

Проф. Б. А. БАХМЕТОВ

# ГИДРАВЛИКА



МОСКВА—1934—ЛЕНИНГРАД



Депозитарий

Проф. Б. А. БАХМЕТЕВ

*В. М. В.*

# ГИДРАВЛИКА

ОБЩИЙ КУРС

4326757

902

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ  
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ  
БИБЛИОТЕКА



МОСКВА — 1934 — ЛЕНИНГРАД





## ОГЛАВЛЕНИЕ.

|                                                                                                                                          | Стр. |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| От редакции . . . . .                                                                                                                    | 11   |
| Предисловие автора к первому изданию . . . . .                                                                                           | 13   |
| Введение. О физических свойствах жидкости . . . . .                                                                                      | 15   |
| § 1. Предмет гидравлики . . . . .                                                                                                        | 15   |
| § 2. Идеальная жидкость . . . . .                                                                                                        | 16   |
| § 3. Реальные жидкости: сжимаемость, температурное расширение, плотность; силы, действующие в жидкости; касательные напряжения . . . . . | 16   |
| § 4. Гидродинамика и гидравлика . . . . .                                                                                                | 19   |

### ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

#### Глава I. Гидростатика.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| § 5. Гидростатическое давление. Определение давления. Независимость давления от направления площадки . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 20 |
| § 6. Гидростатическое давление в покоящейся тяжелой жидкости. Величина давления в точке жидкости. Избыточное давление. Практические формулы для величины давления . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 24 |
| § 7. Пьезометрическое давление . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 26 |
| § 8. Общие уравнения гидростатики. Вывод основных уравнений жидкого тела. Условия равновесия жидкости . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 27 |
| § 9. Поверхности уровня . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 30 |
| § 10. Закон Паскаля . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 31 |
| § 11. Разыскание величины давления в частных случаях. Распределение давления в тяжелой покоящейся жидкости. Распределение давления в тяжелой жидкости, равномерно вращающейся с угловой скоростью $\omega$ ; открытый сосуд: сила инерции, уравнение свободной поверхности, поверхности равного давления, распределение давлений по горизонтали; замкнутый сосуд с отверстием на оси и с отверстием у наружной стенки: вакуум, величина предельной угловой скорости . . . . . | 31 |
| § 12. Определение величины полного давления на погруженную в тяжелую жидкость плоскую фигуру . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 36 |
| § 13. Центр давления. Определение центра избыточного давления и центра полного давления на плоскую стенку . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 37 |
| § 14. Графические приемы определения центра давления: определение избыточного давления на вертикальный щит, перегородающий прямоугольный канал . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 39 |

- § 15. ● Определение величины и центра давления на криволинейную поверхность. Определение составляющей полного давления по какому-либо направлению  $M$ . Определение горизонтальной составляющей полного давления на криволинейную поверхность. Определение давления на цилиндрический сегментный затвор. Определение равнодействующей давлений воды на кривой участок трубы . . . . . 41
- § 16. Закон Архимеда. Давление жидкости на погруженное в нее тело; принцип отвердения . . . . . 44
- § 17. Машины, действующие давлением воды. Гидравлический цилиндр. Формула для расчета гидравлических цилиндров; пример. Передача давления жидкостью; примеры. Понятие о «напоре». Мощность гидравлического двигателя . . . . . 45

## Глава II. О движении жидкости вообще.

- § 18. Понятие о струйке. Поток или расход жидкости через площадку. «Живое сечение» струйки и потока. Средняя скорость в сечении потока. «Струйчатая модель» движения жидкости по Буссинеску . . . . . 51
- § 19. Терминология: установившееся движение; не установившееся движение; равномерное движение; неравномерное движение . . . . . 54
- § 20. Начало непрерывности. Вывод уравнения непрерывности для установившегося и не установившегося движения жидкости . . . . . 55
- § 21. Уравнение Бернулли. Закон живых сил в установившемся движении жидкости. «Удельная энергия». Напорная плоскость. Пьезометрическая линия; независимость пьезометрической линии от положения трубки. Значение уравнения Бернулли в гидравлике . . . . . 56
- § 22. Вывод уравнения Бернулли из основного уравнения движения жидкости . . . . . 61
- § 23. Примеры на уравнение Бернулли. Движение в цилиндрической трубе. Схема водомера Вентури. Опыт Рейнольдса. Опыт Фруда . . . . . 62
- § 24. Учет сопротивлений движению жидкости. Работа сил сопротивлений на участке струйки. Уравнение Бернулли для элементарной струйки с учетом сил сопротивления. «Потеря напора». Мощность сил сопротивлений. Движение вязкой жидкости по цилиндрической трубке; пьезометрический уклон . . . . . 65
- § 25. Уравнение Бернулли для целого потока. Гипотеза плоских сечений. Уравнение Бернулли для элементарной струйки реальной жидкости. Коэффициенты:  $\alpha$  — Кориолиса и  $\alpha_0$  — Буссинеска: живая сила и количество движения в сечении целого потока. Потенциальная энергия для целого потока: «медленно изменяющееся движение». Распределение давления по сечению в случае медленно изменяющегося движения. Уравнение Бернулли для целого потока реальной жидкости при медленно изменяющемся движении. Условия применимости уравнения Бернулли к сечениям целого потока. Основное уравнение неравномерного медленно изменяющегося движения . . . . . 67

- § 26. Основное уравнение неустановившегося одномерного движения жидкости. Пример: неравномерное движение в прямой цилиндрической трубе . . . . .

76

### Глава III. Основные уравнения гидродинамики.

- § 27. Гидродинамические уравнения Эйлера. Вывод уравнений движения элементарного параллелепипеда . . . . .
- § 28. Уравнение непрерывности . . . . .
- § 29. Случай „безвихревого“ движения идеальной жидкости. Движение жидкости с потенциалом скоростей. Понятие о „вихре“. Примеры: а) прямолинейное равномерное движение в цилиндрической трубе или канале; б) установившееся плоское движение жидкости, вращающейся вокруг вертикальной оси; в) интегрирование уравнения непрерывности в случае безвихревого движения жидкости . . . . .

81

82

84

### Глава IV. О сопротивлениях.

- § 30. Два рода движений вязкой жидкости. „Струйчатое“ и „беспорядочное“ движение жидкости; опыты Рейнольдса. „Критическая скорость“; потери напора при скоростях больших и меньших критической; логарифмическая анаморфоза. Верхняя и нижняя критические скорости; опыты Куэтта. Величина критической скорости по Рейнольдсу; опыты Барнеса и Кокера . . . . .
- § 31. Сопротивления в струйчатом движении. Сила вязкости по Ньютону; коэффициент вязкости, кинематический коэффициент вязкости; опыты Пуазейля, Кулона и Куэтта. Струйчатое движение вязкой жидкости в цилиндрической трубе . . . . .
- § 32. Сопротивления в беспорядочном движении. Факторы, влияющие на сопротивление жидкости движению: „шероховатость“ стенки. „Осредненная“ картина потока жидкости . . . . .
- § 33. Общее выражение для учета сил сопротивлений в прямолинейном равномерном установившемся движении жидкости. Основное уравнение установившегося равномерного движения жидкости. О работе сил внутреннего и внешнего трения . . . . .
- § 34. Вид  $\frac{\tau_0}{\gamma}$ , выражающей величину сопротивлений в беспорядочном движении. Формула Прови. Формула Дарси. „Старая“ формула Базена. Формула Шези. „Новая“ формула Базена. Классификация гидравлических явлений с точки зрения оценки гидравлических сопротивлений. Коэффициент шероховатости. Удельная работа сил сопротивлений; коэффициент трения жидкости о стенку по Уивингу . . . . .
- § 35. Показательные формулы для учета сопротивлений. Формула Сан-Венана и формула Рейнольдса . . . . .
- § 36. Выражение внутреннего трения в беспорядочном движении по Буссинеску. Величина силы внутреннего трения в беспорядочном движении. Коэффициент внутреннего трения по Буссинеску для случаев: а) прямоугольный поток бесконечной

93

103

107

110

115

122

|       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |     |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|       | ширины и б) равномерное установившееся движение в круглой цилиндрической трубе . . . . .                                                                                                                                                                                                                        | 125 |
| § 37. | Потери на „удар“. Картина явления. Случай внезапного увеличения сечения (теорема Борда); опыты Гибсона. Теория удара по Борда. „Неупругий“ удар; теорема Карно . . . . .                                                                                                                                        | 130 |
| § 38. | „Месиние“ потери. Коэффициент сопротивления Вейсбаха . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                  | 138 |
| § 39. | Потери в расходящемся и сходящемся потоке. Критическая скорость в сходящемся и расходящемся потоке. Опыты Хохшильда. Опыты Андрэса. Величина потерь и распределение удельной энергии в расходящихся насадках. О восстановлении кинетической энергии в потенциальную . . . . .                                   | 140 |
| § 40. | Практические приложения уравнения Бернулли. „Наложенные“ потери. Коэффициент сопротивление системы. Перетекание жидкости из одного закрытого сосуда в другой. Определение вакуума во всасывающей трубе центробежного насоса. Определение максимального вакуума во всасывающей трубе поршневого насоса . . . . . | 146 |
| § 41. | Сопротивления в неравномерном медленно изменяющемся движении. „Нормальные“ потери в неравномерном движении. Перераспределение скоростей по сечению; пример — сужение русла искусственным сооружением. Влияние неравномерности движения на величину сопротивлений . . . . .                                      | 155 |
| § 42. | Случай неустановившегося движения в цилиндрической трубе . . . . .                                                                                                                                                                                                                                              | 159 |

## ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

### 1. ИСТЕЧЕНИЕ ЧЕРЕЗ ОТВЕРСТИЯ И НАСАДКИ.

#### Глава 1. Истечение через отверстие в тонкой стенке.

|       |                                                                                                                                                                                                                                   |     |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 1.  | Формула Торричелли . . . . .                                                                                                                                                                                                      | 161 |
| § 2.  | Решение Бернулли; коэффициент сопротивления . . . . .                                                                                                                                                                             | 161 |
| § 3.  | Коэффициент скорости . . . . .                                                                                                                                                                                                    | 163 |
| § 4.  | Влияние скорости подхода и сил инерции . . . . .                                                                                                                                                                                  | 164 |
| § 5.  | Сжатие струи при истечении через отверстие . . . . .                                                                                                                                                                              | 165 |
| § 6.  | Коэффициент сжатия $\epsilon$ ; коэффициент расхода $\mu$ . . . . .                                                                                                                                                               | 166 |
| § 7.  | Опыты Базена и Мэзи по обмеру струи, вытекающей из отверстия в тонкой стенке . . . . .                                                                                                                                            | 167 |
| § 8.  | Значения коэффициента скорости и коэффициента расхода. I. Опыты над истечением через отверстие в тонкой стенке с совершенным сжатием (Базен, Гамильтон Смит, Понселé и Лебрó) II. Неполное сжатие: опыты Лебрó и Грэффа . . . . . | 168 |
| § 9.  | Сопротивление при истечении через отверстие в тонкой стенке. Струйчатый характер движения . . . . .                                                                                                                               | 175 |
| § 10. | Влияние температуры на истечение: опыты Унвина и Мэйра . . . . .                                                                                                                                                                  | 176 |
| § 11. | Зависимость сопротивлений от скорости. Опыты Вейсбаха с конoidalными насадками . . . . .                                                                                                                                          | 177 |
| § 12. | Теоретическое определение коэффициента сжатия струи; модели Гельмгольца и Кирхгофа; опыты Хель-Шоу; модель Буссинеска . . . . .                                                                                                   | 178 |
| § 13. | Механическая сущность явления. Распределение давлений на стенках сосуда с отверстием. Величина реакции струи: а) для                                                                                                              |     |

|       |                                                                                                      |     |
|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|       | случая насадки Борда; б) для случая отверстия в тонкой стенке                                        | 181 |
| § 14. | Опытное определение распределения скоростей и давлений при истечении. Опыты Базена                   | 184 |
| § 15. | Инверсия струи. Опыты Лебрэ                                                                          | 186 |
| § 16. | Затопленное отверстие                                                                                | 187 |
| § 17. | Истечение через большие отверстия. Вывод величины расхода через большое отверстие; неточность вывода | 189 |

## Глава II. Истечение через насадки.

|       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |     |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 18. | Внешний цилиндрический насадок (насадок Вентури). Величина потерь. Физическая картина потока в насадке; подсчет потерь                                                                                                                                                                                                                                                                | 195 |
| § 19. | О величине вакуума в насадке Вентури. Опыты Вентури и опыты автора                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 197 |
| § 20. | Условия работы насадки Вентури полным сечением: а) при истечении в атмосферу; б) при истечении под уровень. Условия устойчивости явления                                                                                                                                                                                                                                              | 199 |
| § 21. | Практические приложения. Потери „на вход”: I — труба заделана заподлицо со стенкой резервуара; II — труба для выпуска воды из водоема, образованного плотиной. Срыв вакуума и истечение свободной струей. Примеры: I — определение диаметра спускной трубы; II — определение расхода через спускную трубу; III — выяснение необходимого затопления спускной трубы у основания плотины | 202 |
| § 22. | Внутренний цилиндрический насадок (насадок Борда). Подсчет коэффициента расхода. Величина входных потерь                                                                                                                                                                                                                                                                              | 206 |
| § 23. | Влияние закругления краев                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 207 |
| § 24. | Конически сходящиеся насадки. Влияние угла конусности: опыты д'Обюссона и Кастелля. Насадки турбин Пельтона. Насадка пожарных брандспойтов                                                                                                                                                                                                                                            | 209 |
| § 25. | Расходящиеся насадки. Величина коэффициента расхода. Вакуум в расходящейся насадке. Опыты Фрэнсиса. Величина потерь; насадка, как устройство для рассеяния излишней кинетической энергии                                                                                                                                                                                              | 210 |

## Глава III. Коэффициент расхода системы.

|       |                                                                                                                                                                                                                               |     |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 26. | Основные определения: коэффициент сопротивления системы и коэффициент расхода системы                                                                                                                                         | 213 |
| § 27. | Пример: истечение из бака через трубу и через осадочный бассейн с перегородкой и отверстиями                                                                                                                                  | 214 |
| § 28. | Труба под насыпью. Случай свободного истечения; струя наполовину затоплена; затопленная струя                                                                                                                                 | 215 |
| § 29. | Примеры расчета труб под насыпью. I. — Определение размеров железной казанной трубы под насыпью. II. — Определение размеров железобетонного дюкера под судоходным каналом. III. — Определение расхода через трубу под насыпью |     |

## Глава IV. Истечение при переменном напоре.

|       |                                                                                                                               |     |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 30. | Постановка задачи. Время истечения при переменном напоре . . .                                                                | 221 |
| § 31. | Частные случаи. Случай I: призматический сосуд; опорожнение сосуда или наполнение его из водоема с постоянным уровнем . . .   | 222 |
| § 32. | Определение времени наполнения и опорожнения шлюзных камер. Отверстия в шлюзных камерах. Водопроводные галереи в шлюзах . . . | 224 |
| § 33. | Случай II: призматический сосуд с постоянным притоком . . .                                                                   | 226 |
| § 34. | Случай III: наполнение и опорожнение водоема, образованного в тальвеге дамбой, через спускную трубу . . .                     | 227 |
| § 35. | Случай IV: истечение при переменном напоре под переменный уровень. Шлюзы с уравнительными бассейнами . . .                    | 227 |

## II. ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ВОДОСЛИВ.

## Глава V. Истечение через водослив с тонкой стенкой.

|       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |     |
|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 36. | Основные понятия. Определение водослива. Расход через водосливы, как частный случай расхода через отверстие (по Дюбуа). Скорость подхода. Коэффициент расхода через водослив. Формула расхода через водослив, как следствие требований размерности . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 230 |
| § 37. | Терминология. Типы водосливов. Классификация типов водосливов: 1) по форме профиля водослива — водослив с острым ребром, водослив практической формы, водослив с широким порогом; 2) по расположению в плане: а) водослив без бокового сжатия, водослив с боковым сжатием: б) прямые, косые и криволинейные в плане водосливы; 3) по форме выреза водосливного отверстия: прямоугольный водослив с горизонтальным ребром, с наклонным ребром, треугольный водослив; 4) по характеру сопряжения с нижним бьефом, затопленный и незатопленный водослив . . . | 233 |
| § 38. | Типы или формы водосливной струи (по Базену). 1) Свободная или аэрированная струя. 2) Струя отжатая (к водосливной стенке). 3) Струя заполненная или подтопленная снизу: а) отогнанным прыжком; б) покрытая струя; γ) волнистая струя. 4) Прилипшая струя . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 235 |
| § 39. | Опыты Рэбока и опыты Базена . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 238 |
| § 40. | Устойчивость форм водосливной струи. Коэффициенты расхода . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 242 |
| § 41. | Учет скорости подхода по Базену . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 243 |
| § 42. | Прямоугольный водослив в тонкой стенке со свободной струей. Опыты Базена . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 244 |
| § 43. | Другие формулы для водослива в тонкой стенке без бокового сжатия. Формула Рэбока. Формула Ганзена. Формула Фрэнсиса . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 248 |
| § 44. | Влияние наклона стенки; опыты Базена . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 250 |
| § 45. | Прямоугольный водослив в вертикальной тонкой стенке без бокового сжатия. Струя, подтопленная снизу . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 251 |
| § 46. | Коэффициент расхода через водослив; б) подтопленная струя с отогнанным прыжком; б) покрытая струя . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 253 |

|       |                                                                                                                                                                |     |
|-------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 47. | Давление под струей . . . . .                                                                                                                                  | 255 |
| § 48. | Затопленный водослив. Формула Дюбуа. Опыты Базэна. Условия затопления водослива. Коэффициент затопления . . . . .                                              | 257 |
| § 49. | Водослив с толстой стенкой . . . . .                                                                                                                           | 262 |
| § 50. | Водослив с боковым сжатием. Опыты Лебрэ с водосливом Понселё. Формула Брашмана. Формула Фрэнсиса. Формула Союза швейцарских инженеров и архитекторов . . . . . | 263 |
| § 51. | Треугольный водослив. Формулы Томсона, Кинга и Барра . . . . .                                                                                                 | 265 |
| § 52. | Теория водослива по Буссинеску . . . . .                                                                                                                       | 268 |

## Глава VI. Истечение через водослив с широким порогом

|       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |     |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 53. | Зависимость коэффициента расхода от отношения глубины на пороге к напору на водосливе. Принцип наибольшего расхода Беланже. Потери при истечении через водослив с широким порогом . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 273 |
| § 54. | Энергетическое рассмотрение вопроса. „Удельная энергия сечения“. „Критическая глубина“. Постулат автора о критической глубине в конце широкого порога. Зависимость между $k$ , $\varphi$ и $m$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 277 |
| § 55. | Опыты автора над истечением через водослив с широким порогом: а) входной край порога закруглен; б) широкий порог с прямоугольным входным краем . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 282 |
| § 56. | Расчетная формула. Средние расчетные коэффициенты . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 284 |
| § 57. | Случай затопленного водослива с широким порогом. Влияние горизонта воды за водосливом на истечение через водослив. Восстановление живой силы при ходе жидкости с порога при затопленном водосливе. Условия затопления водослива с широким порогом . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 285 |
| § 58. | Применение теории водослива с широким порогом к расчету отверстий, открытых мостиков и труб. Условия расчета труб, отверстий и пр. Глубина „свободного“ истечения через трубу, рассматриваемую как водослив с широким порогом. Влияние бытовой глубины на истечение. Правила для расчета отверстий сооружений: 1) определение размеров отверстия; 2) определение условий протекания воды через трубу; 3) определение глубины и скорости в трубе. Учет влияния уклона дна трубы (случай, когда уклон дна меньше или больше критического) . . . . . | 290 |
| § 59. | Численные примеры. 1) Определение размеров трубы под насыпью при заданных: расходе, высоте насыпи и предельной скорости. 2) Определение подпора, создаваемого открытым мостиком. 3) Определение глубины в конце трубы под насыпью при заданных: расходе, максимальной допустимой скорости и максимальной отметке горизонта воды перед трубой . . . . .                                                                                                                                                                                            | 296 |

## Глава VII. Истечение через водосливы практических форм.

|       |                                                                                                                                                                                                                |     |
|-------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 60. | Незатопленный водослив практического профиля. Форма струи. Образование вакуума под струей. Коэффициенты расхода для практических профилей. Опыты американских инженеров; опыты Базэна; опыты Рафтера . . . . . | 295 |
|-------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

- § 61. Затопленный водослив. Пределы возможного уменьшения коэффициента расхода из-за затопления. Пример: определение расхода через затопленный водослив практической формы . . . 305

## Глава VIII. Расчет отверстий плотин.

- § 62. Пример I. Расчет отверстий каменной водосливной плотины, состоящей из глухой водосливной части и щитового водоспуска. 1. Плотина без щитового водоспуска; пропуск паводка; пропуск высоких вод. 2. Плотина с водоспуском; поперечное сжатие струи при входе в щитовые отверстия. 3. Определение горизонта пропуска высоких вод. 4. Пропуск воды во время постройки плотины: а) в межень, б) в высокую воду. 5. Пропуск воды во второй строительный период; а) определение размеров временных водоспускных отверстий в построенной части плотины, б) определение величины подпора, вызываемого проходом воды через отверстия в межень . . . . . 810
- § 63. Пример II. Каменная водосливная плотина с глубокими донными щитами (донные спуски). 1. Величина расхода на погонный метр: а) водослива, б) донных спусков. Определение ширины водосливного пролета плотины и ширины донных спусков; учет толщины быков. 2. Определение уровней при пропуске паводков . . . . . 320
- § 64. Пример III. Судоходная разборчатая плотина с фермами Пуаре и со спицевым затвором водосливной части. Основные требования: а) расчет судового хода, б) расчет водоспуска . . . 326

## ОТ РЕДАКЦИИ.

Есть счастливые книги, которым время не может причинить ущерба; к числу их относится „Общий курс гидравлики“ проф. Б. А. Бахметева. Она полностью сохранила свою актуальность и по настоящее время.

Трудно сказать, что более заслуживает внимания: краткость и классическая четкость изложения в первой части курса или исчерпывающая полнота второй. И та и другая характеризуются исключительной ясностью мысли, подлинно инженерным чутьем, изобилием графиков, таблиц и опытных данных.

Содержание книги полностью отвечает удивительно верным словам Леонардо да-Винчи, столь же замечательного гидравлика, как гениального художника: „Всякий раз, когда имеешь дело с водой, прежде всего обратись к опыту, а потом уже приступай к рассуждениям“.

Методика изложения лучше всего характеризуется словами автора: рекомендуемые им приемы „обладают двумя достоинствами: во-первых, простотой и, во-вторых, наглядностью; последнюю мы понимаем в том смысле, что всюду совершенно ясен тип и физический характер явления, положенного в основу того или иного приема подсчета, и тем самым без труда определяются как предпосылка метода расчета, так и границы его применения“.

Следует отметить, что в этой работе (1913 г.) профессор Б. А. Бахметев широко использует впервые введенные им в гидравлику (1911 г.) понятия о „критической глубине“ и „удельной энергии сечения“ для расчета водосливов, отверстий мостиков, труб и т. п.

Нет надобности рекомендовать эту книгу гидротехникам Союза: первое литографированное издание ее в настоящее время является ценной библиографической редкостью.

В тексте книги нами не внесено никаких существенных изменений, если не считать замены отдельных обозначений весьма ограниченного числа гидравлических величин иными, более распространенными в настоящее время в русской гидротехнике.

Профессор Ленинградского  
Электромеханического Института  
*А. Сабанеев.*

Ленинград,  
Сосновка,

## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ.

Настоящее пособие охватывает примерно содержание лекций по общему курсу гидравлики, читаемому мною на Инженерно-Строительном отделении Политехнического Института.

Первая (общая) часть заключает в себе, кроме элементов гидростатики, общее рассмотрение вопросов о движении жидкости.

Мне казалось целесообразным в пособии отступить от порядка лекционного изложения предмета и выделить целиком в отдельную часть изложение тех сведений и представлений, которые мы имеем в настоящее время о „механизме“ движения вязкой жидкости, а также общее рассмотрение и оценку гидравлических моделей и методов. Нам представляется, что таким путем всего лучше достигается правильное понимание относительно ценности и пределов применимости орудий, которые прикладная механика дает в руки практика-инженера.

Вторая (специальная) часть посвящена подробному рассмотрению частных случаев движения жидкости (отверстия, водосливы, трубы, каналы и пр.).

Первый выпуск второй специальной части курса гидравлики охватывает область по преимуществу струйчатых (или близких к струйчатым) случаев движения жидкости, а именно: истечение из отверстия и водослив.

Желая по возможности не задерживать выхода курса, я решил выпустить эти отделы отдельным выпуском.

Следующий (последний) выпуск общего курса, посвященный областям, по преимуществу, беспорядочного движения (трубы и каналы), выйдет осенью 1913 года <sup>1)</sup>.

Изданием первой общей части, равно как и первого выпуска второй части, заведывали студенты Инженерно-Строительного Отделения А. И. Иванченко и С. И. Славинский. Приношу им глубокую благодарность за умело, с любовью и знанием дела исполненный труд.

*Б. Бахметев.*

Май, 1913 года.

---

<sup>1)</sup> Опубликован в 1928 году под названием: „О равномерном движении жидкости в трубах и каналах“, Ленинград, КУБУЧ; II издание, Ленинград, КУБУЧ, 1931 г.

*(Примеч. редактора).*

## ВВЕДЕНИЕ.

### § 1. Предмет гидравлики.

Гидравлика является отделом прикладной механики, занимающимся изучением движения и покоя жидкостей. Жидким называется состояние вещества, характеризующееся почти неограниченной подвижностью частиц и почти полным отсутствием сопротивления разрыву или изменению формы тела.

Необходимо различать состояние: а) капельно-жидкое и б) газообразное.

Капельно-жидким называется состояние, отличающееся почти полной несжимаемостью (а, следовательно, значительной объемной упругостью) тела и весьма малой температурной его расширяемостью; тем самым плотность капельно-жидкого тела остается почти неизменной (постоянной), не завися от давления и температуры.

Наоборот, газообразное состояние характеризуется весьма значительной сжимаемостью и сравнительно большим коэффициентом температурного расширения. Плотность газа тем самым изменяется в широких пределах, вместе с давлением и температурой.

В последующем мы будем иметь в виду лишь капельно-жидкие тела, или жидкости в более тесном смысле слова.

Наши выводы могут быть распространяемы на газы только в тех случаях, когда, в пределах рассматриваемого явления, изменения температуры и давления столь незначительны, что ими можно пренебрегать и считать, опять-таки в пределах рассматриваемого явления, плотность газа постоянной.

Гидравлика, в более тесном смысле слова, занимается рассмотрением вопросов движения и покоя именно капельно-жидких тел.

Изучение обстоятельств движения и покоя газов входит в состав термодинамики.

## § 2. Идеальная жидкость.

При рассмотрении различных вопросов, касающихся покоя и движения жидкостей, весьма важное значение имеет понятие об „идеальной жидкости“ или об „идеально-жидком теле“.

Эта „модель“ играет в гидромеханике такую же роль, какую в статике и динамике играет модель абсолютно твердого тела или модель идеально-упругого тела в теории упругости.

1. Мы будем считать идеальную жидкость абсолютно несжимаемой и не расширяющейся от температуры. Таким образом, плотность идеальной жидкости постоянна; упругость ее бесконечно велика; коэффициент температурного расширения — нуль.

