

По принципу интерференции вероятность присутствия частицы в точке xyz в момент времени t будет:

$$a^2(x, y, z, t) = \Psi \cdot \Psi^* = \left[\sqrt{\frac{\sigma}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi im}\right)^2}} \right]^6 \cdot \frac{\left(x - v_x t - \frac{1}{2} \frac{k_x}{m} t^2\right)^2 + \left(y - v_y t - \frac{1}{2} \frac{k_y}{m} t^2\right)^2 + \left(z - v_z t - \frac{1}{2} \frac{k_z}{m} t^2\right)^2}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi im}\right)^2}. \quad (71)$$

Когда можно пренебречь $\left(\frac{ht}{2\pi im}\right)^3$ по сравнению с σ^2 (это всегда будет возможным, если h бесконечно мало), мы имеем

$$a^2(x, y, z, t) =$$

$$= \frac{\left(x - v_x^0 t - \frac{1}{2} \frac{k_x}{m} t^2\right)^2 + \left(y - v_y^0 t - \frac{1}{2} \frac{k_y}{m} t^2\right)^2 + \left(z - v_z^0 t - \frac{1}{2} \frac{k_z}{m} t^2\right)^2}{c^2} \quad (72)$$

и поток волн имеет тогда в момент времени t тот же вид вблизи точки с координатами:

$$x = v_x^0 t + \frac{1}{2} \frac{k_x}{m} t^2;$$

$$y = v_y^0 t + \frac{1}{2} \frac{k_y}{m} t^2;$$

$$z = v_z^0 t + \frac{1}{2} \frac{k_z}{m} t^2,$$

который он имел в момент времени 0 вблизи точки с координатами

$$x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

Поток волн перемещается как целое и движение его будет таким же, как и в классической теории. Но если членом $\left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2$ нельзя больше пренебречь, то размеры потока волн возрастают как:

$$\sigma' = \sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2}$$

и мы имеем увеличивающееся развертывание потока волн.

К тому же заключению можно прийти, подсчитывая скорости элементов вероятности. Пусть ξ, η, ζ будут составляющие этой скорости. Выражение (70) для Ψ показывает, что фаза φ задается так:

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{m}{2t}$$

$$\left[\sum_{xyz} \frac{\left(x - v_x^0 t - \frac{1}{2} \frac{k_x}{m} t^2\right)^2}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2} - \sum_{xyz} \left(x^2 + \frac{k_x}{m} x t^2 - \frac{k_x^2 t^4}{12m^2}\right) \right], \quad (73)$$

если оставить в стороне дополнительный член вида $\Delta(t)$, который не входит в подсчет ξ, η, ζ . Из (73) мы выводим:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -\frac{1}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = v_x^0 + \frac{k_x}{m} t + \left(\frac{x}{t} - v_x^0 - \frac{1}{2} \frac{k_x}{m} t \right) \frac{\left(\frac{ht}{2\pi m \sigma} \right)^2}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m \sigma} \right)^2}; \\ \eta &= -\frac{1}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v_y^0 + \frac{k_y}{m} t + \left(\frac{y}{t} - v_y^0 - \frac{1}{2} \frac{k_y}{m} t \right) \frac{\left(\frac{ht}{2\pi m \sigma} \right)^2}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m \sigma} \right)^2}; \\ \zeta &= -\frac{1}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = v_z^0 + \frac{k_z}{m} t + \left(\frac{z}{t} - v_z^0 - \frac{1}{2} \frac{k_z}{m} t \right) \frac{\left(\frac{ht}{2\pi m \sigma} \right)^2}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{2\pi m \sigma} \right)^2}. \end{aligned} \right\} (74)$$

Эти выражения показывают, что если членом $\left(\frac{ht}{2\pi m \sigma} \right)^2$ можно пренебречь по сравнению с σ^2 , элементы вероятности перемещаются все в целом с такой скоростью, которая, в классической механике, дается для частиц. Но когда начинает сказываться влияние члена $\left(\frac{ht}{2\pi m \sigma} \right)^2$, положение меняется; кроме скоростей, выведенных старой механикой, появляются скорости по отношению к точке:

$$x = v_x^0 t + \frac{1}{2} \frac{k_x}{m} t^2;$$

$$y = v_y^0 t + \frac{1}{2} \frac{k_y}{m} t^2;$$

$$z = v_z^0 t + \frac{1}{2} \frac{k_z}{m} t^2.$$

Следовательно, поток волн стремится развернуться по всем направлениям.

Допустим, что для определения скорости частицы после первого наблюдения, сделанного в момент времени $t=0$, мы делаем второе в момент t , которое локализует частицу в точке $x y z$; мы можем считать, что составляющие начальной скорости равны:

$$\begin{aligned}
 u_x^0 &= \frac{x}{t} - \frac{1}{2} \frac{h_x}{m} t; \\
 u_y^0 &= \frac{y}{t} - \frac{1}{2} \frac{h_y}{m} t; \\
 u_z^0 &= \frac{z}{t} - \frac{1}{2} \frac{h_z}{m} t.
 \end{aligned}
 \tag{75}$$

Возможную ошибку, получающуюся вследствие неопределенности z , существующей в начальном положении, мы сможем уменьшить настолько, насколько мы хотим, беря достаточно длинный интервал времени t . Следуя методу предыдущего параграфа, мы находим вероятность того, что второе наблюдение даст значения p_x^0, p_y^0, p_z^0 начальных составляющих количества движения равную:

$$\begin{aligned}
 &P(p_x^0, p_y^0, p_z^0) \\
 &= \left(\frac{2\pi z^2}{h} \right)^3 e^{-\frac{4\pi^2 z^2}{h^2} [(p_x^0 - mv_x^0)^2 + (p_y^0 - mv_y^0)^2 + (p_z^0 - mv_z^0)^2]}.
 \end{aligned}
 \tag{76}$$

Следовательно, наиболее вероятными значениями p_x^0, p_y^0, p_z^0 будут mv_x^0, mv_y^0, mv_z^0 ; обозначим через $\delta p_x^0, \delta p_y^0, \delta p_z^0$ разности между истинными и наиболее вероятными значениями и пусть $\delta x_0, \delta y, \delta z_0$ будут неопределенности, равные σ в начальных координатах; мы получаем:

$$\begin{aligned}
 &P(\delta p_x^0, \delta p_y^0, \delta p_z^0) \\
 &= \left(\frac{2\pi z^2}{h} \right)^3 e^{-4\pi^2 \left[\left(\frac{\delta p_x^0 \cdot \delta x_0}{h} \right)^2 + \left(\frac{\delta p_y^0 \cdot \delta y_0}{h} \right)^2 + \left(\frac{\delta p_z^0 \cdot \delta z_0}{h} \right)^2 \right]}.
 \end{aligned}
 \tag{77}$$

Мы снова приходим к соотношениям Гейзенберга между неопределенностями в координатах и неопределенностями в моментах, сопряженных им в начальном состоянии, после первого наблюдения.

ГЛАВА XIV

ВОЛНОВАЯ МЕХАНИКА СИСТЕМ ЧАСТИЦ

1. Обзор принципов старой динамики системы

До сих пор мы занимались только случаем одной частицы, перемещающейся в данном поле. Но часто приходится иметь дело с совокупностью частиц взаимодействующих друг с другом. Тогда мы не можем считать поле заданным, так как если мы выделим одну из частиц системы, то она будет подвергаться действию поля других частиц, движение которых зависит от положения самой рассматриваемой частицы. Следовательно, нужно определять одновременно движение всех частиц; решение этой

проблемы, принципиально довольно трудное, и составляет то, что называется в классических трактатах динамикой системы. Вспомним ее основные черты, исходя из механики Ньютона.

В классической механике очень легко перейти от динамики одной материальной точки к динамике системы, если принять новый принцип, принцип равенства действия противодействию, по которому сила производимая частицей a на частицу b равна силе производимой b на a и направлена противоположно ей.

Пусть мы имеем систему из N частиц, которые мы перенумеруем от 1 до N , отмечая прямоугольные координаты x_i, y_i, z_i i -той частицы. Функция Лагранжа для i -той частицы будет:

$$L_i(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) = T_i - F_i(x_1 \dots z_N t), \quad (1)$$

где T_i кинетическая энергия частицы равная

$$\frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2).$$

$F_i(x_1 \dots z_N t)$ — потенциальная энергия i -той частицы; она зависит от положения всех частиц системы и от того внешнего поля, в котором может находиться вся совокупность частиц. Мы напомним ее в виде:

$$F_i(x_1 \dots z_N t) = \sum_j F_{ij} + \mathfrak{F}_i(x_i, y_i, z_i, t). \quad (j=1 \dots N) \quad (2)$$

F_{ij} представляет собой ту часть потенциальной энергии i -той частицы, которая получается вследствие действия на нее j -той частицы; по определению F_{ii} будет равно нулю. Наконец $\mathfrak{F}_i(x_i, y_i, z_i, t)$ представляет собой действие внешнего поля, если оно существует, на i -тую частицу. Принцип равенства действия и противодействия выражается формулой ¹:

$$F_{ij} = F_{ji}. \quad (3)$$

Иначе говоря, таблица F_{ij} симметрична, причем диагональные члены равны нулю.

¹ В самом деле F_{ij} и F_{ji} суть функции только расстояния между i -той и j -той частицей:

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2};$$

из гипотезы выражаемой формулой (3) вытекает, следовательно, что:

$$-\frac{\partial F_{ij}}{\partial x_i} = \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial F_{ji}}{\partial x_j}.$$

и принцип равенства действия и противодействия удовлетворен.

Для каждой частицы мы можем написать уравнения Лагранжа:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L_i}{\partial \dot{x}_i'} \right] &= \frac{\partial L_i}{\partial x_i}; & \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L_i}{\partial \dot{y}_i'} \right] &= \frac{\partial L_i}{\partial y_i}; \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L_i}{\partial \dot{z}_i'} \right] &= \frac{\partial L_i}{\partial z_i}. \end{aligned} \quad (4)$$

Для всей системы в целом мы имеем $3N$ уравнений такого типа.

Классическая динамика системы резюмирует эти $3N$ уравнений, вводя функцию Лагранжа L , определяемую как:

$$L(x_1, y_1, \dots, z_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{z}_N) = \sum_i T_i - \frac{1}{2} \sum_{ij} F_{ij} - \sum_i F_i = T - F, \quad (5)$$

где

$$T = \sum_i T_i \quad \text{и} \quad F = \frac{1}{2} \sum_{ij} F_{ij} + \sum_i F_i,$$

где L функция Лагранжа для всей системы в целом; она не является суммой отдельных функций Лагранжа L_i , так как каждый член взаимодействия содержится в ней только один раз. Также и функция F названа потенциальной энергией всей системы; она не является суммой потенциальных энергий различных частиц. При помощи функции L , $3N$ уравнения Лагранжа напишутся так:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i'} \right] &= \frac{\partial L}{\partial x_i}; \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i'} \right] &= \frac{\partial L}{\partial y_i}; \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i'} \right] &= \frac{\partial L}{\partial z_i}. \quad (i = 1 \dots N) \end{aligned} \quad (6)$$

Так как мы имеем, таким образом, уравнения Лагранжа с одной только функцией L , зависящей от всех координат частиц системы, мы сможем установить теперь принцип стационарного действия для системы в целом. Для этого рассмотрим пространство $3N+1$ измерений, образованное при помощи $3N$ координат, N частиц системы и времени. Движение всей системы в этом пространстве представляется некоторой линией; каждая точка этой линии соответствует положению каждой частицы в данный момент времени. Линия, представляющая движение, происходящее между двумя точками P и Q с времен-

ными координатами t и t_1 , определяется принципом Гамильтона:
Интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_i \dot{q}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{ij} F_{ij} - \sum_i \mathfrak{Z}_i(x, y, z, t) \right] dt, \quad (7)$$

взятый вдоль кривой, является стационарным для всех бесконечно малых вариаций кривой, если концы ее закреплены. Этот принцип вполне точен, так как, пользуясь классическим методом вычисления вариаций, мы получаем из него $3N$ уравнений Лагранжа (6). Более того, принцип Гамильтона имеет инвариантный смысл, не зависящий от выбора переменных, при помощи которых мы задаем положение системы: если мы выразим $3N$ координат x, y, z , при помощи n переменных q_i в виде:

$$\begin{aligned} x_i &= f_i(q_1 \dots q_n); & y_i &= \varphi_i(q_1 \dots q_n); \\ z_i &= \psi_i(q_1 \dots q_n); & (i=1 \dots N), \end{aligned} \quad (8)$$

то функция L может быть выражена при помощи $2n+1$ переменных $q_1 \dots q_n, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_n, t$. Мы должны будем получить:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(q_1 \dots q_n, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_n, t) dt = 0, \quad (9)$$

где пределы t_0 и t_1 не варьируются. Вообще n равно $3N$, но если существуют „связи“, т. е. если обязательно должны выполняться некоторые соотношения между координатами N частиц, n может быть меньше $3N$ ¹. Число n независимых переменных, необходимых для определения системы, называется числом степеней свободы.

Так же, как в механике одной материальной точки, моменты p_i , сопряженные с переменными q_i , будут определены соотношениями:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (10)$$

что позволяет написать уравнения Лагранжа в виде:

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (11)$$

Точно также энергией мы называем величину:

$$W = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \quad (12)$$

¹ Для упрощения мы полагаем, что связи не зависят от времени.

и так как:

$$\frac{dW}{dt} = \sum_i \frac{dp_i}{dt} \dot{q}_i + \sum_i p_i \frac{d\dot{q}_i}{dt} - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (13)$$

в силу (10) и (11), то мы заключаем, что если внешнее поле не зависит от времени ($\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} \equiv 0$), то величина W остается постоянной.

Определение W (12) позволяет также выразить интеграл Гамильтона в виде криволинейного интеграла в пространстве $n+1$ измерений, образованного n координатами q_i и временем t , потому что:

$$\int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_P^Q \left(\sum_i p_i dq_i - W dt \right), \quad (14)$$

где P и Q конечные точки кривой, представляющей движение в пространстве q_i-t .

В случае, когда внешнее поле не зависит от времени и где ввиду этого энергия остается постоянной, принцип Гамильтона приводит к принципу наименьшего действия Мопертюи. Рассмотрим конфигурационное пространство, образованное при помощи только n переменных q_i (а не времени); в дальнейшем, это пространство n измерений будет играть важную роль. Совокупность положений частиц системы в данный момент изображается „представляющей точкой“ в этом пространстве и перемещение частиц системы представляется кривой, являющейся траекторией представляющей точки в конфигурационном пространстве. Принцип наименьшего действия Мопертюи заключается в следующем: траектория представляющей точки между двумя точками A и B конфигурационного пространства такова, что криволинейный интеграл

$$\int_A^B \sum_i p_i dq_i$$

взятый вдоль этой траектории, стационарен для всякого бесконечно малого изменения кривой интегрирования, которое не изменяет ни пределы A и B , ни значение энергии W . Если исходить из принципа Гамильтона, доказательство будет точно таким же, как и в I главе § 4, только здесь мы имеем n переменных q_i вместо трех.

Точно также, повторяя доказательства главы I § 5-6, изменяя только $\sum_1^3$ на $\sum_1^n$, найдем прежде всего уравнения Гамильтона;

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (15)$$

затем теорему касательных преобразований, которая выражается здесь в следующем виде:

„Преобразования переменных $\alpha_i = f_i(q_i, p_i, t)$ и $\beta_i = \varphi_i(q_i, p_i, t)$ таковы, что

$$\sum_1^n p_i dq_i - \sum_1^n \beta_i d\alpha_i = -dS(\alpha_i, q_i, t); \quad (16)$$

они сохраняют каноническую форму уравнений Гамильтона, если при этом первоначальная функция H заменяется функцией $K = H - \frac{\partial S}{\partial t}$, выраженной через новые переменные“.

При помощи последней теоремы, также как и для одной частицы, мы разовьем теорию уравнения Якоби (см. главу II) и придем к теореме Якоби: „Если найдем полный интеграл уравнения в частных производных первого порядка:

$$H\left(q_i, -\frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) = \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (17)$$

т. е. интеграл, зависящий от n произвольных постоянных α_i , мы будем иметь:

$$p_i = -\frac{\partial S(q_i, \alpha_i, t)}{\partial q_i} = \frac{\partial S(q_i, \alpha_i, t)}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (18)$$

где β_i суть n новых постоянных, а уравнения (18), определяющие $2n$ величин q_i, p_i в функции времени и $2n$ постоянных α_i, β_i полностью дают движение рассматриваемой системы с n степенями свободы“.

2. Переход от старой динамики системы к новой

Для того, чтобы перейти от волновой механики одной частицы к волновой динамике системы частиц, нельзя применять методы старой механики. Мы хотим этим сказать следующее: для того, чтобы применять методы старой механики, мы должны были бы рассматривать движение каждой частицы и ее сопряженной волны под действием полей, создаваемых другими частицами и внешнего поля, если оно имеется; затем вводя принцип действия и противодействия мы должны были бы одновременно искать решения задачи распространения N волн, сопряженных с N частицами системы. Действовать так едва ли представляется возможным и главной причиной является то, что затруднительно локализовать каждую частицу в некоторой точке волны; мы не можем выразить поле, в котором находится частица в функции положения других частиц потому, что эти положения точно не определены.

Для того, чтобы построить волновую динамику системы, Шредингер пошел совсем по другому пути, связанному с некоторыми принципиальными трудностями, но дающему прекрасные результаты, которыми мы и должны пока удовлетвориться. Но в своих попытках он не пошел дальше получения нерелятивистских уравнений; волновой релятивистской динамики системы еще не существует.

Шредингер берет а priori данное конфигурационное пространство n измерений, образованное при помощи переменных $q_1 \dots q_n$, которые определяют рассматриваемую систему с n степенями свободы.

Вместо того, чтобы в обычном пространстве связать с частицами столько волн, сколько существует частиц, он связывает с движением системы частиц одну волну, распространяющуюся в конфигурационном пространстве. Шредингер искал для этой волны уравнение распространения, которое с приближениями геометрической оптики совпадает со старой механикой.

По Шредингеру мы должны, следовательно, искать уравнение распространения, зависящее от таких переменных $q_1 \dots q_n, t$, что если решение написать в виде:

$$\Psi(q_1 \dots q_n, t) = a(q_1 \dots q_n, t) e^{\frac{2\pi i}{h} S(q_1 \dots q_n, t)}, \quad (19)$$

то выполняются следующие условия:

1. Когда справедливы приближения геометрической оптики, и в частности, если h считается бесконечно малой, то функция Ψ совпадает с функцией Якоби старой механики.

2. Если система состоит из одной частицы, мы должны возвратиться к уравнению распространения, справедливому для одной частицы.

3. Если система состоит из N частиц, которые не взаимодействуют друг с другом, уравнение распространения должно распасться на N различных уравнений типа, справедливого для одной частицы.

Но прежде, чем изучать законы распространения в конфигурационном пространстве, необходимо дополнить определение этого пространства, приписав ему метрику в римановском смысле, т. е. допуская, что квадрат элемента длины, соответствующий изменению dq_i координат q_i , выражается в каждой точке некоторой квадратичной формой $ds^2 = \sum_{ik} g_{ik} dq_i dq_k$. Мы сейчас уви-

дим как пужно выбирать g_{ik} . Но сначала мы должны вспомнить некоторые математические формулы, которые будут нам необходимы.

3. Несколько математических лемм

Рассмотрим Евклидово пространство n измерений и допустим сперва, что мы отмечаем точки этого пространства при помощи n координат x_i , таких, чтобы в каждой точке поверхности $x_i = \text{const}$

были бы гиперплоскостями, пересекающимися под прямыми углами; это система ортогональных координат. Тогда вблизи каждой точки все будет происходить так, как если бы мы имели Декартовы прямоугольные координаты и, следовательно, квадрат элемента длины имеет вид:

$$ds^2 = \sum_i dx_i^2. \quad (20)$$

Элемент объема будет:

$$d\tau = dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (21)$$

После замены переменных $q_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ мы немедленно определим любые криволинейные координаты. Обратно, x_i могут рассматриваться как функции q_i и выражение dx_i^2 можно написать так:

$$dx_i^2 = \sum_{kj} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_k dq_j. \quad (22)$$

Следовательно, ds^2 принимает вид:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_i \sum_{kj} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_k dq_j \\ &= \sum_{kj} \left[\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right] dq_k dq_j \\ &= \sum_{kj} g_{kj} dq_k dq_j. \end{aligned} \quad (23)$$

Полагая

$$g_{kj} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}, \quad (24)$$

имеем очевидно:

$$g_{kj} = g_{jk}. \quad (25)$$

Обозначим через $\left| \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \right|$ детерминант, общий член которого есть $\frac{\partial x_k}{\partial q_i}$; это функциональный детерминант $\frac{D(x_1 \dots x_n)}{D(q_1 \dots q_n)}$ от x_k по q_k . По правилу умножения детерминантов мы имеем:

$$\left[\left| \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \right| \right]^2 = \left| \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \right| = |g_{ik}|. \quad (26)$$

Следовательно, означая через g детерминант, образованный g_{ik} , мы имеем:

$$g = \left[\frac{D(x_1 \dots x_n)}{D(q_1 \dots q_n)} \right]^2. \quad (27)$$

Классическая теорема анализа о замене переменных дает тогда:

$$d\tau = dx_1 \dots dx_n = \sqrt{g} dq_1 \dots dq_n. \quad (28)$$

Таким образом мы получаем выражение элемента объема в функции от q_i и g_{ik} .

Пусть γ_{ik} будет минором элемента g_{ik} в детерминанте g . Положим:

$$g^{ik} = \frac{\gamma_{ik}}{g}, \quad (29)$$

откуда следует, что $g^{ik} = g^{ki}$. Из свойства детерминантов мы имеем:

$$\sum_k g^{ik} g_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{если } i = l \\ 0 & \text{если } i \neq l \end{cases}. \quad (30)$$

Формула (30) представляет собой n^2 линейных уравнений, которые полностью определяют n^2 величин g^{ik} в функции g_{ik} . Покажем, что решение (30) есть:

$$g^{ik} = \sum_j \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial q_i}{\partial x_j}. \quad (31)$$

В самом деле, принимая во внимание (24):

$$\begin{aligned} \sum_k g^{ik} g_{kl} &= \sum_k \sum_j \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \cdot \sum_m \frac{\partial x_m}{\partial q_k} \frac{\partial x_m}{\partial q_l} \\ &= \sum_{jm} \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_m}{\partial q_l} \cdot \sum_k \frac{\partial x_m}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (32)$$

Последняя сумма последнего члена равна $\frac{\partial x_m}{\partial x_j}$; она равна, следовательно, 0, если $m \neq j$ и 1, если $m = j$. Остается, следовательно:

$$\sum_k g^{ik} g_{kl} = \sum_j \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_l} = \frac{\partial q_i}{\partial q_l} = \begin{cases} 1 & \text{если } i = l \\ 0 & \text{если } i \neq l \end{cases}. \quad (33)$$

Уравнения (30) вполне удовлетворяются значениями (31).