2. Идеальная жидкость абсолютно подвижна; она не оказывает никакого сопротивления разрыву или изменению формы.

Из последнего определения само собой следует, что внутри идеальной жидкости не могут существовать ни растягивающие ни касательные напряжения. Сила взаимодействия, которая единственно может существовать внутри идеальной жидкости по некоторой площадке, должна быть направлена по нормали к этой площадке внутрь; таким образом, единственные напряжения, которые могут существовать в идеально-жидком теле, суть напряжения сжимающие.

## § 3. Реальные жидкости.

Посмотрим, насколько „модель идеальной жидкости“ отличается от свойств реальной жидкости.

1. Сжимаемость. В нижеследующей таблице 1<sup>1)</sup> приведены (по Amagat) коэффициенты объемной сжимаемости  $\beta$  (умноженные на  $10^6$ ) для воды и алкоголя при обыкновенных температурах. Коэффициентом объемной сжимаемости называется коэффициент  $\beta$ , определяемый из формулы

$$\frac{dv}{v} = -\beta dp$$

1) Все данные заимствованы из „Физики“ Хвольсона.

и выражающий относительное изменение объема жидкости при увеличении давления на одну атмосферу.

ТАБЛИЦА 1.

| Давление<br>в атм. | 1—500 | 500—1000 | 1000—1500 | 1500—2000 | 2000—2500 | 2500—3000 |
|--------------------|-------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Вода . . .         | 47,5  | 41,6     | 35,8      | 32,4      | 29,2      | 26,1      |
| Алкоголь .         | 76,9  | 56,6     | 45,8      | 38,5      | 33,1      | 28,4      |

Таким образом, для воды при обыкновенной температуре коэффициент объемного сжатия составляет 0,0000475 или  $1/21000$ .

Что касается изменения сжимаемости с температурой, то, согласно опытам Amagat, сжимаемость при малых давлениях сперва уменьшается с возрастанием температуры до 50°, далее несколько увеличивается.

2. Температурное расширение. Коэффициенты температурного расширения  $\left(\frac{dv}{v} = \alpha dt\right)$  для воды по Amagat при различных температурах и давлениях приведены в таблице 2. (В таблице приведены значения  $\alpha$ , умноженные на  $10^6$ ).

ТАБЛИЦА 2.

| Давления<br>в атм. | Температуры |       |       |       |        |
|--------------------|-------------|-------|-------|-------|--------|
|                    | 0—10        | 10—20 | 40—50 | 60—70 | 90—100 |
| 1                  | 14          | 150   | 422   | 556   | 719    |
| 100                | 43          | 165   | 422   | 548   | —      |
| 200                | 72          | 183   | 426   | 539   | —      |
| 500                | 149         | 236   | 429   | 523   | 661    |
| 900                | 229         | 289   | 437   | 514   | 621    |

Как видно из таблицы, коэффициент температурного расширения для воды увеличивается с увеличением давления. Для большинства жидкостей, наоборот, коэффициент  $\alpha$  с

увеличением давления уменьшается. Температура наибольшей плотности воды понижается с увеличением давления. При нормальном (атмосферном давлении) температура наибольшей плотности  $4^{\circ}\text{C}$ ; при  $p=41,6$  атм.  $t=3,3^{\circ}$ ; при  $p=93,3$  атм.,  $t=2^{\circ}$ ; при  $p=144,9$  атм.  $t=0,6^{\circ}$ .

3. Плотность. Изменение плотности воды при атмосферном давлении, в зависимости от температуры, приведено в табл. 3.

ТАБЛИЦА 3.

| $t$ | Плотность | $t$ | Плотность | $t$ | Плотность | $t$ | Плотность |
|-----|-----------|-----|-----------|-----|-----------|-----|-----------|
| 0   | 0,999874  | 20  | 0,988235  | 50  | 0,99813   | 80  | 0,97191   |
| 4   | 1,000000  | 30  | 0,993674  | 60  | 0,98331   | 90  | 0,96550   |
| 10  | 0,999731  | 40  | 0,99230   | 70  | 0,97780   | 99  | 0,95934   |
|     |           |     |           |     |           | 100 | 0,95863   |

Из приведенных выше данных следует, что, в пределах встречающихся в практике изменений температур и давлений, плотность реальной жидкости колеблется весьма мало и что обычно, принимая эту плотность постоянной, мы делаем весьма малую ошибку, относительно значительно меньшую, чем обычная точность гидравлических вычислений.

В некоторых частных случаях нам придется считаться как с упругостью, так и с температурной расширяемостью жидкостей. Для решения соответственных вопросов можно пользоваться данными приведенных выше таблиц.

4. Силы, действующие внутри жидкости. В идеальной жидкости мы допустили существование лишь сжимающих напряжений. На самом деле в реальной жидкости имеют место как растягивающие, так и касательные напряжения.

Растягивающие усилия появляются в виде сил сцепления, являющихся результатом молекулярного притяжения между частицами.

Вопросы о проявлениях этих сил рассматриваются обычно в курсах физики в отделе о частичных силах. (Теория капиллярности).

Известно, что эти силы проявляются лишь на границах однородных жидких масс (на поверхностях соприкосновения разнородных жидкостей или жидкости с твердым телом).

Внутри же жидкости конечных размеров действие сил сцепления сводится к нулю.

Таким образом, капиллярные силы приходится принимать во внимание лишь в тех случаях, когда объемные размеры рассматриваемого жидкого тела малы по сравнению с его поверхностью, как, например, при движении в капиллярных трубках и пр. В обычных же случаях ими вовсе можно пренебрегать.

5. Касательные напряжения. Наоборот, касательные напряжения, проявляющиеся внутри жидкости, достигают значительной величины, и пренебрегать ими во многих случаях отнюдь нельзя. Касательные усилия проявляются между частицами жидкости при скольжении одной по другой; таким образом, их действие подобно трению; усилия эти потому и называются „внутренним трением“; свойство реальной жидкости обладать таковым называют вязкостью; реальную жидкость поэтому, в противоположность идеальной, называют вязкой жидкостью. При движении реальной жидкости силы вязкости совершают необратимую работу; движение реальной жидкости в силу этого, вообще говоря, сопровождается рассеянием энергии. Как мы увидим ниже, целые отделы гидравлики посвящены исключительно количественной оценке работы сил сопротивления. Немудрено поэтому, что изучение внутреннего трения составляет одну из самых главных задач гидравлики.

Согласно опыту, силы внутреннего трения зависят от скорости скольжения частиц между собой. Из этого следует крайне важное обстоятельство, а именно: при покое жидкости, когда скорости скольжения равны нулю, силы внутреннего трения отсутствуют.

#### § 4. Гидродинамика и гидравлика.

Отдел теоретической механики, занимающийся изучением движения жидких тел, называется „гидродинамикой“. Гидродинамика преимущественно занимается рассмотрением движения идеально жидких тел.

Общие уравнения движения, даже для случая идеальной жидкости, не могут быть проинтегрированы в общем виде. Тем не менее в ряде частных случаев они интегрируются и дают крайне важные обобщения, которые, как мы увидим ниже, в некоторых случаях применимы и к движению реальных жидкостей.

Уравнения движения для вязких жидкостей представляются еще более сложными и могут быть проинтегрированы лишь в самом небольшом числе частных случаев.

Гидравлика, как и другие отделы прикладной механики, в основе своей опирается на физику, понимая последнюю в самом широком смысле, включая физику как опытную, так и математическую (основой которой является теоретическая механика).

В этом смысле в основе гидравлики лежит гидродинамика. Но так как последняя не может дать ответа на все вопросы движения вязкой жидкости, то гидравлике, как и другим отделам прикладной механики, приходится изыскивать свои собственные методы, с помощью которых можно было бы решать, хотя бы и неполно и несовершенно, вопросы движения жидкостей и давать ответы на вопросы, предъявляемые инженерной практикой.

Прогресс гидравлики, равно как и других отделов прикладного знания, заключается в постепенной замене таких временных, приблизительных решений решениями более точными, основанными непосредственно на методах математической физики.

---

# ЧАСТЬ I.

## ГЛАВА ПЕРВАЯ.

### ГИДРОСТАТИКА.

Отдел гидравлики, занимающийся изучением равновесия и покоя жидкости, называется гидростатикой.

Как мы видели выше, в случаях покоя жидкости силы вязкости отсутствуют. Следовательно, находящаяся в равновесии масса реальной жидкости конечных размеров (чтобы можно было пренебрегать явлениями капиллярности) находится в условиях, совершенно близких к идеальной жидкости. Тем самым задачи равновесия жидкостей могут быть решаемы с большой точностью.

Гидравлике нет надобности вырабатывать собственные приемы, поэтому в этой области различия между гидравликой и гидродинамикой не существует.

#### § 5. Гидростатическое давление.

1. Определение давления. В силу вышеуказанного внутри жидкости, находящейся в равновесии, существуют лишь сжимающие напряжения.

В точке  $A$ , находящейся внутри жидкости (фиг. 1), представим себе бесконечно малую площадку  $\Delta F$ . На эту площадку будет действовать сила  $\Delta P$  по нормали  $n$  внутрь. Предел величины

$$\lim \left( \frac{\Delta P}{\Delta F} \right)_{\Delta F \rightarrow 0} = p$$



Фиг. 1.

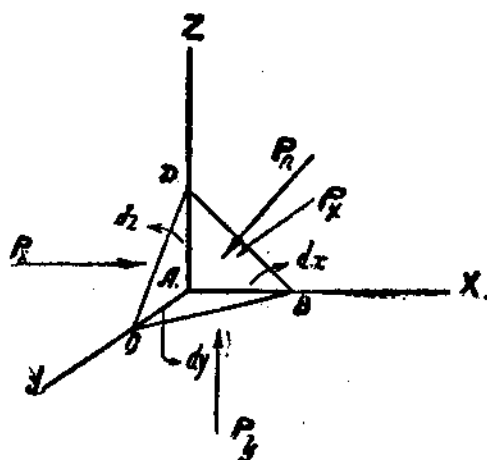
этой силы, отнесенной к единице площади, при уменьшении последней до нуля, назовем давлением в точке  $A$  по направлению  $n$  („давление“, очевидно, тождественно с „сжимающим напряжением“).

2. Независимость величины давления от направления площадки. Легко показать, что давление в данной точке не зависит от направления, т. е. одинаково для всех бесконечно малых площадок, проведенных в точке  $A$ , как бы последние ни были ориентированы.

Для доказательства этого достаточно рассмотреть равновесие сил, приложенных к элементарному тетраэдру

$ABCD$  (фиг. 2) с бесконечно малыми сторонами  $dx, dy, dz$ ; в виду малости площадок, можно пренебрегать, как величиной высшего порядка малости, изменением давления в пределах площадок и считать его по всей площадке одинаковым.

Таким образом, величины сил, действующих на стороны тетраэдра, выразятся последовательно через



Фиг. 2.

$$\frac{1}{2} p_x dydz; \frac{1}{2} p_y dxdz; \frac{1}{2} p_z dxdy; p_n F_n, \dots (a)$$

где  $p_x, p_y, p_z$  и  $p_n$  изображают давления в направлениях  $x, y, z$  и  $n$  нормали к площадке  $BCD$ , площадь которой равна  $F_n$ .

Кроме внешних сил давлений, на массу, находящуюся внутри тетраэдра, действуют еще так называемые объемные силы, пропорциональные массе (тяжести, притяжения и т. п.). Их величины по некоторому направлению  $q$  выражаются через

$$\frac{1}{6} dxdydz p q, \dots (b)$$

где  $\frac{1}{6} dxdydz$  — объем тетраэдра,  $p$  — масса единицы объема,

а  $q_n$  — величина объемной силы, действующей по направлению  $n$  на единицу массы (т. е. величина ускорения этой силы).

Объем тетраэдра, входящий в выражение (b), является величиной бесконечно малой высшего порядка по сравнению с поверхностями граней, на которые умножаются давления в выражении (a). Поэтому действием объемных сил можно пренебрегать.

Называя  $l, m, n$  cosinus'ы углов, составляемых нормалью  $n$  с осями координат, и приравнивая нулю проекции на оси координат сил, действующих на тетраэдр, имеем

$$\frac{1}{2} p_x dz dy - F_n p_n l = 0,$$

$$\frac{1}{2} p_y dx dz - F_n p_n m = 0,$$

$$\frac{1}{2} p_z dx dy - F_n p_n n = 0.$$

Но так как в свою очередь

$$\frac{1}{2} dy dz = l F_n,$$

$$\frac{1}{2} dx dz = m F_n,$$

$$\frac{1}{2} dx dy = n F_n,$$

то, очевидно,

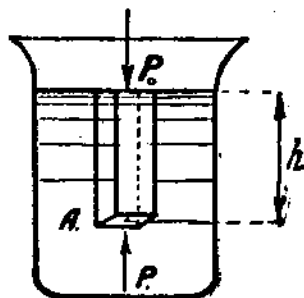
$$p_x = p_y = p_z = p_n = p.$$

Следовательно, напряженное состояние в точке  $A$  характеризуется одинаковым по всем направлениям давлением  $p$ . Эллипсоид напряжений представляется в виде шара. Давление  $p$  называют гидростатическим давлением в точке  $A$ . Измеряют его обычно в килограммах на кв. сантиметр или в атмосферах, в тоннах на кв. метр и т. д.

Мы видим, таким образом, что напряженное состояние в каждой точке покоящейся жидкости вполне определенно характеризуется одной величиной „гидростатического давления“, которое, на основании всего вышесказанного, зависит лишь от местоположения точки, т. е. является лишь функцией координат точки.

## § 6. Гидростатическое давление в покоящейся тяжелой жидкости.

1. Величина давления в точке жидкости. В некоторых частных случаях величину гидростатического давления можно определить путем самых элементарных рассуждений; таковым, например, является случай покоящейся тяжелой жидкости, т. е. жидкости, подверженной лишь силам тяжести. Пусть в точке *A* (Фиг. 3) проведена горизонтальная площадка  $dF$ , вертикальное расстояние которой до уровня свободной поверхности жидкости  $h$ .



Фиг. 3.

Построим вертикальный цилиндр, проводя вертикальные образующие через контур площадки. Спроектируем силы, действующие на цилиндр, на ось, параллельную силе тяжести. Сумма проекций всех давлений на боковую поверхность цилиндра, очевидно, равна нулю. Давление на основание цилиндра снизу  $dF \cdot p$ , где  $p$  — гидростатическое давление в точке *A*. Уравнение равновесия

$$dF \cdot p = p_0 dF + h \gamma dF,$$

где  $p_0$  — давление на свободную поверхность жидкости, а  $\gamma$  — вес единицы объема ее.

Таким образом, гидростатическое давление

$$p = p_0 + \gamma h \dots \dots \dots (1)$$

равно давлению на свободной поверхности, сложенному с весом столба жидкости, основание которого — единица площади, а высота равна глубине погружения точки *A* под свободной поверхностью жидкости.

Выражение (1) весьма просто поддается графической интерпретации.

На фиг. 4 *O—O* есть свободная поверхность жидкости.

Гидростатическое давление внутри нее изображается трапецией *CABD*, любая ордината которой *BD* (равная  $p = p_0 + \gamma h$ ) изображает величину давления в точке *D* на глубине  $CD = h$ .

Весьма часто желательно знать так называемое избыточное давление ( $p_m = p - p_0$ ) от веса жидкости, не принимая во внимание давления на свободную поверхность.

График избыточного давления, очевидно, представляется в виде треугольника  $CBD$ ;  $BD = \gamma h$  изображает величину избыточного давления в точке  $D$  на глубине  $h$ .

Графическое изображение давлений находит самое широкое применение при решении практических задач.

2. Практические формулы для величины давления. Определим теперь, как выражается для воды величина  $\gamma h$  в различных мерах.

а) Меры метрические. Если  $p$  желательно получить в  $\text{кг/см}^2$  или в технических атмосферах, то за единицу мер надлежит принять, очевидно, килограмм и сантиметр;  $\gamma$  (вес в килограммах одного  $\text{см}^3$ ) равен 0,001.

Таким образом,

$$p_m = p - p_0 = \gamma h = 0,001 h \quad (*)$$

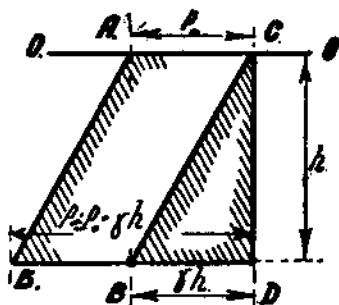
Давление возрастает на каждый сантиметр погружения на 0,001 атм.; каждый лишний метр погружения дает, очевидно, 0,1 кг давления. Давление в 1  $\text{кг/см}^2$  или в 1 атм. соответствует 10 м погружения.

б) Если принять за единицу мер метрическую тонну (1000 кг) и метр, то давление в тоннах на кв. метр выразится, принимая во внимание, что  $\gamma$  (вес в тоннах одного куб. метра) равен 1 т

$$p_m = p - p_0 = 1h, \dots \dots \dots (**)$$

так что каждый метр погружения дает давление в одну тонну на кв. метр.

Если иметь дело с какой-либо другой жидкостью, удельный вес которой по сравнению с водой —  $\gamma_1$ , то выражение (\*) и (\*\*) надо умножить на  $\gamma_1$ . Так, например, гидростатическое избыточное давление в баке с нефтью, удельного веса 0,91, на глубине 10 м от свободной поверхности составляет, очевидно, 0,91  $\text{кг/см}^2$ , или 9,1  $\text{т/м}^2$ .



Фиг. 4.

## Старые русские меры:

Пуды и футы . . .  $p_m = 1,73 h$ .

Пуды и сажени . . .  $p_m = 5,93 h$ .

Фунты и футы . . .  $p_m = 69 h$ .

## § 7. Пьезометрическое давление.

Мы выше видели, что в случае тяжелой жидкости давление выражается весом столба жидкости. Так, например, оказалось, что давлению в одну метрическую атмосферу ( $1 \text{ кг/см}^2$ ) соответствует столб воды высотой в 10 м и пр.; вообще

$$p = \gamma h \text{ и } h = \frac{p}{\gamma} \dots \dots \dots (2)$$

Очевидно, величину давления, вместо обычной меры  $\frac{\text{сила}}{\text{площ}}$ , можно просто характеризовать соответствующей высотой столба жидкости. Так, например, вместо того чтобы говорить: давление в 3,5 атм., можно сказать: давление в 35 м водяного столба.

Выражение величины давления высотой столба жидкости очень употребительно в физике и технике. Так, например, давление воздуха обычно измеряют в мм ртутного столба; давления и разрежения, производимые воздуходувными машинами и вентиляторами, — в мм водяного столба. В гидравлике давления большей частью выражаются в метрах водяного столба, причем величина избыточного давления

$$\frac{p_m}{\gamma} = \frac{p - p_0}{\gamma},$$

выраженная высотой столба жидкости, носит название *пьезометрического* давления или *пьезометрической* высоты.

Из формул (2) само собой ясен способ перехода от пьезометрических давлений к обычным. Напомним лишь еще раз, что величины  $p$ ,  $\gamma$  и  $h$  должны выражаться в одинаковых мерах, т. е. надо вперед остановиться на определенной единице длины и веса и выразить в них все величины  $p$ ,  $\gamma$  и  $h$ .

Несоблюдение этого крайне элементарного правила часто приводит к грубым ошибкам.

## § 8. Общие уравнения гидростатики.

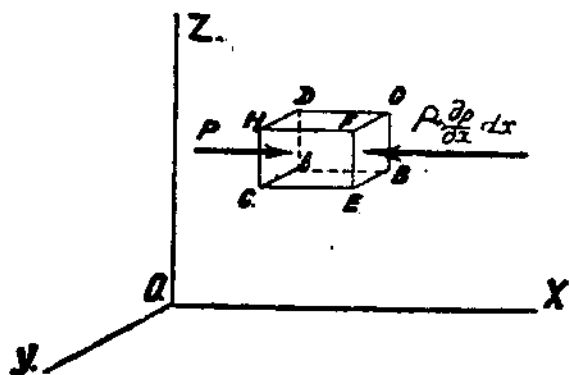
В предыдущем мы посредством элементарных соображений нашли распределение гидростатического давления в случае покоящейся тяжелой жидкости.

1. Расширим теперь постановку вопроса. Поставим, общий вопрос следующим образом:

„Найдем общие условия равновесия жидкого тела и при заданной системе сил найдем распределение давления внутри его“.

Вышеуказанную постановку вопроса можно характеризовать, как основную и общую задачу гидростатики. В окончательной форме ответ на вопрос дал Эйлер<sup>1)</sup>. До него этим вопросом занимались Ньютон, Гюйгенс, Кларо.

Выделим в жидкости, находящейся в равновесии у точки *A* (фиг. 5), элементарный параллелепипед со сторонами, параллельными осям координат  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ .



Фиг. 5.

Среднее давление на площадки, нормальные к осям координат и проходящие через точку *A* (*ACHD*, *ABGD*, *ABEC*), будут отличаться от давления  $p$  в точке *A* на величину бесконечно малую. Этим различием пренебрежем<sup>2)</sup>. Давление на площадки *EBFG*, *CHFE*, *DHFG* будут соответственно равны

$$p + \frac{\partial p}{\partial x} dx,$$

$$p + \frac{\partial p}{\partial y} dy, \quad p + \frac{\partial p}{\partial z} dz.$$

<sup>1)</sup> Histoire de l'Academie de Berlin. 1755.

<sup>2)</sup> Более точный вывод с принятием во внимание этого отличия см. Саткевич. „Основной курс Гидравлики“. Ленинград, КУБУЧ 1927.

Массу единицы объема жидкости обозначим  $\rho = \frac{\gamma}{g}$ ; объемную силу, действующую на единицу массы  $Q$ ; проекции ее на оси координат соответственно  $q_x, q_y, q_z$ . Приложенные к выделенному элементу жидкости силы находятся в равновесии; имеем, следовательно, для оси  $x$

$$\rho dydz \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dydz + q_x \rho dx dydz = 0$$

или

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho q_x.$$

Составляя подобные же уравнения для других осей, получаем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} &= -q_x \\ \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} &= -q_y \\ \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} &= -q_z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

и вообще если  $n$  — любое направление,

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial n} = -q_n,$$

где  $q_n$  — проекция объемной силы, действующей на единицу массы, на направление  $n$ . Уравнения (3) и составляют общие дифференциальные уравнения равновесия жидкости в том виде, как они даны Эйлером. Умножая уравнения последовательно на  $dx, dy, dz$  и складывая, получаем

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = -q_x dx - q_y dy - q_z dz \dots (4)$$

Как мы выше указали, в жидкости, находящейся в равновесии, гидростатическое давление является функцией одних координат. Выражение, стоящее в скобках на левой

стороне, есть поэтому полный дифференциал; уравнение (4), следовательно, можно переписать в виде

$$\frac{1}{\rho} dp = q_x dx + q_y dy + q_z dz \dots \dots (4')$$

Чтобы уравнение (4') имело смысл, нужно прежде всего, чтобы и правая часть этого уравнения (4') являлась полным дифференциалом некоторой функции  $U$ , т. е.

$$q_x dx + q_y dy + q_z dz = dU,$$

что, очевидно, требует, чтобы

$$q_x = \frac{\partial U}{\partial x}; q_y = \frac{\partial U}{\partial y}; q_z = \frac{\partial U}{\partial z} \dots \dots (5)$$

Другими словами, система объемных сил, действующих на жидкость, должна иметь потенциал. Функция  $U$  является так называемой силовой функцией.

Далее, для интегрирования уравнения, необходимо, чтобы масса единицы объема  $\rho$  была либо постоянной, либо функцией лишь одного давления  $p$ .

2. Условия равновесия жидкости. Таким образом, общие условия, при которых возможно равновесие жидкости вообще, являются следующие:

1) Действующие объемные силы должны иметь потенциал, т. е. должна существовать функция  $U$ , зависящая лишь от координат, частные производные которой по любому направлению равны проекциям на это направление объемной силы, действующей на единицу массы.

2) Плотность жидкости должна зависеть лишь от давления.

При невыполнении этих условий жидкость вообще в равновесии находиться не может.

Эти общие условия были полностью сформулированы еще Клеро в его знаменитом сочинении „О фигуре земли“ (1743). Разыскание фигуры геоида привело его к постановке и разрешению общего вопроса о равновесии жидкого тела <sup>1)</sup>. Исследования Клеро послужили также основой теории потенциала.

Нам довольно трудно представить себе жидкость, которая под действием системы сил не могла бы притти

<sup>1)</sup> Интересные сведения исторического характера см. Mach, *Mechanik*, стр. 428.

в равновесие и находилась бы, по выражению Эйлера, в состоянии „постоянного волнения“ (agitation continue). Но трудность такого представления, по замечанию Эйлера, является лишь следствием того, что объемные силы, действие которых мы привыкли наблюдать, все имеют потенциал и мы не имеем опыта в наблюдении противного.

## § 9. Поверхности уровня.

Вернемся теперь к нашим уравнениям.

Для капельной жидкости плотность постоянна. Перепишем (4'), принимая во внимание (5)

$$dp = \rho \left( \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) = \rho dU.$$

Интегрируя, получаем

$$p = C + \rho \cdot U \dots \dots \dots (6)$$

или

$$p - p_0 = \rho (U - U_0) \dots \dots \dots (7)$$

Уравнения (6) и (7) свидетельствуют о том, что распределение давления в жидкости, находящейся в равновесии, в точности копирует распределение силовой функции.

Тем самым общие свойства силовой функции, изучаемые в теории потенциала, характеризуют также и распределение давлений.

Поверхности уровня или поверхности равного потенциала являются в то же время поверхностями равного давления. Уравнение такой поверхности

$$dU = 0$$

или

$$dp = 0.$$

Свободная поверхность жидкости, как поверхность равного давления, является, очевидно, поверхностью уровня. Равнодействующая объемных сил перпендикулярна к поверхности уровня. Ее величина равна

$$\rho g_n = \rho \frac{\partial U}{\partial n}.$$

## § 10. Закон Паскаля.

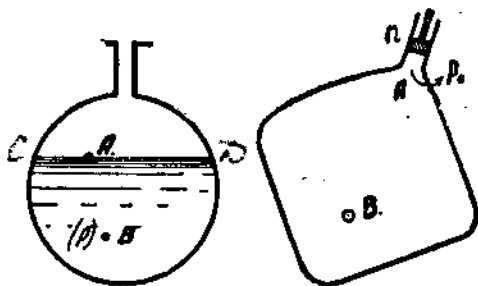
Уравнение (7) показывает также, что разность давлений между двумя точками есть умноженная на плотность разность силовой функции для двух этих точек.

Из этого следует важное обобщение, известное под именем закона Паскаля. Рассмотрим два сосуда (фиг. 6-а и 6-б). Второй совершенно, а первый не вполне заполнены жидкостью; в первом имеется свободная поверхность  $CD$ . Во втором—в точке  $A$  устроен поршень  $\pi$ . На жидкость действует некоторая система сил, удовлетворяющая общим условиям равновесия. Напишем уравнение (7) в форме

$$p = p_0 + \rho(U - U_0) \dots\dots\dots (7^{bis})$$

Величину  $p_0$  и  $U_0$  будем относить к точке  $A$ , находящейся в первом сосуде на свободной поверхности, во втором сосуде у поршенька.