Теперь мы будем искать общее выражение оператора Лапласа в любых координатах q_i ; в прямоугольных координатах x , оператор выражается по его определению как:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Мы будем исходить из следующего факта: если $f(x_1 \dots x_n)$ есть функция координат x_i конечная, однородная и непрерывная во всем рассматриваемом пространстве n измерений, равная нулю на бесконечности, то уравнение:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0 \quad (34)$$

выражает, что интеграл

$$\int \dots \int_n \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 d\tau,$$

взятый по всему пространству, стационарен для любой бесконечно малой вариации функции f , если вариация не нарушает непрерывности и однородности этой функции.

В самом деле, если мы варьируем f на δf в каждой точке пространства n измерений, то рассматриваемый интеграл претерпевает вариацию:

$$\begin{aligned} 2 \int \dots \int_n \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 d\tau &= \int \dots \int_n 2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) d\tau \\ &= - \int \dots \int_n 2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \delta f d\tau \end{aligned} \quad (35)$$

и для того, чтобы эта вариация равнялась нулю, при любых δf , необходимо и достаточно, чтобы оправдывалось уравнение (34).

Но мы можем также выразить интеграл:

$$\int \dots \int_n \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 d\tau$$

при помощи координат q_i , произведя в функции f замену переменных, чтобы перейти от x_i к q_i . Мы имеем в силу (31):

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_k \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial x_i}; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 = \sum_k \sum_l \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial q_l} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} \frac{\partial q_l}{\partial x_i} \quad (36)$$

и

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 = \sum_{kl} \left[\sum_i \frac{\partial q_k}{\partial x_i} \frac{\partial q_l}{\partial x_i} \right] \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial q_l} = \sum_{kl} g^{kl} \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial q_l}. \quad (37)$$

а (37) мы получаем:

$$\begin{aligned} \int \dots \int_n \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 d\tau &= \delta \int \dots \int_n \sum_{kl} g^{kl} \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial q_l} V \bar{g} dq_1 \dots dq_n \\ &= \int \dots \int_n \sum_{kl} g^{kl} \frac{\partial f}{\partial q_k} \delta \left(\frac{\partial f}{\partial q_l} \right) V \bar{g} dq_1 \dots dq_n \quad (38) \\ &= - \int \dots \int_n \sum_{kl} \frac{\partial}{\partial q_l} \left(g^{kl} V \bar{g} \frac{\partial f}{\partial q_k} \right) \delta f dq_1 \dots dq_n. \end{aligned}$$

Сравним эту последнюю формулу с формулой (35), которая является другим выражением той же самой величины, и вспомним, что

$$d\tau = dx_1 \dots dx_n = V \bar{g} dq_1 \dots dq_n. \quad (39)$$

Из видим, что необходимо следует:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = - \frac{1}{V \bar{g}} \sum_{kl} \frac{\partial}{\partial q_l} \left(V \bar{g} g^{kl} \frac{\partial f}{\partial q_k} \right). \quad (40)$$

Таково обобщенное выражение Лапласьяна в пространстве n измерений при помощи любых координат q_i . Вполне понятно, что если $n=3$, то мы получаем обычное выражение Лапласьяна Δ в любых криволинейных координатах.

4. Уравнение распространения в конфигурационном пространстве

Для того, чтобы иметь возможность рассматривать распространение в конфигурационном пространстве, нужно прежде всего приписать этому пространству метрику. Для этого мы будем исходить из кинетической энергии системы. Так как вся волновая динамика Шредингера — механика нерелятивистская, то мы возьмем для кинетической энергии выражение:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2), \quad (41)$$

где x_i, y_i, z_i — прямоугольные координаты i -той частицы, m_i ее масса, N число частиц системы и точки означают производные по времени. Если система обладает n степенями свободы, $3N$ координат системы могут быть выражены при помощи n переменных

$q_1, q_2, \dots, q_n$. Скорости будут выражены линейно в функции от $\dot{q}_i$, и T будет однородной квадратичной функцией $\dot{q}_i$.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{ik} \mu_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k. \quad (42)$$

μ_{ik} — вообще говоря есть функции q_i и $\mu_{ik} = \mu_{ki}$.

Функция Лагранжа $L = T - F$ зависит от $\dot{q}_i$ только через посредство T . Мы будем иметь следовательно:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_k \mu_{ik} \dot{q}_k, \quad (i=1 \dots n) \quad (43)$$

Формула (43) представляет собой систему n линейных уравнений, выражающих p_i в функции от $\dot{q}_i$; мы можем разрешить их по отношению к $\dot{q}_i$. Обозначим через ν_{ik} минор члена μ_{ik} в детерминанте $|\mu_{ik}| = \mu$ и положим:

$$\nu^{ik} = \frac{\nu^{ik}}{\mu}. \quad (44)$$

Получаем:

$$\dot{q}_i = \sum_{k,j} \nu^{ik} p_k. \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (45)$$

Легко получить классическое выражение теоремы Якоби. В самом деле, энергия, выраженная в функции от q_i, p_i и времени, будет:

$$H(q_i, p_i, t) = \frac{1}{2} \sum_{ik} \mu_{ik} \sum_j \nu^{ij} p_i \sum_l \nu^{lj} p_l + F(q, t), \quad (46)$$

где $F(q, t)$ потенциальная энергия системы. По теории определителей:

$$\sum_k \mu_{ik} \nu^{kl} = \begin{cases} 1 & \text{если } i = l \\ 0 & \text{если } i \neq l \end{cases}. \quad (47)$$

Откуда:

$$H(q_i, p_i, t) = \frac{1}{2} \sum_{ij} \nu^{ij} p_i p_j + F(q, t) \quad (48)$$

и уравнение Якоби (17) напишется так:

$$\frac{1}{2} \sum_{ij} \nu^{ij} \frac{\partial S}{\partial q_i} \frac{\partial S}{\partial q_j} + F(q, t) = \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (49)$$

Для определения метрики конфигурационного пространства, мы припишем μ_{ik} , μ^{ik} и μ ту роль, которую в последнем параграфе играли величины g_{ik} , g^{ik} и g . Другими словами, мы будем брать для ds^2 в конфигурационном пространстве выражение:

$$ds^2 = \sum_{ik} \mu_{ik} dq_i dq_k. \quad (50)$$

Следовательно, элемент объема в конфигурационном пространстве будет:

$$d\tau = \sqrt{\mu} dq_1 dq_2 \dots dq_n. \quad (51)$$

Обобщенный Лапласьян будет выражаться здесь как:

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\sqrt{\mu} \mu^{ik} \frac{\partial}{\partial q_k} \right]. \quad (52)$$

В случае одной частицы с массой m , мы должны были брать для нерелятивистского уравнения распространения, как функции приведенной волны, выражение:

$$\frac{1}{m} \Delta \Psi - \frac{8\pi^2}{h^2} F \Psi = \frac{4\pi i}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (53)$$

Обобщая это выражение, Шредингер принял за уравнение распространения в конфигурационном пространстве следующее:

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\sqrt{\mu} \mu^{ik} \frac{\partial \Psi}{\partial q_k} \right] - \frac{8\pi^2}{h^2} F(q_i, t) \Psi = \frac{4\pi i}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (54)$$

Мы должны проверить, что это уравнение удовлетворяет трем условиям, приведенным в предпоследнем параграфе.

1. Когда имеют место условия геометрической оптики и частности, когда постоянную h можно считать бесконечно малой, функция Ψ удовлетворяет уравнению Якоби.

В самом деле, положим как всегда:

$$\Psi(q_i, t) = a(q_i, t) e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi(q_i, t)},$$

где a и φ вещественные функции,

Подставляя это в (54), сокращая вещественные члены, и затем пренебрегая членами, не содержащими h^2 в знаменателе, мы находим:

$$\frac{1}{2} \sum_{ij} \mu^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \varphi}{\partial q_j} + F(q_i, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (55)$$

Функция φ удовлетворяет, следовательно, уравнению Якоби (49) и в этой степени приближения она может быть отождествлена с функцией Якоби в старой механике.

2. Если система состоит из одной частицы, то мы опять возвращаемся к уравнению (53).

В самом деле, обозначим через m массу частицы и возьмем прямоугольные оси координат. Мы имеем $T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ и следовательно:

$$\mu_{ik} = \begin{cases} m & \text{для } i = k, \\ 0 & \text{для } i \neq k, \end{cases} \quad \mu = m^3 \quad (56)$$

$$\mu^{ik} = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{для } i = k, \\ 0 & \text{для } i \neq k \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

Подставляя значения (56) в общее уравнение (54), мы снова получаем (53).

3. Если система состоит из N частиц не взаимодействующих друг с другом, то уравнение распространения разлагается на N различных уравнений типа уравнения для одной частицы.

В самом деле, пусть m_i масса i -той частицы. Возьмем прямоугольные координаты. Мы имеем:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2),$$

откуда:

$$\left. \begin{aligned} \mu_{ik} &= 0 \text{ для } i \neq k & \mu_{11} &= \mu_{22} = \mu_{33} = m_1 \dots \\ \mu_{3i-2, 3i-2} &= \mu_{3i-1, 3i-1} = \mu_{3i, 3i} = m_i \\ \mu &= m_1^3 \cdot m_2^3 \cdot m_3^3 \dots m_N^3 \\ \mu^{ik} &= 0 \text{ для } i \neq k & \mu^{11} &= \mu^{22} = \mu^{33} = \frac{1}{m_1} \dots \\ \mu^{3i-2, 3i-2} &= \mu^{3i-1, 3i-1} = \mu^{3i, 3i} = \frac{1}{m_i} \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Так как F приводится к $\sum \delta_i(x, y, z, t)$, уравнение (54) дает:

$$\sum_i \left[\frac{1}{m_i} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z_i^2} \right) - \frac{8\pi^2}{h^2} \mathfrak{H}_i(x, y, z, t) \Psi \right] = \frac{4\pi i}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (58)$$

Положим тогда:

$$\Psi(x, \dots, z_N, t) = \Psi_1(x_1, y_1, z_1, t) \cdot \Psi_2(x_2, y_2, z_2, t) \dots \Psi_N(x_N, y_N, z_N, t). \quad (59)$$

Мы получаем N уравнений вида:

$$\frac{1}{m_i} \left(\frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial z_i^2} \right) - \frac{8\pi^2}{h^2} F_i(x_i, y_i, z_i, t) \Psi_i = \frac{4\pi i}{h} \frac{\partial \Psi_i}{\partial t}. \quad (i=1, 2 \dots N) \quad (60)$$

Эти уравнения распространения справедливы для изолированных частиц. Мы доказали, таким образом, что уравнение (54) отвечает трем условиям, необходимость которых была видна *a priori*.

Если система образована из N частиц, взаимодействующих друг с другом, но не подверженных связям, конфигурационное пространство можно построить при помощи $3N$ прямоугольных координат x_i, z_N ; μ_{ik} и μ^{ik} имеют тогда значения (57) и уравнения распространения принимают вид:

$$\sum_i \frac{1}{m_i} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z_i^2} \right) - \frac{8\pi^2}{h^2} F(x_1 \dots z_N, t) \Psi = \frac{4\pi i}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (61)$$

Все формулы, которые мы даем, нерелятивистские: до сих пор не оказалось возможным найти уравнение распространения, удовлетворяющее теории относительности. Более того, мы рассмотрели распространение волны в фиктивном конфигурационном пространстве; не оказалось также возможным заменить распространение одной волны в конфигурационном пространстве распространением одной или нескольких волн в обычном пространстве. Эта невозможность связать распространение волны с движением системы в обычном пространстве как будто еще раз дает нам аргумент в пользу все более и более прививающейся мысли, что сопряженная волна не является физической реальностью, но дает только простое символическое представление вероятности.

ГЛАВА XV

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ВОЛНЫ, СОПРЯЖЕННОЙ С ДВИЖЕНИЕМ СИСТЕМЫ

1. Приближение геометрической оптики

Для интерпретации значения многомерной волны, сопряженной с системой, мы будем исходить из уравнения распространения:

$$\frac{1}{V \mu} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_k} \left[V \mu \mu^{ik} \frac{\partial \Psi}{\partial q_k} \right] - \frac{8\pi^2}{h^2} F \Psi = \frac{4\pi i}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (1)$$

Мы всегда будем писать Ψ в виде:

$$a(q_1, \dots, q_n, t) e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi(q_1, \dots, q_n, t)},$$

подставляя в (1) и приравнявая нулю отдельно действительные и мнимые члены, получаем:

$$\frac{1}{2} \sum_{ik} \mu^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \varphi}{\partial q_k} + F(q_1, \dots, q_n, t) \quad (2)$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{h^2}{2\pi^2 a} \frac{1}{V \mu} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[V \mu \mu^{ik} \frac{\partial a}{\partial q_k} \right].$$

$$\sum_{ik} \mu^{ik} \frac{\partial a}{\partial q_i} \frac{\partial \varphi}{\partial q_k} + \frac{1}{2} a \frac{1}{V \mu} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[V \mu \mu^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial q_k} \right] = \frac{\partial a}{\partial t}. \quad (3)$$

В этом параграфе мы будем пользоваться приближениями геометрической оптики, т. е. пренебрежем последним членом уравнения (2). Как мы уже доказали, функция φ удовлетворяет классическому уравнению Якоби. Мы можем, следовательно, считать здесь, что классическая механика справедлива, и определить моменты Лагранжа как:

$$p_i = \sum_k \mu_{ik} \dot{q}_k = - \frac{\partial S}{\partial q_i} = - \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}, \quad (4)$$

решая относительно $\dot{q}$, получаем:

$$\dot{q}_i = \sum_k \mu^{ik} p_k = - \sum_k \mu^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial q_k}. \quad (5)$$

Подставляя значения $\sum_{ik} \mu^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial q_k}$ в уравнении (3). Оно принимает вид:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial a}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{1}{2} a \frac{1}{V \mu} \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} [V \mu \dot{q}_i] = 0. \quad (6)$$

Умножая на $2a$, легко получаем:

$$\frac{\partial(a^2)}{\partial t} + \frac{1}{V \mu} \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} [V \mu a^2 \dot{q}_i] = 0. \quad (7)$$

Мы истолкуем это уравнение (7) также, как мы сделали для соответствующего уравнения отдельной частицы.

Пусть $\varphi(q_1 \dots q_n, t, z_1 \dots z_n)$ есть полный интеграл уравнения Якоби (которому в нашей степени приближения удовлетворяет φ). По теории Якоби классические уравнения движения будут следующими:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z_i} = \beta_i, \quad (i=1, 2 \dots n) \quad (8)$$

Той же функции φ , т. е. тому же значению константы α , соответствует бесконечно много возможных движений, зависящих от выбора констант β_i . Мы будем говорить еще, что эти движения принадлежат к одному и тому же классу. Движение всей системы в целом определяется перемещением ее представляющей точки в конфигурационном пространстве, определенном уравнениями (8).

Вместо того, чтобы рассматривать систему, мы можем рассматривать совокупность систем, обладающих движением одного и того же класса; в конфигурационном пространстве этой совокупности систем соответствует облако представляющих точек, приписанных одной и той же волне Ψ ; скорости этих центров тяжести будут даны формулой (5).

Движение облака представляющих точек, которое мы представили себе, должно подчиняться гидродинамическому уравнению непрерывности. Легко найти, как выражается это уравнение в конфигурационном пространстве. В самом деле, рассмотрим малый элемент объема в этом пространстве, ограниченный поверхностями:

$$q_i = c_i; \quad q_i = c_i + dq_i, \quad (i=1, 2 \dots n) \quad (9)$$

Ребра этого маленького параллелепипеда направлены по координатным осям q_i и имеют длину $dq_1 \dots dq_n$. Рассмотрим одну из координат q_k , где k имеет заданное значение. Сквозь плоскость элементарного параллелепипеда с координатами $q_k = c_k$ за время dt проходит число представляющих точек, равное объему маленького параллелепипеда с этой плоскостью, взятой как

основание и с ребром длины $q_k dt$ в направлении координаты q_k . Если $\rho(q_1 \dots q_n, t)$ означает плотность облака представляющих точек на рассматриваемой поверхности, то поток, который надо найти, будет:

$$\rho V \sqrt{\mu} dq_1 \dots dq_{k-1} \quad dq_{k+1} \dots dq_n \cdot q_k dt. \quad (10)$$

Поток сквозь поверхность параллельную $q_k = c_k + dq_k$ также равен:

$$\left[\rho V \sqrt{\mu} q_k + \frac{\partial}{\partial q_k} (\rho V \sqrt{\mu} q_i) dq_i \right] dq_1 \dots dq_{k-1} dq_{k+1} \dots dq_n dt \quad (10')$$

и разность двух потоков будет:

$$-\frac{\partial}{\partial q_k} (\rho \sqrt{V} q_k) dq_1 \dots dq_n dt. \quad (11)$$

Рассуждая также для $n-1$ других пар поверхностей, получаем избыток:

$$-\sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} (\rho \sqrt{V} q_k) dq_1 \dots dq_n dt. \quad (12)$$

Это выражение должно быть равно увеличению числа представляющих точек в элементе объема равном $\frac{\partial \rho}{\partial t} dt \sqrt{V} dq_1 \dots dq_n$. Окончательно для уравнения непрерывности получаем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sqrt{V} \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} (V q_k \rho) = 0. \quad (13)$$

Сравнивая (13) с (7), мы видим затем, что нужно положить

$$\rho(q_1 \dots q_n t) = K a^2(q_1 \dots q_n t). \quad (14)$$

Этот результат можно выразить в терминах вероятности, говоря: если мы рассматриваем систему с n степенями свободы, о которой известно, что движение принадлежит к определенному классу, но не известна точно начальная конфигурация, то интенсивность волны, сопряженной с системой в конфигурационном пространстве, измеряет в каждой точке этого пространства и в каждый момент времени вероятность присутствия представляющей точки системы.

Можно также заменить облако представляющих точек потоком вероятности, элементы которого описывают различные возможные траектории, задаваемые старой динамикой для представляющей точки с плотностью пропорциональной a^2 и который измеряет вероятность присутствия в каждой точке конфигурационного пространства. Мы можем, следовательно, в приближении геометрической оптики, удовлетворить принципу интерференции, сохраняя представление того, что частицы имеют вполне определенное положение в пространстве и что, следовательно, и представляющая точка имеет также в каждый момент вполне определенное положение в конфигурационном пространстве. Для систем, также как и для отдельной частицы, трудности начнутся тогда, когда мы выходим за пределы геометрической оптики.

2. Общий случай. Движение вероятности

Когда приближения геометрической оптики перестают быть оправданными, мы не можем более пренебрегать последним членом в уравнении (2). Принцип интерференции мы принимаем всегда как постулат, по которому квадратом амплитуды волны измеряется вероятность: присутствия представляющей точки в каждый момент в каждой точке конфигурационного пространства. С волной Ψ мы всегда должны связывать облако вероятности, движение которого в конфигурационном пространстве должно быть таково, чтобы оправдывался принцип интерференции. Мы придем к этому, определяя скорость элементов вероятности соотношениями:

$$q_i = - \sum_k \mu_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial q_k}. \quad (15)$$

Условие гидродинамической непрерывности действительно удовлетворено благодаря уравнению (3), если положить $\rho = a^2$.

Движение элементов вероятности, определяемое (15), можно изучать также как и в главе IX. Уравнение (2), заменяющее уравнение Якоби, можно написать так:

$$\frac{1}{2} \sum_{ik} \mu_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \varphi}{\partial q_k} + F + F_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (16)$$

полагая

$$F_1(q_1 \dots q_n, t) = - \frac{\hbar^2}{8\pi^2 a} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\frac{1}{\mu} \mu_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial q_k} \right]. \quad (17)$$

Можно сказать, что элементы вероятности движутся так, как если бы существовала дополнительная потенциальная энергия $F_1(q_1 \dots q_n, t)$, которую можно назвать „квантовым потенциалом“, которая зависит от амплитуды волны a , следовательно, от плотности облака вероятности.

Введем функцию Лагранжа для элементов вероятности. Она есть функция q_i , $\dot{q}_i$ и t и задается формулой:

$$L(q_1 \dots q_n, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_n, t) = \frac{1}{2} \sum_{ik} \mu_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k - F(q_i, t) - F_1(q_i, t). \quad (18)$$

Производные:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_k \mu_{ik} \dot{q}_k \quad (19)$$

суть моменты элементов вероятности, сопряженные с переменными q_i . По (15) мы имеем:

$$p_i = - \sum_{kj} \mu_{ik} \mu^{kj} \frac{\partial \varphi}{\partial q_j} = - \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \quad (20)$$

Наконец величина:

$$W = \sum_i p_i \dot{q}_i = L = \frac{1}{2} \sum_{ik} \mu_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k + F + F_1 \quad (21)$$

играет роль энергии.

Как в главе IX мы будем искать уравнение движения для элементов вероятности, вычисляя $\frac{dp_i}{dt}$:

$$\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= \sum_k \frac{\partial p_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial p_i}{\partial t} = \sum_{kl} \mu^{kl} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_l \partial q_k} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_i \partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\sum_{kj} \frac{1}{2} \mu^{kj} \frac{\partial \varphi}{\partial q_k} \frac{\partial \varphi}{\partial q_j} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] - \frac{1}{2} \sum_{kj} \frac{\partial \varphi}{\partial q_k} \frac{\partial \varphi}{\partial q_j} \frac{\partial \mu^{kj}}{\partial q_i} \end{aligned} \quad (22)$$

Отсюда в силу (2) и (19)

$$\frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial (F + F_1)}{\partial q_i} - \frac{1}{2} \sum_{kj} \frac{\partial \mu^{kj}}{\partial q_i} \sum_l \mu_{jl} \dot{q}_l \sum_m \mu_{km} \dot{q}_m \quad (23)$$

но мы имеем:

$$\sum_l \mu^{kl} \mu_{jl} = \begin{cases} 0 & \text{если } k \neq l \\ 1 & \text{если } k = l \end{cases} \quad (24)$$

$$\sum_j \frac{\partial \mu^{kj}}{\partial q_i} \mu_{jl} = - \sum_j \mu^{kj} \frac{\partial \mu_{jl}}{\partial q_i} \quad (25)$$

Формула (23) напишется, следовательно:

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{kjl m} \mu^{kj} \frac{\partial \mu_{jl}}{\partial q_i} \mu_{km} \dot{q}_l \dot{q}_m - \frac{\partial}{\partial q_i} [F + F_1] \quad (26)$$

и вспоминая определение (18)

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (27)$$

Это и есть уравнения в форме Лагранжа.