Величина  $\rho(U - U_0)$  зависит лишь от системы объемных сил и не зависит от величины давления  $p_0$  в точке  $A$ . Отсюда ясно, что, изменяя произвольно на некоторую величину давление  $p_0$  в верхней свободной полости первого сосуда или под поршеньком  $\pi$  во втором, мы на ту же величину будем изменять давление в любой точке жидкости.



Фиг. 6-а и 6-б.

Это и служит доказательством закона Паскаля, согласно которому, давление, приложенное к свободной поверхности жидкости или к любой точке на поверхности жидкости, замкнутой в сосуде, равномерно передается во все точки жидкости. Закон этот также весьма просто доказывается с помощью начала возможных перемещений.

## § 11. Разыскание величины давления в частных случаях.

Для нахождения распределения давления, как мы видели выше, достаточно найти силовую функцию системы сил, действующих на жидкость. Для этой цели необходимо

лишь составить дифференциальное уравнение

$$dU = q_x dx + q_y dy + q_z dz$$

и проинтегрировать его.

Всего лучше объяснить это разбором ряда частных случаев.

1. Тяжелая покоящаяся жидкость (фиг. 3). Единственная объемная сила есть сила земного притяжения. Предположим ось  $Z$ -ов направленной вертикально вниз. Тогда сила  $q_z$ , отнесенная к единице массы, постоянна и равна  $g$

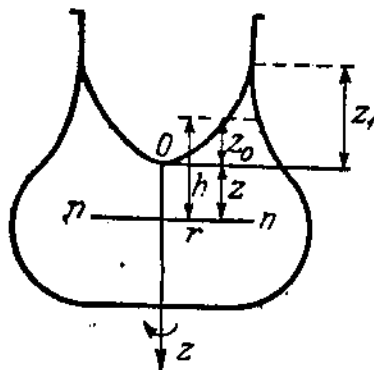
$$dp = \rho g dz = \frac{\gamma}{g} g dz = \gamma dz.$$

Назначая начало координат на свободной поверхности где давление  $p_0$ , имеем

$$p - p_0 = \gamma z,$$

т. е. уравнение (1).

Поверхности равного давления характеризуются  $z = \text{const}$ , т. е. представляются в виде горизонтальных плоскостей.



Фиг. 7.

2. Найдем распределение давления в тяжелой жидкости, равномерно вращающейся в открытом сверху сосуде с угловой скоростью  $\omega$  (фиг. 7). Если движение установилось, то жидкость находится в покое относительно сосуда, и можно применить уравнения равновесия, если к действующим силам присоединить еще силы инерции, вызванные вращательным движением. Движение симметрично относительно оси; поэтому достаточно рассмотреть любую ме-

ридианальную плоскость. Берем начало координат на оси на свободной поверхности жидкости. Ось  $Z$ -ов — вертикально вниз; за другую координату берем радиус  $r$ .

а) Сила инерции есть центральная сила. Величина ее  $q_r$ , действующая на единицу массы, очевидно,

$$q_r = \omega^2 r,$$

$$dp = \rho (\omega^2 r dr + g dz) = \frac{\gamma}{g} \omega^2 r dr + \gamma dz.$$

Интегрируя, получаем

$$p = C + \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2 r^2}{2} + \gamma z \dots \dots \dots (8)$$

Определяем  $C$  из условия, что в начале координат давление равно давлению на свободной поверхности  $p_0$ ; имеем

$$p - p_0 = \frac{\gamma}{g} \frac{\omega^2}{2} r^2 + \gamma z \dots \dots \dots (9)$$

б) Уравнение свободной поверхности  $p = p_0$  в рассматриваемом меридианальном сечении напишется:

$$z + \frac{\omega^2}{2g} r^2 = 0.$$

Свободная поверхность является, следовательно, параболоидом вращения. Величина превышения любой точки свободной поверхности над началом координат ( $z_0$ )

$$z_0 = -\frac{\omega^2}{2g} r^2 \dots \dots \dots (10)$$

Поверхности равного давления

$$z + \frac{\omega^2}{2g} r^2 = \text{const},$$

т. е. также параболоиды вращения.

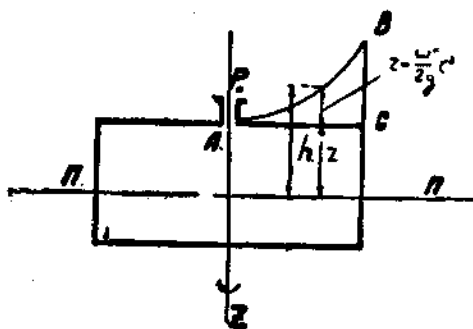
в) Найдем распределение давления вдоль горизонтальной плоскости II—II, координата которой  $= z$ .

В уравнении (9) считаем  $z$  постоянным. Подставляя, кроме того, из уравнения (10) значение  $z_0$ , имеем

$$p - p_0 = \gamma \left( z + \frac{\omega^2}{2g} r^2 \right) = \gamma (z - z_0) = \gamma h.$$

Таким образом, давление соответствует столбу жидкости, равному расстоянию от плоскости II—II до свободной поверхности жидкости.

1) Замкнутый сосуд. Очевидно, распределение давлений выражалось бы совершенно так же, если бы сосуд



Фиг. 8.

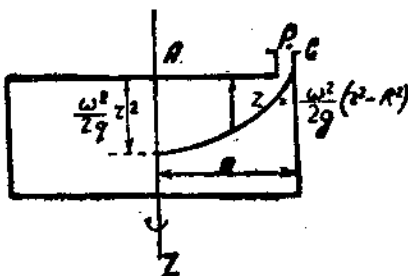
был замкнутым (фиг. 8 и 9) и был бы совершенно заполнен жидкостью. Вопрос лишь в определении постоянной. В случае, изображенном на фиг. 8, предполагается, что возле оси, в точке А, в крышке сосуда сделано отверстие; благодаря этому во все время движения в точке А поддерживается давление, равное  $p_0$ .

Распределение давления целиком совпадает с (9). Давление по плоскости АС выражается высотой столба жидкости

$$-z_0 = \gamma \frac{\omega^2}{2g} r^2.$$

В фиг. 9 предположено, что отверстие в крышке сделано в наружном крае в точке С. Очевидно, во время движения давление в С также будет равно  $p_0$ .

В этом случае, для определения постоянной в уравнении (8), имеем



Фиг. 9.

$$p_0 = \gamma \cdot \frac{\omega^2}{2} R^2 + C.$$

Подставляя, получим

$$p - p_0 = \gamma \cdot \frac{\omega^2}{2} (r^2 - R^2) + \gamma z.$$

д) Вакуум. Давление непосредственно под крышкой ( $z=0$ ) будет меньше наружного. Жидкость под крышкой будет в состоянии разрежения. Если принять, что  $p_0$  есть атмосферное давление, то величина  $p_0 - p$  изображает недостачу давления  $p$  до атмосферного давления. Этот отрицательный избыток, измеряющий степень разрежения, называется *вакуумом*.

Вакуум, очевидно, можно выражать различным образом. Его можно выражать, подобно давлению  $p$ , в виде давления на единицу поверхности, или высотой водяного столба, или, наконец, в процентах от атмосферного давления и пр.<sup>1)</sup>

Наибольший вакуум, очевидно, будет иметь место в точке А; его величина равна

$$p_0 - p = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{g} R_2.$$

Давление в точке А

$$p = p_0 - \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{2} R^2 \dots \dots \dots (11)$$

Очевидно, что с увеличением скорости вращения величина давления  $p$  уменьшается (и вакуум соответственно увеличивается). Однако, уменьшению  $p$  по самой сути вещей положен предел. В силу определения жидкости между частицами могут существовать лишь сжимающие напряжения. Отсюда следует, что абсолютная величина давления  $p$  не может быть отрицательной. Жидкость, в случае понижения  $p$  ниже нуля, претерпевает разрыв, теряет непрерывность, т. е. свойство полностью без пустот заполнять пространство. Очевидно, при этом уже физически невозможно равновесие. Жидкость будет выливаться через отверстие С; внутри же будут образовываться пустоты.

Определим величину предельной угловой скорости  $\omega_k$ , при которой давление в А падает до нуля. Из уравнения (11) очевидно, что

$$\omega_k = \sqrt{\frac{2gp_0}{\gamma}} \cdot \frac{1}{R} \dots \dots \dots (12)$$

<sup>1)</sup> Таким образом, если говорить, что вакуум, например, в конденсаторе паровой турбины составляет 90%, это значит, что давление в конденсаторе ниже атмосферного на 0,9 атм., т. е. составляет лишь 0,1 атм., или 0,1 кг/см<sup>2</sup> и пр.

Пример. Если  $R = 0,5$  м;  $p_0 = 1$  атм;

$\frac{p_0}{\gamma} = 10$  м водяного столба;  $\sqrt{2g} = 4,43$ , то

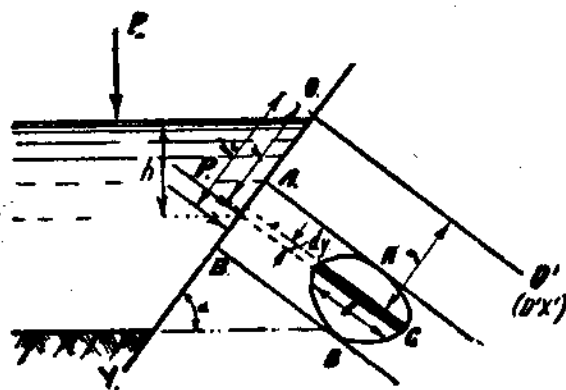
$$\omega_k = \frac{4,43}{0,5} \sqrt{10} = \sim 28,$$

что соответствует около 268 об/мин.

На самом деле, благодаря тому, что в жидкости обычно заключается растворенный воздух и газы, последние вместе с понижением давления начнут энергично выделяться, и жидкость начнет вытекать через отверстие много раньше, чем будет достигнута предельная скорость, получаемая из уравнения (12).

## § 12. Определение величины полного давления на погруженную в тяжелую жидкость плоскую фигуру.

На фиг. 10 ось  $OY$  представляет сечение фигуры плоскостью чертежа. Ось  $X$ -ов полагаем совпадающей со свободной горизонтальной поверхностью жидкости. В правой



Фиг. 10.

части чертежа фигура  $ABCD$  изображена повернутой вокруг оси  $OY$  и совмещенной с плоскостью чертежа. Ось  $OX$  при этом заняла положение  $OO'$ . Выделим на фигуре полосу высотой  $dy$ , шириною  $b$ , параллельную оси  $OX$ . Давление по всей такой полоске одинаково. Площадь ее  $= dF = b \cdot dy$ .

Полное давление на полосу

$$\Delta p = (\gamma h + p_0) dF = p_0 dF + \gamma \sin \alpha dF,$$

где  $h$  — глубина погружения полоски,  $\theta$  — угол наклона плоскости фигуры к горизонту.

Полное давление на всю фигуру определится, как сумма давлений на отдельные полоски:

$$P = \int_F p_0 dF + \int_F \gamma y \sin \theta dF,$$

где значок  $F$  у интеграла показывает, что интегрирование необходимо распространить на всю поверхность фигуры.

Очевидно,

$$P = p_0 F + \gamma \sin \theta P y_0 = F(p_0 + \gamma h_0), \dots (13)$$

где  $y_0$  и  $h_0$  — координата и соответствующая глубина погружения центра тяжести фигуры. Отсюда получаем правило:

„Полное давление жидкости на погруженную плоскую фигуру равно произведению площади фигуры на величину гидростатического давления в ее центре тяжести“.

### § 13. Центр давления.

Определим теперь еще точку приложения равнодействующей всех давлений  $P$ , или так называемый центр давления.

Найдем отдельно точку приложения равнодействующей избыточных давлений  $p_m$ . Очевидно, точка приложения равнодействующей давлений  $p_0$  совпадает с центром тяжести фигуры. Составим уравнение моментов вокруг оси  $OX$ .

Момент избыточных давлений, действующих на элементарную площадку,

$$\Delta M = \gamma \sin \theta y^2 dF.$$

Момент соответственной равнодействующей, называя  $y_c$  координату центра давлений, будет

$$M = P \gamma \sin \theta y_0 y_c.$$

Очевидно,

$$M = P \gamma \sin \theta y_0 y_c = \int_F \gamma \sin \theta y^2 dF$$

или

$$P \gamma \sin \theta y_0 y_c = \gamma \sin \theta J_0.$$

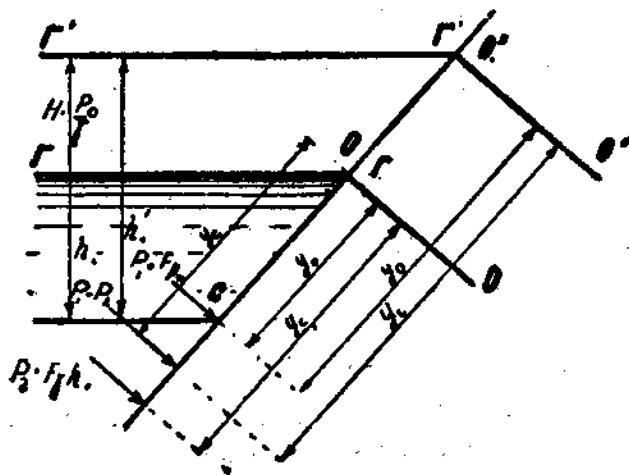
откуда

$$y_{c_1} = \frac{J_0}{F y_0} \dots \dots \dots (14)$$

т. е. координата центра давления равна отношению момента инерции фигуры, относительно линии пересечения свободной поверхности с плоскостью фигуры к статическому моменту фигуры относительно той же оси. Называя  $\rho_0$  и  $\rho_c$  радиусы инерции фигуры относительно оси  $OO'$  и параллельной ей оси, проходящей через центр тяжести, имеем

$$y_{c_1} = \frac{J_0}{F y_0} = \frac{y_0^2 - \rho_c^2}{y_0} = y_0 + \frac{\rho_c^2}{y_0} \dots \dots (14^*)$$

Таким образом, центр давления всегда ниже центра тяжести фигуры; расстояние между ними (в плоскости



Фиг. 11.

фигуры) равно  $\frac{\rho_c^2}{y_0}$  отношению квадрата радиуса инерции относительно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести, к расстоянию до центра тяжести. Заметим, что координата центра давления (14\*) есть приведенная длина физического маятника.

Зная величины и точки приложения двух частных равнодействующих, нетрудно определить координату  $y_c$  точки приложения полной равнодействующей (фиг. 11).

В приложениях, однако, обычно приходится определять лишь точку приложения равнодействующей избыточных давлений  $p_m$ .

Заметим лишь, что координата точки приложения полного давления будет выражаться формулой подобной (14) или (14\*), если только за ось абсцисс взять ось  $O''O''$  — линию пересечения плоскости фигуры с горизонтальной поверхностью  $\Gamma\Gamma$ , находящейся выше свободной поверхности жидкости  $\Gamma\Gamma$  на высоту  $H = \frac{p_0}{\gamma}$ , представляющую собою пьезометрическую высоту, соответствующую давлению  $p_0$  на свободной поверхности. Очевидно, считая глубины от этой поверхности, мы имеем давление в любой точке

$$p = p_0 + \gamma h_0 = \gamma (H + h_0) = \gamma h'_0$$

Полное давление

$$P = F \gamma h'_0.$$

Ясно, что

$$y'_c = \frac{J_0}{F y_c}$$

и т. д.

## § 14. Графические приемы определения центра давления.

Во многих случаях практики, при определении центра давления, предпочтительно пользоваться графическими приемами.

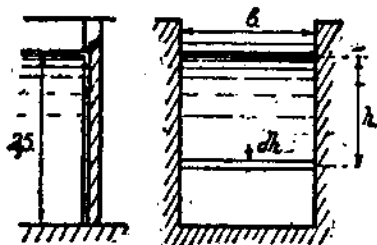
Пусть, например, требуется определить избыточное давление воды на вертикальный водоудержательный щит (фиг. 12), перегораживающий прямоугольный канал шириною  $b = 2$  м, глубиною  $h_0 = 2,5$  м. Величина давления определяется, как произведение площади щита на давление в центре тяжести.

Площадь щита:  $F = bh_0$ ; давление в центре тяжести;

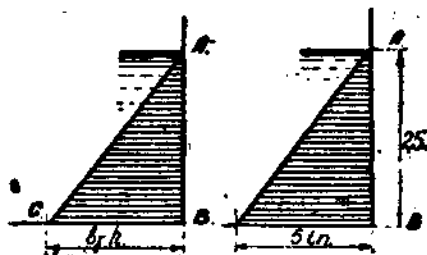
$$p = \frac{1}{2} \gamma h_0.$$

$$P_m = \frac{b}{2} \gamma h_0^2 = 6,25 \text{ т.}$$

Для нахождения центра давления рассуждаем следующим образом: так как ширина щита всюду одинакова, то давление на элементарную полоску высотой  $dh$ , при ширине щита  $b$ , выразится через  $\gamma hb dh$ . Диаграмма давлений на



Фиг. 12.

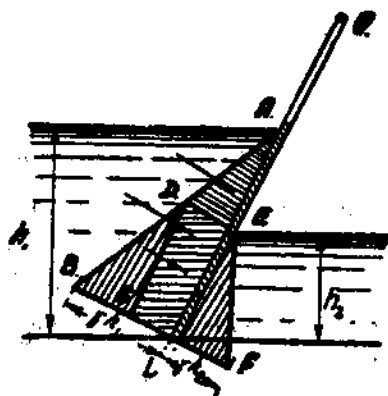


Фиг. 13-а и 13-б.

полоску щита высотой в единицу выражается, очевидно, как выше в случае на стр. 25, треугольником  $ABC$  (черт. 13-а), ордината которого  $b/3 h$  (для рассматриваемого конкретного случая диаграмма изображена на черт. 13-б).

Площадь треугольника в соответственном масштабе изображает величину равнодействующей  $\left( \frac{25 \times 5}{2} = 6,25 m \right)$ ;

точка ее приложения совпадает, очевидно, с центром тяжести треугольника, т. е. находится на трети высоты. Без труда станет ясным теперь построение, приведенное на фиг. 14, изображающее построение центра избыточного давления на наклонный щит  $OC$ , перегораживающий пря-



Фиг. 14.

моугольный канал, в котором вода стоит с обеих сторон щита<sup>1)</sup>. Очевидно, треугольник  $ABC$  изображает диаграмму

<sup>1)</sup> На чертеже приведено давление на единицу ширины щита.

давления с верхней стороны, треугольник  $CFE$ —с низовой стороны щита.

Резльтирующей диаграммой будет фиг.  $ADQC$ ; равнодействующая будет проходить через ее центр тяжести.

### § 15. Определение величины и центра давления на криволинейную поверхность.

Так как величина и направление полного давления вполне определяются по трем любым, не лежащим в одной плоскости составляющим, то для решения вопроса достаточно решить следующую задачу:

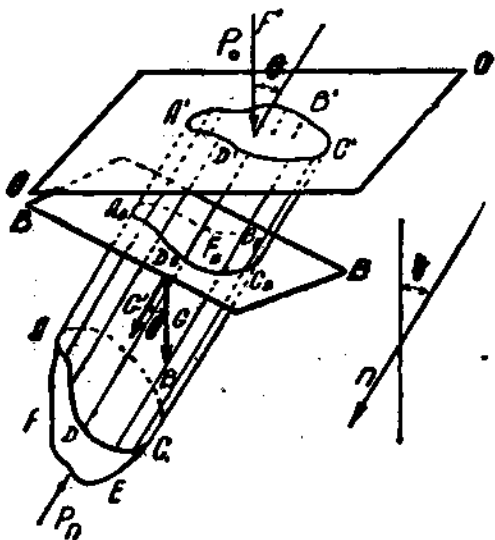
определить составляющую полного давления по какому-нибудь направлению  $n$ .

Пусть (на фиг. 15) имеем криволинейную поверхность  $ABCDE$ . Через контур ее  $ABCD$  проведем цилиндрическую поверхность, параллельную направлению  $n$ ; цилиндрическая поверхность пересечет свободную поверхность по контуру  $A'B'C'D'$ , вырезав фигуру площадью  $F$ .

Для определения искомой составляющей давления  $P_n$  рассмотрим условия равновесия жидкого тела, ограниченного поверхностью  $ABCDE$ , цилиндрической поверхностью и плоскостью  $A'B'C'D'$ . Если вес жидкости  $Q$ , находящейся внутри этого тела, и  $\theta$ —угол, составляемый направлением  $n$  с вертикалью, то, проектируя действующие силы на направление  $n$ , имеем

$$P_n = Q \cos \theta + p_0 F \cos \theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

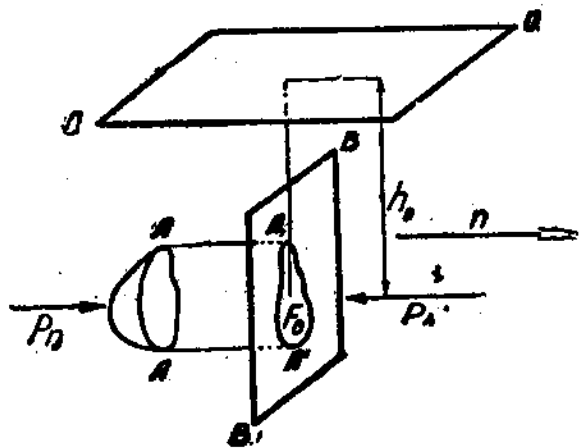
Итак, все дело свелось к определению объема отсеченного тела и площади  $F$ . Нет надобности обязательно



Фиг. 15.

добиваться пересечения цилиндрической поверхности свободной поверхностью жидкости. Достаточно пересечь ее любой плоскостью  $BB$  и найти площадь фигуры  $(ABCD)_B$ . В уравнении равновесия (1), очевидно, в этом случае второй член  $p_0 F \cos \alpha$  заменился бы  $P_{B(n)}$  т. е. проекцией на  $n$  давления на плоскую фигуру  $(ABCD)_B$ , которое определится на основании уравнения (13).

Определим, например, горизонтальную составляющую  $P_n$  на фиг. AA (фиг. 16). Через контур фигуры проводим цилиндрическую поверхность (образующие горизонтальны)



Фиг. 16.

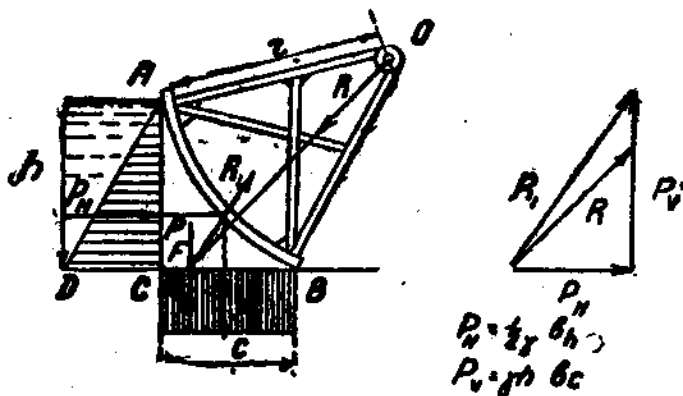
и пересекаем ее вертикальной, перпендикулярной к направлению  $n$  плоскостью  $B-B$ . Так как составляющая веса на это направление равна нулю, то, очевидно, горизонтальная составляющая давления  $P_n$  равна гидростатическому давлению  $P_A = F_A(\gamma h_c + p_0)$  на вырезанную цилиндрической поверхностью фигуру  $A_1A'$ .

Очевидно, решение и при другом направлении  $n$  ничем не отличалось бы от только что полученного, если бы весом отсеченного тела можно было бы пренебрегать по сравнению с давлением на вырезанную площадку. В этом случае также составляющая давления по направлению  $n$  просто была бы равна давлению на проекцию криволинейной поверхности на плоскость, перпендикулярную к этому

направлению  $n$ . На практике обычно решение задачи во многих случаях можно еще несколько упростить. Решим несколько частных случаев.

✓ 1. Определим давление на цилиндрический сегментный затвор, перегораживающий прямоугольный канал шириною  $d$  м и глубиною  $h$  м. Поверхность затвора есть поверхность кругового цилиндра радиуса  $r$  с горизонтальной осью  $OO$ , около которой вращается затвор, подвешенный на шарнире (фиг. 17).

Для решения задачи рассмотрим равновесие отсека  $ACB$ , ограниченного с одной стороны цилиндрической поверх-



Фиг. 17.

ностью щита  $AB$ , с других двух — горизонтальной и вертикальной площадками  $CB$  и  $AC$ . На отсек, кроме веса  $G$ , приложенного в центре тяжести  $F$ , действуют давления на  $AC$  и  $BC$  —  $P_H$  и  $P_V$  и, наконец, реакция щита (обратная по направлению искомому давлению воды на щит  $R$ ). Для нахождения последней прежде всего находим равнодействующую  $R_1$  давлений  $P_H$  и  $P_V$ . Продолжаем ее до пересечения с направлением веса отсека  $O$  (самой величины веса  $G$  знать нет надобности), проходящим через центр тяжести  $F$ . Через точку пересечения  $E$ , очевидно, и должно проходить искомое давление  $R$ .

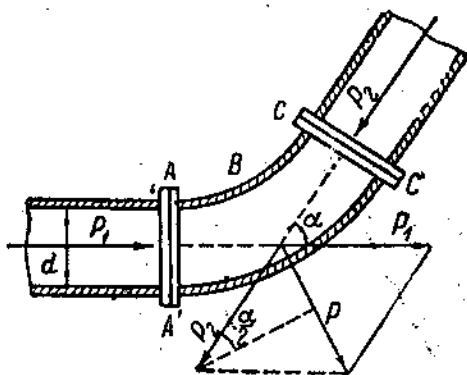
Так как все элементы поверхности перпендикулярны к радиусам, то все элементарные давления проходят через

центр  $O$ ; очевидно, что через эту же точку проходит также и равнодействующая всех давлений  $R$ .

Соединяем  $E$  с  $O$ ; линия  $EO$  есть направление равнодействующей. Зная направление последней и величину горизонтальной составляющей  $P_H = \frac{1}{2} \gamma b h^2$ , находим по-

строением (на отдельном чертеже сбоку) величину полного давления и его вертикальной составляющей.

2. Определим равнодействующую давлений воды на кривой участок трубы  $ABC$  (фиг. 18). Пусть давление воды  $= p$  атм и диаметр трубы  $= d$  см. Пренебрежем весом заключенной в колене воды и рассмотрим равновесие отсека воды, заключенного в ко-



Фиг. 18.

лене; на плоскости  $AA'$  и  $CC'$  действуют равные между собою давления.

$$P_1 = P_2 = \frac{\pi d^2}{4} p.$$

Полное давление  $P$  равно, очевидно,  $P = 2 P \sin \alpha/2$ .

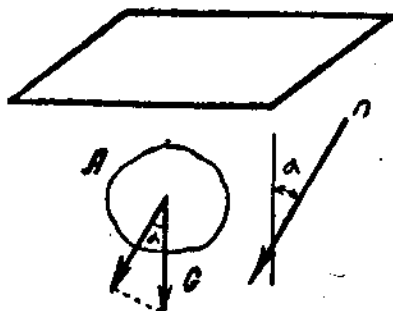
## § 16. Закон Архимеда.

Рассмотрим еще случай давления на погруженное в жидкость тело  $A$  (фиг. 19).

Для определения давления применим так называемый принцип отвердения. Рассмотрим равновесие тела, одинакового с рассматриваемым, но заполненного жидкостью. Очевидно, в случае равновесия массы жидкости и каждый отсек ее также находится в равновесии; отсюда непосредственно следует, что давление на тело уравнивает его вес. Таким образом, получаем, что составляющая давления жидкости на погруженное тело по какому-либо на-

правлению  $n$  равна по величине проекции на то же направление силы, по величине равной весу жидкости объема, по направлению же — прямо противоположной весу.

Если за направление  $n$  взять направление вертикальное, то непосредственно получаем известный закон Архимеда; для горизонтального направления имеем давление нуль. Отсюда также ясно следует, что если давление во всей массе жидкости одинаково, то давление на погруженное тело равно нулю.

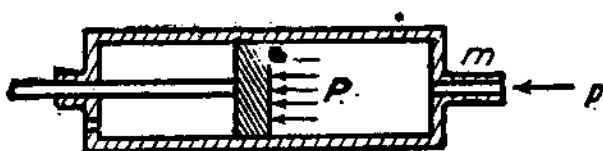


Фиг. 19.

Мы не рассматриваем здесь вопросов равновесия плавающих тел, так как они излагаются в специальном курсе „Энциклопедии Судостроения“.

## § 17. Машины, действующие давлением воды.

1. Гидравлический цилиндр. Под таковыми мы разумеем различные механизмы, основною частью которых является гидравлический цилиндр (фиг. 20), на который давит поступающая через трубку  $m$  жидкость под давлением  $p$ . Гидравлический цилиндр является основой всякого



Фиг. 20.

рода гидравлических подъемников, гидравлических ударных и водостолбовых машин, аккумуляторов, прессов и пр. Мы не можем здесь входить в подробное описание всех подобного рода механизмов <sup>1)</sup>, до сих пор имеющих еще достаточно широкое применение там, где необходимо либо развивать значительные сосредоточенные усилия, либо

<sup>1)</sup> См. Blaine Hydraulic Machinery, Lea, Collier и пр.

передавать на расстояния отдельные и притом „точные“ перемещения; мы ограничимся здесь лишь выводом некоторых общих соотношений, имеющих применение при оценке и расчете всяких подобных гидравлических машин.

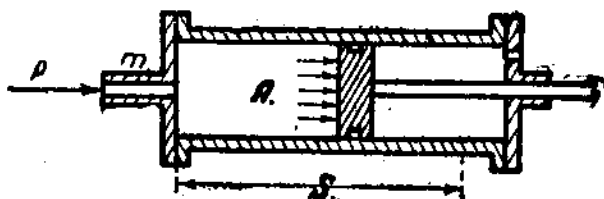
2. Формула для расчета гидравлических цилиндров. Пусть в полости А (фиг. 21) гидравлического цилиндра имеется жидкость под манометрическим давлением  $p_m$ . „Манометрическим“ называют избыточное (против атмосферного) давление в жидкости, замкнутой в сосуде. Это давление непосредственно измеряется обычным манометром (Бурдона и пр.).

Пусть рабочая площадь поршня  $F$ ; его ход —  $S$ .

Работа, совершаемая поршнем за один ход:

$$A = pFS = pW, \dots \dots \dots (15)$$

где  $W$  — полезный объем, занимаемый жидкостью, или „полезная емкость цилиндра“. Таким образом, мы видим,



Фиг. 21.

что работа, которую может совершить гидравлический цилиндр, равна произведению его емкости на величину давления рабочей жидкости.

Если мы будем выражать давление  $p$  в атмосферах ( $кг/см^2$ ), объем в литрах (куб. дециметрах), а работу  $A$  в килограмм-метрах, то получим следующее численное соотношение (приводя все к килограммам и дециметрам):

$$10A = W \cdot 100 p; A = 10pW \dots \dots \dots (15')$$

Таким образом, цилиндр, емкостью в один литр, под давлением в одну атмосферу дает 10  $кг \cdot м$  работы.

Само собою очевидно, что носителем энергии является на самом деле лишь жидкость под давлением, и что формула (15') выражает лишь то, что может быть

названо работой жидкости. Один литр жидкости, сжатый до  $p$  атм., содержит в себе  $10 p \text{ кг} \cdot \text{м}$  энергии.

Очевидно, что формула (15') выражает работу сжатой жидкости, переданную поршню, и не учитывает потерь. Действительная работа, которая может быть получена от поршня, выражается соотношением

$$A_{\text{eff}} = \eta \cdot A = \eta \cdot 10 p W, \dots (15'')$$

где  $\eta$  — коэффициент полезного действия цилиндра.

Формула (15'') и служит для расчета всяких гидравлических цилиндров.

**Примеры:** а) Определить размер цилиндра гидравлического подъемного крана, поднимающего 5 т на высоту 4 м;  $p = 50$  атм. Задавая с запасом  $\eta = 0,8$ , имеем

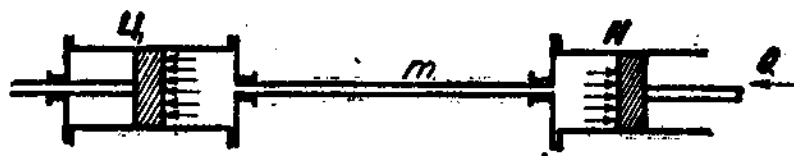
$$W = \frac{5000 \times 4}{10 \cdot 50 \cdot 0,8} = 50 \text{ л.}$$

Размеры  $S$  и  $F$  могут быть выбраны по желанию.

б) Определить полезный объем гидравлического аккумулятора работой жидкости в  $180\,000 \text{ кг} \cdot \text{м}$  при  $p = 100 \text{ кг/см}^2$  и  $\eta = 0,9$ .

$$W = \frac{180\,000}{10 \cdot 100 \cdot 0,9} = 200 \text{ л.}$$

**3. Передача давления жидкостью.** Для понимания того, каким образом несжимаемая жидкость может явиться носителем энергии, укажем, что на самом деле



Фиг. 22.

жидкость является здесь лишь передатчиком давления. Так, в схеме (фиг. 22) вода, поступающая в рабочий гидравлический цилиндр, подается по трубке  $m$  насосом  $N$ , для перемещения поршня которого требуется усилие  $Q$ .

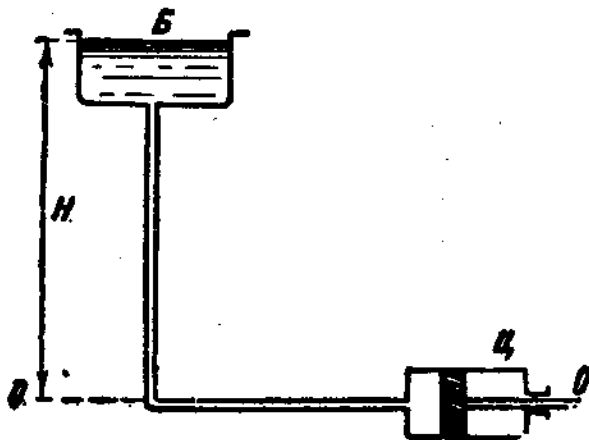
В схеме (фиг. 23) рабочий цилиндр соединен с водонапорным баком  $B$ , находящимся на высоте  $H$  над центром цилиндра, соответствующей давлению  $p$ , т. е.  $H = \frac{p}{\gamma}$ .

Объем воды, входящий в цилиндр, падает с поверхности воды в баке, т. е. совершает работу

$$A = W\gamma H = Wp,$$

что тождественно с формулой 15.

4. Понятие о „напоре“. Из этого между прочим следует, что некоторый объем жидкости, скажем  $W$ , веса  $\gamma W$ , находящийся в цилиндре под манометрическим давле-



Фиг. 23.

нием  $p$  (фиг. 23), содержит в себе такое же количество потенциальной энергии по отношению к горизонтальной плоскости  $OO$ , как если бы этот же объем находился в открытом баке на высоте  $H = \frac{p}{\gamma}$  и мог бы, падая, совершить работу  $\gamma HW$ .

Таким образом, по отношению к плоскости  $O-O$  потенциальная энергия, заключенная в единице веса жидкости, находящейся под давлением  $p$  в сосуде  $O$  (фиг. 24), будет

$$H_1 + \frac{p_1}{\gamma} = H,$$

где  $H$  есть сумма геометрической высоты  $H_1$  и пьезометрической  $\frac{p_1}{\gamma}$ .

Величину  $H$  будем называть напором по отношению к плоскости  $O-O$ .

5. Мощность гидравлического двигателя. Работоспособность объема жидкости по отношению к плоскости  $O-O$  равна

$$\gamma WH,$$

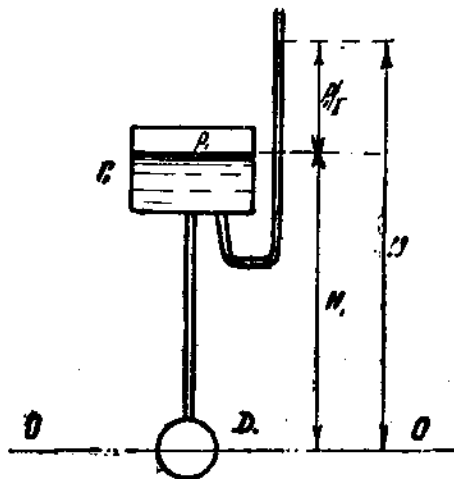
произведению веса на напор.

При расходе в двигателе в единицу времени объема жидкости  $Q$  постоянная мощность, подводимая к двигателю, есть

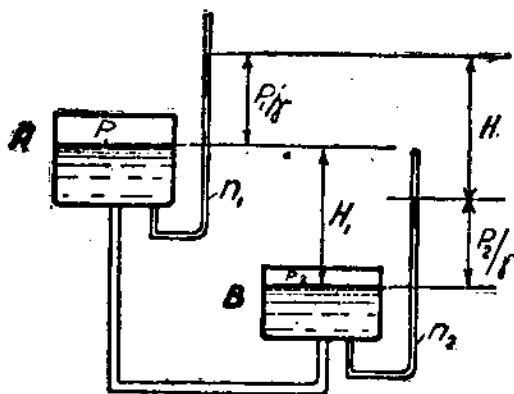
$$N_{\text{abs}} = \gamma QH,$$

его полезная мощность

$$N_{\text{eff}} = \eta \gamma QH.$$



Фиг. 24.



Фиг. 25

Если измерить  $H$  в метрах;  $Q$  в  $\text{м}^3/\text{сек.}$  и  $N$  в лошадиных силах, то

$$N_{\text{eff}} = \eta \frac{1000QH}{75} \text{ л. с.} \dots \dots \dots (16)$$

Принимая в среднем  $\eta = 0,75$ , имеем

$$N_{\text{eff}} = 10 QH \text{ л. с.}$$

формулу, широко употребляемую для предварительных расчетов в устройствах, использующих энергию падения воды.

При расходовании жидкости между сосудами  $A$  и  $B$  (фиг. 25) с геометрической разностью уровней  $H_1$  и давлениями соответственно  $p_1$  и  $p_2$ , работа, совершаемая единицей веса жидкости, равна

$$H_1 + \frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} = H.$$

Таким образом, напор есть просто разница уровней в пьезометрических трубках  $n_1$  и  $n_2$ .

## ГЛАВА ВТОРАЯ.

### О ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ ВООБЩЕ.

#### § 18. О струйчатом движении жидкости.

1. В основе естественных представлений о движении жидкости, возникающих из непосредственного наблюдения, лежит представление об его струйчатом характере.

Поток движущейся жидкости (фиг. 26) мысленно разбивается на целый ряд элементарных струй — трубок ( $ab—cd$  и пр.); ось каждой из них касательна к направлению скорости; оси соответственных трубок — струй представляют собою тем самым траектория движущихся частиц.

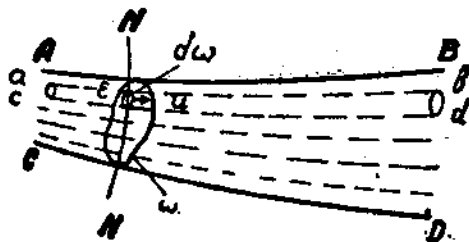
Очевидно, поверхность, разделяющую подобные мысленные трубки, можно было бы заменить бесконечно тонкой жесткой непроницаемой стенкой без того, чтобы что-либо в движении изменилось.

Выделим в точке  $A$  (фиг. 27) движущейся жидкости элементарную площадку  $dP$ . Пусть направление скорости  $u$  жидкости в этой точке составляет с нормалью  $n$  к площадке угол  $\alpha$ . Величину

$$dq = dP \cdot u \cdot \cos \alpha = u_n dP$$

будем называть потоком через площадку  $dP$  в точке  $A$ .

В любой точке  $E$  струйки  $abcd$  (фиг. 26) проведем плоскость, перпендикулярную к оси струйки; сечение струйки



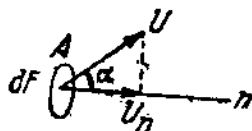
Фиг. 26.

такую плоскостью назовём „живым сечением струйки“; величину площади его обозначим  $d\omega$ .

Так как скорость перпендикулярна к живому сечению, то соответственный поток равен  $u d\omega$ ; очевидно, в то же самое время поток через любой элемент стенки струйки равен нулю.

Исходя из точки  $E$ , построим поверхность  $N-N_1$ , ортогональную к направлению струй, т. е. поверхность, каждый элемент которой в любой точке перпендикулярен к направлению соответственной струи.

Поверхность эту назовём „живым сечением“ потока в точке  $E$ <sup>1)</sup>. Величину площади этой поверхности



Фиг. 27.

$$\omega = \int_{\omega} d\omega$$

(предполагая, что интеграл взят в пределах всего потока) назовём „площадью живого сечения“ потока в точке  $E$ .

Полный поток, или, как его обычно называют в гидравлике, „расход“ жидкости, равный объёму протекающей в единицу времени через данное живое сечение жидкости, очевидно, будет равен

$$Q = \int_{\omega} u d\omega.$$

Величину

$$v = \frac{Q}{\omega} = \frac{\int_{\omega} u d\omega}{\int_{\omega} d\omega} \dots \dots \dots (17)$$

назовём средней скоростью в сечении.

Очевидно, что

$$Q = v\omega.$$

2. Пока что мы представили себе струйки как бы действительно существующими, т. е. в виде действительных

<sup>1)</sup> Ясно, что через каждую точку можно провести одно и только одно живое сечение.

трубок, характеризующихся тем, что ось каждой из них есть действительная траектория частиц, что раз попавшая в данную трубку частица продолжает в ней оставаться, что обмена частицами через стенки между соседними трубками не существует. Как мы увидим ниже, такому представлению соответствует в действительности лишь небольшое число реальных движений. В огромном большинстве случаев, почти во всех, представляющих практический интерес, движение молекул не связано с определенной траекторией — трубкой. Между струйками существует непрерывный обмен частиц.

Тем не менее, как мы увидим ниже, струйка может продолжать существовать, но уже не как действительная трубка, а как некоторая математическая фикция, представляющая средний „статистический“ результат действительных движений.

Представление о „струйчатом“ движении жидкости лежит в основе гидравлики с самого начала ее возникновения; с этим представлением связано все развитие науки; отказ от „струйчатой модели“ (из предыдущего ясно, что теперь о струйчатом движении можно говорить уже лишь как о „модели“) был бы равносителен в настоящий момент полному крушению практической гидравлики, так как вне этой модели пока еще не существует приемов рассмотрения, которые давали бы реальные результаты и приводили к возможности конкретных решений вопросов.

Одной из огромных заслуг Буссинеска (Boussinesq), о работах которого мы неоднократно будем говорить впереди, служит между прочим то, что в своей „Теории водных течений“<sup>1)</sup>, показав возможность оперировать над фиктивной „статистической“ струйкой, как над реальной, он тем самым дал возможность гидравлике сохранить накопленные годами долгой работы результаты и пока что примирил „старую“ теорию с новыми представлениями о движении жидкости.

Мы в дальнейшем вернемся еще к этому вопросу; пока же в последующем будем пользоваться „струйчатой моделью“, как если бы она в действительности соответствовала реальным явлениям.

---

<sup>1)</sup> Boussinesq. Théorie des eaux courantes. Mem. Ac. 1873

## § 19. Терминология.

Прежде чем идти дальше, установим некоторые термины.

1. Мы будем называть *установившимся* такое движение, в котором элементы движения в какой-либо определенной точке не изменяются по времени. Установившимся движением будет, например, движение в трубе  $T$  (фиг. 28), соединяющей два водоема  $A$  и  $B$  с постоянными горизонтами воды, или истечение жидкости через отверстие под постоянным напором и пр.

Очевидно, что в случае установившегося движения все трубки-струи постоянно сохраняют свое положение, форму и величину. В каждой точке движущейся жидкости величина и направление скорости остаются неизменными. Остается

неизменной также и величина давления. Таким образом в установившемся движении скорость, ускорения и давления являются лишь функциями координат.

2. Обратно, *неустановившимся* или *переменным* мы будем называть движение, в котором элементы движе-

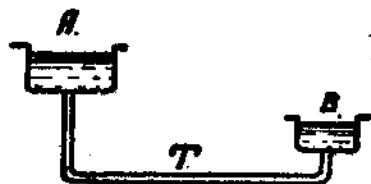
ния (скорости, ускорения и давления) изменяются по времени.

В неустановившемся движении трубки-струи меняют свое положение, форму и величину. Элементы движения являются функциями как координат, так и времени. Примером такого движения может служить волна на поверхности какого-либо водоема.

Необходимо далее различать *равномерное* и *неравномерное* движение.

3. *Равномерным* называется такое движение, в котором как живые сечения, так и скорости и ускорения в одинаковых точках живых сечений одинаковы. „Равномерным“ будет, например, движение в цилиндрической трубе или в канале одинакового сечения при постоянной глубине и в достаточном расстоянии от начала трубы или канала, чтобы установилось распределение скоростей.

4. Наоборот, *неравномерным* будет называться движение, в котором изменяется либо величина живого сечения,



Фиг. 28.

либо распределение по одинаковому живому сечению скоростей и укорений. Первое имеет место, например, в конической (сходящейся или расходящейся) трубе, второе — хотя бы в цилиндрической трубе в начальных ее сечениях.

## § 20. Начало непрерывности.

Представим себе элемент  $ABCD$  потока, находящегося в установившемся движении, ограниченный двумя живыми сечениями I и II и боковой поверхностью  $ABCD$  (фиг. 29).

Поверхность эта может быть либо жесткой стенкой (например стенка трубы), либо свободной поверхностью раздела двух разнородных жидкостей (струя в воздухе), наконец, просто некоторой мысленной поверхностью, проведенной в среде жидкости.

Важно лишь, чтобы она „обертывала“ известную совокупность струй, т. е. чтобы поверхность эта была всюду касательна к струям. Заметим еще, что в силу определения „установившегося“ движения поверхность эта остается неизменной.

В промежуток времени  $\Delta t$  объем жидкости, вошедший через сечение I в рассматриваемый отсек, равен

$$\omega_1 u_1 \Delta t,$$

объем, вытекший через сечение II,

$$\omega_2 u_2 \Delta t.$$

В силу несжимаемости жидкости разность

$$\omega_1 u_1 \Delta t - \omega_2 u_2 \Delta t = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

Таким образом, в установившемся движении

$$\omega_1 u_1 = \omega_2 u_2 = Q; \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{u_2}{u_1}, \quad \dots \dots \dots (18)$$

т. е. расход через любое сечение потока или струи постоянен и скорости обратно пропорциональны площадям сечений.

Уравнение (18) представляет собой одно из наиболее важных соотношений гидравлики и носит название „уравнения или условия непрерывности“; оно является непосредственным следствием представления о „непрерывном заполнении и об отсутствии пустот в занимаемом жидкостью пространстве“.

В случае неустановившегося движения разность (в данный момент) втекающих и вытекающих через сечения I и II объемов жидкости должна пойти на увеличение объема отсека, т. е. при постоянной его длине на раздвижение стенок. Очевидно, вместо (I), имеем

$$(\omega_1 u_1 - \omega_2 u_2) \Delta t = \Delta W \text{ или } (q_1 - q_2) \Delta t = \Delta W, \dots (*)$$

где  $\Delta W$  — увеличение объема отсека.

Переходя к сечениям бесконечно близким (на расстоянии  $\Delta S$  друг от друга), имеем в пределе

$$q_1 - q_2 = \frac{\partial q}{\partial s} ds,$$

$$\Delta W = ds \frac{\partial \omega}{\partial s} dt.$$

Таким образом, уравнение непрерывности (\*) принимает вид

$$\frac{\partial q}{\partial s} + \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0.$$

## § 21. Уравнение Бернулли.

1. Закон живых сил в установившемся движении жидкости. Одним из наиболее важных орудий гидравлики является соотношение, получаемое применением к струйке движущейся жидкости начала живых сил.

В применении к установившемуся движению тяжелой жидкости соотношение это называется обыкновенно уравнением Д а н и л а Б е р н у л л и. Выведем его пока для случая установившегося движения идеальной жидкости. Будем рассматривать элементарную струйку, определяемую осью  $S-S$  (фиг. 30); рассмотрим элементарное перемещение за промежуток времени  $\Delta t$  части струйки, заключенной между сечениями 1 и 2, из положения  $AB$  в  $A'B'$ .

Индексами 1 и 2 будем отмечать величины, относящиеся к соответственным сечениям,

Перемещения  $\Delta S_1 = AA'$  и  $\Delta S_2 = BB'$ , очевидно, соответственно равны

$$\Delta S_1 = u_1 \Delta t; \quad \Delta S_2 = u_2 \Delta t.$$

В силу начала непрерывности

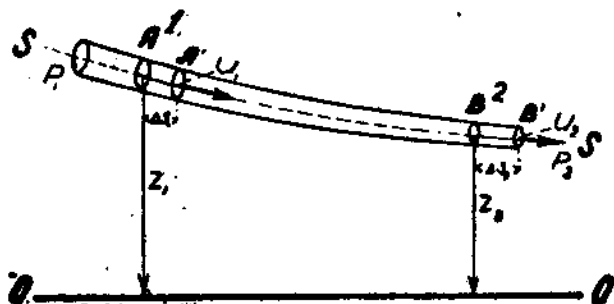
$$q = \omega_1 u_1 = \omega_2 u_2,$$

$$\frac{\Delta S_1}{\Delta S_2} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Очевидно, также равны между собою и объемы  $AA'$  и  $BB'$ :

$$q = \omega_1 u_1 \Delta t = \omega_2 u_2 \Delta t.$$

Применим теперь закон живых сил. Изменение живой силы равно лишь разности живых сил объемов  $BB'$  и  $AA'$ ,



Фиг. 30.

так как в виду установившегося движения живая сила массы, заключенной в отрезке  $A'B$ , не изменилась.

Таким образом, изменение живой силы равно

$$\frac{\gamma}{g} q \Delta t \left( \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} \right).$$

Работа сил складывается из:

1) работы сил тяжести, равной

$$\gamma q \Delta t (z_1 - z_2), \dots \dots \dots (1)$$

где  $z$  — расстояние до центров тяжести соответствующих сечений от некоторой горизонтальной плоскости  $O-O$ ;

2) работы давлений; в выражение последней, очевидно, входят лишь работы давлений в сечениях  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , так как давления на боковые стенки струйки перпендикулярны к перемещениям и, следовательно, работы их равны нулю. Тем самым работа давлений выразится

$$p_1 \omega_1 \Delta s_1 - p_2 \omega_2 \Delta s_2 = p_1 \omega_1 u_1 \Delta t - p_2 \omega_2 u_2 \Delta t = q \Delta t (p_1 - p_2).$$

Сопоставляя, получаем

$$\gamma p \Delta t \left( \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} \right) = \gamma p \Delta t (z_1 - z_2) + q \Delta t (p_1 - p_2) \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

Деля на  $\gamma q \Delta t$  и разнося члены с одинаковыми индексами в соответственные стороны, имеем

$$z^2 + \frac{p^2}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (III)$$

или, так как мы ничем не ограничивали выбора наших сечений, то

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = \text{const} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Уравнение (19) можно написать в дифференциальной форме

$$\frac{dz}{ds} + \frac{dp}{\gamma ds} + \frac{u du}{2g ds} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19^{bis})$$

Все члены левой части уравнения (19) имеют измерение длины (фиг. 31).

1)  $z$  измеряет, как выше было указано, высоту точки А над горизонтальной плоскостью  $O-O$ ;

2)  $\frac{p}{\gamma} = h_p$  есть величина пьезометрического давления, она измеряет высоту столба жидкости в пьезометре  $h$ ;

3) величина  $\frac{u^2}{2g}$  есть некоторая высота  $h_u$ , падая с которой в среде, лишенной сопротивления, тело приобретает скорость  $u$ . Величину  $h_u = \frac{u^2}{2g}$  будем называть *скоростным напором*.



3) удельная кинетическая энергия, чему соответствует высота  $h_u = \frac{u^2}{2g}$ .

Выше, в отделе о простых гидравлических машинах, мы указали, что энергию, заключенную в некотором объеме жидкости, можно измерять произведением веса жидкости на некоторую высоту, которую мы назвали напором (см. стр. 48).

В рассматриваемом случае напор, измеряющий величину удельной потенциальной энергии, равен, очевидно,

$$z + \frac{p}{\gamma};$$

напор, соответствующий удельной кинетической энергии,

$$h_u = \frac{u^2}{2g}.$$

Следовательно, и постоянная в уравнении (19) есть тоже напор  $H$ , измеряющий полную удельную энергию, т. е. полную энергию, заключающуюся в единице веса, протекающей через струйку жидкости.

3. Напорная плоскость. Уравнение (19)  $H = \text{const}$  определяет положение некоторой горизонтальной плоскости  $N-N$ , которую называют обычно *напорной плоскостью*.

Ясно, что плоскость  $O-O$  мы можем вообще назначать как угодно. Ее можно даже совершенно не назначать; для характеристики движения достаточно лишь знать плоскость напора  $N-N$ .

4. Пьезометрическая линия. Отметим еще следующее. Если вдоль струи установить, подобно точке  $A$ , ряд пьезометрических трубок, уровни жидкости в них расположатся по линии  $a-b$ . Ординаты линии  $a-b$ , которую мы будем называть пьезометрической линией, или линией пьезометрических высот, относительно плоскости  $O-O$  равны

$$z + \frac{p}{\gamma}.$$

Очевидно, линия эта служит мерилom потенциальной удельной энергии, заключенной в жидкости, относительно любой плоскости  $O-O$ .

Заметим также, что если мы изменим положение трубки  $S-S$  (скажем, в  $S'-S'$ ), но так, чтобы общее содержание энергии, определяемое некоторыми начальными условиями, а также скорости в трубке не изменились, то пьезометрическая линия  $a-b$  остается без изменения. Линия пьезометрических высот не изменится также, если мы изменим положение плоскости  $O-O$ . Мы тем самым лишь перенесем плоскость сравнения  $O-O$  и соответственно увеличим или уменьшим меру потенциальной энергии.

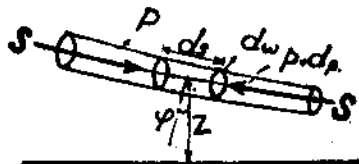
Уравнение Бернулли. Уравнение (19) играет огромную роль в гидравлике. Оно дает возможность по двум известным элементам движения струйки (скажем,  $z$  и  $u$ ) определить третий ( $p$ ) и т. д.