Член $-\frac{\partial F}{\partial q_i}$ в (25) есть составляющая силы в обычном смысле, вдоль оси.

Член:

$$\frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \frac{\partial v_{ij}}{\partial q_i} \dot{q}_j \dot{q}_i$$

вводится вследствие выбора координат q_i и соответствует центробежным силам и силам связи. Эти два члена имеются в уравнениях движения старой механики; если мы можем пренебречь $-\frac{\partial F_1}{\partial q_i}$, движение элементов вероятности совпадает с движением представляющих точек того же класса в классической динамике. Но если членом $-\frac{\partial F_1}{\partial q_i}$ нельзя пренебречь, то все происходит так, как если бы элементы вероятности испытывали, кроме действия классических сил, действие сил „квантовых“, происходящих от квантового потенциала F_1 . При этом, даже в отсутствии всяких сил в старом смысле, мы не имеем более закона сохранения энергии и количества движения для элементов вероятности.

3. Теорема Эренфеста

В случае системы, образованной из частиц не подверженных связям, мы можем избавиться от членов F_1 при помощи интегрирования распространенного на все конфигурационное пространство и найти теорему аналогичную теореме Эренфеста для одной частицы (см. главу IX, § 3).

Мы будем считать, что волна Ψ в конфигурационном пространстве ограничена так, что амплитуда a и ее производные в бесконечности будут равны нулю и начнем с доказательства атоматической леммы, обобщающей формулу (21) главы IX.

Лемма. Пусть мы имеем две функции $U(q_1 \dots q_n)$ и $V(q_1 \dots q_n)$ координатами q_i . Если обе эти функции конечны, непрерывны, однородны и равны нулю на бесконечности в конфигурационном пространстве, то мы имеем:

$$\begin{aligned} \int \dots \int U \frac{1}{V} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(V \mu_{ik} \frac{\partial V}{\partial q_k} \right) d\tau \\ = \int \dots \int V \frac{1}{V} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(V \mu_{ik} \frac{\partial U}{\partial q_k} \right) d\tau, \end{aligned} \quad (28)$$

где интегралы распространены на все конфигурационное пространство.

В самом деле, вследствие того, что U и V равны нулю на бесконечности, интеграл слева, при помощи интегрирования по частям, принимает следующую форму:

$$\begin{aligned} & \int \dots \int_n U \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(V^{-\mu} \mu^{ik} \frac{\partial V}{\partial q^k} \right) dq_1 \dots dq_n \\ &= - \int \dots \int_n V^{-\mu} \sum_{ik} \frac{\partial V}{\partial q_k} \frac{\partial U}{\partial q_i} dq_1 \dots dq_n \\ &= \int \dots \int_n V \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_k} \left(V^{-\mu} \mu^{ik} \frac{\partial U}{\partial q_i} \right) dq_1 \dots dq_n \\ &= \int \dots \int_n V \frac{1}{V^{-\mu}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(V^{-\mu} \mu^{ik} \frac{\partial U}{\partial q_k} \right) d\tau \end{aligned} \quad (29)$$

и лемма установлена.

Мы будем называть „средним значением функции $f(q_1 \dots q_n, t)$ по облаку вероятности в момент времени t “ величину:

$$\bar{f} = \int \dots \int_n f(q_1 \dots q_n, t) a^2(q_1 \dots q_n, t) d\tau. \quad (30)$$

Так как по предположению мы рассматриваем систему без связей, то мы можем взять за координаты q_i $3N$ прямоугольных координат N частиц системы. Тогда мы имеем:

$$\begin{aligned} \mu_{ik} &= \mu^{ik} = 0 && \text{если } i \neq k \\ \mu_{jj} &= \frac{1}{\mu^{jj}} = m_i && \text{для } j = 3i - 2, 3i - 1, 3i \\ \mu &= (m_1 m_2 \dots m_n)^3, \end{aligned} \quad (31)$$

где величина m_i есть масса i -той частицы. Так как μ_{ik} константы, то уравнения движения (25) приводятся к:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = f_i + \frac{h^2}{8\pi^2} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\frac{1}{a V^{-\mu}} \sum_{kl} \frac{\partial}{\partial q_k} \left(V^{-\mu} \mu^{kl} \frac{\partial a}{\partial q_l} \right) \right]. \quad (32)$$

Выписывая уравнение (32), мы принимали во внимание определение (17) F_1 и обозначили через f_i составляющую силы в классическом смысле вдоль оси q_i .

Умножим (32) на $a^2 d\tau$ и проинтегрируем по всему конфигурационному пространству:

$$\frac{d\bar{p}_i}{dt} = \bar{f}_i + \frac{h^2}{8\pi^2} \int \dots \int_n a^2 \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\frac{1}{a V^{-\mu}} \sum_{kl} \frac{\partial}{\partial q_k} \left(V^{-\mu} \mu^{kl} \frac{\partial a}{\partial q_l} \right) \right] d\tau. \quad (33)$$

Мы хотели доказать, что интеграл равен нулю. В самом деле, в силу значений величин (31) мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} & \int \dots \int a^2 \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\frac{1}{a V} \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} V^{\mu_{kk}} \frac{\partial a}{\partial q_i} \right] d\tau \\ &= \int \dots \int a^2 \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\frac{1}{a} \sum_k \mu_{kk} \frac{\partial^2 a}{\partial q_k^2} \right] d\tau \\ &= \int \dots \int \left[a \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_k \mu_{kk} \frac{\partial^2 a}{\partial q_k^2} \right) - \frac{\partial a}{\partial q_i} \sum_k \mu_{kk} \frac{\partial^2 a}{\partial q_k^2} \right] d\tau \\ &= \int \dots \int \left[a \sum_k \mu_{kk} \frac{\partial^3 a}{\partial q_i \partial q_k^2} - \frac{\partial a}{\partial q_i} \sum_k \mu_{kk} \frac{\partial^2 a}{\partial q_k^2} \right] d\tau \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Но в силу (31) формула (28) дает:

$$\int \dots \int U \sum_k \mu_{kk} \frac{\partial^2 V}{\partial q_k^2} d\tau = \int \dots \int V \sum_k \mu_{kk} \frac{\partial^2 U}{\partial q_k^2} d\tau. \quad (35)$$

Приравняем в этой формуле $U=a$ и $V=\frac{\partial a}{\partial q_i}$, что возможно, так как a и ее производные удовлетворяют условиям, налагаемым леммой на функции U и V . Тогда мы видим, что второй член (34) равен нулю, и для (33) получаем:

$$\frac{dp_i}{dt} = f_i, \quad i=(1, 2 \dots 3N) \quad (36)$$

Формула (36) дает теорему Эренфеста для системы. Мы можем также придать этой теореме другой смысл, аналогичный другому толкованию в случае одной частицы в § 3, главы IX, но здесь это будет менее просто, потому что массы, соответствующие различным координатам, различны в зависимости от того, к каким материальным точкам относятся координаты. Мы ограничимся тем, что напомним формулу, которая дает эту вторую форму теоремы Эренфеста:

$$\mu_{ii} \frac{d^2 \bar{q}_i}{dt^2} = \bar{f}_i, \quad i=(1, 2 \dots 3N) \quad (36')$$

Если нет внешнего поля или если внешнее поле не зависит от времени, можно найти теорему аналогичную закону сохранения энергии. Действительно мы покажем, что, как и в предыдущей главе, исходя из определения энергии элементов вероятности (21), мы имеем:

$$\frac{dW}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (37)$$

Умножая на a^2 и интегрируя по всему конфигурационному пространству, мы имеем:

$$\frac{d\bar{W}}{dt} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial t} - \frac{h^2}{8\pi^2} \int \dots \int a^2 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{a} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} V \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial q_k} \right] d\tau. \quad (38)$$

Интеграл можно также написать так:

$$\begin{aligned} & \int \dots \int a^2 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{a} \sum_k \mu^{kk} \frac{\partial^2 a}{\partial q_k^2} \right] d\tau = \\ & = \int \dots \int \left(a \sum_k \mu^{kk} \frac{\partial^2 a}{\partial q_k^2} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial a}{\partial t} \sum_k \mu^{kk} \frac{\partial^2 a}{\partial q_k^2} \right) d\tau. \end{aligned} \quad (39)$$

Если в формуле (35) мы положим $U=a$ и $V=\frac{\partial a}{\partial t}$, мы увидим, что интеграл (39) равен нулю и (38) даст окончательно:

$$\frac{d\bar{W}}{dt} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial t}. \quad (40)$$

Если внешнее поле не зависит от времени ($\frac{\partial F}{\partial t}=0$), остается:

$$\frac{d\bar{W}}{dt} = 0. \quad (41)$$

Эта теорема заменяет собой закон сохранения энергии для элементов вероятности.

4. Интерпретация Бора и Гейзенберга

Здесь, как и в случае одной частицы, можно было бы попробовать развить теорию волны-пилота сохраняя классическую идею, что все частицы системы имеют вполне определенное положение в пространстве и что, следовательно, представляющая точка также имеет вполне определенное положение в конфигурационном пространстве в каждый момент времени. Мы будем принимать, что представляющая точка, сопряженная с волной Ψ , обладает движением определенным формулой (15), т. е. совпадает с одним из элементов вероятности; если неизвестно с каким элементом вероятности совпадает представляющая точка, то вероятность того, что она находится в момент времени t в элементе объема $d\tau$ конфигурационного пространства, будет очевидно равна числу элементов вероятности, содержащихся в этот момент в $d\tau$, и по (14) принцип интерференции автоматически имеет место. К несчастью, мы снова встречаемся здесь с трудностями, с которыми столкнулась теория волны-пилота для одной частицы; здесь даже еще труднее считать, что эта

теория дает правильную физическую картину явления, вследствие абстрактного и фиктивного характера распространения волны в конфигурационном пространстве.

Оставив, следовательно, в стороне теорию волны-пилота, посмотрим, как идеи Бора и Гейзенберга приложимы к случаю системы. За основные гипотезы мы примем, с одной стороны, принцип интерференции, по которому интенсивность сопряженной волны системы $\Psi^*\Psi$ дает в каждой точке и в каждый момент вероятность присутствия представляющей точки в конфигурационном пространстве и, с другой стороны, принцип спектрального разложения, по которому относительные интенсивности различных монохроматических составляющих, из которых образован поток волн Ψ , дают относительные вероятности различных состояний движения. Все представления, применяемые для одной частицы, легко могут быть перенесены на случай N частиц и мы снова находим соотношение неопределенности Гейзенберга:

$$\Delta q_i \cdot \Delta p_i \geq h. \quad (42)$$

Причину неопределенности Гейзенберга нужно всегда искать в возмущениях, которые обязательно возникают в системе в процессе измерения.

Переход от старой механики к новой в духе Гейзенберга и Бора может быть проделан, как и в главе XI, при помощи теоремы Эренфеста. Если для распространения волны в конфигурационном пространстве справедлива геометрическая оптика, то в этом пространстве могут существовать потоки волн, занимающие области, размеры которых велики по сравнению с длиной волны, и которые поэтому могут быть представлены группой почти монохроматических волн; эти потоки волн, хотя и включают в себе большое число длин волн, могут считаться ничтожно малыми по своим размерам, и их можно уподобить маленькому шарiku вероятности в конфигурационном пространстве. Внутри такого шарика величины p_i и $-\frac{\partial F}{\partial q_i}$ практически постоянны, так что теорема Эренфеста дает:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_i}. \quad (43)$$

Шарик вероятности перемещается весь в целом в конфигурационном пространстве, так как и должна двигаться представляющая точка системы согласно классической теории. Конечно, принципиально, положение представляющей точки должно рассматриваться как неопределенное внутри шарика вероятности, но эта неопределенность так мала, что в нашем масштабе ею практически можно пренебречь. Практически все происходит так, как если бы конфигурация и состояние движения системы

были вполне определены в каждый момент и эта система строго следовала законам старой механики.

Мы находим здесь все основные идеи главы XI, относившиеся к одной частице, но их странность еще увеличивается тем обстоятельством, что для системы мы не можем уже представлять себе положение вещей в обычном пространстве и что нужно прибегнуть к распространению волн и движению в абстрактном конфигурационном пространстве.

5. Замечание

Сделаем последнее замечание по поводу того случая, когда система образована из частиц, не производящих никакого действия друг на друга. Из последней главы следует, что для Ψ мы должны брать *произведение* функций $\Psi_1(x_1, y_1, z_1, t) \cdot \Psi_2(x_2, y_2, z_2, t) \dots$ относящихся к различным частицам, рассматриваемым отдельно. Это вполне согласуется с принципом интерференции и статистическим значением интенсивности. В самом деле, вероятность того, что представляющая точка системы в момент времени t занимает положение $x_1 y_1 z_1 \dots z_N$ в конфигурационном пространстве равна:

$$\Psi(x, y, z, \dots z_N, t) \cdot \Psi^*(x, \dots z_N, t). \quad (44)$$

Вероятность же того, что i -тая частица находится в точке $x_i y_i z_i$ в момент времени t есть:

$$\Psi_i(x_i y_i z_i, t) \cdot \Psi_i^*(x_i y_i z_i, t). \quad (45)$$

Так как движения частиц совершенно независимы, ибо они не действуют друг на друга, то согласно теории сложных вероятностей мы должны иметь:

$$\Psi(x_1 \dots z_N t) \cdot \Psi^*(x_1 \dots z_N t) = \prod_i \Psi_i(x_i y_i z_i, t) \cdot \Psi_i^*(x_i y_i z_i, t) \quad (46)$$

и это соотношение (46) оправдывается, так как

$$\Psi(x_1 \dots z_N t) = \prod_i \Psi_i(x_i y_i z_i, t). \quad (47)$$

ГЛАВА XVI

СТАРАЯ ТЕОРИЯ КВАНТ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ

1. Примеры квантования периодических движений

Периодические движения играют большую роль в явлениях атомных масштабов. Мы должны теперь изучить характерные особенности этих движений в волновой механике. Но прежде всего мы должны вспомнить как было введено понятие кванта действия при изучении периодических движений в атоме и указать некоторые главные результаты старой теории квант.

Известно, что идея кванта была введена в механику Планком. Планк изучал термодинамическое равновесие между материей и излучением, и так как это равновесие не должно было зависеть от механизма обмена энергией, он допустил, для упрощения, что обмен энергией между материей и излучением осуществляется через посредство электронов, колеблющихся вокруг положения равновесия, к которому они притягиваются с силой пропорциональной удалению. Такая частица, которая может колебаться вдоль прямой под действием силы пропорциональной удалению, называется „линейным осциллятором“. Для того, чтобы найти экспериментальные законы черного излучения, Планк должен был допустить, что осцилляторы не могут обладать любой энергией; единственные дозволенные значения энергии будут те, которые связаны с частотой колебания формулой:

$$E = n\hbar\omega. \quad (n \text{ целое}) \quad (1)$$

где n целое число, $\hbar$ — постоянная действия, введенная Планком в физику, и ω частота осциллятора, которая, как мы покажем, не зависит от энергии.

Дальнейшее развитие теории квантов привело к иному выражению этого „условия квантования“. Для частицы, образующей линейный осциллятор, потенциальная функция есть:

$$F(x) = \frac{kx^2}{2}, \quad (2)$$

где x удаление от точки равновесия, а уравнение движения по классической механике будет:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \quad (3)$$

Решение этого уравнения есть:

$$x = A \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \alpha \right). \quad (4)$$

где A и α две произвольные постоянные. Частота движения будет следовательно:

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (5)$$

Она не зависит от A , т. е. от энергии движения. Количество движения будет равно $p_x = m \frac{dx}{dt} = mv$ и интеграл действия Мюертюи есть

$$S_1(x) = \int_{x_0}^x p_x dx = m \int_{x_0}^x v dx, \quad (6)$$

если вычислить это действие для полного периода движения, мы находим:

$$\begin{aligned}
 J &= \oint dS_1 = \oint m v dx = m \int_0^1 v^2 dt \\
 &= 4\pi^2 \omega^2 A^2 m \int_0^1 \cos^2 \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \alpha \right) dt \\
 &= 2\pi^2 \omega m A^2.
 \end{aligned} \tag{7}$$

С другой стороны, энергия частицы E равна кинетической энергии, которой она обладает во время ее прохождения через положение равновесия, так как ее потенциальная энергия равна тогда нулю. Таким образом мы получаем:

$$E = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{m}{2} A^2 \frac{k}{m} = 2\pi^2 m \omega^2 A^2, \tag{8}$$

откуда

$$\frac{E}{\omega} = 2\pi^2 m \omega A^2 = J. \tag{9}$$

Мы приходим, следовательно, к тому, что условие (1) эквивалентно соотношению:

$$J = nh; \quad (n \text{ целое}) \tag{10}$$

но эта последняя форма гораздо более обща, так как нам не нужно больше вводить специального свойства осциллятора, а именно — частоту не зависящую от энергии.

При помощи этого соотношения (10) можно выразить ограничение возможного числа значений энергии для всех движений с одной степенью свободы, введенное теорией квант. Условие (10) и есть условие квантования.

Наиболее важное применение формулы (10) сделано Бором для случая одного электрона с зарядом $-e$, вращающимся вокруг положительного ядра с зарядом $+e$ (атом водорода). В первой своей работе 1913 года по этому вопросу Бор систематически ограничивался изучением круговых траекторий; тогда для отметки положения частицы достаточно одной переменной — азимута θ , и здесь может быть применена формула (10). Кинетическая энергия равна:

$$T = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2. \tag{11}$$

Момент, сопряженный с θ , будет:

$$L_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \tag{12}$$

а интеграл действия Мопертью напишется так:

$$\int p_0 d\theta = \int m r^2 \dot{\theta} d\theta. \quad (13)$$

Для полного периода движения мы имеем:

$$J = \int_0^{2\pi} m r^2 \dot{\theta} d\theta = 2\pi m r^2 \dot{\theta}, \quad (14)$$

потому что на круговой траектории, в центральном поле, угловая скорость $\dot{\theta}$ постоянна. Условие (10) имеет здесь вид:

$$2\pi m r^2 \dot{\theta} = n h, \quad (n \text{ целое}) \quad (15)$$

$m r^2 \dot{\theta}$ — момент количества движения электрона по отношению к ядру. Обозначим его через M . Тогда вместо (15) мы можем написать:

$$M = n \frac{h}{2\pi}. \quad (n \text{ целое число}) \quad (16)$$

Эта формула привела Бора к его замечательному предсказанию спектра водорода. Для этого ему достаточно было написать уравнение движения электрона в виде:

$$m r \dot{\theta}^2 = \frac{e^2}{r^2}, \quad (17)$$

что выражает собой динамическое равновесие между центробежной силой и радиальной силой Кулона.

Исключая $\dot{\theta}$ из (16) и (17), получаем:

$$\frac{1}{r} = \frac{4\pi^2 m e^2}{n^2 h^2}. \quad (18)$$

Энергия электрона на его круговой орбите будет:

$$E = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{e^2}{r} = - \frac{1}{2} \frac{e^2}{r}. \quad (19)$$

Откуда:

$$E_n = - \frac{2\pi^2 m e^4}{n^2 h^2}. \quad (n \text{ целое}) \quad (20)$$

Эта знаменитая формула дает значение энергии различных квантованных состояний атома водорода.

Бор ввел еще другой постулат, — „закон частот“, согласно которого при переходе атома из квантованного стабильного энергетического состояния E_n на другое квантованное состояние

с меньшей энергией $E_m < E_n$, имеет место испускание излучения частоты:

$$\nu_{nm} = \frac{E_n - E_m}{h} = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3} \left(\frac{1}{m^3} - \frac{1}{n^3} \right). \quad (21)$$

Если $m=2$, т. е. если мы рассматриваем все изменения состояния атома с одним и тем же конечным состоянием, характеризуемым целым числом $m=2$, то получим экспериментальную формулу, дающую частоту линий Бальмеровской серии:

$$\nu = R \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (n = 3, 4, \dots) \quad (22)$$

Мы должны положить:

$$R = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3}. \quad (23)$$

Большой успех теории Бора заключается в том, что экспериментальное значение точно совпадает с формулой (23).

Формула (21) учитывает также частоты других линий спектра водорода (серия Лаймана и Пашена).

Рассматривая круговые траектории электрона вокруг ядра с зарядом $+2e$, Бор смог также интерпретировать спектр ионизованного гелия.

2. Условия Вильсона-Зоммерфельда

Для удовлетворительного выражения условий квантования периодических движений частицы в постоянном поле, оказалось, что невозможно ограничиваться случаем, когда движение определяется одной переменной. В. Вильсон и А. Зоммерфельд нашли формулу, применимую ко всем периодическим движениям, где имеется разделение переменных, т. е. где можно выбрать координаты таким образом, что каждый сопряженный их момент зависит только от соответствующей координаты:

$$p_i = f_i(q_i). \quad (24)$$

Действие Мопертюи $\int \sum p_i dq_i$ есть сумма функций, каждая из которых зависит от одной из переменных. Можно доказать, что за время движения некоторые из переменных q_i колеблются между двумя пределами, тогда как другие суть углы с периодом 2π . Например, в Кеплеровском движении радиус вектор есть переменная первого вида, азимут же — переменная второго вида. Мы будем говорить, что переменная первого вида описала свой цикл, если, исходя из своего нижнего предела, она, возрастая, достигает своего верхнего предела и затем, уменьшаясь, снова приходит к нижнему пределу; также мы будем говорить,

что переменная второго вида описала свой цикл, когда она увеличилась на 2π . Приняв эти определения, условия квантования Вильсона-Зоммерфельда можно выразить так: если переменные q_i выбраны так, что переменные разделены, то каждый из интегралов $\oint p_i dq_i$, взятый по полному циклу переменной q_i , должен быть равен целому кратному постоянной h . Мы напомним эти условия в виде:

$$\oint p_i dq_i = n_i h. \quad (n_i \text{ целое}) \quad (25)$$

Движение частицы в постоянном поле имеет, в общем случае, три степени свободы, и вообще нужны три целых числа, чтобы определить какое либо квантованное движение.

Нужно остановиться еще на важном пункте. Если q_i является переменной первого типа, аналогичной радиусу вектору в Кеплеровской проблеме, то во время движения она колеблется между значениями q_{i0} и q_{i1} и интеграл Вильсона-Зоммерфельда будет:

$$\int_{q_{i0}}^{q_{i1}} p_i dq_i + \int_{q_{i1}}^{q_{i0}} p_i dq_i. \quad (26)$$

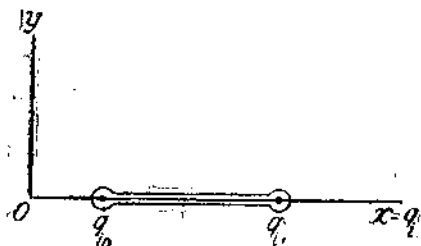


Рис. 13.