Уравнение называется именем Даниила Бернулли по той причине, что последний в своем знаменитом сочинении „Hydrodynamica“ (Strasburg, 1738), положившем собственно основу современной гидравлике, впервые применил закон живых сил к решению гидравлических вопросов и в частности решил, пользуясь им, основной вопрос о нахождении величины давления внутри движущейся жидкости. В форме (19), однако, уравнение у самого Бернулли не встречается; эту „классическую“ форму придал уравнению Эйлер (Hist. de l'Ac. de Berèion, 1755).

## § 22. Вывод уравнения Бернулли из основного уравнения движения жидкости.

Значение уравнения Бернулли в гидравлике заставляет нас привести вывод его и другим путем, а именно непосредственно из основного уравнения движения, подобно тому как, вообще говоря, закон живых сил выводится из основных уравнений динамики.

Составим уравнения движения для элемента струйки длиной  $ds$  (фиг. 32)



Фиг. 32.

$$\text{Масса элемента } m = \frac{\gamma}{g} d\omega ds.$$

Действующие в направлении оси  $S-S$  силы:

а) составляющая силы тяжести  $\gamma d\omega ds \sin \varphi$ ,

б) разность давлений на сечения  $d\omega$  [ $p - (p + dp)$ ].  
Принимая во внимание, что

$$\sin \varphi = -\frac{dz}{ds},$$

получаем

$$d\omega ds \gamma \frac{du}{g dt} = -d\omega ds \gamma \frac{dz}{ds} - d\omega dp \dots \dots \dots (*)$$

Так как в случае установившегося движения

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = u \frac{du}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \frac{u^2}{2} \right)$$

то уравнение (\*) превращается по разделении на  $\gamma d\omega$

$$d\left(\frac{u^2}{2g}\right) + dz + \frac{dp}{\gamma} = 0$$

или

$$\frac{u^2}{2g} + z + \frac{p}{\gamma} = \text{const.}$$

## § 23. Примеры на уравнение Бернулли.

Для иллюстрации уравнения Бернулли приведем несколько примеров.

1. Движение в цилиндрической трубке  $A-B$  (фиг. 33). Так как скорость всюду одинакова, то, очевидно,  $z + h_p$  также всюду одинаково. Таким образом, при движении идеальной жидкости по цилиндрической трубке пьезометрическая линия  $P-P$  горизонтальна.

2. Схема водомера Вентури. Цилиндрические трубы  $A$  и  $B$  (фиг. 34) одинакового диаметра соединяются особою вставкою  $K-K$ , сперва конически сходящейся, затем расходящейся; называя сечения трубы в  $A$  и  $C$  через  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , обозначая  $k = \frac{u_1}{u_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$  и расход воды  $-Q$ , имеем в силу (19)

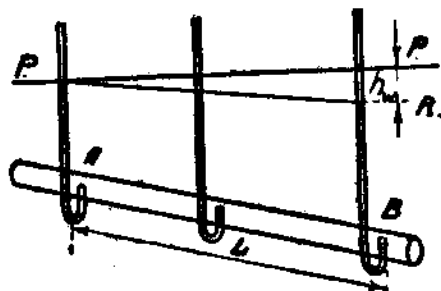
$$h_{p_1} + \frac{u_1^2}{2g} = h_{p_2} + \frac{u_2^2}{2g},$$

$$h_{p_1} - h_{p_2} = z = \frac{u_2^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g} = \frac{Q^2}{2g\omega_1^2} \left( \frac{u_2^2}{u_1^2} - 1 \right) = Q^2 \frac{k^2 - 1}{2g\omega_1^2},$$

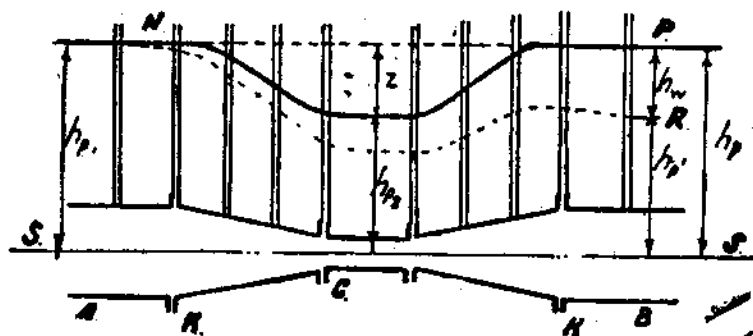
откуда в свою очередь

$$Q = \omega_1 \sqrt{\frac{2qz}{k^2 - 1}} \dots \dots \dots (A)$$

Таким образом, зная сечение трубы и коэффициент сужения горловины  $k$ , можно по соотношению (A) определить расход жидкости по разности пьезометрических давлений  $z$ . На этом основан так называемый водомер <sup>1)</sup> Вентури, изобретенный в 1881 г. американским инженером К. Гершелем. Водомер этот нашел очень широкое применение особенно там, где идет дело об измерении значительных количеств протекающей воды и где, в силу именно последних обстоятельств, неудобно применять различные другие водомеры со сложными движущимися частями, передачами к регистрационным механизмам и пр.



Фиг. 33.

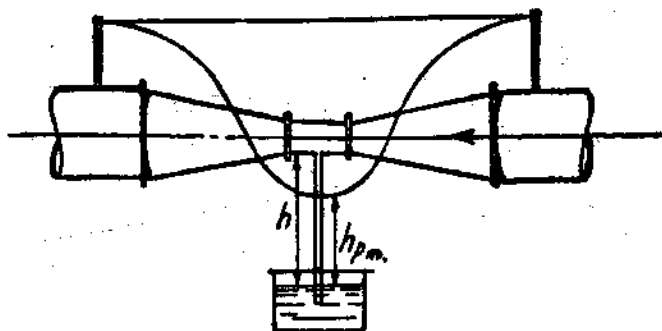


Фиг. 34.

В силу закона непрерывности скорость в суженных сечениях увеличивается, вместе с тем падает в силу

<sup>1)</sup> Водомерами в практике водоснабжения называются приборы, служащие для определения и регистрации количества воды, протекающей через трубы.

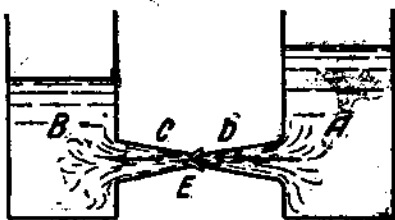
уравнения (19) давление. В конически сходящейся части происходит превращение потенциальной энергии в кинетическую, в расходящейся части обратно — кинетическая энергия вновь восстанавливается в потенциальную. Пьезометрическая линия  $P-P$  приобретает вид начерченной кривой, притом, очевидно, для идеальной жидкости, движу-



Фиг. 35.

щейся без потери энергии, пьезометрические высоты  $h_p$  и  $h_{pm}$  в одинаковых трубах  $A$  и  $B$  одинаковы.

При значительном сужении трубы давление в  $C$  может стать ниже атмосферного; в таком случае (фиг. 35) в пьезометрической трубке  $p$ , опущенной в сосуд с жидкостью, последняя будет подниматься по трубке, и высота столба  $h_{pm}$  будет измерять величину вакуума или недостатка давления в  $C$  до атмосферного. При соответственном соотношении величин вакуума и высоты  $h$  жидкость из сосуда будет всасываться и непрерывно посту-



Фиг. 36.

пать в горловину  $C$ ; на этом основан принцип устройства так называемых водоструйных насосов, инжекторов и пр.

Рейнольдс, увеличивая степень сужения горловины, достиг того, что вода в ней, благодаря сильному разрежению, кипела при обыкновенной температуре.

Крайне интересен также опыт Фруда (Froude), в котором вода переливается из сосуда  $A$  в сосуд  $B$  (фиг. 36) по системе

конических сходящихся и расходящихся труб  $C$  и  $D$ ; сперва сосуды эти устанавливаются так, что отверстия труб соприкасаются, впоследствии сосуды можно раздвинуть, но это не нарушает явления, и струя частью проходит по воздуху.

## § 24. Учет сопротивлений движению жидкости.

Поставим теперь общий вопрос о том, как изменится уравнение Бернулли (19), если применить его к вязкой жидкости, при движении которой имеют место сопротивления.

Не входя пока еще совершенно в природу сопротивлений ни в их количественную оценку, заметим лишь, что всякие сопротивления проявляются во всех случаях в том, что благодаря им при движении происходит рассеяние энергии, производится некоторая необратимая работа.

Вернемся к фиг. 30 и предположим, что при перемещении элемента  $Q\Delta t$  из положения  $AB$  в  $A'B'$  силы сопротивления произвели некоторую работу  $R_w$ . Работа, как мы выше видели, может вообще выражаться произведением веса соответственного объема жидкости на некоторый напор.

Для объема жидкости  $Q\Delta t$ , протекающего через любое сечение трубки (фиг. 31) в течение элемента времени  $\Delta t$ , для которого вообще составлено уравнение (II), работа сил сопротивления на участке  $A-B$  может быть выражена через

$$R_w = \gamma Q \Delta t h_w, \dots \dots \dots (B)$$

где  $h_w$  — некоторый, соответствующий работе  $R_w$  напор.

Работа  $R_w$  должна быть вычтена из работы сил тяжести и давлений в правой части уравнения (II). Таким образом, вместо уравнения (III), получим

$$z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} - h_w, \dots \dots (20)$$

и, называя полные напоры  $A$  и  $B$  через  $H_1$  и  $H_2$ , имеем

$$H_1 - H_2 = h_w.$$

В дифференциальной форме уравнение (20) получит вид

$$\frac{dz}{ds} + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{dp}{ds} + \frac{d}{ds} \left( \frac{u^2}{2g} \right) = - \frac{dh_w}{ds}$$

или, называя  $E$  величину удельной энергии,

$$\frac{dE}{ds} = - \frac{dh_w}{ds} \dots \dots \dots (C)$$

Величина  $\frac{dh_w}{ds}$  равна, очевидно, уклону напорной линии  $l_H$  в данном сечении

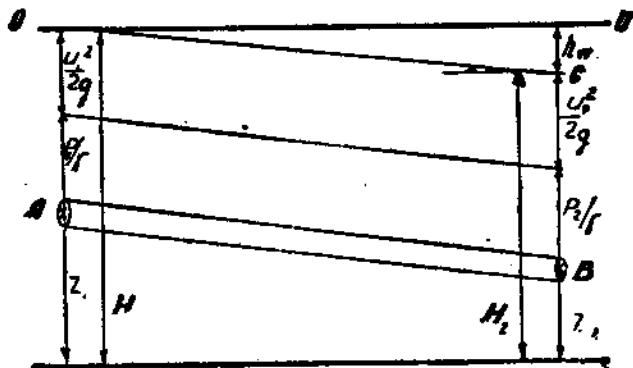
$$\frac{dE}{ds} = - \frac{dh_w}{ds} = - l_H \dots \dots \dots (C')$$

Таким образом, происходящее, благодаря наличию сопротивления, рассеяние энергии выражается в *потере напора*.

Сумма

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}$$

уже не будет оставаться постоянной и не будет изображать „напорную плоскость“ ( $O-O$ ) (фиг. 37), а будет вдоль те-



Фиг. 37.

чения уменьшаться и соответствовать некоторой кривой  $O-C$ , отклонение которой от прямой  $O-O$  в точке  $B$  измеряет потерю напора на участке  $AB$ .

Подобно тому как все члены уравнения (19) изображают меру соответственных „удельных энергий“, так и величина  $h_w$  служит мерилom энергии, потерянной единицей веса жидкости на определенном участке трубы.

Помножая  $h_w$  на  $\gamma Q$  (вес жидкости, протекающей через любое сечение в единицу времени), получаем *работу* сил сопротивления в единицу времени, т. е. *мощность* сил сопротивления на определенном участке.

В частности при движении вязкой жидкости по цилиндрической трубке (фиг. 33) пьезометрическая линия, вместо того, чтобы быть горизонтальной, делается наклонной ( $P-R$ ).

Действительно, благодаря цилиндричности трубы, потеря напора одинакова для участков трубы одинаковой длины, и, следовательно, просто пропорциональна длине трубы, в силу чего пьезометрическая линия — прямая.

Уклон этой линии  $i_p$  называется *пьезометрическим уклоном*; для равномерного движения потеря на некотором участке длины  $L$ <sup>1)</sup>

$$h_w = L \sin \alpha \ i_p L.$$

Величина  $i_p = \sin \alpha$  определяет работу сопротивлений, отнесенную к единице веса жидкости, на единице длины.

Величина  $\gamma i_p Q$  есть, очевидно, мощность сил сопротивления на единице длины.

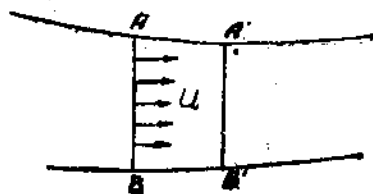
На фиг. 34 линия  $NR$  также изображает действительную пьезометрическую линию, причем разность ординат идеальной ( $NP$ ) и действительной ( $NR$ ) линий измеряет потерю напора на участке от  $N$  до соответственной точки.

## § 25. Уравнение Бернулли для целого потока.

1. Гипотеза плоских сечений. В предыдущем мы вывели уравнение (19) лишь для отдельной элементарной струйки. Между тем, при решении практических вопросов о движении жидкостей нам обычно приходится иметь дело с потоками конечных размеров.

<sup>1)</sup> Для случая равномерного движения (так как  $\frac{d}{ds} \left( \frac{u^2}{2g} \right) = 0$ ), очевидно,  $i_p = i$ , т. е. пьезометрический уклон равен величине с уклоном напорной линии, таким образом (см. С')  $\frac{dE}{ds} = -i_p$

Для решения подобных вопросов Бернулли и Даламбер пользовались так называемой моделью „плоских сечений“, другими словами, действительное движение жидкости они заменили фиктивным, у которого (фиг. 38) все частицы в некотором сечении  $AB$  имеют одинаковые скорости, равные „средней скорости“



Фиг. 38.

$$v = \frac{Q}{\omega}.$$

Тем самым все точки данного сечения перемещаются одинаково, и сечение  $AB$  переходит в  $A'B'$ , сохраняя плоский вид.

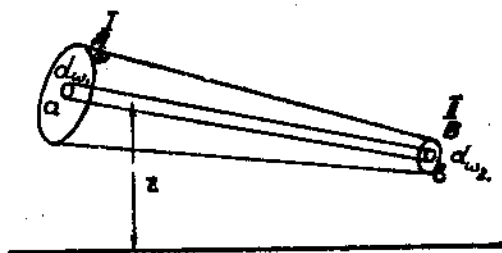
И до настоящего времени во многих курсах сохраняется эта модель плоских сечений. На самом же деле она вовсе не нужна. Как показал Кориолис (1836), в некоторых частных случаях уравнение живых сил, примененное к целому потоку, непосредственно приводит к выражению, подобному (19). Там же, где такое приведение не может быть сделано, не может ничего дать, как мы увидим ниже, и гипотеза плоских сечений.

2. Уравнение Бернулли для элементарной струйки реальной

жидкости. Рассмотрим поток конечных размеров  $AB$ , находящийся в установившемся движении (фиг. 39). Для отдельной его струйки  $a-b$  с сечениями (в  $A$  и  $B$ )  $d\omega_1$ ,  $d\omega_2$  мы составили уравнение живых сил в форме (II); добавляя к нему, зависящий от потерь, и сокращая на  $\Delta t$ , получим

$$\gamma q \frac{u_2^2}{2g} + \gamma q \left( z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) = \gamma q \frac{u_1^2}{2g} + \gamma q \left( z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - R_{\omega}.$$

Мы можем составить подобные выражения для всех отдельных струек и сложить их; тем самым получим уравнение живых сил для всего потока.



Фиг. 39.

Произведем подобную операцию почленно.

3. Коэффициенты:  $\alpha$  Кориолиса и  $\alpha_0$  Буссинеска. Выражения

$$\int_{\omega_1} \gamma q \frac{u_1^2}{2g} \text{ и } \int_{\omega_2} \gamma q \frac{u_2^2}{2g}$$

представляют, очевидно, собою величины живой силы всей массы жидкости, протекающей в единицу времени через сечения I и II. Выражения эти, принимая во внимание, что  $q = u d\omega$ , преобразовываются следующим образом:

$$\int_{\omega} \gamma q \frac{u^2}{2g} = \frac{\gamma}{2g} \int_{\omega} u^3 d\omega = \frac{2g}{\gamma} \alpha v^3 \omega = \alpha \frac{\gamma v^2}{2g} v \cdot \omega = \alpha \gamma Q \frac{v^2}{2g}, \quad (21)$$

где  $\omega$  — площадь всего сечения;  $v$  — средняя скорость по сечению, а  $\alpha$  — численный коэффициент

$$\alpha = \frac{\int u^3 q d\omega}{v^3 \omega}, \quad \dots \dots \dots (22)$$

измеряющий, как видно из сопоставления первого и последнего члена выражения (21), отношение действительной живой силы, заключающейся в массе жидкости, протекающей через данное сечение в единицу времени, к живой силе, которая имела бы место при том же расходе

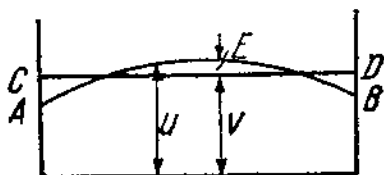
$$Q = \int u d\omega = v \omega,$$

если бы все частицы в сечении обладали одинаковыми скоростями, равными средней.

Таким образом, уравнение (21) дает возможность выражать изменение живой силы в сечениях I и II через изменение средних скоростей, т. е.

$$\int_{\omega_2} \gamma q \frac{u_2^2}{2g} d\omega - \int_{\omega_1} \gamma q \frac{u_1^2}{2g} d\omega = \gamma Q \left( \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} - \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} \right).$$

Как легко показать, величина  $\alpha$  всегда больше единицы. Пусть, действительно (фиг. 40), кривая  $AB$  изображает



Фиг. 40.

истинное распределение скоростей по сечению, прямая же  $CD$  соответствует средней скорости

$$v = \frac{\int_{\omega} u d\omega}{\int_{\omega} d\omega} = \frac{\int_{\omega} u d\omega}{\omega}.$$

Назовем  $\varepsilon$  переменную величину (положительную или отрицательную), изображающую разность между действительными скоростями и средней. По определению

$$u = v \pm \varepsilon \dots \dots \dots (\alpha)$$

$$v = \frac{\int_{\omega} u d\omega}{\int_{\omega} d\omega} = \frac{\int_{\omega} v \cdot d\omega}{\omega} \pm \frac{\int_{\omega} \varepsilon d\omega}{\omega} = v \pm \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \varepsilon d\omega,$$

следовательно,

$$\int_{\omega} \varepsilon d\omega = 0 \dots \dots \dots (\beta)$$

Составим теперь еще выражение количества движения, заключенного в протекающей через данное сечение в единицу времени массе жидкости.

Количество движения, соответствующее элементарному расходу,

$$\frac{\gamma}{g} qu = \frac{\gamma}{g} u^2 d\omega.$$

Полное количество движения, очевидно,

$$K. Д. = \frac{\gamma}{g} \int_{\omega} u^2 d\omega,$$

подобно тому, как полная живая сила Ж. С. (21)

$$Ж. С. = \frac{\gamma}{g} \int_{\omega} \frac{u^2 d\omega}{2}.$$

Выразим теперь количество движения в живую силу через среднюю скорость.

В силу (α)

$$u^2 = (v \pm e)^2 = v^2 \pm 2ve + e^2,$$

$$u^3 = (v \pm e)^3 = v^3 \pm 3v^2e + 3ve^2 \pm e^3,$$

$$K. D. = \frac{\gamma}{g} \int_{\omega} u^2 d\omega = \frac{\gamma}{g} \left[ v^2 \int_{\omega} d\omega + 2v \int_{\omega} e d\omega + \int_{\omega} e^2 d\omega \right]$$

или, принимая во внимание (β),

$$\frac{\gamma}{g} \int_{\omega} u^2 d\omega = \frac{\gamma}{g} v^2 \omega \left( 1 + \frac{\int_{\omega} e^2 d\omega}{v^2 \omega} \right) = \frac{\gamma}{g} v^2 \omega (1 + \eta), \quad \dots (7)$$

где

$$\eta = \frac{\int_{\omega} e^2 d\omega}{v^2 \omega} \dots \dots \dots (8)$$

Величина  $\eta$ , очевидно, всегда положительная.

Выражение (γ), подобно (21), служит для выражения действительного количества движения через количество движения, соответствующее средней скорости  $\frac{\gamma}{g} Qv = \frac{\gamma}{g} \omega v^2$ .

Подобно (22), выведем определение

$$\alpha_0 = 1 + \eta = \frac{\frac{\gamma}{g} \int_{\omega} u^2 d\omega}{\frac{\gamma}{g} v^2 \omega} = \frac{\frac{\gamma}{g} \int_{\omega} u^2 d\omega}{\frac{\gamma}{g} Qv}.$$

Составим теперь выражение живой силы

$$Ж. С. = \frac{\gamma}{2g} \left[ v^3 \int_{\omega} d\omega \pm 3v^2 \int_{\omega} e d\omega + 3v \int_{\omega} e^2 d\omega \pm \int_{\omega} e^3 d\omega \right]$$

или, принимая во внимание (β) и (δ),

$$Ж. С. = \frac{\gamma}{2g} v^3 \omega \left[ 1 + 3\eta \pm \frac{\int_{\omega} e^3 d\omega}{v^3 \omega} \right] \dots \dots \dots (9)$$

Величины  $\frac{e^3}{v^3 \omega}$  малы по сравнению с единицей: в сумму притом они входят с разными знаками. Потому третьим из выражений, стоящих в (9) в скобках, можно пренебречь.

Таким образом, получим

$$\text{Ж. С.} = \frac{\gamma}{2g} v^3 \omega (1 + 3\eta).$$

Сопоставляя с (21) и (22), имеем

$$\alpha = 1 + 3\eta.$$

Таким образом, мы видим, что как живая сила, так и количество движения могут выразиться через среднюю скорость; для этого надо лишь знать величину

$$\eta = \frac{\int z^2 d\omega}{v^2 \omega}.$$

Величина эта, очевидно, изменяется в зависимости от различного распределения скоростей. Для установившегося равномерного движения в каналах и трубах  $\eta$  можно в среднем полагать равным  $\eta = 0,033$  и соответственно  $\alpha = \sim 1,10^{(1)}$ .

4. Потенциальная энергия для целого потока; медленно изменяющееся движение.

Перейдем теперь к составлению выражения суммы членов, выражающих потенциальную энергию потока,

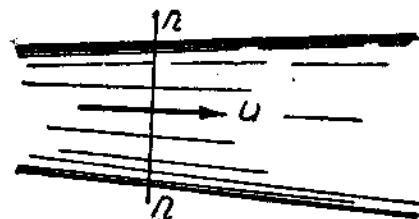
$$\gamma \int_{\omega} q \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) \dots \dots \dots (23)$$

Для этого, очевидно, необходимо прежде всего знать распределение давления по сечению; в одном частном случае это делается без всякого труда, именно — в случае

так называемого „медленно изменяющегося движения“.

Предположим течение (фиг. 41), удовлетворяющее следующим условиям:

1. Линии тока представляются почти прямыми, так что кривизна их бесконечно мала.



Фиг. 41.

2. Живые сечения изменяются вдоль потока весьма медленно, так что угол таких струй (расхождение их)

<sup>1)</sup> Более подробно вопрос об  $\alpha$  мы рассмотрим во II части курса.

весьма мал, благодаря чему является возможность пренебрегать составляющими скоростей и ускорений в плоскости живых сечений, т. е. считать, что скорости и ускорения перпендикулярны к живым сечениям. Такое движение (весьма близкое к параллельно струйному) будем называть „медленно изменяющимся“ (*lentement variable; graduellement varié*). Этот частный случай имеет огромное значение; он является почти единственно рассматриваемым при современном развитии науки в целом ряде отделов гидравлики.

Для этого случая, между прочим, нетрудно показать, что распределение давлений в живых сечениях следует гидростатическому закону, т. е. такое же точно, какое имело бы место, если бы жидкость была неподвижной.

Это легко доказывается на основании самых общих положений динамики системы.

Действительно, в любой системе материальных точек мы можем рассматривать каждую из этих точек, как свободную, и составить для нее уравнение движения, как для свободной материальной точки, прибавляя к действующим на данную точку силам еще так называемые силы связи.

Вводя, кроме того, в случае движения, согласно принципу Даламбера, силы инерции и тем самым сводя случай движения к случаю равновесия, получаем систему уравнений для какой-либо точки в каком-либо направлении.

Для случая равновесия

$$S_i + S'_i = 0,$$

Для случая движения

$$S_i + S'_i - m_i s''_i = 0,$$

где  $S_i$  и  $S'_i$  — проекция на направление  $z$  равнодействующих внешних сил и сил связей, действующих на точку  $i$ , а  $s''_i$  — ее ускорение в направлении  $z$ . Для всей системы получим:

$$\sum_{i=0}^{i=n} (S_i + S'_i) = 0; \quad \sum_{i=0}^{i=n} (S_i + S'_i - m_i s''_i) = 0 \quad \dots (*)$$

Из уравнений (\*) непосредственно следует, что если для какой-либо точки в каком-либо направлении ускорения, а вместе с ним и силы инерции отсутствуют, то силы связи в этом направлении в случае движения одинаковы с силами связей в случае равновесия. В жидкости силами связи является давление между частицами. Для медленно

изменяющегося движения в плоскости живого сечения, согласно определению, ускорения равны 0, следовательно, распределение сил связей (в данном случае давлений) по сечению ничем не отличается от случая равновесия, т. е. следует гидростатическому закону.

Очевидно (фиг. 42), что во всех точках живого сечения пьезометрическая высота  $z + \frac{p}{\gamma}$  будет одинакова, и, что, следовательно, безразлично, в какой точке контура представить пьезометр для измерения ее величины. Выражение (23) в этом случае, очевидно, примет вид

$$\gamma \int q \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) = \gamma Q \left( z + \frac{p}{\gamma} \right),$$

где сумма членов, стоящая в скобках, постоянна.

5. Уравнение Бернулли для целого потока реальной жидкости.

Для решения вопроса необходимо еще сложить все работы сил сопротивлений для отдельных струек.

Так как пьезометрическая высота для всех точек сечения одинакова, то должна быть одинакова и потеря напора, т. е. каждую из элементарных работ можно представить в виде

$$R_i = \gamma q_i h_w;$$

полная работа сил сопротивления будет

$$R_w = \sum \gamma q_i h_w = \gamma Q h_w$$

Теперь, после всей этой подготовительной работы, мы наконец, можем подойти к решению поставленного вопроса. Складывая члены, получаем уравнение живых сил для всего потока в виде

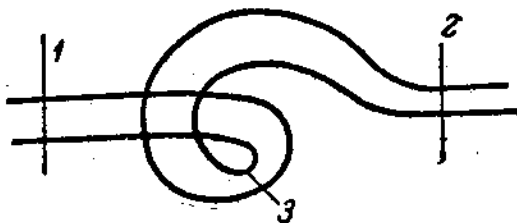
$$\gamma Q \frac{\alpha_2 v_2^2}{2\gamma} + \gamma Q \left( \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right) = \gamma Q \frac{\alpha_1 v_1^2}{2\gamma} + \gamma Q \left( \frac{p_1}{\gamma} + z_1 \right) - \gamma Q h_w$$

или по сокращении на  $\gamma Q$

$$\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 = \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 - h_w \dots (24)$$

Это и есть уравнение Бернулли для целого потока, отличающееся от (20) лишь тем, что, вместо скорости  $u$  отдельной струйки, в него входят средняя скорость по сечению  $v$ , умноженная притом на коэффициент  $\alpha$ , зависящий от распределения скоростей.

6. Условия применимости уравнения Бернулли для целого потока. Напомним еще раз, что в то время как уравнение (22) применимо к стружке всякого вида и формы, уравнение (24) мы можем применять лишь к таким двум сечениям 1 и 2, движение вблизи которых удовлетворяет условиям медленной изменяемости. На пути между этими сечениями движение может и не удовлетворять этим условиям.



Фиг. 43.

Так, на фиг. 43 уравнение (24) можно применить к сечениям 1 и 2, но отнюдь нельзя, скажем, к сечениям 1 и 3. Таким образом, уравнение (24) в общем случае может быть применено лишь к определенным, отстоящим на конечном расстоянии, сечениям.

Ему, вообще говоря, нельзя придать (подобно  $19^{bis}$ ) дифференциальную форму

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\alpha v^2}{2g} \right) + \frac{d}{ds} \left( \frac{p}{\gamma} \right) + \frac{dz}{ds} = - \frac{d}{ds} h_w \dots (24^{bis})$$

Лишь в том случае, если движение на всем пути между 1 и 2 удовлетворяет условиям медленной изменяемости, уравнение ( $24^{bis}$ ) может быть применено на всем протяжении. В этом случае снова (как в  $C'$ ),

$$\frac{dE}{ds} = \frac{dH}{ds} = - \frac{dh_w}{ds} = - i_H.$$

Отрицательная величина наклона напорной линии  $\frac{dh_w}{ds} = -I_H$  есть в этом случае мера рассеяния удельной энергии для всего потока в целом.

7. Основное уравнение неравномерного медленно изменяющегося движения. Принимая еще во внимание, что

$$-\frac{d}{ds}\left(\frac{p}{\gamma} + z\right) = i_p,$$

где  $i_p$  — пьезометрический уклон, имеем

$$i_p = \frac{d}{ds}\left(\frac{av^2}{2g}\right) + \frac{d}{ds}(h_w) \dots \dots \dots (25)$$

Уравнение (25) есть *основное уравнение неравномерного, медленно изменяющегося движения*; в случае открытого русла линия пьезометрических высот есть линия свободной поверхности; таким образом

$$i_p = i,$$

т. е. пьезометрический уклон есть уклон свободной поверхности водотока.

## § 26. Основное уравнение неустановившегося одномерного движения жидкости.

Рассмотрим теперь еще, как видоизменяется уравнение Бернулли для случая неустановившегося, переменного по времени, движения. При этом ограничимся рассмотрением движения потока, заключенного в неизменяющиеся (жесткие) стенки; в этом случае величина живых сечений не изменяется по времени; поэтому в каждый данный момент через все сечения протекает одинаковый расход  $Q$ .

Начало непрерывности дает для каждого сечения

$$v = \frac{Q}{\omega}; \quad \frac{dv}{dt} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{dQ}{dt}.$$

Кроме времени, средняя скорость зависит лишь от площади живого сечения, т. е. *от одной координаты*  $z$  фиг. 44.

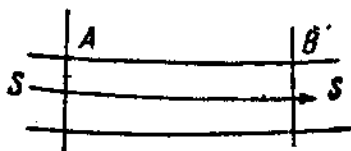
В силу этого такое движение можно назвать *одномерным*. Полная производная от скорости по времени

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s} \frac{ds}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s},$$

Будем предполагать, что благодаря жесткой стенке не изменяется по времени не только конфигурация всего потока в целом, но также вид и размеры отдельных струек.

Рассмотрим перемещение за промежуток времени  $\Delta t$  элементарной струйки (фиг. 30, стр. 57) из положения  $AB$  в положение  $A'B'$  и применим закон живых сил на этом перемещении, предполагая движение неустановившимся.

Для составления полного изменения живой силы отсека к выражению (21) надо будет теперь прибавить член, выражающий изменение по времени (за промежуток  $\Delta t$ ) живой силы, заключенной в отсеке  $AB$ . Живая сила, заключенная в отсеке  $AB$ , равна, очевидно,



Фиг. 44.

$$\text{Ж.С.} = \int_1^2 \frac{\gamma}{g} \omega ds \frac{u^2}{2} = \frac{\gamma}{2g} \int_1^2 \frac{q^2}{\omega} ds = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{q^2}{2} \int_1^2 \frac{ds}{\omega}.$$

Изменение живой силы за элемент времени  $\Delta t$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{q^2}{2} \int_1^2 \frac{ds}{\omega} \right) \Delta t = \left( \frac{\gamma}{g} \cdot q \frac{\partial q}{\partial t} \int_1^2 \frac{ds}{\omega} \right) \Delta t.$$

Величина  $\int_1^2 \frac{ds}{\omega}$ , очевидно, не зависит от времени и для

данной струйки является постоянной величиной, имеющей измерение, обратное длине. Составляя снова общее выражение закона живых сил, подобно (II); добавляя выражение (B) работы сил сопротивлений, именно:

$$\gamma q \Delta t \left( \frac{u_1^2 - u_2^2}{2g} \right) + \frac{\gamma q}{g} \cdot \frac{\partial q}{\partial t} \int \frac{ds}{\omega} \Delta t = \gamma q \Delta t (z_1 - z_2) + \\ + q \Delta t (p_1 - p_2) - \gamma q \Delta t h_w;$$

деля на  $\gamma q \Delta t$ , т. е. относя к единице веса и разности членов, имеем

$$z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} - \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial q}{\partial t} \int_1^2 \frac{ds}{\omega} + h_w \dots (26)$$

Очевидно, что член  $\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial q}{\partial t} \int_1^2 \frac{ds}{\omega}$  измеряет отнесенное к единице веса протекающей жидкости изменение по времени кинетической энергии в отсеке  $A-B$ .

В дифференциальной форме уравнение (26) может быть переписано так:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{ds} + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \cdot \frac{u^2}{2g} &= -\frac{dh_w}{ds} - \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial q}{\partial t} \cdot \frac{1}{\omega} = \\ &= -\frac{dh_w}{ds} - \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \dots \dots \dots (26^{bis}) \end{aligned}$$

В случае, если движение — медленно изменяющееся, уравнение, подобно (26<sup>bis</sup>), может быть написано и для целого потока. Для этого необходимо (см. § 25), умножив все члены уравнения (26<sup>bis</sup>) на  $d\omega$ , проинтегрировать полученное выражение в пределах всего сечения и результат затем разделить на  $\omega$ .

Произведя подобную операцию над последним членом, получаем

$$\frac{1}{\omega} \left[ \frac{1}{g} \int \frac{\partial u}{\partial t} d\omega \right] = \frac{1}{\omega g} \int \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{1}{\omega g} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Для других членов переход от отдельной струйки ко всему сечению уже рассмотрен в § 25.

Таким образом, вместо уравнения (24<sup>bis</sup>) получаем для медленно изменяющегося неустановившегося движения

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\alpha v^2}{2g} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{p}{\gamma} \right) + \frac{dz}{ds} = -\frac{d}{ds} h_w - \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial t},$$

вместо (24),

$$\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 = \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 - h_w - \frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds;$$

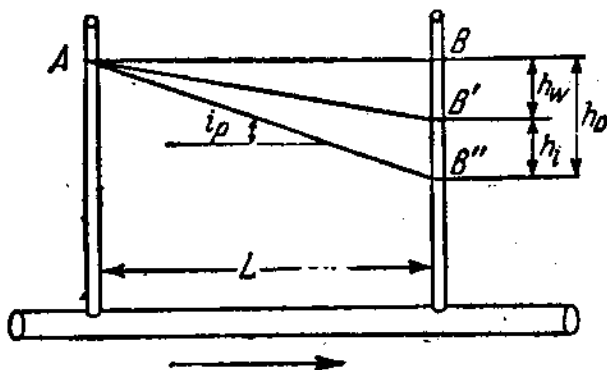
при этом последний член может быть переписан в виде

$$\frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds = \frac{1}{g} \frac{\partial Q}{\partial t} \int_1^2 \frac{ds}{\omega}.$$

Вместо уравнения (25), получим

$$i_p = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\alpha v^2}{2g} \right) + \frac{\partial}{\partial s} h_w + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Уравнение (26) представляет основное уравнение неустановившегося медленно изменяющегося одномерного движения жидкости.



Фиг. 45.

**Пример.** Рассмотрим движение в прямой цилиндрической трубке длины  $L$  (фиг. 45). В этом случае, очевидно,

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\alpha v^2}{2g} \right) = 0; \quad \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} \int_1^2 \frac{ds}{\omega} = \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} \cdot \frac{L}{\omega} = \frac{L}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Таким образом, принимая во внимание, что для цилиндрической трубы, кроме того,  $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dv}{dt}$ , полное падение напора  $h_p$

$$h_p = h_w + \frac{L}{g} \frac{dv}{dt} = h_w + h_i.$$

Мы видим, следовательно, что для медленно изменяющегося движения общие соотношения, выражающие связь между скоростью и пьезометрической высотой в данном сечении, имеют сравнительно простое выражение.

В случаях, когда движение *не медленно изменяющееся*, не удастся обойтись столь простыми средствами. Правда, уравнение Бернулли и здесь справедливо для отдельной струйки, но пьезометрическая высота уже не одинакова по всему сечению и, следовательно, чтобы применить уравнение, надо знать сначала распределение давлений, либо скоростей по всему сечению.

Таким образом, здесь приходится вернуться к основной и самой общей задаче механики жидкого тела, а именно, к вопросу о нахождении всех обстоятельств движения (полной картины распределения давления и скоростей) потока жидкости от данной системы его сил.

Решение этой задачи составляет предмет гидродинамики. Изложение последней, вообще говоря, не входит в задачи настоящего курса.

Мы ограничимся поэтому здесь лишь самым кратким изложением ее основ, без которых было бы затруднительно понимание некоторых вопросов в последующем.

---

## ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

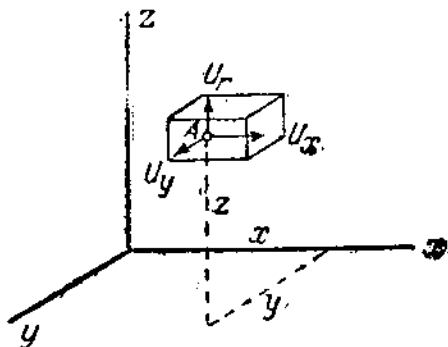
### ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ.

#### § 27. Гидродинамические уравнения Эйлера.

Общие уравнения движения идеальной жидкости получаются из общих уравнений равновесия (3) добавлением к действующим силам сил инерции. На фиг. 46 скорость в точке  $A$  обозначим  $u$  и проекции ее на координатные оси обозначим соответственно  $u_x, u_y, u_z$ .

Тогда составляющие сил инерции по координатным осям, действующих на массу, заключенную в элементарном параллелепипеде, условия равновесия которого мы рассмотрели в § 8, будут равны соответственно

$$\left. \begin{aligned} -\rho dx dy dz \frac{du_x}{dt} \\ -\rho dx dy dz \frac{du_y}{dt} \\ -\rho dx dy dz \frac{du_z}{dt} \end{aligned} \right\} \dots (a)$$



Фиг. 46.

Прибавляя эти выражения к уравнениям (3) и сокращая на  $dx dy dz$ , получаем, вместо системы уравнений (3), систему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} &= q_x - \frac{du_x}{dt} \\ \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} &= q_y - \frac{du_y}{dt} \\ \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} &= q_z - \frac{du_z}{dt} \end{aligned} \right\} \dots (27)$$

Величины  $\frac{du_x}{dt}$ ;  $\frac{du_y}{dt}$ ;  $\frac{du_z}{dt}$  являются мерой полного изменения составляющих скоростей по времени.

Скорость, как было показано выше, является функцией как времени, так и координат, и потому изменение скорости  $du$  вообще выражается через

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

В силу этого

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

а так как в свою очередь

$$\frac{dx}{dt} = u_x; \quad \frac{dy}{dt} = u_y; \quad \frac{dz}{dt} = u_z,$$

то

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}.$$

Подобные же выражения могут быть составлены и для выражения полных ускорений и по другим осям. Таким образом, уравнения (27) могут быть переписаны в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} &= q_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} &= q_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= q_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (27^{bis})$$

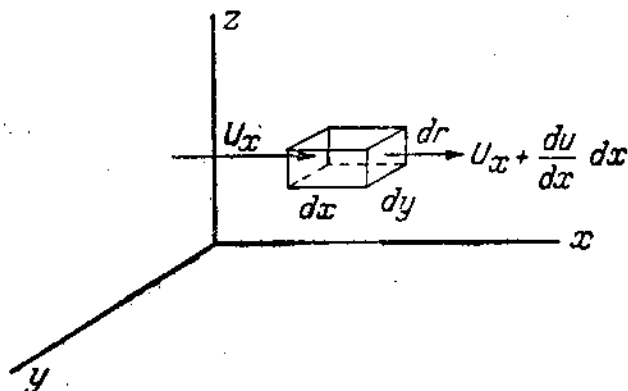
Эти уравнения даны Эйлером в 1755 году (Hist. de l'Acad. Berlin); они носят его имя и представляют самые общие уравнения движения идеальной жидкости.

## § 28. Уравнение непрерывности.

К системе уравнений (27<sup>bis</sup>) необходимо еще прибавить уравнение, выражающее состояние массы внутри рассматриваемого объема движущейся жидкости.

Уравнение это называется обыкновенно *уравнением непрерывности*, так как оно имеет целью характеризовать непрерывное распространение массы, отсутствие пустот в жидком теле.

Для капельно-жидкого тела постоянной плотности условие непрерывности формулируется в высшей степени просто. Очевидно, внутри любого постоянного замкнутого объема масса жидкости должна оставаться неизменной; количество втекающей в известный промежуток времени в такой объем жидкости равно объему жидкости, вытекающей из него за



Фиг. 47.

тот же промежуток времени. Общий поток через всю поверхность выделенного объема должен быть равен нулю.

Выделяя, в качестве рассматриваемого объема, элементарный параллелепипед (фиг. 47) со сторонами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  и составляя выражение потока через стенки, перпендикулярные к оси  $X$ , получим соответственно

$$-(dydz)u_x \text{ и } +(dydz)\left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x}dx\right),$$

причем положительным мы считаем поток, направленный из объема; отрицательным — внутрь его. Результирующий поток через рассматриваемые площадки, очевидно, равен

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} dx dy dz.$$

Подобные же выражения могут быть составлены попарно и для других площадок, перпендикулярных осям  $Y$  и  $Z$ :

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} dx dy dz$$

и

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} dx dy dz.$$

Полный поток через всю поверхность должен быть равен нулю; складывая полученные выше выражения для результирующих потока через все грани параллелепипеда и сокращая на  $dx dy dz$ , получаем

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \dots \dots \dots (28)$$

Это и есть уравнение непрерывности для жидкости.

Уравнения (27<sup>bis</sup>) и (28) заключают четыре неизвестных:  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$  и  $p$ . Их интегрирование, при данной системе сил  $q$ , должно дать значение этих величин как функций от времени и координат, т. е. дать решение поставленной основной задачи. Произвольные постоянные, входящие в интегралы, должны быть при этом определены по условиям на границах, либо по начальным условиям движения.

Однако, математика до настоящего времени еще не дала решений совокупных дифференциальных уравнений в общей форме.

Таким образом, основная задача гидродинамики не может быть решена в общей форме, благодаря отсутствию соответственного математического аппарата.

В некоторых частных случаях, однако, уравнения приводят к ряду крайне важных и полезных обобщений. К таким, например, относится случай так называемого „безвихревого“ движения, или движения с потенциалом скоростей.

## § 29. Случай „безвихревого“ движения идеальной жидкости.

1. Движение жидкости с потенциалом скоростей. Представим себе, что движение потока, находящегося под действием системы сил, имеющей потенциал,

таково, что составляющая скорости в любой точке по любому направлению  $n$  может быть выражена как частная производная по этому направлению от некоторой функции  $\Phi(x, y, z, t)$ , т. е. что

$$u \cos(u, n) = \frac{\partial \Phi}{\partial n}.$$

Очевидно, в этом случае

$$u_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad u_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad u_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad \dots \quad (a)$$

Ограничим при этом наше рассмотрение случаем установившегося движения; в этом случае  $\Phi$  является уже лишь функцией одних координат и

$$d\Phi = u_x dx + u_y dy + u_z dz \quad \dots \quad (29)$$

Движение, удовлетворяющее указанным выше условиям, называется движением с потенциалом скоростей, и функция  $\Phi$  носит название *потенциала скоростей*.

Выражение (29) есть полный дифференциал функции  $\Phi$ . При этом, как известно, имеют место следующие соотношения:

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial x}; \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial y} \quad \dots \quad (b)$$

Условия эти, впрочем, непосредственно следуют также из определения (a). Мы впоследствии укажем физический смысл соотношений (b); теперь же вернемся к общим уравнениям (27<sup>bis</sup>) и (28). Первое из них, уравнение (27<sup>bis</sup>), принимая во внимание (a), переписываем в следующем виде:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} = q_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \quad \dots \quad (c)$$

Левая часть выражения есть не что иное, как

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] &= \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Назовем через  $U$ —силовую функцию сил, действующих на поток, так что

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = q_x dx + q_y dy + q_z dz.$$

Правую часть уравнения можем выразить в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( U - \frac{p}{\rho} \right).$$

Таким образом, уравнение (с) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U \right) = 0 \dots \dots \dots (d)$$

Совершенно таким же способом второе и третье уравнения (27<sup>bis</sup>) приводятся к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (d^{bis})$$

откуда следует, что для рассматриваемого случая движения с потенциалом скоростей, вообще говоря,

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U = \text{const}$$

или, заменяя  $\rho$  через  $\frac{\gamma}{g}$  и деля на  $g$ ,

$$\frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} - \frac{U}{g} = E = \text{const} \dots \dots \dots (30)$$

Уравнение непрерывности (28) при этом получает вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0.$$

Физический смысл уравнения (30) следующий:  $\left( \frac{p}{\gamma} - \frac{U}{g} \right)^{1)}$

есть мера потенциальной,  $\frac{u^2}{2g}$  — мера кинетической энер-

<sup>1)</sup> Как известно из механики ( $-U$ ), т. е. силовая функция с обратным знаком, носит название потенциальной функции или потенциала системы сил.

гии, заключенной в единице веса жидкости; сумма этих членов, величина  $E$  — полная удельная энергия.

Уравнение (30) таким образом гласит, что при движении идеальной жидкости под действием системы сил, имеющих потенциал, „удельная“ энергия во всем потоке одинакова, т. е. имеет место равномерное распределение энергии во всем объеме движущейся жидкости.

Если применить уравнение (30) к движению тяжелой жидкости, то, направляя ось  $Z$  вертикально кверху, имеем

$$dU = -gdz; U = gz + C;$$

подставляя в уравнение (30), получаем

$$\frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = E = \text{const}, \dots \dots \dots (31)$$

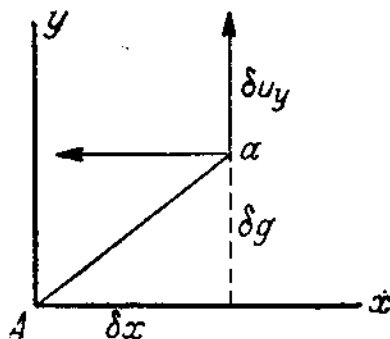
т. е. уравнение, подобное уравнению Бернулли (19) для идеальной жидкости.

Разница, однако, между этими уравнениями в том, что уравнение Бернулли применимо лишь к отдельной струйке и свидетельствует о постоянстве удельной энергии лишь в пределах той или иной струйки; зато оно применимо к установившемуся движению идеальной жидкости во всех случаях, независимо от того, имеется ли потенциал скоростей.

Наоборот, применение уравнения (31) ограничено условием (а), т. е. наличием потенциала скоростей; при этом сохраняется постоянство содержания энергии уже во всем объеме движущейся жидкости. Тем самым, если известно распределение скоростей в пределах потока, определяется само собой распределение давлений, и наоборот.

2. Понятие о вихре. Выяснить теперь физический смысл уравнений (б).

Представим себе, что вблизи точки  $A$  жидкость вращается вокруг оси  $Z$  с угловой скоростью  $\omega$ , (фиг. 48). В этом случае составляющие относительных скоростей по



Фиг. 48.

отношению к  $A$  для какой-нибудь точки  $a$  (с координатами  $\delta x$  и  $\delta y$ ) будут соответственно

$$\delta u_x = -\omega_z \delta y$$

$$\delta u_y = \omega_z \delta x,$$

откуда имеем

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\delta u_y}{\delta x} - \frac{\delta u_x}{\delta y} \right).$$

Уменьшая  $\delta x$  и  $\delta y$  и переходя к пределу, получаем, что

$$\left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = 2\omega_z; \quad \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = 2\omega_y; \quad \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = 2\omega_x, \quad (e)$$

т. е. что выражения  $\left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$  и т. д. представляют собой удвоенные угловые скорости вращения вокруг координатных осей частиц соседних точке  $A$ .

Вектор  $\omega$  — геометрическая сумма векторов  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ , отложенных по соответственным осям, изображает по величине и направлению полную угловую скорость вращения частиц вокруг точки  $A$ . Вектор этот, тем самым характеризующий вращательное движение вблизи точки  $A$ , носит название *вихря* в точке  $A$ .

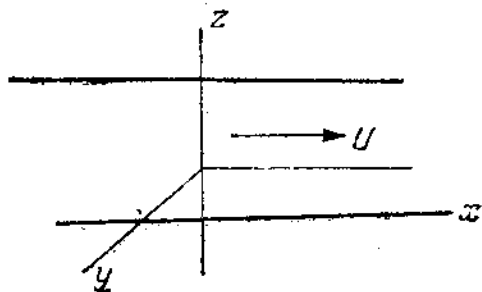
Сопоставляя условия (а) с (b), приходим к заключению, что условия (b) равносильны условию

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0 \quad \text{или} \quad \omega = 0 \dots \dots \dots (f)$$

Таким образом, условия существования потенциала скоростей в некотором потоке равносильны отсутствию в нем вихрей. Движение это потому называют также „безвихревым“. Обратно, если в потоке имеются вращения, вихри, то такое движение уже не может иметь потенциала скоростей.

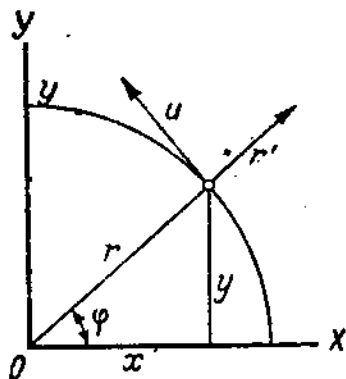
Следовательно, равномерное распределение энергии в среде движущейся идеальной жидкости будет иметь место лишь в том случае, если во всей среде жидкости не имеется вращений, вихрей; при существовании вихрей постоянство энергии будет иметь место уже лишь вдоль струй, т. е. действительных траекторий частиц.

В гидродинамике при этом доказывается (причем приво-  
димое положение распространяется и на случай неустан-  
новившегося движения), что если в какой-либо момент  
движение идеальной жидкости под действием сил, имею-  
щих потенциал, обла-  
дает потенциалом  
скоростей, то тако-  
вой сохраняется и  
впредь во все время  
движения. Другими  
словами, безвихре-  
вое движение не мо-  
жет перейти в вихре-  
вое под действием  
сил, имеющих по-  
тенциал; вихри мо-  
гут возникнуть лишь  
под действием сил,  
потенциала не имеющих, к каковым, например, принадле-  
жат силы трения.



Фиг. 49.

Обратно, раз возникший вихрь в идеальной жидкости  
не может уничтожиться и т. д.



Фиг. 50.

Мы ограничимся вышеизло-  
женным, отсылая интересующих-  
ся для дальнейшего ознакомле-  
ния с предметом к специальным  
курсам гидродинамики.

*Примеры.* Приводим несколь-  
ко простейших примеров безвихре-  
вого движения жидкости.

а) Прямолинейное, равномер-  
ное движение в цилиндрической  
трубе или канале (фиг. 49). Ось  $X$   
расположим вдоль оси трубы;  
очевидно, скорости параллельны  
оси  $X$ ; величины  $u_x$  и  $u_z$  и их  
производные по координатам по-  
всюду равны 0.

Из условий (f) по сопоставлению с (e) непосредственно  
следует, что в виду этого и  $\frac{\partial u_x}{\partial y}$  и  $\frac{\partial u_x}{\partial z}$  должны быть равны  
нулю.

Таким образом, в безвихревом движении скорости по всему сечению должны быть одинаковыми.

б) Рассмотрим еще случай установившегося плоского безвихревого движения жидкости, вращающейся вокруг оси  $Z$  (фиг. 50).

Для рассмотрения вопроса удобнее перейти к полярным координатам  $r$  и  $\varphi$ ; соответственно координаты и скорости точки выразятся через

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

$$u_x = \frac{dx}{dt} = r' \cos \varphi - r \sin \varphi \cdot \varphi', \quad \dots \dots \dots (A)$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = r' \sin \varphi + r \cos \varphi \cdot \varphi',$$

где  $r'$  — составляющая скорости по радиусу;  $r\varphi' = c$  — вращательная скорость. В частности, в рассматриваемом нами случае  $r' = 0$  и

$$u_x = -c \sin \varphi; \quad u_y = c \cos \varphi \quad \dots \dots \dots (B)$$

Так как кроме того

$$x^2 + y^2 = r^2; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x},$$

то

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \varphi; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y \cos^2 \varphi}{x^2} = -\frac{\sin \varphi}{r}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos^2 \varphi}{x} = +\frac{\cos \varphi}{r}. \quad (C)$$

Условие безвихревого движения в плоскости  $xy$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = 0$$

приобретает вид

$$\frac{\partial u_y}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial u_x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Подставляя соответственно (В) и (С), получаем

$$2\omega_z = \cos^2 \varphi \frac{\partial c}{\partial r} + \sin^2 \varphi \frac{c}{r} + \sin^2 \varphi \frac{\partial c}{\partial r} + \cos^2 \varphi \frac{c}{r} = 0$$

или

$$\frac{\partial c}{\partial r} + \frac{c}{r} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial c}{\partial r} r + c \right) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (c \cdot r) = 0,$$

откуда

$$c \cdot r = \text{const},$$

т. е. произведение из радиуса вектора и вращательной скорости есть величина постоянная.

Очевидно, скорость вблизи оси делается очень большой; давление падает; этим и объясняется стремление к образованию воронок, часто наблюдаемое на поверхности водоемов при вращательном движении жидкости.

б) При рассмотрении вопросов безвихревого движения идеальной жидкости обычно исходят из уравнения непрерывности

$$\Delta^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad \dots \quad (32)$$

Вопрос сводится к нахождению некоторой функции  $\Phi$ , удовлетворяющей уравнению (32) и данным условиям на границах.

Сравнительно много решений получено для случая плоского движения, для которого уравнение (32) приобретает вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0,$$

дифференциальное уравнение, которому, как известно, удовлетворяет любая аналитическая функция комплексного переменного. Решение задачи позволяет построить линии тока (траектории), найти величину скоростей, а следовательно, и давлений, т. е. изобразить полностью картину движения.

Полученная таким образом картина движения для идеальной жидкости в некоторых случаях близка к действительности, т. е. может служить для изображения движения вязкой жидкости.