Этот интеграл будет очевидно равен нулю, если p_i

однородная функция переменной q_i ; но это не имеет места в нашем случае, так как можно показать, что в классах движений, которыми мы занимаемся, момент, сопряженный с переменной первого вида, выражается так:

$$p_i = \pm \sqrt{\varphi_i(q_i)}, \quad (27)$$

где функция φ_i положительна в интервале $q_{i0} - q_{i1}$ и сходится к нулю при изменении знака на границах интервала; следовательно p_i двузначная функция переменной q_i ; естественно, что в (27) мы должны взять знак $+$, когда q_i растет и знак $-$, когда уменьшается, чтобы интеграл $\oint p_i dq_i$ был положителен.

Можно рассматривать этот вопрос еще таким образом.

Рассмотрим функцию p_i , определяемую формулой:

$$p_i = \pm \sqrt{\varphi_i(z)}, \quad (28)$$

где z комплексная переменная, вещественной частью которой является q_i ; вдоль вещественной оси (28) приводится к (27) и p_i равно моменту, сопряженному с переменной q_i . Функция $p_i(z)$ дает две точки разветвления на вещественной оси и интеграл Вильсона-Зоммерфельда должен быть взят вдоль замкнутого контура, содержащего отрезок вещественной оси $q_{i0} + \varepsilon \rightarrow q_{i1} - \varepsilon$ и

два бесконечно малых круга радиусов ϵ и ϵ' , описанных вокруг двух точек разветвления (рис. 13).

Ничто подобное не имеет места для угловых переменных второго вида, которые изменяются от 0 до 2π ; для них сопряженный момент имеет постоянный знак.

3. Квантовые условия по Эйнштейну

Условия Вильсона-Зоммерфельда могут быть выражены в форме не зависящей от выбора переменных, как показал Эйнштейн в 1917 г. В самом деле, действие Мопертюи для частицы выражается так:

$$dS_1(q_1, q_2, q_3) = \sum_i^3 p_i dq_i.$$

Это выражение инвариантно для всякого изменения пространственных координат. Оно представляет собой работу вектора количества движения. Во всякой области пространства R , где происходит движение, каждый момент $p_k = \frac{\partial S_1}{\partial q_k}$ есть вообще функция трех переменных q_i , так как мы не ограничиваемся здесь координатами, гарантирующими разделение переменных. Если мы будем рассматривать некоторую замкнутую кривую C , которая вся лежит внутри R , то мы можем вместе с Эйнштейном сформулировать условия Вильсона-Зоммерфельда так: какова бы не была кривая C , интеграл

$$\int_C dS_1 = \int_C \sum_i p_i dq_i$$

равен целому кратному планковской постоянной h .

Действительно, для вычисления этого интеграла мы можем выбрать систему любых переменных, например, систему, для которой имеет место разделение переменных; тогда интеграл $\int_C dS_1$ можно написать так:

$$\int_C dS_1 = k_1 \oint p_1 dq_1 + k_2 \oint p_2 dq_2 + k_3 \oint p_3 dq_3, \quad (29)$$

где k_1 , k_2 и k_3 целые числа; в силу условий (25) формулировка Эйнштейна действительно справедлива. Условия Вильсона-Зоммерфельда приводят, следовательно, к условию Эйнштейна, которое не зависит от выбора координат.

Для того, чтобы понять смысл условия Эйнштейна, рассмотрим движение происходящее в некоторой плоскости под действием центробежной силы; так как радиус вектор есть переменная первого вида, то он колеблется между двумя значениями

r_1 и r_2 и, в общем, плоская орбита заполнит все кольцо заключенное между кругами радиусов r_1 и r_2 . Изобразим плоскость орбиты в разрезе (рис. 14).

Движение может быть охарактеризовано при помощи азимута θ , отсчитываемого вокруг O , которому соответствует постоянный сопряженный момент p_θ и радиусом вектором r с сопряженным моментом $p_r = \pm \sqrt{\varphi(r)}$. Заменим мысленно плоскость кругового кольца поверхностью, образованной из двух листов, соединенных своими плоскостями по кругам $r=r_1$ и $r=r_2$ (римановская поверхность). Для p_r на верхнем листе мы выберем знак $+$, на нижнем знак $-$. На рис. 14 эти листки изображены пунктирными линиями, причем для удобства рисунка они немного удалены друг от друга. Плоское круговое кольцо заменяется таким образом некоторым видом сплюсненной поверхности. На этой тороидальной поверхности мы можем обнаружить три сорта замкнутых кривых:

1. Одни могут быть сведены в точку непрерывной деформацией; для них

$$\oint_C dS_1 = 0.$$

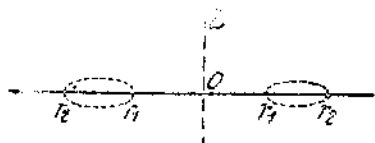


Рис. 14.

2. Другие непрерывной деформацией могут быть приведены к совпадению с кругом, центр которого лежит на оси симметрии; для таких кривых мы имеем:

$$\oint_C ds_1 = \int_0^{2\pi} p_\theta d\theta = n_1 h.$$

3. Наконец, третьи кривые, при помощи непрерывной деформации могут быть приведены к совпадению с сечением тора плоскостью, которая содержит ось OL ; для них:

$$\oint_C dS_1 = \oint p_r dr = n_2 h.$$

Кроме того, все кривые, начерченные на римановской поверхности, могут быть сведены к ряду кривых трех видов, приведенных выше, откуда и следует верность условия Эйнштейна.

4. Квантование Кеплеровского движения

В качестве примера приложения условий Вильсона-Зоммерфельда рассмотрим случай Кеплеровского движения. Классическая кинетическая энергия выражается в полярных координатах следующим образом:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2). \quad (30)$$

Моменты по r и θ будут

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}. \quad (31)$$

Но по теореме площадей p_θ равно постоянной C , а с другой стороны по закону Ньютона (или Кулона) мы можем написать:

$$E = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{K}{r}. \quad (32)$$

Разрешая (32) для $m\dot{r}$ и заменяя p через C получаем:

$$p_r = m\dot{r} = \pm \sqrt{2mE - \frac{C^2}{r^2} + \frac{2mK}{r}} = \pm \sqrt{\varphi(r)}. \quad (33)$$

Если E отрицательно, то $\varphi(r)$ имеет два положительных корня r_1 и r_2 и радиус вектор всегда должен заключаться между этими двумя корнями, иначе p_r будет мнимым. Следовательно, если E отрицательно, движение периодически и p_r имеет вид (27).

Условие Зоммерфельда для азимута есть:

$$\int_0^{2\pi} p_\theta d\theta = 2\pi C = n_1 h \quad (n_1 \text{ целое}) \quad (34)$$

или

$$C = n_1 \frac{h}{2\pi} \quad (n_1 = \text{квантовое азимутальное число}) \quad (35)$$

Это и есть боровское условие стабильности (16) в случае кругового движения, так как C есть постоянный момент количества движения планеты по отношению к ядру-солнцу.

Но здесь мы имеем сверх того еще второе боровское условие квантования, которое Бор^у не нужно было принимать в расчет, так как он ограничивался круговыми орбитами. Это второе условие — следующее:

$$\oint p_r dr = n_2 h. \quad (n_2 = \text{квантовое радиальное число}) \quad (36)$$

Пусть r_1 и r_2 имеют такие значения r , при которых $\varphi(r)$ равно нулю. Как мы видели интеграл (36) должен быть написан так:

$$\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\varphi(r)} dr + \int_{r_2}^{r_1} -\sqrt{\varphi(r)} dr = 2 \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\varphi(r)} dr. \quad (37)$$

Следовательно, приравнивая этот интеграл $n_2 h$, мы получим второе условие квантования. Мы вернемся далее к этому условию.

Общим методом мы легко можем получить выражение p_r в функции от q_r , необходимое для вычисления интегралов Зоммерфельда, исходя из уравнения Якоби. Покажем это на частном

примере кеплеровского движения. Выражение энергии (32) может быть написано здесь в виде:

$$H(q, p) = \frac{1}{2m} \left[p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2 \right] - \frac{K}{r}. \quad (38)$$

Уравнение Якоби для приведенной функции Якоби S_1 будет:

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial \theta} \right)^2 \right] - \frac{K}{r} = E. \quad (39)$$

Полагая $\frac{\partial S_1}{\partial \theta} = C$ мы находим, что

$$p_r = \frac{\partial S_1}{\partial r} = \sqrt{2mE + \frac{2mK}{r} - \frac{C^2}{r^2}}. \quad (40)$$

Функция Якоби $S_1 = C\theta + \int p_r dr$ есть полный интеграл (39), так как он содержит две произвольных постоянных C и E . Допустимые значения этих двух постоянных определяются двумя квантовыми условиями (35) и (37).

5. Вопрос о вырождении

Здесь мы встречаемся с важным вопросом, который сыграл большую роль в старой теории квант — с вопросом о вырождении. Мы сказали, что условия Вильсона-Зоммерфельда характеризуют квантованные движения частицы тремя целыми числами. Но из предыдущего следует также, что эти три целых числа эффективны только тогда, когда для характеристики движения действительно необходимы три переменных. Бору, рассматривавшему круговое движение, заданное одной переменной, достаточно было ввести только одно целое число; изучая в последнем параграфе плоское кеплеровское движение, задаваемое радиусом вектором и азимутом, мы встретились только с двумя целыми числами n_1 и n_2 . Более того: в случае кеплеровского движения введение двух целых чисел является только видимостью. Это становится совершенно ясным, если мы отметим, что классическая кеплеровская орбита является замкнутым эллипсом; следовательно, достаточно выбрать эллиптические координаты, чтобы задать движение при помощи одной только переменной.

Обобщая эти рассуждения, мы приходим к следующим результатам: каждый раз, когда траектория, вместо того, чтобы заполнить всю область трех измерений, заполняет область двух или одного измерения, то при квантовании действительно вводится только два или одно целое число. Тогда мы имеем вырождение.

Изучение кеплеровского движения вполне подтверждает это заключение. Докончим, в самом деле, выкладки, начатые в последнем параграфе. Зоммерфельд при помощи теоремы о вычетах волн вычислил интеграл:

$$\oint p_r dr = \oint \sqrt{2mE + \frac{2mK}{r} - \frac{C^2}{r^2}} dr. \quad (41)$$

Приравнивая результат $n_2 h$ и заменяя C через $n_1 \frac{h}{2\pi}$, он нашел энергию орбиты, характеризуемую числами n_1 и n_2 :

$$E_{n_1, n_2} = - \frac{2\pi m e^4}{h^2 (n_1 + n_2)^2}. \quad (42)$$

Приравнивая в этой формуле $n_2 = 0$, мы находим боровское решение для круговых траекторий. Но решение Зоммерфельда показывает нам, что энергия эллиптических квантованных орбит также характеризуется одним только целым числом $n_1 + n_2$. Факт введения эллиптических орбит не дополняет перечня стабильных энергетических уровней никакими новыми членами. Следовательно, раздельное введение двух квантовых чисел n_1 и n_2 является фиктивным. Это еще лучше видно из того, что в классическом кеплеровском случае можно разделить переменные при помощи их переменных, чем радиус вектор r и азимут θ . Каждый выбор координат, влекущий за собой разделение переменных, приводит к различным формам стабильных эллиптических орбит, но дает те же значения энергии. Отсюда мы должны заключить, что все круговые или эллиптические орбиты с энергиями равными $-\frac{2\pi^2 m e^4}{n^2 h^2}$, где n целое число — стабильны.

Квантование кеплеровских орбит требует при таком анализе введения только одного целого числа, потому что это будут замкнутые орбиты, занимающие в пространстве область одного измерения. Классическое движение Кеплера является вырожденным движением.

Вырожденные движения представляют собой частный вид неустойчивых движений в том смысле, что вследствие малейшего влияния возмущений вырождение исчезает, хотя бы частично. В астрономии хорошо известно, что даже очень малое влияние возмущения может налагать периодические или вековые изменения на элементы эллиптических кеплеровских орбит (большая ось, эксцентриситет, наклон, долгота перигелия и долгота восходящих узлов). Вследствие этих изменений орбита не будет более строго замкнутой, а будет заполнять всю область пространства.

Введение релятивистских поправок в теорию кеплеровских орбит равноценно введению возмущающих членов, которые в общем малы; Зоммерфельд показал, что при этом орбита остается

плоской и эллиптической, но что имеется медленное непрерывное вращение перигелия; траектория не будет больше строго замкнутой; она занимает свое круговое кольцо, заключенное между двумя кругами, радиусы которых равны расстояниям между фокусом притяжения и концами большой оси вращающегося эллипса. Следовательно, вырождение исчезает, но только частично, так как траектория остается плоской; нужно действительно ввести два целых числа для каждой стабильной орбиты. При помощи расчетов, которые мы здесь приводим, Зоммерфельд получил энергию квантованной орбиты, характеризуемую двумя целыми числами n_1 и n_2 :

$$E_{n,n_1} = -\frac{2\pi^2 m e^4}{n^2 \hbar^2} \left[1 + \frac{4\pi^2 e^4}{n^2 \hbar^2 c^2} \left(\frac{n}{n_1} - \frac{3}{4} \right) \right], \quad (43)$$

где $n = n_1 + n_2$ есть полное квантовое число. Мы видим, что здесь энергия устойчивой орбиты зависит отдельно от двух чисел n_1 и n_2 , а не только от комбинации $n_1 + n_2$.

Присутствие электрического или магнитного поля, действующего на атом водорода, также уничтожает вырождение в соответствующей кеплеровской проблеме.

6. Недостаточность старой теории квант

Мы не можем останавливаться здесь на всех вычислениях, в которых имеют место различные применения условий Вильсона-Зоммерфельда. Мы должны только отметить, что если эти подсчеты очень часто приводили к точным результатам, то это отнюдь не всегда имело место, и старая теория квант не один раз показала свою недостаточность.

Возьмем, например, случай квазиупругого линейного осциллятора, рассмотренного в §1. По формуле (10) энергия устойчивого движения должна быть равна одному из значений ряда: 0, $\hbar\omega$, $2\hbar\omega$..., $n\hbar\omega$..., где ω механическая частота осциллятора

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Для интерпретации же некоторых опытов, а именно полосатых спектров, нужно было принять, что ряд квантованных энергий будет следующий:

$$\frac{1}{2} \hbar\omega \quad \frac{3}{2} \hbar\omega \dots \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \dots \quad (n=0, 1, 2 \dots)$$

Этот результат, который иногда называется законом „половинных квантов“, противоречит способам квантования, принятым в старой квантовой механике. Приложение этих способов квантования к атомам более сложным, чем водород, также привело

к плохим результатам; йонизационный потенциал гелия, вычисленный Крамерсом при помощи старых методов, не находится в согласии с опытом.

Еще до появления новой механики создалось впечатление, что формулы Вильсона-Зоммерфельда, хотя и дают ценные указания, не могут считаться совершенно точными. Мы увидим сейчас в каком направлении новая механика должна изменить эти методы, и как она вскрывает физическое значение условий квантования.

ГЛАВА XVII

ВОЛНОВАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ УСТОЙЧИВОСТИ КВАНТОВАННЫХ ДВИЖЕНИЙ

1. Значение квантования в волновой механике

Волномеханические воззрения заставили нас связать с движением частицы в постоянном поле, определяемом потенциальной функцией $F(x, y, z)$, распространение волны по уравнению:

$$\Delta \Psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} [E - F(x, y, z)] \Psi = 0. \quad (1)$$

Если справедливы приближенные методы геометрической оптики, то за волновую функцию (приведенную) мы сможем принять функцию:

$$\Psi(x, y, z, t) = a(x, y, z) e^{\frac{2\pi i}{h} [Et - S_1(x, y, z)]}, \quad (2)$$

где S_1 есть полный интеграл уравнения Якоби. Для того, чтобы фаза функции (2) имела бы в каждой точке вполне определенное значение, необходимо и достаточно, чтобы вдоль всей замкнутой кривой C , находящейся в той области, где происходит распространение:

$$\oint_C dS_1 = \int_C \sum_{i=1}^3 p_i dq_i = nh. \quad (n \text{ целое}) \quad (3)$$

Таким образом мы снова находим условие Эйнштейна, из которого вытекают формулы Вильсона-Зоммерфельда. В частности, если траектория есть замкнутая кривая, то ее можно принять за кривую C и написать единственное условие:

$$\oint_C (p dl) = nh. \quad (4)$$

Тогда проблема является вырожденной, и каждая стабильная орбита характеризуется одним целым квантовым числом.

Итак, если геометрическая оптика справедлива для распространения волн, сопряженных с атомами, новая механика немедленно дает интерпретацию таинственных квантовых условий. Так как по новым представлениям геометрическая оптика и старая механика соответствуют друг другу, то можно сказать: условия квантования старой теории квант действительно были таковы, что их нужно было ввести, сохраняя уравнения старой механики. Но таким образом вся старая квантовая теория является только первым приближением, справедливым в тех же пределах, что и геометрическая оптика. В случае же внутриатомного движения, как это отметил Шредингер, это приближение недостаточно. В самом деле, существенным условием приложимости геометрической оптики является то, что для перемещений порядка длины волны условия распространения изменяются очень мало. Длина же волны, сопряженной с электроном в атоме, равна примерно $\frac{h}{mv} = \frac{7,3}{v}$ и так как скорость внутриатом-

ных электронов порядка 10^9 см/сек, то эта длина волны порядка 10^{-8} см, т. е. порядка размеров атома. Во внутриатомной области условия распространения очень сильно изменяются, потому что они зависят от потенциала F , который бесконечно увеличивается при приближении к ядру; таким образом, приложение результатов геометрической оптики не будет справедливым.

Резюмируя, мы скажем, что интерпретация старых квантовых условий, данная выше, указывает нам путь решения, но показывает также, что старые квантовые условия не могут считаться строгими и что весь вопрос квантования нужно пересмотреть с волновой точки зрения.

Как мы будем определять устойчивое квантованное состояние? По новым представлениям совершенно естественно допустить, что устойчивое состояние соответствует волне Ψ , имеющей форму стационарной волны:

$$\Psi = a(x, y, z) e^{\frac{2\pi i}{h} [Et + \alpha]} \quad (5)$$

Так как Ψ должно быть решением (1), то амплитуда a должна также удовлетворять уравнению:

$$\Delta a + \frac{8\pi^2 m}{h^2} [E - F(x, y, z)] a = 0. \quad (6)$$

Мы допустим, что амплитуда a должна быть функцией конечной, однородной и непрерывной. Далее по принципу интерференции мы должны допустить, что a на бесконечности равно нулю; в самом деле, если бы амплитуда не стремилась к нулю на бесконечности, интеграл $\iiint a^2 dv$, все элементы которого

положительны, был бы расходящимся; тогда вероятность того, что частица находится бесконечно далеко от рассматриваемой атомной системы, была бы равна 1, а это противоречит существу мысли о том, что частица есть часть системы и находится в устойчивом состоянии.

Наконец, с точки зрения волновой механики, разыскание устойчивых состояний частицы сводится к нахождению таких значений E , для которых уравнение:

$$\Delta a + \frac{8\pi^2 m}{h^2} [E - F(x, y, z)] a = 0 \quad (7)$$

допускает непрерывное, однородное, везде конечное и равное нулю на бесконечности решение. Определенные таким образом значения и есть энергии квантованных состояний частицы. Математическая проблема очень похожа на проблему определения собственных колебаний стержня или мембраны, при наложении некоторых граничных условий. Здесь граничным условием является то, что a равна нулю на бесконечности.

Для исследования так поставленной математической проблемы мы введем следующие обозначения:

$$\mu = \frac{8\pi^2 m}{h^2} E, \quad R(x, y, z) = \frac{8\pi^2 m}{h^2} F(x, y, z), \quad (8)$$

тогда уравнение (7) напишется так:

$$\Delta a + [\mu - R(x, y, z)] a = 0. \quad (9)$$

Покажем, что уравнение (9) допускает в области пространства D непрерывные, конечные, однородные и равные нулю на границах этой области решения только для некоторых значений постоянной μ ; эти частные значения называются фундаментальными или характеристическими константами уравнения (9), или же собственными значениями его. Таким путем мы докажем существование квантованных значений энергии.

Каждому собственному значению соответствует в общем одно решение (9), выполняющее наложенные условия; это будут фундаментальные или характеристические функции, или иначе собственные функции, соответствующие этому значению μ . Мы покажем, что если a_i и a_j будут две собственные функции, соответствующие двум собственным значениям μ_i и μ_j , то мы имеем;

$$\iiint_D a_i a_j dv = 0. \quad (10)$$

Другими словами, собственные функции образуют систему ортогональных функций.

Для того, чтобы лучше понять характер всей этой теории, интересно начать с изучения некоторых простых и классических случаев уравнения формы (9), для которого $R=0$.

2. Простые примеры собственных колебаний: колеблющиеся струна и мембрана

а) *Случай колеблющейся струны, закрепленной на концах.* В случае распространения упругой волны вдоль струны, закрепленной в обоих концах, поперечное смещение какой-либо точки колеблющейся струны удовлетворяет уравнению распространения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (11)$$

где V означает постоянную, зависящую от механических свойств струны. Если мы будем рассматривать монохроматическую стационарную волну типа:

$$u(x, t) = a(x) e^{2\pi i [\nu t + \alpha]}, \quad (12)$$

то функция a должна удовлетворять уравнению:

$$\frac{d^2 a}{dx^2} + \frac{4\pi^2 \nu^2}{V^2} a = 0 \quad (13)$$

являющимся уравнением вида (9), где $\mu = \frac{4\pi^2 \nu^2}{V^2}$ и $R = 0$.

Областью D является здесь одномерная область, образованная струной в ее положении равновесия; если мы примем один из концов струны за начало координат, и если l есть длина струны, то область D простирается от $x=0$ до $x=l$ и мы должны иметь

$$a(0) = a(l) = 0.$$

Уравнение (13) дает хорошо известный общий интеграл:

$$a = a_0 \sin\left(\frac{2\pi\nu}{V} x + \alpha\right) \quad (14)$$

с двумя произвольными постоянными a_0 и α . Для того, чтобы были удовлетворены граничные условия, нужно взять $\alpha=0$ и $\frac{2\pi\nu}{V} l = n\pi$, где n целое число, т. е. выбрать частное решение:

$$a_n = a_0 \sin n \frac{\pi x}{l}. \quad (15)$$

Собственные значения μ будут здесь:

$$\mu_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \quad (16)$$

а функции (15) суть соответствующие собственные функции.

Из теории Фурье следует, что любое колебательное состояние струны может быть представлено в виде функции:

$$u(x, t) = \sum_n \left(c_n \sin n \frac{\pi x}{l} \cos 2\pi \nu_n t + d_n \sin n \frac{\pi x}{l} \sin 2\pi \nu_n t \right), \quad (17)$$

где $\nu_n = n \frac{V}{2l}$. Действительно, (17) является решением уравнения распространения и равно нулю на границах. Далее, легко видеть, что по теореме Фурье постоянные c_n и d_n можно выбрать так, чтобы отождествить функции $u(x, 0)$ и $\left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right]_{t=0}$ с двумя произвольными непрерывными функциями, равными нулю на границах. Так как u определяется уравнением второго порядка по времени, то она определена, если известно $u(x, 0)$ и $\left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right]_{t=0}$. Все колебательное состояние струны полностью выражается функцией (17).

Наконец, хорошо известно, что

$$\int_0^l \sin n \frac{\pi x}{l} \sin n' \frac{\pi x}{l} dx = 0, \quad (n \neq n') \quad (18)$$

т. е. что собственные функции ортогональны.

Собственные функции определяются с точностью до некоторого постоянного множителя $[a_n$ в (15) произвольно]. Говорят, что они „нормированы“, если эта постоянная выбрана так, что

$$\iint a_n^2 dx = 1. \quad (19)$$

Здесь нормированные собственные функции суть:

$$a_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin n \frac{\pi x}{l}, \quad (20)$$

потому что

$$\int_0^l \sin^2 n \frac{\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}.$$

б) *Случай плоской и прямоугольной мембраны, закрепленной на краях.* В случае плоской прямоугольной колеблющейся мембраны, закрепленной на краях, нам нужно решить следующий вопрос: обозначим через A и B стороны прямоугольника, ограничивающего мембрану; нужно найти конечное, непрерывное и однозначное решение уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (21)$$

которое будет равно нулю на границах области D , образованной мембраной, т. е. для $x=0$; $x=A$; $y=0$; $y=B$. Рассмотрим еще монохроматические стационарные волны вида:

$$u(x, y, t) = a(x, y) e^{2\pi i \nu t} \quad (22)$$

получаем:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{4\pi^2 \nu^2}{V^2} a = 0. \quad (23)$$

Это уравнение типа (9) с

$$\mu = \frac{4\pi^2 \nu^2}{V^2} \quad \text{и} \quad R = 0.$$

Мы получим решение выполняющее заданные условия, полагая:

$$\mu = \pi^2 \left(\frac{n^2}{A^2} + \frac{n'^2}{B^2} \right), \quad a_{nn'} = \sin n \frac{\pi x}{A} \sin n' \frac{\pi y}{B}. \quad (24)$$

Это будут собственные значения и собственные функции уравнения (23). Собственные функции ортогональны, потому что:

$$\int_0^A \int_0^B a_{nn'} a_{mm'} dx dy = 0 \quad (25)$$

за исключением случая, когда $m=n$, $m'=n'$.

Так как

$$\int_0^A dx \int_0^B dy a_{nn'}^2 = \frac{A}{2} \cdot \frac{B}{2},$$

то нормированные собственные функции есть:

$$a_{nn'} = \frac{2}{\sqrt{AB}} \sin n \frac{\pi x}{A} \sin n' \frac{\pi y}{B}. \quad (26)$$

Можно показать, что собственные значения функции (24) единственны и что любое колебательное состояние мембраны может быть представлено функцией:

$$u(x, y, t) = \sum_{nn'} \left(C_{nn'} \sin n \frac{\pi x}{A} \sin n' \frac{\pi y}{B} \cos 2\pi \nu_{nn'} t + d_{nn'} \sin n \frac{\pi x}{A} \sin n' \frac{\pi y}{B} \sin 2\pi \nu_{nn'} t \right),$$

где

$$\gamma_{nn} = \frac{V}{2} \sqrt{\frac{n^2}{A^2} + \frac{n'^2}{B^2}}.$$

Мы не будем останавливаться на доказательстве этого предложения.

с) *Случай плоской круглой мембраны, закрепленной на краях.* Центр мембраны мы примем за начало системы полярных координат, и выберем единицы измерения так, чтобы радиус мембраны равнялся 1. Уравнение распространения здесь будет:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (27)$$

где V опять является характеристической константой мембраны. Положим:

$$u(r, \theta, t) = a(r, \theta) e^{2\pi i [vt + \alpha]}; \quad (28)$$

для a мы имеем:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial a}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 a}{\partial \theta^2} + \frac{4\pi^2 v^2}{V^2} a = 0; \quad (29)$$

это опять уравнение типа (9) с $\mu = \frac{4\pi^2 v^2}{V^2}$ и $R=0$. Попробуем представить a в виде произведения некоторой функции от r и некоторой функции от θ :

$$a(r, \theta) = f(r) \varphi(\theta). \quad (30)$$

Тогда мы имеем:

$$\frac{r^2}{f} \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{r}{f} \frac{df}{dr} + \mu r^2 = - \frac{1}{\varphi} \frac{d^2 \varphi}{d\theta^2}. \quad (31)$$

Первая часть (31) является функцией только r , вторая только θ ; они могут быть равны только в том случае, если оба они имеют одно и то же постоянное значение C . Тогда:

$$\frac{d^2 \varphi}{d\theta^2} = -C\varphi. \quad (32)$$

Если C отрицательно, φ будет показательной функцией θ и a не сможет быть однозначно в круговой области D . Следовательно C должно быть положительно и общее решение (32) будет

$$\varphi = A \sin(\sqrt{C}\theta + B), \quad (33)$$

где A и B произвольные постоянные. Для того, чтобы φ было однозначно, нужно чтобы C было квадратом целого числа k ,

Если считать это первое условие выполненным, то по (31) мы имеем:

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \left[\mu - \frac{k^2}{r^2} \right] f = 0. \quad (34)$$

Положим $\rho = r\sqrt{\mu}$, тогда (34) будет иметь вид:

$$\frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df}{d\rho} + \left[1 - \frac{k^2}{\rho^2} \right] f = 0. \quad (35)$$

Это и есть Бесселево уравнение порядка k . В анализе доказывается, что это уравнение допускает только одно решение, которое остается конечным для $\rho = 0$, а именно Бесселеву функцию k -того порядка, задаваемую разложением в ряд:

$$J_k(\rho) = \frac{\rho^k}{2^k k!} \left[1 - \frac{\rho^2}{2(2k+2)} + \frac{\rho^4}{2 \cdot 4(2k+2)(2k+4)} - \dots \right] \quad (36)$$

Мы можем, следовательно, принять за

$$f(r) = J_k(\sqrt{\mu} r). \quad (37)$$

Но при условии, что $f(1) = J_k(\sqrt{\mu})$ будет равно нулю. Собственные значения μ есть квадраты тех значений аргумента Бесселевых функций k -того порядка, при которых она обращается в нуль. Если обозначить через α_{kn} n -ое нулевое значение J_k , то собственные функции можно написать в виде:

$$\alpha_{kn}(r, \theta) = \frac{\sin k\theta}{\cos} J_k(\alpha_{kn} r) \quad \left. \begin{matrix} k \\ n \end{matrix} \right\} \text{ целые} \quad (38)$$

собственные значения будут: $\mu_{kn} = \alpha_{kn}^2$.

Функции (38) ортогональны, т. е.

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \frac{\sin k\theta}{\cos} J_k(\alpha_{kn} r) \frac{\sin k'\theta}{\cos} J_k'(\alpha_{k'n'} r) = 0. \quad \left. \begin{matrix} k \neq k' \\ n \neq n' \end{matrix} \right\} \quad (39)$$

В самом деле:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin k\theta}{\cos} \frac{\sin k'\theta}{\cos} k' \theta d\theta \quad \text{равно нулю если } k \neq k' \text{ и если } k = k'.$$

Интеграл равен также нулю, когда в одном из множителей мы возьмем синус, а в другом косинус; далее, в теории Бесселевых функций показывается, что

$$\int_0^1 J_k(\alpha_{kn}r) J_k(\alpha_{kn}'r) r dr = 0. \quad (40)$$

Следовательно, интеграл произведения двух различных собственных функций равен нулю.

Мы можем еще показать, что собственные значения и собственные функции, полученные выше, единственны и что любое колебание мембраны может быть представлено в виде:

$$u(x, y, t) = \sum_{nk} [c_{kn} \sin(k\theta + \gamma_{kn}) J_k(\alpha_{kn}r) \sin 2\pi\nu_{nk}t + d_{kn} \sin(k\theta + \delta_{kn}) J_k(\alpha_{kn}r) \cos 2\pi\nu_{nk}t], \quad (41)$$

где

$$\nu_{kn} = \frac{V}{2\pi} \alpha_{kn}.$$

3. Изучение общего случая уравнения (9)

Возвратимся теперь к уравнению (9) в общей форме ($R \neq 0$) и будем искать его конечные однозначные и непрерывные решения, равные нулю на границах некоторой области D . Обозначим точку с координатами (x, y, z) через M ; мы можем написать:

$$\Delta u(M) + [\mu - R(M)] u(M) = 0. \quad (42)$$

Разыскание собственных значений этого уравнения может быть приведено к решению линейного однородного интегрального уравнения. Для того, чтобы показать это, мы будем исходить из формулы Грина:

$$\begin{aligned} & \iint_D [U(M)\Delta V(M) - V(M)\Delta U(M)] d\tau_M \\ &= \iint_S \left[U(M) \frac{\partial V(M)}{\partial n} - V(M) \frac{\partial U(M)}{\partial n} \right] d\sigma_M, \end{aligned} \quad (43)$$

где функции U и V есть однозначные, конечные и непрерывные функции в области D , ограниченной поверхностью S . Производная $\frac{\partial}{\partial n}$ взята по нормали к поверхности S в направлении, выходящем из области D .

За $U(M)$ примем одну из собственных функций $a(M)$ изучаемого уравнения; по определению она конечна, непрерывна, однозначна и равна нулю на S . Для $V(M)$ положим

$$V(M) = G(M, P) = \frac{1}{MP} + v(M, P), \quad (44)$$

где P закрепленная, произвольно выбранная в области D точка, и $v(M, P)$ такая конечная, непрерывная и однозначная функция, что $G(M, P)$ равна нулю на поверхности S , а в области D , вне точки P , удовлетворяет уравнению:

$$\Delta G(M, P) = R(M) G(M, P). \quad (45)$$

Короче говоря, мы выбираем для V функцию Грина из уравнения $\Delta f = Rf$, относящуюся к области D и точке P ; мы допустим, что такая функция существует.

Для того, чтобы применить формулу (43), мы должны исключать из области D точку P , где функция V становится бесконечной; для этого мы окружим точку P сферой σ очень малого радиуса, и отметим, что $a(M)$ и $G(M, P)$ непрерывны, конечны и однозначны во всей области D кроме σ ; обе они равны нулю на S . Следовательно, (43) дает:

$$\begin{aligned} & \iint_B \int [a(M) \Delta G(M, P) - G(M, P) \Delta a(M)] d\tau_M \\ &= \iint_\sigma \left[a(M) \frac{\partial G(M, P)}{\partial n} - G(M, P) \frac{\partial a(M)}{\partial n} \right] dz_M. \end{aligned} \quad (46)$$

Если радиус сферы σ будет стремиться к нулю, то второй поверхностный интеграл будет стремиться к нулю, потому что значение $G(M, P)$ на σ возрастает обратно радиусу, тогда как поверхность малой сферы уменьшается как квадрат радиуса. Что касается первого поверхностного интеграла, то он стремится к

$$-a(P) \iint_\sigma \frac{R}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \right) dz = 4\pi a(P). \quad (47)$$

Окончательно в пределе мы имеем:

$$a(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_B \int [a(M) \Delta G(M, P) - G(M, P) \Delta a(M)] d\tau_M. \quad (48)$$

По своему определению функции a и G удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} \Delta a(M) &= [R(M) - \mu] a(M), \\ \Delta_M G(M, P) &= R(M) G(M, P) \end{aligned} \quad (49)$$

и, следовательно:

$$a(M) \Delta G(M, P) - G(M, P) \Delta a(M) = \mu a(M) G(M, P). \quad (50)$$

Сравнивая с (48), мы видим, что собственная функция $a(M)$ должна быть решением интегрального уравнения:

$$a(P) = \frac{\mu}{4\pi} \int_D \int \int a(M) G(M, P) d\tau_M. \quad (51)$$

Из теории линейных интегральных уравнений известно, что однородное интегральное уравнение типа (51) допускает решения, не равные нулю, только для некоторых значений μ ; эти значения, число которых бесконечно велико, суть фундаментальные константы интегрального уравнения и собственные значения нашей задачи о колебаниях. В общем, каждому из этих значений μ_i соответствует только одна функция a_i (определенная с точностью до постоянного множителя); функции $a_i(M)$ суть фундаментальные функции интегрального уравнения и собственные функции нашей задачи.

Когда область D конечна, собственные значения образуют прерывный ряд; напротив, когда область D простирается до бесконечности, что случается в задачах квантования, то мы можем иметь непрерывный ряд собственных значений. Иногда говорят, что совокупность собственных значений образует „спектр“ интегрального уравнения (51) или соответствующего дифференциального уравнения (9), потому что с физической точки зрения определение собственных значений соответствует, вообще говоря, определению собственных колебаний. Если область D обладает конечными размерами, спектр всегда будет прерывным, линейчатым; если она бесконечна, то мы можем иметь сосуществование линейчатого и непрерывного спектра.

Нам остается показать, что собственные функции $a_i(M)$ образуют в общем систему ортогональных функций. Рассмотрим два собственных значения μ_i, μ_j и μ , и пусть a_i и a_j будут соответствующие собственные функции. Мы имеем:

$$\Delta a_i + [\mu_i - R(M)] a_i = 0; \quad \Delta a_j + [\mu_j - R(M)] a_j = 0, \quad (52)$$

откуда

$$a_j \Delta a_i - a_i \Delta a_j = (\mu_j - \mu_i) a_i a_j \quad (53)$$

и, интегрируя по всей области D :

$$\int_D \int \int (a_j \Delta a_i - a_i \Delta a_j) d\tau = (\mu_j - \mu_i) \int_D \int \int a_i a_j d\tau. \quad (54)$$

По теореме Грина [формула (43)] тройной интеграл равен двойному, распространенному на поверхность ограничивающую область D , а этот двойной интеграл равен нулю, потому что на

этой граничной поверхности a_i равно нулю по определению. Следовательно, (54) дает:

$$(\mu_j - \mu_i) \iiint_D a_i a_j d\tau = 0. \quad (55)$$

Интеграл по D от произведения двух различных собственных функций равен нулю; по это заключение неверно, если несколько собственных функций соответствуют одному и тому же собственному значению, так как если a_i и a_j две из этих функций, то $\mu_i = \mu_j$ и из предыдущего уравнения нельзя больше заключить, что

$$\iiint_D a_i a_j d\tau$$

будет равен нулю. Этот случай точно соответствует случаю вырождения в старой механике, где одному и тому же квантованному значению энергии соответствуют несколько различных движений.

Если одному и тому же собственному значению μ_i соответствует N различных собственных функций $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iN}$, то эти N функций всегда можно заменить N другими при помощи линейной постановки:

$$a'_{ik} = \sum_j C_j^k a_{ij} \quad (k=1, 2 \dots N) \quad (56)$$

Если мы хотим, чтобы a'_{ik} были ортогональными нам, нужно иметь:

$$\begin{aligned} & \iiint_D a'_{ik} a'_{il} d\tau = \\ &= \sum_{j,m} C_j^k C_m^l \iiint_D a_{ij} a_{im} d\tau = 0 \quad (k, l=1 \dots N) \\ & \quad (k \neq l) \end{aligned} \quad (57)$$

Это дает нам $\frac{N(N-1)}{2}$ условий для определения N^2 коэффициентов C_j^k . Следовательно, из N собственных функций, соответствующих собственному значению μ_i можно выбрать N ортогональных между собой функций. Таким образом совокупность всех собственных функций образует ортогональную систему.

Конечно интегралы $\iiint_D a_i^2 d\tau$ имеют всегда положительное значение. Говорят, что система собственных функций нормирована, когда выбран произвольный постоянный множитель, который вводится в каждую из этих функций таким образом, чтобы каждый из этих интегралов равнялся единице.

Наконец доказывается, что нормированные собственные функции уравнения в частных производных, относящихся к области D , обладают следующими свойствами: всякая функция $f(q_i)$ конечная, однозначная и непрерывная в области D и равная нулю на границах этой области может быть представлена разложением вида:

$$f(q_i) = \sum_k c_k a_k(q_i). \quad (58)$$

Когда установлена возможность такого разложения, немедленно можно вычислить коэффициенты c_k , умножая (58) на $a_k d\tau$ и интегрируя по области D . В силу ортогональности a_i получаем:

$$c_k = \int_D \int \int f(q_i) a_k(q_i) d\tau. \quad (59)$$

Рассмотрим, например, случай квантованной системы, для которой область определения бесконечна. Обозначим через A некоторый символ операции, так называемый, оператор. Если функция $A(a_k)$ конечна, однозначна, непрерывна и равна нулю на бесконечности, то мы сможем разложить ее в ряд по собственным функциям вида:

$$A(a_k) = \sum_i A_{ik} a_i \quad (60)$$

где

$$A_{ik} = \int_D \int \int a_i A(a_k) d\tau. \quad (61)$$

Постоянные A_{ik} образуют таблицу с бесконечным числом строк и столбцов, т. е. бесконечную матрицу. Говорят, что A_{ik} есть ik -тый элемент матрицы соответствующей оператору A .

В предыдущих доказательствах мы допустили, что в уравнениях в частных производных входят три пространственных переменных и что D является областью с тремя измерениями. Те же формулы справедливы, если уравнение зависит от одной или двух переменных; область D будет тогда одномерной или двумерной, как в примерах предыдущего параграфа и достаточно будет только заменить тройные интегралы двойными или простыми. В частности, в случае колеблющейся струны, теорема, выражаемая формулой (58), есть теорема Фурье, и формула (59) сводится к классической формуле, которая дает коэффициенты ряда Фурье.

4. Квантование системы частиц

До сих пор мы считали, что система, которую нужно было квантовать, сводится к одной частице, помещенной в постоянном заданном поле: например, осциллятор или атом водорода, когда мы пренебрегаем воздействием электрона на ядро.

Но мы должны уметь квантовать и систему, образованную из нескольких частиц взаимодействующих друг с другом. Это случай атомов более сложных, чем атом водорода, с несколькими электронами. Тогда уравнение распространения будет иметь вид:

$$\frac{1}{V_{\mu}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[V_{\mu}^{-\mu ik} \frac{\partial \Psi}{\partial q_k} \right] - \frac{8\pi^2}{h^2} F(q_i) \Psi = \frac{4\pi i}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (62)$$

Если мы примем за Ψ стационарную волну вида:

$$\Psi(q_i, t) = a(q_i) e^{\frac{2\pi i}{h} [Et + \dots]}, \quad (63)$$

то для a получим уравнение:

$$\frac{1}{V_{\mu}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[V_{\mu}^{-\mu ik} \frac{\partial a}{\partial q_k} \right] + \frac{8\pi^2}{h^2} [E - F(q_i)] a = 0. \quad (64)$$

Функция a должна быть конечной, однозначной и непрерывной и должна равняться нулю на бесконечности в конфигурационном пространстве, для которого ds^2 будет:

$$\sum_{ik} \mu_{ik} dq_i dq_k.$$

Мы допустим, что опять существует бесконечно большое число собственных значений для постоянной E , общей энергии системы; эти собственные значения суть энергии стационарных состояний: им соответствуют собственные функции $a_i(q_1, \dots, q_n)$; в общем для каждого собственного значения существует только одна собственная функция. Когда для одного и того же собственного значения мы имеем несколько собственных функций, то говорят, что имеет место вырождение.

Легко показать, что в общем случае собственные функции ортогональны между собой. В самом деле, для двух собственных значений E_i и E_m :

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_{\mu}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[V_{\mu}^{-\mu ik} \frac{\partial a_i}{\partial q_k} \right] + \frac{8\pi^2}{h^2} [E_i - F(q_i)] a_i &= 0 \\ \frac{1}{V_{\mu}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[V_{\mu}^{-\mu ik} \frac{\partial a_m}{\partial q_k} \right] + \frac{8\pi^2}{h^2} [E_m - F(q_i)] a_m &= 0, \end{aligned} \quad (65)$$

откуда легко получаем:

$$\begin{aligned} & \int \dots \int_n \left\{ a_m \frac{1}{V^\mu} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[V^{\mu} \mu^{ik} \frac{\partial a_l}{\partial q_k} \right] \right. \\ & \left. - a_l \frac{1}{V^\mu} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[V^{\mu} \mu^{ik} \frac{\partial a_m}{\partial q_k} \right] \right\} V^{\mu} dq_1 \dots dq_n \\ & = \int \dots \int_n \frac{8\pi^2}{h^2} (E_m - E_l) a_l a_m V^{\mu} dq_1 \dots dq_n. \end{aligned} \quad (86)$$

Интегрирование по частям дает для первого члена:

$$\int \dots \int_n V^{\mu} \sum_{ik} \mu^{ik} \left(\frac{\partial a_m}{\partial q_k} \frac{\partial a_l}{\partial q_i} - \frac{\partial a_l}{\partial q_k} \frac{\partial a_m}{\partial q_i} \right) dq_1 \dots dq_n$$

он равен нулю потому, что i и k суть значки суммирования и $\mu^{ik} = \mu^{ki}$. Остается, следовательно:

$$(E_m - E_l) \int \dots \int_n a_l a_m d\tau = 0. \quad (87)$$

Если, таким образом, на одно собственное значение приходится одна собственная функция, все собственные функции ортогональны. Если на одно собственное значение приходится несколько собственных функций, то эти собственные функции можно заменить таким же числом линейных комбинаций таким образом, чтобы новые функции были бы ортогональны.

С другой стороны мы можем нормировать собственные функции, полагая:

$$\int \dots \int_n a_k^2 d\tau = 1.$$

Следовательно, систему собственных функций всегда можно рассматривать как ортогональную и нормированную.

Всякая функция $f(q_1, \dots, q_n)$ конечная, однозначная, непрерывная и равная нулю на бесконечности, в конфигурационном пространстве может быть разложена в ряд по собственным функциям в виде:

$$f(q_1, \dots, q_n) = \sum_k c_k a_k(q_1, \dots, q_n), \quad (88)$$

где

$$c_k = \int \dots \int_n f(q_1, \dots, q_n) a_k(q_1, \dots, q_n) d\tau. \quad (89)$$

Наконец, если A означает некоторый оператор и если функция $A(a_k)$ конечна, однозначна, непрерывна и равна нулю на бесконечности в конфигурационном пространстве, то мы можем положить:

$$A(a_k) = \sum_i A_{ik} a_i, \quad (70)$$

где

$$A_{ik} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int a_i A(a_k) d\tau.$$

A_{ik} суть элементы матрицы, соответствующей оператору A .