Подобного рода случай, например, представляется всякий раз, когда действие сил вязкости не успело еще в достаточной мере проявиться и сколько-нибудь значительно видоизменить картину потенциального движения; примером может служить хотя бы явление истечения покоящейся жидкости через небольшое отверстие в тонкой стенке (см. II часть). Мы еще вернемся к этому вопросу впоследствии; теперь же перейдем к рассмотрению сопротивлений, имеющих место при движении реальной жидкости.

---

## ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ. О СОПРОТИВЛЕНИЯХ.

### § 30. Два рода движения вязкой жидкости.

1. „Струйчатое“ и „беспорядочное“ движение жидкости. Опыты Рейнольдса. Величины и свойства сопротивлений, проявляющихся в движущейся вязкой жидкости, существенно разнятся в зависимости от того, в каком состоянии находится движение: в „струйчатом“ или „беспорядочном“.

Хотя это различие в той или иной мере сознавалось гидравликами еще с начала XIX столетия, тем не менее окончательно выяснить все обстоятельства дела удалось лишь в начале восьмидесятых годов англичанину Рейнольдсу (Reynolds, Phil. Trans. Royal Society 1883, см. также Collected papers, т. II) посредством следующего необыкновенно простого и наглядного опыта <sup>1)</sup>.

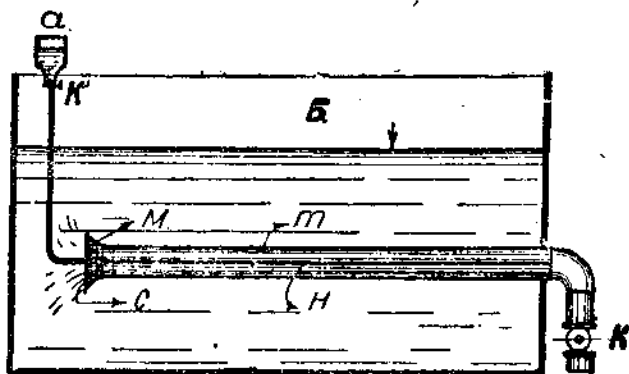
Бак со стеклянными стенками наполнен водой (фиг. 51). В баке установлена стеклянная трубка, снабженная с одной стороны бака мундштуком  $M$ , с другой — краном  $K$ , посредством которого можно регулировать вытекание воды, а тем самым и скорость воды в трубке. Над баком установим сосудик  $a$  с раствором анилиновой краски; краном  $K'$  можно регулировать приток краски в устье трубки через сопло  $C$ .

Если, постепенно открывая кран  $K$ , заставить воду вытекать через трубку  $m$  и одновременно пускать краску, то будет происходить следующее:

Сначала, когда, благодаря малому открытию крана  $K$ , скорость в трубе мала, вытекающая из сопла анилиновая краска образует внутри движущейся жидкости устойчивую несмешивающуюся с окружающею жидкостью резко очерченную окрашенную нить — „струю“ ( $H$ ).

<sup>1)</sup> Прибор Рейнольдса был воспроизведен в Ленинградском Политехническом Институте в лаборатории трения проф. В. Л. Кирпичева.

Таким образом наглядно демонстрируется существование внутри трубки „струйчатого“ движения жидкости. Если, открывая кран  $K$ , увеличивать скорость в трубке, то через некоторое время наступает момент, когда струйчатое движение внезапно изменяет свой характер. Струя анилина, до того времени тянувшаяся вдоль трубки в виде устой-



Фиг. 51.

чивой резко очерченной нити, теперь непосредственно по выходе из сопла, теряет свою резко очерченную форму, разбивается на ряд отдельных, направленных в разные стороны, крутящихся и колеблющихся, ежесекундно меняющих свой вид и направление водоворотов; благодаря этому, на

самом коротком промежутке краска перемешивается с водой, образуя равномерно окрашенную струю (фиг. 52).

Ясно, что здесь „струйчатого“ движения более не существует; наоборот, дви-

жение отдельных окрашенных частей, вблизи выхода краски из сопла, где еще можно хоть несколько следить за внутренним движением жидкости, наблюдать которое после перемешивания струй с краской делается уже невозможным, показывает, что здесь частицы двигаются то в одном, то в другом направлении, как будто без какого-либо опре-



Фиг. 52.

деленного порядка или закономерности. Этого рода движение поэтому можно назвать „беспорядочным“<sup>1)</sup>.

Описанные выше явления являются далеко не единственным примером такого „неупорядочного“ движения частиц. Так, например, в кинетической теории газов отдельные частицы газа также представляются движущимися без всякого порядка и закономерности внутри занимаемого газом объема. При этом давление, производимое газом на стенку сосуда, рассматривается, как результат бесчисленного числа отдельных ударов, производимых этими движущимися без всякого порядка, во всех направлениях, газовыми частицами.

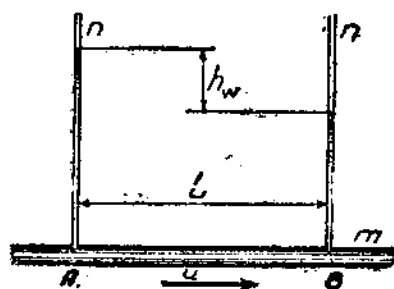
Однако, несмотря на произвольное направление движения каждой из частиц, именно благодаря бесконечному разнообразию и множеству отдельных производимых частицами ударов является вероятность, что среднее число ударов за некоторый промежуток времени на ту или иную часть стенки получается постоянным. Благодаря этому и поддерживается постоянное давление газа на стенку, которое и является тем самым постоянным средним, „статистическим“<sup>2)</sup> результатом бесчисленного множества, казалось бы, совершенно произвольных, ничем не урегулированных, не упорядоченных проявлений.

Совершенно так же в беспорядочном движении жидкости, хотя частицы ее летают совершенно произвольно во всех направлениях, сталкиваясь и отталкиваясь друг от друга и о наружную стенку, тем не менее, как средний „статистический“ результат этих бесчисленных неупорядоченных движений, мы получаем опять-таки некоторый „установившийся“ поток частиц через ту или иную площадку внутри жидкости, выражающийся хотя бы в опыте Рейнольдса в том, что при определенном уровне воды в баке и некотором открытии крана *K* через трубу вытекает в отдельный промежуток времени всегда одно и то же количество жидкости.

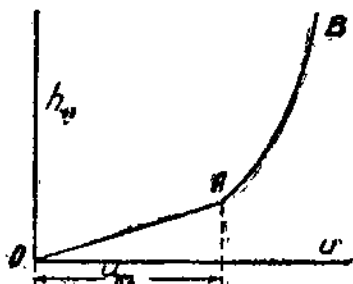
<sup>1)</sup> Французы называют его *tumultueux*, или *turbulent* (турбулентным) англичане — *eddy*, или *sinuous motion*, немцы — *Mischbewegung*).

<sup>2)</sup> Рассмотрение подобного рода вопросов, связанных с применением теории вероятностей к исследованию движений систем молекул, относится к области так называемой „статистической“ механики. Термин „статистический“ установился, очевидно, по аналогии с „статистикой“, также стремящейся, опираясь на „закон больших чисел“, найти средние устойчивые результаты в многообразном проявлении явлений социальных, биологических, этнографических и пр.

2. Критическая скорость. Возвращаясь к работам Рейнольдса, прежде всего отметим, что, согласно опыту для трубы определенного диаметра и при данной температуре воды, нарушение „струйчатости“, движения и переход его в „беспорядочное“ происходит при одной и той же определенной средней скорости в трубе. Таким образом, наличие того или иного рода движения обуславливается, при прочих равных условиях, величиною скорости. То значение последней, при которой происходит перемена формы движения, Рейнольдс назвал „критической скоростью“. С увеличением диаметра труб критическая скорость понижается. В том же направлении влияет и повышение температуры. Если теперь в точках А и В прямой цилиндрической трубки  $m$  поставить пьезометры ( $n$ ) и на-



Фиг. 53.



Фиг. 54.

блюдать потерю напора  $h_w$  (см. фиг. 53) в трубке в зависимости от скорости, то оказывается следующее:

пока скорость мала, потеря напора (измеряющая удельную работу сопротивлений) возрастает пропорционально величине скорости. Таким образом,

$$h_w = kv \dots \dots \dots (*)$$

На фиг. 54, изображающей график изменения  $h_w$  от скорости, уравнению (\*) соответствует прямая  $O-A$ . Когда скорость достигнет „критической“, закон изменения сопротивления резко меняется. На фиг. 54 скорости  $v > v_k$  соответствует кривая  $A-B$ , указывающая, что потеря напора растет быстрее скорости. Опыт показывает, что сопроти-

вление в этом случае почти пропорционально *квадрату* скорости.

Таким образом, мы видим, что различным формам движения соответствуют совершенно различные законы сопротивлений; само собой очевидно, что должны коренным образом разниться как „происхождение“, так и способы действия сил сопротивлений или то, что можно назвать „механизмом“ сопротивлений.

Закон изменения сопротивлений весьма наглядно обнаруживается посредством изображения связи  $h_w = f(v)$  в логарифмической шкале, т. е. путем применения так называемой „логарифмической анаморфозы“.

Опыт показывает, что связь между потерей напора и скоростью можно изобразить посредством соотношения

$$h_w = kv^n, \dots \dots \dots (33)$$

где  $k$  — некоторый коэффициент, а  $n$  — показатель степени, указывающий, пропорционально какой степени скорости возрастает потеря напора; логарифмируя выражение (33), получаем

$$\log h_w = \log k + n \log v.$$

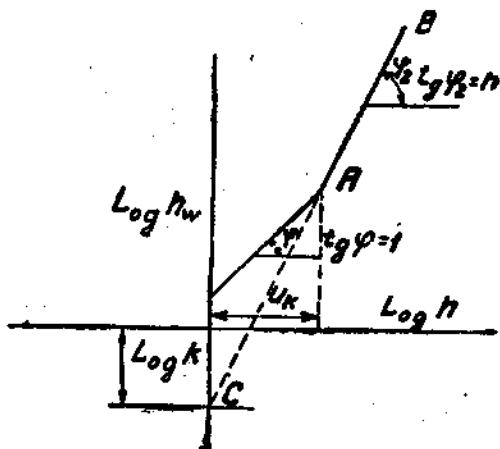
Если по абсциссам откладывать  $\log v$ , а по ординатам  $\log h_w$ , то, принимая во внимание, что  $\log k$  есть постоянная, получаем уравнение прямой линии, угловой коэффициент которой есть  $n$ ; таким образом, показатель  $n$  в уравнении определяется просто, как тангенс угла  $\varphi$  наклона прямой.

Соответственно с этим получаем следующую картину изменения сопротивлений в логарифмической шкале. Для величин  $v < v_k$  имеем прямую, наклонную под углом  $45^\circ$  ( $\text{tg } \varphi = 1$ ;  $n = 1$ ). В точке  $v = v_k'$  прямая резко изменяет свой уклон; значение  $\text{tg } \varphi$  приближается к 2.

Строя диаграмму (фиг. 55) непосредственно по данным опыта, по уклону прямой  $AB$  узнаем величину показателя  $n$ , т. е. заключаем о том, какой степени скорости пропорциональна потеря напора;  $\log k$  в то же время измеряется в ответственном масштабе длиной отрезка  $OC$  на оси ординат.

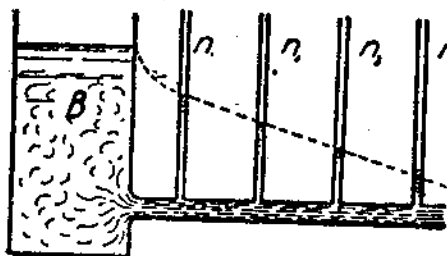
3. Верхняя и нижняя критические скорости. Опыты Куэтта (Couette). Как было указано выше, „критическую“ скоростью Рейнольдс назвал ту скорость, при которой жидкость, находящаяся *первоначально* в баке

в покое, при вступлении в трубку приходит в беспорядочное движение. Можно, однако, подойти к вопросу с иной точки зрения. Пусть (фиг. 56) в баке  $B$  жидкость искусственно поддерживается в беспорядочном движении. Можно задать вопрос, нельзя ли создать такие условия, при которых жидкость, вступая из бака в трубку в состоянии беспорядочного движения, переходит затем уже в самой трубе в движение струйчатое, упорядоченное. Рейнольдс ответил опытом также и на этот вопрос. Установив в трубке ряд пьезометров и сопоставляя потери напора со скоростями воды в трубке, он



Фиг. 55.

пришел к заключению, что для данного диаметра трубы и температуры имеется опять-таки некоторая скорость  $u_k$ , при которой имеющее место в начале трубы беспорядочное движение в дальнейшем как бы „успокаивается“, переходя в струйчатое. Величину этой скорости  $u_k$  мы будем называть „нижней критической скоростью“ или просто критической скоростью в противоположность  $u_k$ , которую будем именовать „верхней критической скоростью“.

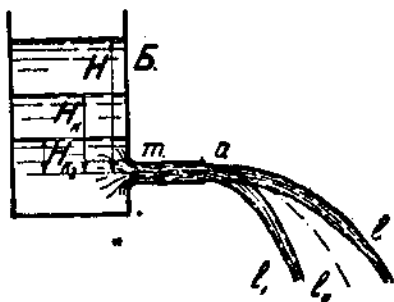


Фиг. 56.

Последняя характеризует точку разрушения струйчатого движения, или, принимая терминологию Рейнольдса, скорость, при которой бывшее до того „устойчивым“ (stable) движение перестает быть таковым и делается „неустой-

чивым". Очевидно, что выше этой скорости упорядоченное движение, вообще, невозможно. Обратно, нижняя критическая скорость  $v_k$  характеризует скорость, ниже которой невозможно уже "неустойчивое" (беспорядочное) движение; даже если бы таковое было создано искусственным путем, то предоставленное самому себе движение приобрело бы устойчивость, сделалось бы "струйчатым".

Между скоростями  $v_k'$  и  $v_k$  лежит, очевидно, промежуточная область, в которой, вообще говоря, движение может быть как первого, так и второго рода, смотря по начальным обстоятельствам. Если, вступая в такого рода промежуточную область, жидкость находится в устойчивом движении, то устойчивость не нарушается; зато не уничтожается и неустойчивость движения, и жидкость, вступившая в промежуточную область в состоянии беспорядочного движения, продолжает в таковом пребывать. Следовательно, "струйчатое движение" в этой области, вообще говоря, неустойчиво; неустойчива также и величина сопротивлений; действительно, здесь возможны промежуточные состояния с всевозможными степенями "беспорядочности" — от чисто струйчатого движения до движения полностью беспорядочного — и связанные с последним потери.

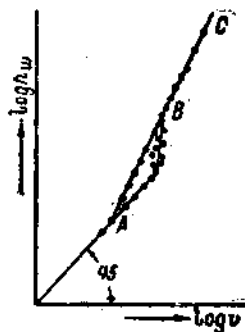


Фиг. 57.

Интересный случай подобного рода неустойчивых состояний движения служит следующее явление, описанное впервые Куэттом. Жидкость вытекает из бака Б через трубку т (фиг. 57); при этом оказывается следующее: сперва, если напор  $H$  достаточно велик, жидкость вытекает вполне устойчивой струей I. Затем, когда напор понизится, скажем, до некоторого  $H_k$ , истечение вдруг делается неустойчивым. Струя начинает "бить", т. е. непрерывно колебаться. Далее, когда напор еще более понизится, дойдя, скажем, до  $H_k$ , струя снова приобретает устойчивый характер. Очевидно, что скорость в трубе при напорах  $H > H_k$  и  $H < H_k$ .

соответственно больше  $v_k$  и меньше  $v'_k$ , т. е. движение в первом случае *безусловно беспорядочное* с устойчивой средней статистической скоростью, во втором случае — *безусловно струйчатое*. Между  $N_k$  и  $N'_k$  скорость находится в промежуточной области неустойчивых состояний, что и объясняет непрестанное изменение ее величины и связанное с этим биение струи.

Все вышесказанное хорошо иллюстрируется следующей диаграммой, изображающей логарифмическую анаморфозу изменения сопротивлений в свинцовой трубе и заимствованной нами из „Курса Гидравлики“ Гибсона. На фиг. 58 точки *A* и *B* соответствуют нижней и верхней критической скорости.



Фиг. 58.

Движение жидкостей динамически подобных потоках характеризуется величиной отношения

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu},$$

где  $v$  — величина скорости, характерной для потока,  $d$  — линейный размер, характеризующий поток, и  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$  — так называемый кинематический коэффициент вязкости (см. ниже).

Этот критерий  $Re$ , введенный впервые Рейнольдсом, имеет исключительное значение в гидродинамике вязкой жидкости, так как в динамически подобных потоках работа сил сопротивлений (при прочих равных условиях) в первую очередь зависит от числа Рейнольдса  $Re$ . Кроме того, являясь числом отвлеченным (размерность  $Re = \frac{vd}{\nu}$  равна нулю,

<sup>1)</sup> См. В. Л. Кирпичев. Беседы о механике, стр. 135.

см. ниже, примечание на стр. 104) или безразмерным, критерий Рейнольдса характеризует поток независимо от рода движущейся жидкости. Из своих опытов Рейнольдс убедился, что переход из ламинарного движения в турбулентное и обратно, переход из турбулентного движения в ламинарное, происходит всегда при определенных критических значениях числа  $Re = Re_k$ .

Таким образом,

$$v_k = \frac{Re_k \nu}{d}.$$

На основании своих опытов Рейнольдс дал следующие значения критических чисел  $Re_k$  (приводим их в системе CGS по Биллю)<sup>1)</sup>:

$$v'_k = \frac{12900}{d} \nu,$$

$$v_k = \frac{2040}{d} \nu.$$

Для воды при температуре в 12° С выражения (для метрового размера) приобретают вид

$$v'_k = \frac{0,016}{d}$$

$$v_k = \frac{0,0025}{d}.$$

Для труб различных диаметров имеем следующую таблицу:

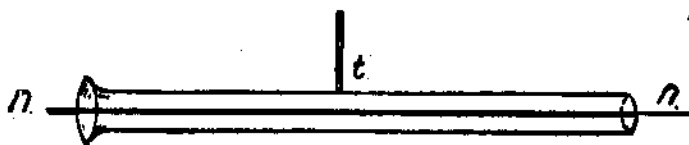
ТАБЛИЦА 4.

| $d$               | 1 мм | 5 мм | 10 мм | 25 мм | 50 мм | 0,1 м | 0,2 м | 0,5 м | 1 м    |
|-------------------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| $v'_k$ м/сек. . . | 16,0 | 3,2  | 1,60  | 0,64  | 0,32  | 0,160 | 0,080 | 0,032 | 0,0160 |
| $v_k$ м/сек. . .  | 2,5  | 0,5  | 0,25  | 0,10  | 0,05  | 0,025 | 0,012 | 0,005 | 0,0025 |

<sup>1)</sup> В. Biet, Ueber den Druckhöhenverlust bei der Fortleitung tropfbaren und gasförmigen Flüssigkeiten.

Таким образом, мы видим, что для размеров труб, употребляемых на практике, скорости для воды очень малы и много ниже обычно применяемых на практике скоростей. И в других случаях практики при движении воды мы имеем дело почти исключительно с беспорядочным движением. Относящиеся к нему сопротивления поэтому почти исключительно и изучаются в практической гидравлике.

Однако для других жидкостей можно и на практике встретиться со скоростями ниже критических. Такого рода случай может представиться либо для жидкостей с большим коэффициентом внутреннего трения (масла, нефть и пр.), либо для жидкостей с малой плотностью (газы). Действительно, в выражении  $v_{кр}$  входит величина не абсолютной вязкости, а вязкости, деленной на плотность  $\frac{[\eta]}{\rho}$ ; эта величина, например, при  $10^\circ\text{C}$  для репного масла в 310, для



Фиг. 53.

атмосферного воздуха в 11 раз больше, чем для воды; очевидно, соответственно больше и скорости в таблице (стр. 71).

Опыт Куэтта (Couett, An. de Ph. et ch. 1890) над трением жидкости на поверхности вращающихся цилиндров подтвердил в общем выводы Рейнольдса; он подтвердил, в частности, и предположение его о постоянстве числа  $Re_{кр}$ .

Биль (Biel), анализируя ряд опытов других исследователей, приходит к весьма правдоподобному заключению, что величина критической скорости изменяется в зависимости от шероховатости стенки. Крайне интересны также опыты Барнеса и Кокера<sup>1)</sup> в лаборатории университета M'Gill в Монреале. Оказывается, что если протянуть через трубку (фиг. 59) проволоку  $n-n$  и нагревать ее электрическим током, то при струйчатом движении воды через трубку со скоростью ниже критической нагреваются лишь

<sup>1)</sup> M. Bovey (Hydraulics, стр. 131, изд. 1909); также H. T. Barnes and E. F. Coker, The Flow of Water through Pipes. Proceedings of the Royal Society of London, Vol. LXXIV, p. 341 — 355, London 1905.

ближайшие к проволоке слои: жидкость движется концентрическими слоями разной температуры, и самый чувствительный термометр  $t$ , вставленный в стенке трубки, не обнаруживает заметного повышения температуры. Наоборот, как только скорость перейдет критическую, струйчатость нарушится, благодаря перемешиванию происходит нагревание всей массы протекающей жидкости, что немедленно обнаруживается термометром  $t$ .

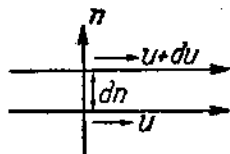
Таким образом, момент нарушения струйчатости определяется термометрически. Повидимому, метод этот много точнее метода окрашенных струй.

Можно думать, что исследования канадских ученых, еще не законченные, прольют вообще много света на весь вопрос об „устойчивости“ движения жидкости.

### § 31. Сопротивления в струйчатом движении.

1. Сила вязкости по Ньютону. Опыты Пуазейля (Poiseuille). В струйчатом движении, судя по имеющимся до настоящего времени данным опыта, сопротивления проявляются в общем в согласии с законами трения жидких тел, высказанными еще Ньютоном (Principia, т. II).

Согласно предположению последнего, сопротивление, проявляющееся при скольжении одного слоя жидкости по другому, пропорционально поверхности соприкасающихся площадей и скорости относительного скольжения.



Фиг. 60.

Сопротивление не зависит от давления и уменьшается с возрастанием температуры.

Как видим, законы трения жидких тел совершенно противоположны законам трения тел твердых: трение последних прямо пропорционально давлению и не зависит от площади, скорости и температуры.

Переходя к численному выражению законов движения, заметим, что внутри движущейся жидкости (фиг. 60) относительная скорость скольжения по некоторой площадке, нормальной к некоторому направлению  $n$ , измеряется, очевидно, величиной

$$\frac{du}{dn}.$$

Таким образом, сила трения  $T$  на поверхности  $F$  выражается через

$$T = \eta \cdot F \frac{du}{dn},$$

где  $\eta$  — так называемый динамический „коэффициент вязкости“<sup>1)</sup> или „коэффициент внутреннего трения“ жидкости. Коэффициент этот зависит от температуры и в системе CGS выражает силу трения в динах, приходящуюся на один кв. сантиметр поверхности, если движение таково, что два слоя жидкости, отстоящие друг от друга на один сантиметр, имеют относительную скорость в 1 см/сек.

Величина внутреннего трения, вообще говоря, падает с температурой  $t^\circ\text{C}$ . Так, для воды<sup>2)</sup> имеем

$$[\eta] = \frac{0,01775}{1 + 0,0331 t + 0,000244 t^2}.$$

В нижеследующей таблице (заимствованной у Биля) приводим данные абсолютной величины коэффициента вязкости в динах на кв. см, а также так называемого „модуля вязкости“  $\frac{\eta}{\rho}$ , т. е. коэффициента вязкости, деленного на массу единицы объема.

При струйчатом движении вязкой жидкости непосредственно прилегающий к стенке слой, повидимому, прилипает к последней; таким образом, скорость ( $u$ ) по сечению (скажем, трубы, фиг. 61) непрерывно изменяется от нуля до  $u_{\text{max}}$  в центре сечения. У самой стенки первый движу-

1) Размерность динамического коэффициента вязкости  $[\eta] = \frac{\text{дина} \cdot \text{сек.}}{\text{см}^2} =$   
 $= \frac{ML}{T^2} \cdot \frac{T}{L^2} = \frac{M}{LT}.$

Размерность кинематического коэффициента вязкости  $[\nu] = \left[ \frac{\eta}{\rho} \right] =$   
 $= \frac{M}{LT} \cdot \frac{L^3}{M} = L \cdot \frac{L}{T}.$

Размерность отношения  $[Re] = \left[ \frac{v \cdot d}{\nu} \right] = \frac{L}{T} \cdot L \cdot \frac{T}{L^2} = 0.$

<sup>2)</sup> O. Meyer, Wied. Annalen, 1877, S. 387.

ТАБЛИЦА 5.

| Темпе-<br>ратура         | 0°                    |                     | 10°                   |                     | 20°                   |                     | 30°                   |                     |
|--------------------------|-----------------------|---------------------|-----------------------|---------------------|-----------------------|---------------------|-----------------------|---------------------|
|                          | $\eta$                | $\frac{\eta}{\rho}$ | $\eta$                | $\frac{\eta}{\rho}$ | $\eta$                | $\frac{\eta}{\rho}$ | $\eta$                | $\frac{\eta}{\rho}$ |
| Вода . . .               | 0,0177                | 0,0177              | 0,0131                | 0,0131              | 0,0101                | 0,0101              | 0,00805               | 0,00805             |
| Репн. масло              | 25,3                  | 27,7                | 3,7                   | 4,07                | 1,8                   | 1,98                | 0,99                  | 1,1                 |
| Атмосферн.<br>воздух . . | $0,171 \cdot 10^{-3}$ | 0,137               | $0,176 \cdot 10^{-3}$ | 0,146               | $0,183 \cdot 10^{-3}$ | 0,161               | $0,186 \cdot 10^{-3}$ | 0,165               |
| Ртуть . . .              | —                     | —                   | —                     | —                   | 0,016                 | 0,00118             | —                     | —                   |

щийся слой скользит по неподвижному слою жидкости; величина трения у самой стенки

$$T = F \eta \left( \frac{du}{dn} \right), \dots \dots \dots (34)$$

где значок  $(\circ)$  у  $\frac{du}{dn}$  обозначает, что градиент скорости взят непосредственно у стенки.

При этом сопротивление не зависит от материала, из которого сделана труба, так как непосредственно сама стенка в механизме сопротивления не участвует. Все это подтверждается опытами над движением в капиллярных трубках и вообще в трубках малого диаметра, в которых легко осуществляется струйчатое движение, благодаря значительной величине критической скорости. Результаты подобных опытов Пуазейля и др. хорошо совпадают с выводом теории, построенной на указанных выше предположениях о равенстве нулю скорости на стенках и выражении трения по формуле (34).



Фиг. 61.

Представления эти подтверждают опыты Кулона над колебанием дисков, а также опыты Куэтта над вращением цилиндров в вязкой жидкости.

2. Струйчатое движение вязкой жидкости в цилиндрической трубе. Соотношение между потерей напора и расходом вязкой жидкости при струйчатом движении в цилиндрической трубе получается весьма просто. Рассмотрим отрезок (A—B) горизонтальной цилиндрической трубы длиной  $l$ , в котором жидкость находится в установившемся струйчатом движении (фиг. 62).

Пусть  $MNL$  изображает кривую распределения скоростей в любом сечении (скорости  $u$  измеряются ординатой кривой от линии  $ML$ ).