ГЛАВА XVIII

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ КВАНТОВАНИЯ

1. Плоский ротор

Наиболее простым случаем квантования является квантование плоского ротора. Мы будем так называть систему, состоящую из частицы массы m , которая должна оставаться на круге радиуса R ; если мы примем центр круга за полюс, то положение частицы задается одной переменной—азимутом θ . По старой теории мы имеем тогда:

$$T = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2, \quad p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m R^2 \dot{\theta}, \quad (1)$$

Старый метод квантования дает:

$$\int_0^{2\pi} m R^2 \dot{\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} m v R d\theta = n h, \quad (2)$$

где

$$m v R = \frac{n h}{2\pi}. \quad (n \text{ целое}) \quad (3)$$

Откуда для значения энергии получаем:

$$E_n = T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{n^2 h^2}{8\pi^2 m R^2} = \frac{n^2 h^2}{8\pi^2 I}, \quad (4)$$

где I означает момент инерции ротора.

По новой механике мы должны исходить из уравнения разпространения:

$$\Delta a + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - F) a = 0, \quad (5)$$

которое здесь принимает очень простую форму:

$$\frac{1}{R^2} \frac{d^2 a}{d\theta^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} E a = 0. \quad (6)$$

Для a мы имеем следовательно:

$$a(\theta) = A \sin \frac{2\pi}{h} \sqrt{2mE} R(\theta - \theta_0), \quad (7)$$

где A и θ_0 две константы интегрирования.

Для того, чтобы a было однозначной функцией θ , нужно иметь:

$$\frac{\sqrt{2mE}}{h} R \cdot 2\pi = n, \text{ откуда } E_n = \frac{n^2 h^2}{8\pi^2 m R^2} = \frac{n^2 h^2}{8\pi^2 I}. \quad (8)$$

Мы получаем старую формулу (4)

По (7) собственные функции, соответствующие собственным значениям (8), суть:

$$a_n(\theta) = A \sin n(\theta - \theta_0), \quad (9)$$

а стабильные (приведенные) волны будут:

$$\Psi_n(\theta, t) = A \sin n(\theta - \theta_0) e^{\frac{2\pi i}{h} [E_n t + \dots]}. \quad (10)$$

Функции (9) образуют ортогональную систему, потому что:

$$\int_0^{2\pi} a_n a_{n'} R d\theta = 0, \quad \text{если } n \neq n'$$

Если мы хотим нормировать эти функции, то мы должны принять:

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi R}}, \text{ так как } R \int_0^{2\pi} \sin^2 n(\theta - \theta_0) d\theta = \pi R.$$

Если мы захотим ввести облако вероятности, соответствующее стационарной волне Ψ_n , мы увидим, что это облако неподвижно, потому что скорость его элементов $v = -\frac{1}{m} \text{ grad } \varphi$ равна нулю; что касается плотности облака, дающего вероятность присутствия частицы, то она равна $A^2 \sin^2 n(\theta - \theta_0)$.

Вместо того, чтобы рассматривать стоячую волну Ψ_n , мы можем рассматривать стабильную волну:

$$\Psi'_n + A' e^{\frac{2\pi i}{h} [E_n t + \frac{n h}{2\pi} (\theta - \theta_0) + \dots]}, \quad (11)$$

полученную наложением двух волн Ψ_n . Элементы вероятности сопряженные с Ψ_n имеют скорость:

$$v = -\frac{1}{mR} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \pm \frac{1}{mR} \frac{nh}{2\pi},$$

т. е. по (3) ту же скорость, что и скорость частицы в классической теории. В этом случае вероятность присутствия одна и та же для всех точек круга.

2. Пространственный ротатор

Емного более сложную задачу представляет собой случай пространственного ротатора. Он образован из частицы массы m принужденной двигаться по сфере радиуса R . По старой механике частица обязательно должна описать геодезическую линию сферы, т. е. большой круг. По старой теории квант условия квантования и формула, дающая энергии устойчивых движений, такие же как и в случае плоского ротатора.

По волновой механике мы должны исходить из уравнения распространения:

$$\Delta a + \frac{8\pi^2 m}{h^2} E a = 0. \quad (12)$$

Δa должно быть выражено при помощи двух переменных: широты θ и долготы α ; но на сфере мы имеем:

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\alpha^2, \quad (13)$$

откуда:

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= R^2; & g_{12} &= 0; & g_{22} &= R^2 \sin^2 \theta \\ g &= R^4 \sin^2 \theta; & g^{11} &= \frac{1}{R^2}; & g^{12} &= 0; & g^{22} &= \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Тогда для Δa находим:

$$\begin{aligned} \Delta a &= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial a}{\partial x_k} \right] \\ &= \frac{1}{R^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial a}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial a}{\partial \alpha} \right) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Окончательно уравнение для a будет:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial a}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 a}{\partial \alpha^2} + \frac{8\pi^2 m R^2 E}{h^2} a = 0. \quad (16)$$

В анализе доказывается, что это уравнение допускает конечное, однозначное и непрерывное на всей сфере и даже на полюсах решение только тогда, когда коэффициент a равен произ-

ведению двух последовательных целых чисел, положительных или равных нулю. Следовательно, собственные значения E будут:

$$E_n = n(n+1) \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m R^2} \quad n=0, 1 \dots n \quad (17)$$

Соответствующими собственными функциями являются шаровые функции Лапласа $Y_n(\theta, \alpha)$. Они выражаются при помощи тригонометрических функций и полиномов Лежандра. Полиномы Лежандра определяются соотношением:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^n]. \quad (18)$$

Исходя из полиномов P_n , мы определяем производные полиномы

$$P_n^k(x) = (1-x^2)^{\frac{k}{2}} \frac{d^k}{dx^k} [P_n(x)]. \quad (19)$$

Если вспомнить эти определения, то функции Y можно выразить так

$$Y_n(\theta, \alpha) = \sum_{k=0}^{n} (A_k \cos k\alpha + B_k \sin k\alpha) P_n^k(\cos \theta), \quad (20)$$

где A_k и B_k постоянные. Следовательно, стационарные волны пространственного ротатора суть:

$$\Psi_{nk}(\theta, \alpha, t) = \left[\sum_{k=0}^{n} (A_k \cos k\alpha + B_k \sin k\alpha) P_n^k(\cos \theta) \right] e^{\frac{2\pi i}{\hbar} [E_n t + \gamma]}. \quad (21)$$

Мы замечаем, что здесь имеет место вырождение: для одного и того же собственного значения E_n можно получить $(2n+1)$ различных функций, выбирая произвольно $(2n+1)$ постоянных $A_0, A_1, B_1, \dots, B_n$. Функции Y_n ортогональны: это следует из общей теоремы, доказанной в последней главе, так как эти функции являются собственными функциями уравнения в частных производных.

Элементы вероятности сопряженные со стационарной волной Ψ_{nk} неподвижны и плотность их в некоторой точке сферы равна Y_n^2 .

Так как здесь существует несколько собственных функций для одного и того же собственного значения, то можно получить многочисленные линейные комбинации стационарных волн, которые дают одну результирующую монохроматическую волну. Наиболее простыми будут следующие:

$$\Psi'_{nk}(\theta, \alpha, t) = A' P_n^k(\cos \theta) e^{\frac{2\pi i}{\hbar} [E_n t \pm k \frac{\hbar \alpha}{2\pi} + \gamma]}. \quad (22)$$

Элементы вероятности сопряженные с Ψ'_{nl} описывают параллели на сфере со скоростью

$$v = -\frac{1}{m} \text{ grad } \varphi = \frac{1}{mR \sin \alpha} \cdot k \frac{h}{2\pi}.$$

Плотность вероятности есть функция только широты и равна $[A' P_n^k(\cos \theta)]^2$.

Комбинируя стационарные решения, соответствующие различным ориентациям полярной оси, мы получим более сложные движения для элементов вероятности.

3. Гармонический осциллятор

Теперь мы перейдем к изучению случая линейного гармонического осциллятора. Он образован из частицы массы m , принужденной перемещаться вдоль прямой ox , притягиваясь обратно к точке o под влиянием силы $-kx$ пропорциональной удлинению.

В старой механике частота колебаний, как мы видели в начале XVI главы, не зависит от амплитуды колебания и равна:

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{T}. \quad (23)$$

Старая теория квант давала для энергии устойчивых состояний выражение:

$$E_n = nh\omega. \quad (24)$$

По новой механике, дифференциальное уравнение для амплитуды есть:

$$\frac{d^2 a}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left[E - \frac{kx^2}{2} \right] a = 0. \quad (25)$$

Положим:

$$A = \frac{8\pi^2 m}{h^2}; \quad B = \frac{4\pi^2 mk}{h^2} = \frac{16\pi^4 m^2 \omega^2}{h^2}. \quad (26)$$

Уравнение (25) принимает вид:

$$\frac{d^2 a}{dx^2} + (AE - Bx^2) a = 0. \quad (27)$$

Сделаем замену переменных;

$$q = x\sqrt{B} \quad (28)$$

и положим:

$$\frac{AE}{\sqrt{B}} = \lambda \quad (29)$$

получаем:

$$\frac{d^2 a}{dq^2} + (\lambda - q^2) a = 0. \quad (30)$$

Мы покажем, что собственные значения этого уравнения суть:

$$\lambda = 1, 3, 5, \dots, 2n+1 \dots \quad (31)$$

В самом деле, подставим в (30) функцию:

$$a(q) = e^{-\frac{q^2}{2}} u(q) \quad (32)$$

получаем:

$$\frac{d^2 u}{dq^2} - 2q \frac{du}{dq} + (\lambda - 1) u = 0. \quad (33)$$

Так как функция u должна быть конечной, однозначной и непрерывной, то она может быть выражена в виде ряда по положительным степеням q .

$$u = c_0 + c_1 q + c_2 q^2 + \dots + c_n q^n + \dots \quad (34)$$

Подставим это в (33) и приравняем нулю коэффициенты при q^n ; находим:

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} = (2n - \lambda + 1)c_n \quad (35)$$

или

$$c_{n+2} = \frac{2n+1-\lambda}{(n+1)(n+2)} c_n.$$

Все четные индексы c_n считаются таким образом, начиная с c_0 , все нечетные индексы c_n считаются, начиная с c_1 . Константы c_0 и c_1 суть произвольные постоянные интегрирования уравнения (33). Положим сперва, что λ равно нечетному числу $2k+1$; k четно или нечетно. Если k нечетно, то положим $c_0=0$, а c_1 какому нибудь числу; если k четно, то положим $c_1=0$, а c_0 какому нибудь числу. Таким образом мы получаем функцию $u(q)$, которая приводится к полиному степени k , называ-

емым k -тым полиномом Эрмита $H_k(q)$. Функция $a = e^{-\frac{q^2}{2}} H_k(q)$ конечна, однозначна, непрерывна и равна нулю для $q = \pm \infty$; это собственная функция уравнения (30). Если мы выберем c_0 и c_1 иначе, чем мы это сделали сейчас, мы получаем конечное число членов, показатель которых имеет некоторую четность и бесконечное число членов с противоположною четностью в показателе. Легко понять, что $u(q)$ стремится тогда к бесконечности быстрее, чем $e^{\frac{q^2}{2}}$ при стремлении q к бесконечности; соответствующая функция $a(q)$ не является, следовательно, больше собственной функцией.

Допустим теперь, что λ не равно целому четному числу; тогда, каковы бы не были c_0 и c_1 , для $u(q)$ мы получим ряд, который стремится к бесконечности быстрее чем $e^{\frac{q^2}{2}}$, при стремлении q к бесконечности и соответствующая функция $a(q)$ не годится.

Резюмируя, мы видим, что дифференциальное уравнение (30) допускает конечное, непрерывное и равное нулю на бесконечности решение только для $\lambda = 2k + 1$, где k положительное целое число или нуль. Соответствующие собственные функции равны:

$$a_k(q) = e^{-\frac{q^2}{2}} H_k(q). \quad (36)$$

В теории Эрмитовых полиномов доказывалось, что функции a_k ортогональны; это следует из общей теоремы об ортогональности собственных функций дифференциального уравнения типа (30). Можно также показать, что:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m^2(q) e^{-q^2} dq = 2^n n! \sqrt{\pi}. \quad (37)$$

Так что нормированные собственные функции будут здесь:

$$a_k(q) = \frac{1}{V 2^k k! \sqrt{\pi}} e^{-\frac{q^2}{2}} H_k(q). \quad (38)$$

Вернемся теперь к нашей проблеме квантования. По предыдущему уравнение (27) допускает собственные значения:

$$E_k = (2k+1) \frac{Y \bar{B}}{A} = (2k+1) \frac{\hbar \omega}{2} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega. \quad (39)$$

Этот результат замечателен тем, что мы находим здесь закон половинных квантов, подсказанный опытом, но доказать который старая квантовая теория была не в силах.

Собственные нормированные функции (27), соответствующие E_k , суть:

$$a_k(x) = \frac{1}{V 2^k k! \sqrt{\pi}} e^{-\frac{2\pi^2 \omega m}{\hbar} x^2} H_k \left(2\pi \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) \quad (40)$$

и стационарная волна порядка k будет:

$$\Psi_k(x, t) = \frac{1}{V 2^k k! \sqrt{\pi}} e^{-\frac{2\pi^2 \omega m}{\hbar} x^2} H_k \left(2\pi \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \left(k + \frac{1}{2}\right) \omega t}. \quad (41)$$

Когда состояние осциллятора представлено Ψ_k , элементы вероятности неподвижны. Вероятность присутствия частицы в точке x равна:

$$\frac{1}{2^k k! \sqrt{\pi}} e^{-\frac{4\pi^2 \omega m}{\hbar} x^2} H_k^2 \left(2\pi \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right).$$

Мы видим, следовательно, что частица может занимать любое положение на оси ox , но что вероятность того, что она будет занимать положение очень удаленное от начала координат O , очень мала. В старой механике движение совершается вдоль *ограниченного* участка оси ox , причем концами этого отрезка являются те точки, где частица поворачивает обратно. С этой точки зрения между старой и новой механикой существует большое различие.

Можно рассматривать также гармонический осциллятор двух или трех измерений. В общем случае трех измерений, частица может перемещаться во всех направлениях и, благодаря соответственному выбору прямоугольных осей, потенциальная энергия всегда может быть представлена в виде:

$$F(x, y, z) = \frac{k_1 x^2}{2} + \frac{k_2 y^2}{2} + \frac{k_3 z^2}{2}. \quad (42)$$

Положим:

$$\Psi(x, y, z, t) = a_1(x) a_2(y) a_3(z) e^{-\frac{2\pi i}{h} (E_1 + E_2 + E_3) t}. \quad (43)$$

Уравнение распространения разлагается на три таких уравнения, что:

$$\frac{d^2 a_1}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left[E_1 - \frac{k_1 x^2}{2} \right] a_1 = 0 \quad \text{и т. д.} \quad (44)$$

По результатам, полученным для линейного осциллятора, мы видим, что квантованные значения энергии будут:

$$E_{n_1 n_2 n_3} = E_1 + E_2 + E_3 \\ = \left(n_1 + \frac{1}{2} \right) h\omega_1 + \left(n_2 + \frac{1}{2} \right) h\omega_2 + \left(n_3 + \frac{1}{2} \right) h\omega_3, \quad (45)$$

где

$$\omega_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_i}{m}}. \quad (46)$$

Амплитуда стационарных волн Ψ выражается произведением Эрмитовых полиномов.

Если две из констант k_i равны, то мы будем иметь частичное вырождение; если три k_i равны, то имеет место полное вырождение и осциллятор будет изотропен. В том и другом случае несколько квантованных значений энергии совпадают; иными словами существует несколько устойчивых состояний для одного и того же собственного значения энергии.

4. Водородный атом

Займемся теперь очень важным случаем водородного атома, образованного из неподвижного положительного ядра с зарядом $+e$ и одного планетарного электрона с зарядом $-e$. Возьмем систему сферических координат с центром в ядре: α долгота, θ широта и r радиус вектор.

В сферических координатах мы имеем:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\alpha^2, \quad (47)$$

откуда:

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= 1 & g_{22} &= r^2 & g_{33} &= r^2 \sin^2 \theta; & g_{ik} &= 0 & (i \neq k) \\ g &= r^1 \sin^2 \theta & g^{11} &= 1 \\ g^{22} &= \frac{1}{r^2} & g^{33} &= \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}; & g^{ik} &= 0 & (i \neq k) \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Тогда уравнение для a :

$$\frac{1}{Vg} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[Vg g^{ik} \frac{\partial a}{\partial q_k} \right] + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left[E + \frac{e^2}{r} \right] a = 0, \quad (49)$$

т. е. делая вычисления:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 a}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial a}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial a}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 a}{\partial \alpha^2} + \\ + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left[E + \frac{e^2}{r} \right] a = 0. \end{aligned} \quad (50)$$

Шредингер доказал, что это уравнение допускает конечные, непрерывные, однородные и равные нулю на бесконечности решения для всех положительных значений E и для отрицательных значений E_n равных:

$$E_n = - \frac{2\pi^2 m e^4}{n^2 h^2}. \quad (n \text{ целое}) \quad (51)$$

Собственные положительные значения соответствуют гиперболическим траекториям старой механики, собственные отрицательные значения соответствуют устойчивым состояниям уже предсказанным Бором, так как формула (51) точно совпадает с основной формулой теории Бора.

Заметим, что вслед за прерывным рядом мы имеем непрерывный ряд собственных значений; мы отметили ранее, что это обстоятельство могло возникнуть тогда, когда область, для которой решается проблема собственных колебаний, бесконечно велика, а этот случай мы и имеем здесь.

Водородная проблема вырождена: каждому собственному значению (51) соответствует несколько собственных функций, каж-

дая из которых по своему полному определению требует, чтобы были заданы два целых числа k и k_1 такие, что

$$\begin{aligned} 0 \leq k < n, \\ 0 \leq k_1 \leq k. \end{aligned} \quad (52)$$

По вычислениям Шредингера, стационарная волна соответствующая трем целым числам n, k, k_1 задается через:

$$\Psi_{nkk_1}(r, \theta, \alpha, t) = (A \cos k_1 \alpha + B \sin k_1 \alpha) P_k^{k_1}(\cos \theta) x^k e^{-x} L_{\frac{2k+1}{2}, k}^{(x)} e^{\frac{2\pi i}{h} (E_n t + \gamma)}, \quad (53)$$

где A, B и γ постоянные и x означает величину $\frac{4\pi^2 m e^2}{n^3 \hbar^2} r$. Полиномы $P_k^{k_1}(\cos \theta)$ мы определили во втором параграфе этой главы; что касается $L_{\frac{2k+1}{2}, k}^{(x)}$, то это полином от x , который связан с полиномами Лагера, и который мы не будем здесь давать в явном виде.

Элементы вероятности сопряженные с Ψ_{nkk_1} , неподвижны и плотность облака вероятности пропорциональна квадрату амплитуды. Как и в случае осциллятора можно заметить, что электрон может находиться на любом расстоянии от ядра, но однако вероятность этого быстро убывает с расстоянием. В старой механике, напротив, электрон с отрицательной энергией E_n не мог находиться вне сферы радиуса:

$$R_n = -\frac{e^2}{E_n}, \quad (54)$$

так как вне этой сферы его кинетическая энергия должна была бы быть отрицательной, что не могло иметь места.

Комбинируя стационарные волны типа (53) можно получить большое число стабильных монохроматических волн. Для этого требуется сложить несколько Ψ_{nkk_1} , соответствующих одному и тому же значению n , но различным значениям k и k_1 или различным ориентациям полярной оси. Одна из наиболее простых комбинаций следующая:

$$\Psi'_{nkk_1} = A' P_k^{k_1}(\cos \theta) x^k e^{-x} L_{\frac{2k+1}{2}, k}^{(x)} e^{\frac{2\pi i}{h} [E_n t \pm k_1 \frac{h}{2\pi} \gamma]}. \quad (55)$$

Элементы вероятности, сопряженные со стабильной волной Ψ'_{nkk_1} описывают круги вокруг полярной оси со скоростью, связанной с радиусом вектором R и широтой θ соотношением:

$$v = -\frac{1}{m} \text{grad } \varphi = -\frac{1}{mR \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \pm \frac{1}{mR \sin \theta} k_1 \frac{h}{2\pi}. \quad (56)$$

Эта формула сравнима с формулой

$$mvR = k_1 \frac{h}{2\pi},$$

которую старая теория квант применяла к самой частице.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ Ψ ВОЛН ДЛЯ КВАНТОВАННЫХ СИСТЕМ

1. Приложение общих принципов к квантованным системам

Общее уравнение распространения для системы, не подвергающейся внешним воздействиям, есть:

$$-\frac{1}{V} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[V \mu^{ik} \frac{\partial \Psi}{\partial q_k} \right] - \frac{8\pi^2}{h^2} F(q) \Psi = -\frac{4\pi i}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (1)$$

Если система образована из одной частицы, как системы изученные в предыдущей главе, то уравнение (1) приводится к следующему:

$$\frac{1}{m} \Delta \Psi - \frac{8\pi^2}{h^2} F(q) \Psi = -\frac{4\pi i}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (2)$$

Эти уравнения (1) и (2) удовлетворяются всеми линейными комбинациями стационарных волн Ψ_k с частотами равными собственным значениям E_k , деленным на h ; обратно, всякая конечная, однородная, непрерывная и равная нулю на бесконечности функция может быть разложена в ряд по собственным функциям. Следовательно, мы всегда можем положить:

$$\Psi(q, t) = \sum_k c_k a_k(q) e^{\frac{2\pi i}{h} (E_k t + \gamma_k)}. \quad (3)$$

Функции a_k ортогональны и их можно считать нормированными. Мы будем считать c_k выбранными так, что $\sum_k c_k^2 = 1$, что всегда возможно, так как Ψ определяется с точностью до постоянного множителя.

Для истолкования смысла волны Ψ мы должны воспользоваться двумя основными принципами: принципом интерференции и принципом спектрального разложения.

По принципу интерференции вероятность присутствия частицы в обычном пространстве или представляющей точки в конфигурационном пространстве будет равна:

$$\begin{aligned} \Psi \cdot \Psi^* &= \sum_{kl} c_k c_l a_k a_l e^{\frac{2\pi i}{h} [(E_k - E_l)t + \gamma_k - \gamma_l]} \\ &= \sum_k c_k^2 a_k^2 + \sum_{k < l} 2c_k c_l a_k a_l \cos \frac{2\pi}{h} [(E_k - E_l)t + \gamma_k - \gamma_l]. \end{aligned} \quad (4)$$

Замечательно, что в этом выражении появляются как раз те частоты $\frac{E_k - E_l}{h}$, которые фигурируют в законе частот Бора и которые объясняют, почему спектральные линии атома имеют частоты равные разности спектральных термов атома $\frac{E_k}{h}$.

Выражение (4) дает абсолютную величину вероятности присутствия, так как после интегрирования мы получим:

$$\int \dots \int \Psi \Psi^* d\tau = 1 \quad (5)$$

в силу соотношений:

$$\int \dots \int a_k a_l d\tau = 0; \quad \int \dots \int a_k^2 d\tau = 1; \quad \sum_k c_k^2 = 1 \quad (6)$$

Как можем мы применить здесь принцип спектрального разложения? По Бору следует сказать: вероятность того, что квантованная система, сопряженная волна которой имеет вид (3), будет находиться в продолжении наблюдения в стационарном состоянии со значком k , равняется a_k^2 . В самом деле, интенсивность $c_k^2 a_k^2(q_i)$ спектральной составляющей с частотой $\frac{E_k}{h}$ в разложении (3) изменяется от точки к точке, но общая интенсивность этой составляющей $\int \dots \int c_k^2 a_k^2(q_i) d\tau$ равна c_k^2 , потому что a_k нормированы; естественно, следовательно, рассматривать c_k^2 как вероятности относящиеся к различным состояниям системы сопряженной с волной (3).

Эта формулировка принципа спектрального разложения для квантовых систем вызывает одно затруднение, которое интересно рассмотреть детальнее. Это затруднение мы выскажем для случая одной частицы: „частица, скажем мы, находится в одном из стабильных состояний; вероятность того, чтобы это было состояние E_k есть c_k^2 ; с другой стороны, когда она находится в состоянии E_k , вероятность найти ее в точке $x y z$ равна $a_k^2(x y z)$; следовательно, в силу общих теорем о сложных вероятностях, вероятность того, что частица находится в точке $x y z$ равна $\sum_k c_k^2 a_k^2(x y z)$. Но это выражение не равно $\Psi \cdot \Psi^*$, так как в выражении (4) сверх члена $\sum_k c_k^2 a_k^2$ имеются члены колебательные, содержащие боровские частоты. Следовательно, между нашими двумя фундаментальными принципами существует противоречие“.

Таково возражение. Для того, чтобы устранить его, нужно вспомнить точный смысл приписываемый волне Ψ теорией Бора и Гейзенберга. Если наши знания о квантованной системе представлены волной Ψ из формулы (3), то это еще не значит, что система действительно находится в одном из квантованных состояний, но вероятность того, что имеет место состояние с энергией E_k равна c_k^2 . Из того, что мы знаем волну Ψ , вытекает только то, что если мы сделаем опыт, позволяющий приписать некоторое положение частице в квантованной системе, то существует вероятность $\Psi(x, y, z) \cdot \Psi^*(x, y, z)$ того, что это положение находится в элементе объема $dx dy dz$ и если, с другой стороны, мы сделаем опыт, позволяющий нам приписать частице некоторое энергетическое состояние, то существует вероятность найти ее в энергетическом состоянии E_k равная c_k^2 . Но по существу возрений Гейзенберга надо допустить, что оба эти возможные опыты нарушают начальное положение вещей и нарушают его *различно*; именно поэтому приложение теоремы о сложных вероятностях не допустимо. Если для определения положения частицы мы пытаемся определить сперва ее энергетическое состояние и затем уже, сделав это измерение, определить ее положение, то вероятность нахождения таким образом частицы в xuz будет $\sum_k c_k^2 a_k^2(xuz)$; но эта вероятность не

имеет оснований равняться вероятности найти частицу в xuz при помощи прямого измерения положения, исходя из начального состояния, так как предварительное определение энергетического состояния совершенно нарушает расположение системы. Резюмируя, мы видим, что интерес обсуждаемого возражения заключается в том, что оно показывает, что если мы хотим сохранить оба принципа — интерференции и спектрального разложения, то необходимо допустить обязательное возмущение квантованной системы всеми методами измерения или наблюдения.

2. Влияние внешнего воздействия на квантованную систему

Допустим теперь, что квантованная система подвергается внешнему возмущающему действию, которое может зависеть от времени. Тогда потенциальная энергия $F(q, t)$ складывается из двух членов: члена $\mathcal{V}(q)$, происходящего от взаимодействия между составляющими системы и члена $R(q, t)$, происходящего от внешнего возмущающего поля: R есть возмущающий потенциал. В отсутствии возмущающего поля, уравнение Шредингера для системы будет:

$$\frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial a}{\partial q_i} \right] + \frac{8\pi^2}{h^2} [E - \mathcal{V}(q_i)] a = 0. \quad (7)$$

Если мы всегда будем обозначать через $a_k(q_i)$ ортогональные и нормированные собственные функции этого уравнения, то наиболее общая волна Ψ для рассматриваемой системы будет:

$$\Psi(q_i, t) = \sum_k c_k a_k(q_i) e^{\frac{2\pi i}{h} [E_k t + \gamma_k]}, \quad (8)$$

где c_k и γ_k вещественные постоянные.

Когда система подвергается действию возмущения, то нужно удовлетворить следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V \mu} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[V \mu^{ik} \frac{\partial \Psi}{\partial q_k} \right] - \frac{8\pi^2}{h^2} [\mathcal{V}(q_i) + R(q_i, t)] \Psi \\ = \frac{4\pi i}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \end{aligned} \quad (9)$$

Наиболее простой метод разыскания решения этого уравнения состоит в том, что мы полагаем:

$$\psi(q_i, t) = \sum_k c_k(t) a_k(q_i) e^{\frac{2\pi i}{h} [E_k t + \gamma_k(t)]}, \quad (10)$$

считая теперь c_k и γ_k функциями времени: это метод вариации постоянных Дирака. Подставляя (9) в (10), мы получаем:

$$\begin{aligned} -\frac{8\pi^2}{h^2} R(q_i, t) \sum_k c_k(t) a_k(q_i) e^{\frac{2\pi i}{h} [E_k t + \gamma_k(t)]} \\ = -\frac{4\pi i}{h} \sum_k a_k(q_i) e^{\frac{2\pi i}{h} [E_k t + \gamma_k(t)]} \left(-\frac{dc_k}{dt} + c_k \frac{2\pi i}{h} \frac{d\gamma_k}{dt} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Умножим уравнение на $a_l(q_i) dt$ и проинтегрируем по всему конфигурационному пространству. Получим:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi i}{h} \left[\frac{dc_l}{dt} + c_l \frac{2\pi i}{h} \frac{d\gamma_l}{dt} \right] e^{\frac{2\pi i}{h} [E_l t + \gamma_l(t)]} \\ = -\frac{8\pi^2}{h^2} \sum_k c_k(t) e^{\frac{2\pi i}{h} [E_k t + \gamma_k(t)]} \int \dots \int R(q_i, t) a_k a_l dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Кратный интеграл есть элемент kl матрицы, соответствующий оператору: умножим на $R(q_i, t)$; обозначим его через $R_{kl}(t)$. Мы имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dc_l}{dt} + \frac{2\pi i}{h} c_l \frac{d\gamma_l}{dt} \\ = \frac{2\pi i}{h} \sum_k R_{kl}(t) c_k(t) e^{\frac{2\pi i}{h} [(E_k - E_l)t + \gamma_k(t) - \gamma_l(t)]} \end{aligned} \quad (13)$$

Переходя к комплексным сопряженным величинам, получим:

$$\begin{aligned} \frac{dc_l}{dt} - \frac{2\pi i}{h} c_l \frac{d\gamma_l}{dt} \\ = - \frac{2\pi i}{h} \sum_k R_{kl}(t) c_k(t) e^{-\frac{2\pi i}{h} [(E_k - E_l)t + \gamma_k(t) - \gamma_l(t)]}. \end{aligned} \quad (14)$$

Наконец, складывая и вычитая (13) и (14), мы получаем два вещественные уравнения:

$$\frac{dc_l}{dt} = - \frac{2\pi}{h} \sum_k k_{kl}(t) c_k(t) \sin \frac{2\pi}{h} [(E_k - E_l)t + \gamma_k(t) - \gamma_l(t)], \quad (15)$$

$$c_l \frac{d\gamma_l}{dt} = \sum_k R_{kl}(t) c_k(t) \cos \frac{2\pi}{h} [(E_k - E_l)t + \gamma_k(t) - \gamma_l(t)]. \quad (16)$$

Это есть система совместных уравнений, определяющая $c_l(t)$ и $\gamma_l(t)$, если известны их начальные значения.

По Борну величина $c_k^2(t)$ дает вероятность того, что в момент времени t система находится в энергетическом состоянии E_k . Величина $\sum_k c_k^2(t)$, которую мы считали равной единице в начале возмущения, должна всегда оставаться равной 1. Это легко проверить. В самом деле, исходя из (15) мы имеем:

$$\sum_l c_l \frac{dc_l}{dt} = \sum_l \frac{d(c_l^2)}{dt} = - \frac{2\pi}{h} \sum_{kl} R_{kl}(t) c_k c_l \sin \frac{2\pi}{h} [(E_k - E_l)t + \gamma_k - \gamma_l], \quad (17)$$

но сумма в правой части равна нулю потому, что она меняет знак при перестановке индексов k и l ; следовательно, $\sum_l c_l^2$ постоянна и сохраняет начальное значение равное 1.

Гипотеза Борна, в такой ее формулировке, приводит к небольшому затруднению. Функции:

$$\Psi_k = a_k e^{\frac{2\pi i}{h} [E_k t + \gamma_k]}$$

действительно представляют собой стационарные волны, соответствующие значению потенциальной энергии при отсутствии возмущения; но в момент времени τ , во время действия возмущения потенциальная энергия равна $\mathcal{V}(q_i) + R(q_i, \tau)$ и собственные значения и функции в этот момент получаются уже из уравнения:

$$\frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} \sum_{ik} \frac{1}{\partial q_i} \left[V^{\frac{1}{2}} \mu^{ik} \frac{\partial a}{\partial q_k} \right] + \frac{8\pi^2}{h^2} [E - \mathcal{V}(q_i) - R(q_i, \tau)] a = 0, \quad (18)$$

где τ считается постоянным параметром.

Собственные значения E_k уравнения (18) и следует рассматривать как энергии устойчивых состояний в момент времени τ . Действительно, если в момент времени τ сделан опыт для того, чтобы определить энергетическое состояние системы, то для энергии можно найти одно из значений E_k , но нет никакого основания найти одно из значений E_k , соответствующих отсутствию возмущений. Если $a_k^-(q_i)$ есть собственные функции, соответствующие E_k для уравнения (18), то волновую функцию $\Psi(q, t)$ нужно разложить в ряд по собственным функциям:

$$\Psi(q, t) = \sum_k d_k(t) a_k^-(q_i) e^{\frac{2\pi i}{h} [E_k t - \varepsilon_k(t)]} \quad (19)$$

и величина $d_k^2(\tau)$ должна давать вероятность того, что в момент времени τ система находится в энергетическом состоянии E_k (Фок).

Если мы имеем дело с возмущением ограниченной продолжительности, которое начинается в момент времени 0 и оканчивается в момент времени T , мы имеем: $R(q, 0) = 0$ и $R(q, T) = 0$ и следовательно: $E_k = E_k^0 = E_k^T$. Тогда мы можем воспользоваться коэффициентами c_k разложения (8) и сказать, что $c_k^2(T)$ представляет собой вероятность того, что в конце возмущения система находится в энергетическом состоянии E_k . В этом случае затруднения устраняются тем, что собственные значения уравнения (18) в конце возмущения принимают начальные значения. Таким образом, мы можем вычислить вместе с Борном вероятность того, что в конце действия возмущения система находится в том или ином состоянии. Мы не будем останавливаться на разработке и приложении этих общих идей, что потребовало бы целой новой книги; мы хотели только отметить как принцип спектрального разложения находит здесь свое применение.

3. Облако вероятности и матрицы Гейзенберга

Мы не имеем возможности развивать здесь ни теорию испускания излучения атомами Шредингера, ни метод матриц Гейзенберга.

Удовлетворимся тем, что покажем, как в простом случае атома водорода можно, рассматривая облако вероятности, сопряженное с волной Ψ , ввести матричные элементы Гейзенберга. В атоме водорода существует только одна движущаяся частица, и поэтому достаточно взять только три прямоугольные координаты q_1, q_2, q_3 . Определим теперь шесть операторов Q^i и P^i при помощи формул:

$$\begin{aligned} Q^i &= \text{умножению на } q_i \\ P^i &= \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_i} \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (20)$$

По определению, которое мы дали для элементов матрицы, соответствующей оператору [формула (61) главы XVII], мы получаем для элементов со значками kl шесть матриц, соответствующих Q_i и P_i :

$$Q_{kl}^i = \iiint a_k q_i q_l d\tau, \quad (21)$$

$$P_{kl}^i = \iiint a_k \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial a_l}{\partial q_i} d\tau, \quad (22)$$

где a_k нормированные собственные функции атома водорода. Допустим, что рассматриваемая волновая функция атома будет:

$$\Psi = \sum_k c_k a_k(q_1 q_2 q_3) e^{2\pi i (\nu_k t + \gamma_k)}. \quad (23)$$

Мы можем рассматривать облако вероятности, соответствующее этому виду Ψ . Плотность облака равна:

$$\rho = a^2 = \sum_k c_k^2 a_k^2 + 2 \sum_{k < l} c_k c_l a_k a_l \cos 2\pi [(\nu_k - \nu_l)t + \gamma_k - \gamma_l] \quad (24)$$

И по формуле (37) главы IX составляющая скорости элементов вероятности по оси q_i будет

$$\begin{aligned} v_i &= -\frac{1}{m} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q_i} = -\frac{h}{4\pi i m} \frac{\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial q_i} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial q_i}}{a^2} = \\ &= -\frac{h}{2\pi m a^2} \sum_{k < l} c_k c_l \left(a_k \frac{\partial a_l}{\partial q_i} - a_l \frac{\partial a_k}{\partial q_i} \right) \sin 2\pi [(\nu_k - \nu_l)t + \gamma_k - \gamma_l]. \end{aligned} \quad (25)$$

Допустим теперь, что мы распределяем электрический заряд электрона равномерно по всем элементам вероятности таким образом, что общий заряд будет:

$$\iiint \rho e d\tau = e.$$

Плотность ρe представляет собой, если угодно, среднюю вероятную плотность электричества в атоме, и электрический момент облака вероятности имеет следующую составляющую по оси q_i :

$$\begin{aligned} M_i &= \iiint \rho e q_i d\tau = \\ &= \text{const} + 2 \sum_{k < l} c_k c_l e \iiint a_k a_l q_i d\tau \cos 2\pi [(\nu_k - \nu_l)t + \gamma_k - \gamma_l]. \end{aligned} \quad (26)$$

Эта составляющая электрического момента содержит, следовательно, члены периодически изменяющиеся с частотами $\nu_k - \nu_l$

которые представляют собой боровские частоты, и амплитуда члена с частотой $\nu_k - \nu_l$ пропорциональна Q_{kl}^i . Это дает нам физическую интерпретацию матричных элементов Q^i введенных Гейзенбергом.

Так как электрическая плотность облака вероятности изменяется со временем, то это облако является носителем электрического тока. Составляющая электрического тока по оси q_i внутри облака будет:

$$J_i = \iiint \rho e v_i d\tau \quad (27)$$

и следовательно по (25):

$$\begin{aligned} J_i &= -\frac{he_i}{2\pi m} \iiint \sum_{k < l} c_k c_l \\ &\left(a_k \frac{\partial a_l}{\partial q_i} - a_l \frac{\partial a_k}{\partial q_i} \right) d\tau \cdot \sin 2\pi [(\nu_k - \nu_l) t + \gamma_k - \gamma_l] = \\ &= \text{вещ. части } \frac{2e}{m} \sum_{k < l} c_k c_l \frac{h}{4\pi i} \\ &\iiint \left(a_k \frac{\partial a_l}{\partial q_i} - a_l \frac{\partial a_k}{\partial q_i} \right) d\tau \cdot e^{2\pi i [(\nu_k - \nu_l) t + \gamma_k - \gamma_l]} \end{aligned} \quad (28)$$

Составляющие тока разлагаются, таким образом, по периодическим членам с боровскими частотами, и амплитуда члена с частотой $\nu_k - \nu_l$ пропорциональна величине:

$$\frac{h}{4\pi i} \iiint \left(a_k \frac{\partial a_l}{\partial q_i} - a_l \frac{\partial a_k}{\partial q_i} \right) d\tau = \frac{h}{2\pi i} \iiint a_k \frac{\partial a_l}{\partial q_i} d\tau = P_{kl}^i \quad (29)$$

Первое равенство получается вследствие интегрирования по частям, потому что a_k равны нулю на бесконечности. Таким образом мы получаем в некотором роде физическую интерпретацию матриц Гейзенберга P_{kl}^i .

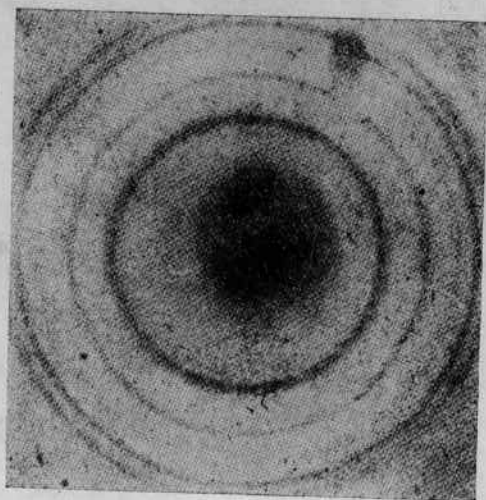
Из предшествующего следует также, что если электрическую плотность облака вероятности назвать δ , а соответствующую составляющую плотности тока j_i , то

$$\delta = \rho e = e\Psi\Psi^*, \quad (30)$$

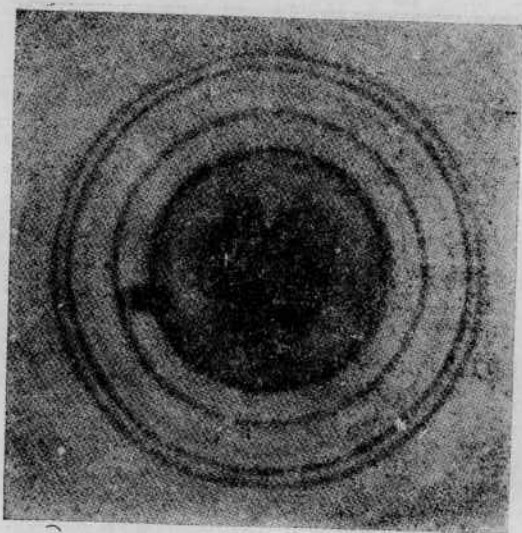
$$j_i = \rho e v_i = -\frac{he}{4\pi im} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial q_i} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial q_i} \right). \quad (31)$$

Формула (30) была предложена Шредингером в его знаменитых работах по волновой механике; он рассматривал тогда δ как истинную электрическую плотность.

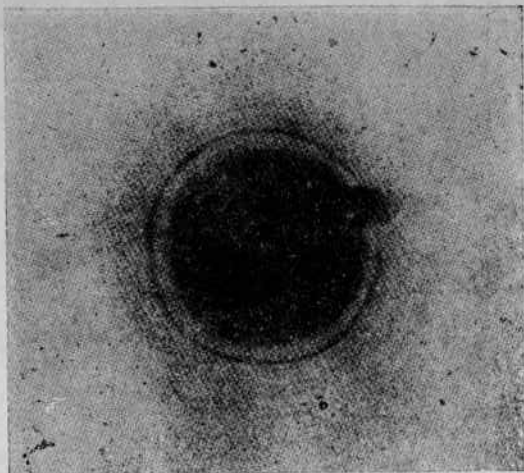
Формула (31) впервые была дана Гордоном в более общей форме в статье об эффекте Комптона.



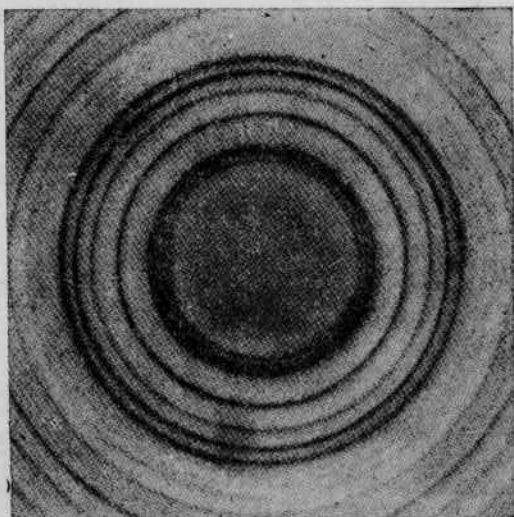
Фот. 1.
 Дифракционные кольца, - полученные
 при рассеянии от ZnO электронов
 10 190 вольт. $\lambda = 0,121\frac{1}{2}\text{Å}$.



Фот. 2.
 Дифракционные кольца, полученные
 при рассеянии от ZnO электронов
 13 489 вольт. $\lambda = 0,105\text{ Å}$.



Фот. 3.
Дифракционные кольца, полученные
при рассеянии от CdO электронов
16 670 вольт. $\lambda = 0,94 \text{ \AA}$.



Фот. 4.
Дифракционные кольца, полученные
при рассеянии от ZnO электронов
18 710 вольт. $\lambda = 0,090 \text{ \AA}$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому изданию	3
Общее введение.	7
Глава I. Старая механика материальной точки.	
1. Принцип Гамильтона	14
2. Уравнения Лагранжа	16
3. Функция Лагранжа. Количество движения и энергии	17
4. Другое выражение принципа Гамильтона. Принцип Мопертюи	20
5. Канонические уравнения Гамильтона	23
6. Касательное преобразование	25
Глава II. Теория Якоби	
1. Уравнение Якоби	28
2. Интеграл Гамильтона и функция Якоби	29
3. Сокращенная функция Якоби	30
4. Различные виды уравнения Якоби	31
5. Функция Якоби для прямолинейного, равномерного движения	33
6. Функция Якоби в постоянном и однородном поле	36
Глава III. Основные идеи волновой механики	
1. Исходная точка	40
2. Другой метод получения предыдущих результатов	42
3. Показатель преломления. Основная теория о групповой скорости волн Ψ	44
4. Связь между волновыми и механическими величинами	46
5. Принцип наименьшего действия и принцип Ферма	48
Глава IV. Общие законы распространения волн	
1. Распространение волн в однородной и непрерывной среде	49
2. Дисперсия	51
3. Поток волн и группа волн	51
4. Распространение в непрерывной неоднородной среде	58
5. Построение огибающих волн-обверток и принцип Ферма	61
6. Группы волн в неоднородной, неизменной во времени среде	62
7. Распространение волн в среде, изменяющейся со временем	64

Глава V. Уравнения распространения волны, сопряженной с частицей

1. Критерий выбора уравнений распространения	66
2. Уравнение распространения в отсутствии поля	67
3. Уравнение распространения в постоянном поле	68
4. Уравнение распространения в переменных полях	72
5. Способ автоматического написания уравнения	75

Глава VI. Механика классическая и механика волновая

1. Значение амплитуды a в классической механике	76
2. Вероятность присутствия частицы в данной точке	79
3. Конкретные примеры	81
4. Итоги главы	83

Глава VII. Принцип интерференции и дифракции электронов в кристаллах

1. Принцип интерференции	84
2. Дифракция электронов кристаллами	85
3. Предварительные сведения, необходимые для анализа опытов Томсона	87
4. Опыты Томсона	91
5. Опыты Понта (1929 г.)	97

Глава VIII. Принцип интерференции и рассеяния заряженных частиц неподвижным центром

1. Рассеяние заряженных частиц по классической механике	97
2. Подсчет по волновой механике	99

Глава IX. Движение вероятности присутствия по волновой механике

1. Облако вероятности	105
2. Уравнение движения элементов вероятности	106
3. Теорема Эренфеста	108
4. Подсчет функций ψ и a	112
5. Теория волны-пилота	113

Глава X. Волновая механика световых частиц

1. Фотоны и их сопряженные волны	116
2. Облако вероятности сопряженное с фотоном	117
3. Интерпретация явлений интерференции	119
4. Интерференция света вблизи отражающего плоского зеркала	121
5. Интерференция света вблизи несовершенного отражающего зеркала	123
6. Наложение (суперпозиция) двух плоских монохроматических волн	125

Глава XI. Теория Гейзенберга и Бора

1. Принцип спектрального разложения	127
2. Теория Гейзенберга и Бора. Соотношения неопределенности	128

3. Смысл волны в теории Бора и Гейзенберга	130
4. Связь со старой механикой	132
5. Возражение Эйнштейна. Частица не локализуема вообще или просто не локализована	134
6. Заключение	136

Глава XII. Возможности измерений и соотношения Гейзенберга

1. Методы измерения и соотношения Гейзенберга	136
2. Микроскоп Гейзенберга	137
3. Измерение скорости электрона при помощи эффекта Доплера	139
4. Прохождение частицы сквозь диафрагму	141
5. Замечание об измерении скорости	145

Глава XIII. Распространение потока волн Ψ в отсутствии поля и в однородном поле

1. Точное решение уравнения распространения в отсутствии поля	146
2. Дальнейшие вычисления Дарвина для некоторого частного случая	150
3. Измерение скорости двумя последовательными наблюдениями	153
4. Точное решение для распространения потока волн Ψ в однородном постоянном поле	157
5. Вычисление некоторого частного случая	159

Глава XIV. Волновая механика систем частиц

1. Обзор принципов старой динамики системы	163
2. Переход от старой динамики системы к новой	168
3. Несколько математических лемм	169
4. Уровнение распространения в конфигурационном пространстве	173

Глава XV. Интерпретация волны, сопряженной с движением системы

1. Приближение геометрической оптики	177
2. Общий случай. Движение вероятности	181
3. Теорема Эренфеста	183
4. Интерпретация Бора и Гейзенберга	186
5. Замечание	188

Глава XVI. Старая теория квант и устойчивость периодических движений

1. Примеры квантования периодических движений	188
2. Условия Вильсона-Зоммерфельда	192
3. Квантовые условия по Эйнштейну	194
4. Квантование хеплеровского движения	195
5. Вопрос о вырождении	197
6. Недостаточность старой теории квант	199

Глава XVII. Волновая интерпретация устойчивости квантовых движений

1. Значение квантования в волновой механике	200
2. Простые примеры собственных колебаний: колеблющаяся струна и мембрана	203
3. Изучение общего случая уравнения (9)	208
4. Квантование системы частиц	215

Глава XVIII. Некоторые примеры квантования

1. Плоский ротатор	215
2. Пространственный ротатор	217
3. Гармонический осциллятор	219
4. Водородный атом	223

Глава XIX. Интерпретация Ψ волн для квантованных систем

1. Приложение общих принципов к квантованным системам	225
2. Влияние внешнего воздействия на квантованную систему	227
3. Облако вероятности и матрицы Гейзенберга	230



ДЕРЖАВНЕ НАУКОВО-ТЕХНІЧНЕ ВИДАВНИЦТВО
УКРАЇНИ

Д Н Т В У

Харків, Пролетарський майдан. 7.

ВЫХОДЯТ ИЗ ПЕЧАТИ:

БРОНШТЕЙН М. П.

ОСНОВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ КОСМИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.

Сборник статей под ред. М. П. БРОНШТЕЙНА.

ДНТБУ. 14 печ. л. Тир. 1000 экз.

СОДЕРЖАНИЕ.

Бронштейн М. П. Внутреннее строение звезд, вопросы о звездной эволюции и источниках излучаемой энергии.

Росселанд. Газовые туманности. Г. Н. Рессел, Р. С. Дьюген и Дж. Кн. Стьюфт. Звезды и их спектры. М. П. Бронштейн. К вопросу о возможности теории мира, как целом (и др. статьи).

ДАРРОУ К.

ЕЛЕМЕНТАРНИЙ ВСТУП ДО ФІЗИЧНОЇ СТАТИСТИКИ.

Пер. з англ., 10 др. арк. Тир. 1000 прим.

З М І С Т.

Основні засади фізичної статистики. Елементарна теорія металів. Характеристичні властивості розподілу електронів у металах. Теорія термоелектричних явищ.

ПРОДАЖ по всіх книгарнях Книгозбуту ДНТБУ, Укркнигоцентру та Вукопкниги.
Замовлення надсилайте: Харків, Пролетарський майдан, 7 та
Київ, Свердлова, 2/9, Книгозбуту ДНТБУ.



ДЕРЖАВНЕ НАУКОВО-ТЕХНІЧНЕ ВИДАВНИЦТВО
УКРАЇНИ

Д Н Т В У

Харків, Пролетарський майдан, 7.

ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ:

ВАЛЬТЕР А. К.

АТАКА АТОМНОГО ЯДРА.

с 91 рис. в тексте. ДНТВУ. 192 с.

Цена 3 руб.

Общедоступный обзор современного состояния физики ядра.

ЭДДИНГТОН А., проф.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ.

Пер. с англ. ДНТВУ. 358 стр.

Цена 8 руб.

ВЫХОДЯТ ИЗ ПЕЧАТИ:

БРИЛЛЮЭН.

КВАНТОВАЯ СТАТИСТИКА.

Пер. с франц., доп. по нем. изд. ДНТВУ. 20 псч. л. Тир. 2000 экз.

СОДЕРЖАНИЕ.

Тепловое излучение. Общее определение закона Кирха, Гоффа и Стефена. Общие формулы. Кванты и гипотезы фотонов. Статистическая термодинамика. Квантовая статистика. Статистика излучения. Излучение элементарных актов, приводящих к наиболее вероятному распределению n -теоремы. Приложение статистики ферми к свободным электронам в металлах. Определение средней длины свободного пробега электронов. Распределение электрического потенциала. Строение атома и различные приложения. Квантованный атом, его диссоциация и вероятность различных квантовых состояний.

ПРОДАЖ по всіх книгарнях Книгозбуту ДНТВУ, Укркиноцентру та Вукопкниги
Замовлення надсилайте: Харків, Пролетарський майдан, 7 та
Київ, Свердлова 2/9, Книгозбуту ДНТВУ

Список замеченных опечаток в формулах

Стр.- ниша	Формула	Напечатано	Следует читать
20	24	$-\frac{mv^2}{\sqrt{1-\beta^2}}c^2 - \left(-mc^2\sqrt{1-\beta^2} - F \right) =$	$= \frac{mv^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \left(-mc^2\sqrt{1-\beta^2} - F \right)$
23	36	$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j + \sum_{j=1}^3 p_i \frac{\partial f_i}{\partial p_j} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial f_i}{\partial p_j}$	$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j + \sum_{i=1}^3 p_i \frac{\partial f_i}{\partial p_j} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial p_i} \frac{\partial f_i}{\partial p_j}$
23	38	$\frac{d\partial q_i}{d\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$	$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$
23	2 строка снизу	$\frac{d\partial H}{p\partial t}$	$\frac{dH}{dt}$
23		$\frac{d\partial H}{d\partial t}$	$\frac{dH}{dt}$
24	40	$P_x = mv_x$	$p_x = mv_x$
30	10	$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \text{ const}$	$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i = \text{const}$
12	22	$T = \frac{1}{2} \sum_{klj=1}^3 m_{kl} m^{kl} p_l m^i_1 p_j$	$T = \frac{1}{2} \sum_{ijkl=1}^3 m_{kl} m^{kl} p_l m^i p_j$
14	4 строка сверху	$y^u p_z$	$p_y \text{ и } p_z$
16		$= \frac{1}{m} P_z (t - t)$	$= \frac{1}{m} P_z (t - t_0)$
17	56	$\int_{xyz, z=0}^{xyzt} [Wdt - \sum_{xyz} P_x dx]$	$\int_{x_0 y_0 z_0, 0}^{xyzt} [Wdt - \sum_{xyz} P_x dx]$
0	68	$Wt - \int P_x dx + P_y dy + P_z dz =$ $= Wt - p_y y - p_z z -$ $- \int \sqrt{2m(W + k_x x) - p_y^2 - p_z^2} dx$	$Wt - \int (P_x dx + P_y dy + P_z dz) =$ $= Wt - p_y y - p_z z -$ $- \int \sqrt{2m(W - k_x x) - p_y^2 - p_z^2} dx$
3	6	$= t \frac{1 - \beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} =$	$= \beta t \frac{1 - \beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} =$

Страница	Формула	Напечатано	Следует читать
43	7	$= \frac{T}{\sqrt{1 - \beta^2}} >$	$= \frac{T_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} >$
43	4 стр. снизу	$z_2 = z + v (t_2 - t_1)$	$z_2 = z_1 + v (t_2 - t_1) \quad -$
15	19	$dt = \left[n(v) + v n'(v) \frac{dx}{c} \right]$	$dt = \left[n(v) + v n'(v) \right] \frac{dx}{c}$
14	21	$\sin 2\pi \left[\epsilon \left(t - \frac{d(nv)}{dv} z \right) - \right. \\ \left. - \frac{v n'(v)}{dv} (\alpha x + \beta y) + \right. \\ \left. + \Delta(\epsilon, \alpha, \beta) \right]$	$\sin 2\pi \left[\epsilon \left(t - \frac{d(nv)}{dv} \frac{z}{c} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{vn(v)}{c} (\alpha x + \beta y) + \Delta(\epsilon, \alpha, \beta) \right) \right]$
1	45	$\Psi + a(xyz) \cos 2\pi [vt - \Phi_1(xyz)]$	$\Psi = a(xyz) \cos 2\pi [vt - \Phi_1(xyz)]$
52		$\Psi = a(xyz) \cos 2\pi \left[vt - v \int \frac{dl}{v} \right]$	$\Psi = a(xyz) \cos 2\pi \left[vt - v \int \frac{dl}{V} \right]$
53		$\frac{\partial a}{\partial z} \lambda \leq \leq a$	$\frac{\partial a}{\partial z} \lambda < < \tilde{a}$
69		$\sum_{xyz} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{c^2}{n^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial a}{\partial t} + \dots$	$\sum_{xyz} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial a}{\partial t} + \dots$
26		$n = \sqrt{\left(1 - \frac{F}{nv}\right)^2 - \frac{v_0^2}{v^2}} =$	$n = \sqrt{\left(1 - \frac{F}{hv}\right)^2 - \frac{v_0^2}{v^2}} =$
37		$+ \frac{4\pi i}{hc^2} F \left[\frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h} mc^2 \Psi_2 \right] - \dots$	$+ \frac{4\pi i}{hc^2} \left[F \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h} mc^2 \Psi_2 \right] - \dots$
3		$= \frac{8\pi^2}{n^2} a \frac{\partial \varphi}{\partial t}$	$= \frac{8\pi^2 m}{h^2} a \frac{\partial \varphi}{\partial t}$
18		$F(x) = kx$	$F(x) = -kx$
6		$\frac{n(x, y, z)}{h_0} =$	$\frac{n_0(x, y, z)}{n} =$
9 стр. снизу		$2d\theta = n\lambda$	$2d_{h,h} \theta = n\lambda$
стр. снизу		$2,91 \text{ \AA}$	$2,86 \text{ \AA}$
18		$\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t^2} = -4\pi^2 \frac{m^2 c^2}{h^2} \Psi_1$	$\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t^2} = -4\pi^2 \frac{m^2 c^4}{h^2} \Psi_1$

Страница	Формула	Напечатано	Следует читать
101	19	$\Psi_r(P, t) = -\frac{1}{4\pi} \int \int \int \left[\frac{\sigma(xyzt)}{\rho} \right]_{t-\frac{\rho}{V}} d\tau$	$\Psi_1(P, t) = -\frac{1}{4\pi} \int \int \int \left[\frac{\sigma(xyzt)}{\rho} \right]_{t-\frac{\rho}{V}} d\tau$
107	10	$W = \sum_i \frac{\partial I}{\partial q_i} \dot{q}_i - L$	$W = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L$
107	11	$P_x = m v_x =$	$p_x = m v_x =$
107	14	$\frac{d p_x}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x}$	$\frac{d p_x}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x}$
107	16	$\frac{d p_y}{dt} = \frac{\partial L}{\partial y}$	$\frac{d p_y}{dt} = \frac{\partial L}{\partial y}$
112	28	$\int \int \int_{-\infty}^{\infty} a \Delta \frac{\partial a}{\partial t} dv =$	$\int \int \int_{-\infty}^{\infty} a \Delta \left(\frac{\partial a}{\partial t} \right) dv =$
113	35	$= \sum_k a_k^2 + \sum_{ik} a_i a_k \cos \frac{2\pi}{h} (\varphi_k - \varphi_i)$	$= \sum_k a_k^2 + 2 \sum_i a_i a_k \cos \frac{2\pi}{h} (\varphi_k - \varphi_i)$
113	36	$= \frac{h}{4\pi i} \log \frac{\sum_k a_k e^{-\frac{2\pi i}{h} \varphi_k}}{\sum_k a_k e^{-\frac{2\pi i}{h} \varphi_k}}$	$= \frac{h}{4\pi i} \log \frac{\sum_k a_k e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi_k}}{\sum_k a_k e^{-\frac{2\pi i}{h} \varphi_k}}$
123	28	$\Psi_s = \eta e^{2\pi i \nu \left[t - \frac{x \sin \theta - z \cos \theta}{c} \right] + \alpha}$	$\Psi_s = \eta e^{2\pi i \nu \left[t - \frac{x \sin \theta - z \cos \theta}{c} \right] + \alpha}$
125	35	$a^2 = a_1^2 + a_2^2 +$	$a^2 = a_1^2 + a_2^2 +$
27	1	$+ 2a_1 a_2 \cos 2\pi (\nu_1 + \nu_2) \left(t - \frac{z}{c} \right)$	$+ 2a_1 a_2 \cos 2\pi (\nu_1 - \nu_2) \left(t - \frac{z}{c} \right)$
38	2	$= \sum_k a_k e^{2\pi i \nu_k t - \left[\frac{n_k}{c} (\alpha_k x + \beta_k y + \gamma_k z) \right] + \delta_k}$	$= \sum_k a_k e^{2\pi i \nu_k \left[t - \frac{n_k}{c} (\alpha_k x + \beta_k y + \gamma_k z) \right]}$
		$\frac{h^2}{mc^2} (\nu - \nu')^2 - 2h(\nu - \nu')$	$\frac{h^2}{mc^2} (\nu - \nu')^2 - 2h(\nu - \nu') -$
		$- 2\alpha \frac{v}{c} h \nu' + \alpha^2 \frac{h^2 \nu'^2}{mc^2} = 0$	$- 2\alpha \frac{v}{c} h \nu' + \alpha^2 \frac{h^2 \nu'^2}{mc^2} = 0$

Формула	Напечатано	Следует читать	Страница
29	$\delta N_y = \frac{\partial \beta}{\lambda} - \frac{k_z}{2a}$	$\delta N_y = \frac{\partial \beta}{\lambda} - \frac{k_z}{2b}$	175
32	$= \left(\frac{\pi i m}{a h t} \right)^{3/2} \prod_{xyz} e^{\frac{b x^2}{4a} - \frac{\pi i m}{h t} x^2}$	$= \left(\frac{\pi i m}{a h t} \right)^{3/2} \prod_{xyz} e^{\frac{b^2 x^2}{4a} - \frac{\pi i m}{h t} x^2}$	184
38	Квадратная скобка	закрывается после $\Delta(t)$	185
65	$e^{\frac{2\pi i t}{h} \left[-\frac{m}{2t} (x-x)^2 - \frac{t}{2} k_y (x-x) + \frac{t^2}{24m} k_x^2 \right]}$	$e^{\frac{2\pi i t}{h} \left[-\frac{m}{2t} (x-x)^2 - \frac{t}{2} k_x (x-x) + \frac{t^2}{24m} k_x^2 \right]}$	
68	$\prod_{xyz} e^{\frac{b x^2}{4a}} e^{-\frac{\pi i m}{h t} x^2 - \frac{\pi i k_x t}{h} x + \frac{\pi i t^2}{12 m h} k_x^2}$	$\prod_{xyz} e^{\frac{b x^2}{4a}} e^{-\frac{\pi i m}{h t} x^2 - \frac{\pi i k_x t}{h} x + \frac{\pi i t^2}{12 m h} k_x^2}$	
70	$e^{\frac{\pi i m}{h t} \left[\frac{\sum_{xyz} (x-v^0_x t - \frac{1}{2} \frac{k_x t^2}{m})^2}{v^2 + \left(\frac{h t}{2\pi m v} \right)^2} \right]}$	$e^{\frac{\pi i m}{h t} \left[\frac{\sum_{xyz} (x-v^0_x t - \frac{1}{2} \frac{k_x t^2}{m})^2}{v^2 + \left(\frac{h t}{2\pi m v} \right)^2} \right]}$	
	$e^{-\frac{\pi i m}{h t} \sum_{xyz} \left(x^2 + \frac{k_x}{m} x t^2 - \frac{k_x^2 t^4}{12 m^2} \right)}$	$e^{-\frac{\pi i m}{h t} \sum_{xyz} \left(x^2 + \frac{k_x}{m} t^2 - \frac{k_x^2 t^4}{12 m^2} \right)}$	186
16	$= -dS(\alpha_i q_i t)$	$= -[dS(\alpha_i q_i t)]_t$	190
18	$P_i = -\frac{\partial S(q_i \alpha_i t)}{\partial q_i} \frac{\partial S(q_i \alpha_i t)}{\partial \alpha_i} = \beta_i$	$P_i = -\frac{\partial S(q_i \alpha_i t)}{\partial q_i} ; \frac{\partial S(q_i \alpha_i t)}{\partial \alpha_i} = \beta_i$	195
46	$= \frac{1}{2} \sum_{ik} \mu_{ik} \sum_j \mu_{ij} P_j \sum_l \mu_{li} p_l + F(q, t)$	$= \frac{1}{2} \sum_{ik} \mu_{ik} \sum_j \mu_{ij} p_j \sum_l \mu_{li} p_l + F(q, t)$	197
54	$\frac{1}{V_{\mu}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[V_{\mu} \mu^{ik} \frac{\partial \Psi}{\partial q_k} \right] - \dots$	$\frac{1}{V_{\mu}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[V_{\mu} \mu^{ik} \frac{\partial \Psi}{\partial q_k} \right] - \dots$	197

Напечатано

Следует читать

$$\frac{1}{2} \sum_{ij} \mu^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \varphi}{\partial q_j} + F(q, t)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{ij} \mu^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \varphi}{\partial q_j} + F(q, t)$$

$$- \int \dots \int_n V \sum_{ik} \mu^{ik} \frac{\partial v}{\partial q_k} \frac{\partial v}{\partial q_i} dq_1 \dots dq_n =$$

$$- \int \dots \int_n V \sum_{ik} \mu^{ik} \frac{\partial V}{\partial q_k} \frac{\partial U}{\partial q_i} dq_1 \dots dq_n =$$

$$- \int \dots \int_n \left[a \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_k \mu^{kk} \frac{\partial^2 a}{\partial q_k^2} \right) - \frac{\partial a}{\partial q_i} \sum_k \mu^{kk} \frac{\partial^2 a}{\partial q_k^2} \right] d\tau =$$

$$= \int \dots \int_n \left[a \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_k \mu^{kk} \frac{\partial^2 a}{\partial q_k^2} \right) - \frac{\partial a}{\partial q_i} \sum_k \mu^{kk} \frac{\partial^2 a}{\partial q_k^2} \right] d\tau =$$

$$= \int \dots \int_n \left[a \sum_k \mu^{kk} \frac{\partial a}{\partial q_i} \frac{\partial^2 a}{\partial q_k^2} - \frac{\partial a}{\partial q_i} \sum_k \mu^{kk} \frac{\partial^2 a}{\partial q_k^2} \right] d\tau.$$

$$= \int \dots \int_n \left[a \sum_k \mu^{kk} \frac{\partial^2 a}{\partial q_i \partial q_k^2} - \frac{\partial a}{\partial q_i} \sum_k \mu^{kk} \frac{\partial^2 a}{\partial q_k^2} \right] d\tau.$$

$$\frac{d\bar{W}}{dt} = \frac{d\bar{F}}{dt} + \dots$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dF}{dt} + \dots$$

$$E = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)_{x=0}^2 =$$

$$E = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)_{x=0} =$$

$$\int_c ds =$$

$$\int_c dS =$$

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial \theta} \right)^2 \right] =$$

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial \theta} \right)^2 \right] =$$

$$P_r = \frac{\partial S_1}{\partial r} =$$

$$P_r = \frac{\partial S_1}{\partial r} =$$

Список замеченных опечаток в тексте

Строка	Напечатано	Следует читать
6 св.	чистицей	частицей
1 сн.	таковы	так хороши
5 сн.	токи	точки
17 св.	сопряженная	сопряженной
2 сн.	имеющие	имеющих
14 сн.	характеризующих	характеризующими
12 сн.	определяющих	определяющими
1 св.	величины будут	величина будет
4 св.	фззы	физы
7 сн.	интервал	интеграл
11 св.	не линейному	нелинейному
13 сн.	изменяется	изменяются
11 св.	определямая	определяемые
4-5 св.	частотой	частоты
16 сн.	мосто	место
17 св.	электронами	электронами
11-12 сн.	предвибыть	предвидеть
8 сн.	выведем	введем
18-19 сн.	налагаемых	налагаемым



-392320-

1934

RLST



0000000502792

Депозитарий