Очевидно, скорости симметричны относительно оси трубы и одинаковы на цилиндрической поверхности радиуса  $r$ . Выделим внутри жидкости цилиндр  $CCDD$  и составим уравнение равновесия сил, действующих на него.

Давления в сечениях A и B соответственно обозначим  $p_A$  и  $p_B$ ; разность их

$$p_A - p_B = \Delta p.$$

$\frac{\Delta p}{\gamma}$  есть, следовательно, потеря напора на участке A—B; результирующая давлений

$$\pi r^2 \Delta p,$$

очевидно, уравновешивается трением на поверхности цилиндра.

Таким образом,

$$\pi r^2 \Delta p + 2\pi r l \eta \frac{du}{dr} = 0$$

или

$$du = -\frac{\Delta p r}{2l \eta} dr.$$

В этой формуле  $\Delta p$  также должно быть выражено (подобно  $\eta$ ) в динах на кв. см; но если разделить чис-

лителя и знаменателя на  $\gamma = \rho g$  и обозначить  $\frac{\eta}{\rho} = \nu$ , получим

$$du = -\frac{1}{2l} \frac{\Delta p}{\gamma} \frac{\rho}{\nu} r dr.$$

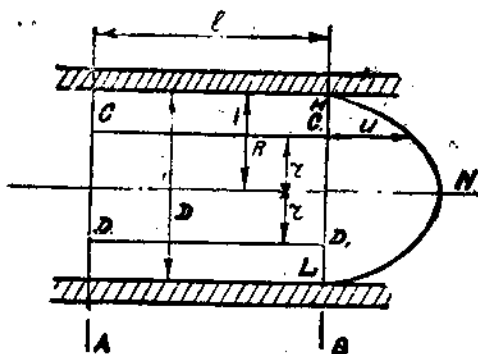
В это равенство входят уже  $\frac{\Delta p}{\gamma}$  и  $\nu$ , величина которых уже не зависит от того, будем ли мы измерять силы в граммах или в динах.

Интегрируя, имеем

$$u = -\frac{1}{4l} \frac{\Delta p}{\gamma} \frac{g}{\nu} r^2 + \text{const.}$$

Полагая для  $r = R$ ;  $u = 0$ , имеем  $\text{const} = \frac{g}{4\nu} \frac{\Delta p}{\gamma} R^2$ , а потому

$$u = \frac{g}{4\nu} \frac{\Delta p}{\gamma} (R^2 - r^2);$$



Фиг. 62.

для центральной струйки ( $r = 0$ )

$$u_{\max} = -\frac{g}{4\nu} \frac{\Delta p}{\gamma}.$$

Таким образом, скорости распределяются по параболё.  
Расход жидкости через трубу:

$$Q = \int_0^R 2\pi \cdot r dr \cdot u = \frac{2\pi g}{4\nu} \frac{\Delta p}{\gamma} \int_0^R (R^2 r - r^3) dr = \frac{\pi g}{2\nu} \frac{\Delta p}{\gamma} \left( \frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \\ = \frac{g \Delta p}{8\nu \gamma} \frac{\pi R^4}{l}.$$

Средняя скорость

$$v = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{g}{8\nu} \frac{\Delta p}{\gamma} \cdot \frac{R^2}{l}.$$

Разницу давлений можно выразить через пьезометрическую высоту  $h_w = \frac{\Delta p}{\gamma}$ , измеряющую непосредственно падение напора.

Тем самым

$$v = \frac{h_w}{l} \cdot \frac{R^2 g}{8\nu} = \frac{981}{8} \cdot \frac{R^2 h_w}{l} \cdot \frac{1}{\nu}$$

или

$$\frac{h_w}{l} = i_p = \frac{8}{981} \cdot \nu \cdot \frac{v}{R^2},$$

где  $i_p$  — уклон пьезометрической линии.

Соотношение это для капиллярных трубок вполне подтверждается опытами Пуазейля.

## § 32. Сопротивления в беспорядочном движении.

1. Факторы, влияющие на сопротивление жидкости движению. „Шероховатость“ стенки. Свойства сопротивлений в беспорядочном, турбулентном движении существенно разнятся от таковых в движении упорядоченном, струйчатом.

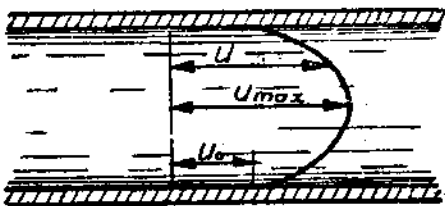
Прежде всего, как показывают опыты, сопротивления пропорциональны приблизительно квадрату скорости; затем сопротивления не зависят (по крайней мере, сколько-нибудь существенно) от температуры; наоборот, зависят от материала и состояния стенки; сопротивления быстро возрастают с увеличением неровности или, как обычно выражаются, „шероховатости“ стенки.

Частицы жидкости, ударяясь о выступы стенки, отлетают от нее в различных направлениях, причем с возрастанием шероховатости стенки увеличивается число и разнообразие возможных ударов частиц жидкости о выступы и неровности стенки.

Состояние поверхности последней, степень ее шероховатости является, повидимому, основной причиной, обуславливающей степень беспорядочности или так называемую интенсивность турбулентности движения, хотя самый факт нарушения струйчатости и устойчивости движения и возникновения беспорядочности вызывается причинами, не имеющими непосредственного отношения к стенке, и обуславливается самой природой вязких жидкостей.

Независимо от того, существует или нет на стенке неподвижный смачивающий ее и удерживаемый на ней силами сцепления слой жидкости, все заставляет предполагать, что непосредственно у самой стенки,

в слое, непосредственно прилегающем к указанному выше неподвижному слою, скорости имеют конечное значение (фиг. 63).



Фиг. 63.

Без такого представления было бы трудно, с одной стороны, объяснить влияние на сопротивления шероховатости стенки; с другой стороны, такое представление вполне согласуется с общим представлением о беспорядочном движении и находит подтверждение в определении непосредственно опытом значительных скоростей у стенки, т. е. на таком вообще расстоянии от нее, на котором еще возможно установить измерительный прибор.

2. „Осредненная“ картина потока жидкости. Согласно общему представлению о беспорядочном движении, мгновенная скорость в данной точке все время меняет свою величину и направление. Однако средний „статистический“ результат движений выражается в том, что не только поток через все сечение, скажем, какой-либо трубы, но элементарный поток в точке А через любую площадку сечением  $d\omega$ , взятый для некоторого конечного промежутка времени, остается неизменным. Отсюда непосредственно

108

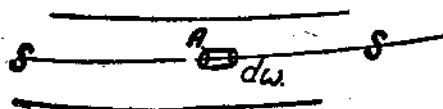
следует, что в каждой точке остается постоянной и некоторая „средняя“ скорость, получаемая делением среднего постоянного потока в единицу времени  $dq$  на сечение площадки,

$$u = \frac{dq}{d\omega}.$$

Тем самым устанавливается понятие о „средней статистической“ или осредненной скорости в данной точке, являющейся уже не действительной скоростью частиц в данной точке, а лишь некоторой фиктивной величиной, измеряющей величину и направление осредненного потока частиц в данной точке.

Обертка такого рода скоростей есть „осредненная“ струйка ( $S-S$ ), касательная к направлению потока. Средний поток через боковые стенки ее — нуль (фиг. 64).

Опирируя с вопросами беспорядочного движения, мы всегда будем иметь дело именно с этой „средней статистической“ или осредненной скоростью



Фиг. 64.

в данной точке (*vitesse moyenne locale*). В этом лишь смысле мы будем говорить об устойчивом и закономерном распределении скоростей по сечению водотока, о величине наибольшей скорости  $u_{\max}$  и скорости на стенке  $u_0$ , а также о средней скорости сечения  $v = \frac{Q}{\omega}$ .

Мы упомянули уже выше о работах Буссинеска, который показал, что „средними статистическими“ величинами можно оперировать так же, как если бы они были действительными, т. е., скажем, рассматривать картину распределения скоростей (фиг. 63), как будто бы она изображает действительные существующие реально скорости.

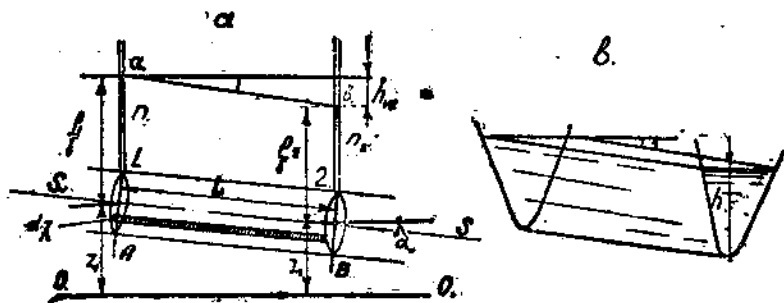
Заметим, что все измерительные приборы, которыми пользуются для определения скоростей, определяют именно эту среднюю скорость <sup>1)</sup>. Устойчивость и постоянство результатов, получаемых при такого рода определениях, несомненно способствовали „прочности“ представления о

<sup>1)</sup> Действительно, действие всех такого рода приборов основано на воздействии на его части (лопасти и пр.) потока частиц.

„струйчатом движении жидкости“ вообще, хотя указания на беспорядочный характер движения, как было выше указано, встречаются в гидравлической литературе уже в начале прошлого столетия. Однако, даже ходовыми, сравнительно грубыми измерительными приборами отмечаются колебания и отклонения основных гидравлических элементов потока от „средних“ значений. Поэтому при определении, скажем, скорости в открытом водотоке (реке, канале и пр.) тождественные результаты получаются лишь в случае, если определение покрывало достаточный промежуток времени, чтобы учесть именно „среднюю“ величину и исключить те или иные отклонения скорости, называемые в этом случае „пульсацией“. Мы вернемся к вопросу о пульсации и об ее отношении к беспорядочному движению воды в главе, посвященной движению в открытых руслах.

### § 33. Общее выражение для учета сил сопротивлений в прямолинейном равномерном установившемся движении жидкости.

1. Основное уравнение установившегося равномерного движения жидкости. Составим теперь общее выражение для учета сил сопротивления в прямолинейном равномерном установившемся движении



Фиг. 65.

жидкости, применимое при том одинаково как к движению в замкнутой цилиндрической трубе (фиг. 65-а) любого поперечного сечения, так и к движению в открытом русле (фиг. 65-б). В последнем случае будем лишь предполагать,

что в силу того, что мы рассматриваем случай равномерного движения, не изменяется форма сечения русла и его наполнение (т. е. глубина  $h$ ). Указывая на прямолинейность движения, мы имеем в виду рассматривать поток, в котором струя не имеет кривизны; при этом, как было выше указано, распределение давлений следует гидростатическому закону.

Пусть  $A$  и  $B$  представляют два живых сечения трубы (площадью  $\omega$ ) на расстоянии  $L$  друг от друга;  $z_1$  и  $z_2$  — соответственные высоты центров тяжести сечений над горизонтальной плоскостью  $O—O$ ;  $p_1$  и  $p_2$  — давления в центрах тяжести, измеряемые соответствующими столбами жидкости в пьезометрах  $n_1$  и  $n_2$ ;  $\alpha_0$  — угол наклона оси трубы к горизонту; очевидно, при этом

$$\sin \alpha_0 = \frac{z_1 - z_2}{L}.$$

Применим к рассматриваемому отсеку жидкости  $A—B$  закон движения центра инерции.

Так как движение равномерное и установившееся, то ускорений не имеется. Очевидно, действующие на отсеке  $A—B$  силы уравниваются силами сопротивления.

Проекции действующих сил на ось трубы  $S—S$ :  
силы тяжести

$$\gamma \cdot \omega \cdot L \sin \alpha_0 = \gamma \cdot \omega (z_1 - z_2),$$

давлений

$$(p_1 - p_2) \omega.$$

Составим еще выражение для сил сопротивления. Последние, независимо от их природы и количественного выражения, можно разбить на две группы:

а) силы сопротивления внутренние, действующие внутри отсека между частицами жидкости;

б) силы сопротивления внешние, т. е. силы, проявляющиеся между наружными частицами и стенками сосуда, силы, которые мы будем называть „силами трения на стенке“.

При суммировании всех сил сопротивлений, все силы первой группы, очевидно, пропадут, так как все внутренние силы, проявляющиеся между смежными струйками, попарно равны и прямо противоположны по направлению.

Следовательно, в выражение суммы сил сопротивлений войдут лишь силы внешнего трения на стенках.

Силу сопротивления на элементарной полоске стенки  $df = L d\chi$ , где  $d\chi$  — выражение элемента длины контура живого сечения или так называемого смоченного периметра, можно выразить через

$$dR_w = -df \cdot \tau_0 = -\tau_0 d\chi \cdot L,$$

где  $\tau_0$  есть некоторая, зависящая от величины местной скорости на стенке величина силы сопротивления, отнесенной к единице поверхности стенки.

Сумма сил сопротивлений или „равнодействующая сил“ внешнего трения на стенке

$$R_w = -L \int \tau_0 d\chi = -L \chi \tau_0,$$

где  $\chi$  есть смоченный периметр (длина контура живого сечения, на котором жидкость соприкасается со стенкой), а  $\tau_0$  — некоторая средняя величина внешнего трения на единице поверхности стенки, зависящая от средней скорости на стенке  $u_0$ , рода стенки, конфигурации потока и пр.

Составляя теперь уравнение равновесия, имеем

$$\gamma \omega (z_1 - z_2) + \omega (p_1 - p_2) - L \chi \tau_0 = 0$$

или

$$\left( z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left( z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) = L \cdot \frac{\chi}{\omega} \cdot \frac{\tau_0}{\gamma} \dots \dots (a)$$

Величина, стоящая в левой части выражения (a), есть не что иное (фиг. 65), как разность пьезометрических высот в сечениях A и B, т. е. потеря напора  $h_w$ . Отношение  $\frac{h_w}{L} = i$  есть пьезометрический уклон, для случая открытого русла представляющий не что иное, как уклон свободной поверхности потока. Уравнение (a) поэтому принимает вид

$$i = \frac{h_w}{L} = \frac{\chi}{\omega} \cdot \frac{\tau_0}{\gamma} \dots \dots \dots (b)$$

Величину  $\frac{\omega}{\chi}$ , т. е. отношение площади живого сечения к смоченному периметру, называют со времени Дюбуа (Dubuat, Principes d'Hydraulique) „гидравлическим радиусом“ и обозначают обычно через

$$R = \frac{\omega}{\chi}.$$

Что касается величины  $\frac{\tau_0}{\gamma}$ , то, принимая во внимание, что в равномерном движении при данной конфигурации потока и характере стенок распределение скоростей по сечению является вполне определенным, как отдельные скорости на стенках, так и величина средней скорости на стенках могут быть выражены через величину средней скорости сечения  $v$ , а потому, очевидно, возможно написать

$$\frac{\tau(u_0)}{\gamma} = \frac{\tau_0(v)}{\gamma},$$

т. е. выразить через среднюю скорость сечения  $v$  также и величину равнодействующей сил трения на стенках. Вместо (b), имеем

$$i = \frac{1}{R} \frac{\tau_0}{\gamma}$$

или

$$Ri = \frac{\tau_0}{\gamma} \dots \dots \dots (c)$$

Величина  $\frac{\tau_0}{\gamma}$  определяется эмпирически из опытов над равномерным движением в прямолинейных водотоках.

2. О работе сил внутреннего и внешнего трения. В следующем параграфе мы приведем получающиеся при этом и употребляемые в практике соотношения. Теперь еще приведем некоторые сопоставления для более полного уяснения рассматриваемых явлений. Величина  $\frac{\tau_0(v)}{\gamma} = \frac{\tau(u_0)}{\gamma}$  представляет собой, согласно вышеизложенному, величину отнесенной к единице веса жидкости силы сопротивления на единицу площади стенки, выраженной в зависимости от средней скорости сечения. Выше (§ 25) было выведено, что величина пьезометрического уклона в случае равномерного установившегося движения представляет собой величину работы всех сил сопротивления, отнесенных к единице веса жидкости на единице длины потока.

Сопоставляя (c), видим, что работа сил сопротивления на единице длины, отнесенная к единице веса жидкости, также равна

$$i = \frac{\tau_0}{R \cdot \gamma}.$$

Умножая  $i$  на  $L$  и на  $\gamma Q$  (вес протекающей в единицу времени через сечение жидкости), получаем

$$N_w = h_w \cdot Q \gamma = Li \gamma Q$$

полную работу всех сил сопротивлений в единицу времени (мощность) на участке длиной  $L$ ; очевидно,

$$R_w = N_w \cdot \Delta t = Li \gamma Q \Delta t \dots \dots \dots (d)$$

представляет такую же работу, но лишь за промежуток времени  $\Delta t$ .

Величину  $R_w$  (d) можно переписать следующим образом:

$$N_w = F \gamma Q \frac{\tau_0}{R \cdot \gamma} = L \omega v \frac{\chi}{\omega} \tau_0 = L \chi \tau_0$$

или

$$N_w = f \cdot \tau(u_0) v$$

и

$$R_w = N_w \Delta t = f \cdot \tau(u_0) v \Delta t, \dots \dots \dots (e)$$

где  $f = L \chi$ .

Таким образом, полная работа сопротивлений на отсеке  $L$  за некоторый промежуток времени  $\Delta t$  получится, если умножить равнодействующую сил внешнего трения на боковой поверхности отсека  $f \cdot \tau_0$  на *перемещение*  $\Delta s = v \Delta t$ , соответствующее средней скорости  $v$ .

Полная работа сил сопротивления  $R_w$  составляется из работы внешних трений на стенке  $R_c$  и из работы сил внутреннего трения  $R_s$  частиц между собой

$$R_w = R_c + R_s.$$

На самом деле, хотя сумма всех внутренних сил трения и равна нулю, но работа их нулю не равна по той причине, что скорости смежных струй различны; благодаря этому, попарно равные и противоположные силы трения между двух смежных струй при составлении выражения работ умножаются на различные перемещения.

В некоторых частных случаях оказывается возможным очень просто произвести разделение потерь, т. е. определить, какую часть из полной работы сопротивлений  $R_w$  составляет работа трения на стенке  $R_c$  и какую — работа

внутренних трений  $R_c$ . Рассмотрим, например, случай, когда скорость на стенке всюду одинакова ( $u_0$ ) (труба круглого сечения и т. д.). В этом случае работа сил сопротивления на стенке на участке длины  $L$  за промежуток времени  $\Delta t$  получится, умножая равнодействующую сил внешних трений  $f \cdot \tau(u_0)$  на одинаковое для всех элементов поверхности перемещение  $u_0 \Delta t$ .

Таким образом,

$$R_c = f \cdot F(u_0) u_0 \Delta t.$$

Сопоставляя с (е), имеем

$$\frac{R_c}{R_w} = \frac{f \cdot \tau(u_0) u_0 \Delta t}{f \cdot \tau(u_0) v \Delta t} = \frac{u_0}{v},$$

т. е. отношение работ внешних сил трения на стенке к полной работе сил сопротивлений равно отношению скорости на стенке к средней скорости сечения.

Очевидно,

$$\frac{R_c}{R_w} = 1 - \frac{u_0}{v}.$$

Опыт показывает, что с увеличением шероховатости отношение  $\frac{u_0}{v}$  уменьшается; таким образом, оказывается, что чем шероховатее стенка, тем большая часть энергии тратится внутри жидкости и тем меньшая — на стенке. Это обстоятельство, казалось бы, с первого взгляда парадоксальное, делается, однако, вполне понятным, если принять во внимание, что рассеяние энергии внутри потока обуславливается „степенью“ беспорядочности движения, которая в свою очередь определяется именно шероховатостью стенки<sup>1)</sup>.

**§ 34. Вид  $\frac{\tau_0}{\gamma}$ , выражающий величину сопротивлений в беспорядочном движении.**

1. Формула Прони (Proney). Выше уже было указано, что величина сопротивлений в беспорядочном движении пропорциональна примерно квадрату скорости. В первой

<sup>1)</sup> Подробности, см. Б. А. Бахметев „О неравномерном движении жидкости“, стр. 23 — 25, КУБУЧ, Ленинград, 1928.

половине прошлого столетия господствовал при том взгляд, что величина сопротивлений не зависит от рода стенки. Взгляд этот в наиболее полной и отчетливой форме был высказан в 1804 г. знаменитым инженером и директором Ecole des Ponts et chaussées, Прони, в его классическом сочинении „Recherches physico-mathématique sur le théorie des eaux courantes“, составившим в свое время эпоху в истории гидравлики и, как было выше указано, определившим на целое полстолетие образ мыслей в этом вопросе.

Согласно Прони,

$$Ri = \frac{\tau_0}{\gamma} = av + b'v^2, \dots \dots \dots (a)$$

где  $a$  и  $b'$  — некоторые постоянные, независимые от рода стенок коэффициенты. Для труб Прони вывел путем крайне тщательного анализа данных ряда опытов различных исследователей  $a = 0,000017$ ;  $b = 0,000348$ . Уже из значений коэффициентов видно, что при сколько-нибудь значительных скоростях превалирует второй член выражения (а), т. е. сопротивление делается приблизительно пропорциональным квадрату скорости.

Формулу можно переписать еще в виде

$$Ri = v^2 \left( b' + \frac{a}{v} \right) = bv^2, \text{ где } b = b' + \frac{a}{v} \dots \dots (b)$$

Недоразумения, происходившие на практике при применении формулы Прони (и других, подобно ему не учитывавших влияния шероховатости стенки и стремившихся исправить формулу Прони заменой его коэффициентов другими, также постоянными и „годными“ для всяческих условий), заставили пересмотреть этот вопрос целиком.

2. Формула Дарси. В 1849 г. главный инженер Парижского водопровода Дарси (H. Darcy) предпринял знаменитые свои опыты над движением воды в водопроводных трубах. (Опыты окончены в 1851 г.; описание их: Recherches expérimentales sur le mouvement de l'eau dans les tuyaux de conduites, Paris, 1857). В 1855 г. начались опыты того же инженера над движением воды в открытых каналах. Опыты эти были окончены уже после смерти Дарси его бывшим помощником Базеном. (Recherches hydrauliques par H. Darcy

et Bazin P. 1865)<sup>1)</sup>. Результаты этих классических опытов совершенно перевернули державшиеся до того времени взгляды Прони.

Основной, наиболее важный результат опытов Дарси и Базена состоял в том, что было непосредственно доказано то огромное влияние, которое оказывает на сопротивление состояние стенки. Так, из опытов Дарси над трубами выяснилось, что для чугунной водопроводной трубы одного и того же диаметра и одинаковой длины, сопротивление при одинаковом расходе может увеличиться почти в два раза, если вместо новой трубы, взять старую, бывшую уже много лет в эксплуатации, благодаря чему стенки трубы покрыты осадком, сильно увеличивающим шероховатость.

Еще более разительным примером служит опыт Дарси и Базена, относящийся к 1856 г., в котором в одном и том же экспериментальном канале стенки последовательно устраивались из различных материалов. При одном и том же уклоне и расходе получались при этом совершенно различные скорости. В формуле

$$Ri = bv^3$$

получились следующие значения  $b$ , собранные в таблице 6, в которой для сравнения приведен и соответствующий тем же условиям коэффициент  $b$  по Прони ( $b$ ).

ТАБЛИЦА 6.

(Канал шириною 2 м;  $i = 0,005$ ;  $Q = 1,236$ )  
(Recb. Hydr.)

| Р о д   с т е н к и             | $b$ из опыта | $b$ по Прони | $b \times 2g = f$ |
|---------------------------------|--------------|--------------|-------------------|
| Цементная штукатурка . . . . .  | 0,000 172    | 0,000 327    | 0,00 337          |
| Доски . . . . .                 | 0,000 229    | 0,000 329    | 0,00 450          |
| Кирпичи . . . . .               | 0,000 277    | 0,000 330    | 0,00 545          |
| Мелкий гравий (1—2 см) . . . .  | 0,000 472    | 0,000 335    | 0,00 925          |
| Крупный гравий (3—4 см) . . . . | 0,000 661    | 0,000 338    | 0,01 300          |

<sup>1)</sup> Оба эти классические сочинения по гидравлике удостоились одобрения Французской Академии и были напечатаны в ее мемуарах (Savants élangers). Изучение этих сочинений (особенно второго) и в настоящее время доставляет живейшее удовольствие по ясности и глубине мысли, ширине затронутого материала и образцовой постановке гидравлического эксперимента.

3. „Старая“ формула Базена. Что касается вида общей формулы, выражающей сопротивление, то из своих опытов Дарси и Базен заключили, что отклонения от пропорциональности квадрату скорости незначительны и потому нет нужды в формуле, подобной (а), оставлять член, пропорциональный первой степени скорости. Наоборот, они заметили, что при одной и той же скорости и одинаковом материале стенки, сопротивление несколько уменьшается вместе с увеличением гидравлического радиуса сечения. Поэтому в результате опытов были предложены формулы вида

$$\frac{R \cdot i}{v^2} = b = \alpha \left( 1 + \frac{\beta}{R} \right) \dots \dots \dots (35)$$

Для чугунных новых труб (опыты Дарси обнимали диаметры от 0,012 м до 0,5 м; скорости при этом изменялись от 0,16 м до 5 м/сек), принимая во внимание, что для круглого сечения гидравлический радиус  $R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{4\pi d}{\pi d^2} = \frac{d}{4}$ , Дарси дал (для метрового размера)

$$\frac{d \cdot i}{4} = v^2 \left( 0,000507 + \frac{0,00001294}{d} \right).$$

Для открытых каналов формула сохранила вид (35), причем коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  были даны для 5 категорий (родов) стенок различной степени шероховатости.

4. Формула Шези. При решении вопросов, касающихся движения воды в открытых руслах, соотношения (b) изображают обычно в иной форме, а именно: полагая  $\frac{1}{b} = C^2$ , пишут

$$v = \frac{1}{\sqrt{b}} \sqrt{Ri} = \frac{\sqrt{Ri}}{\sqrt{\alpha \left( 1 + \frac{\beta}{R} \right)}} = C \sqrt{Ri} \dots (35^{bis})$$

5. „Новая“ формула Базена. В 1897 г. Базен несколько упростил формулу (35), предложив выражать величину  $C$  следующим образом:

$$C = \frac{\alpha}{1 + \frac{\gamma_B}{\sqrt{R}}},$$

где  $a$  — постоянная для данной размерности величина, а переменной вместе с шероховатостью стенки является одна лишь величина  $\gamma_B$ .

Для метрового размера Базен придал своей „новой“ формуле вид

$$C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma_B}{\sqrt{R}}},$$

причем нашел удобным дать величину  $\gamma_B$  для шести следующих категорий стенок:

1. Очень гладкие стенки (цементная штукатурка, строганные доски) . . . . . 0,06
2. Гладкие стенки (доски, кирпичи, тесовая кладка) . 0,16
3. Бутовая (чистая) кладка . . . . . 0,46
- 3 bis. Промежуточная категория (грубая бутовая кладка, очень правильные стенки в плотном земляном грунте, замощенные стенки) . . . . . 0,85
4. Земляные стенки в обычном состоянии . . . . . 1,30
5. Земляные стенки, представляющие исключительное сопротивление . . . . . 1,75

Мы привели здесь целиком таблицу коэффициентов шероховатости „новой“ формулы Базена лишь затем, чтобы уяснить, что сами по себе такого рода „категории“, „степени шероховатости“ и пр. являются, очевидно, лишь групповой характеристикой известной группы явлений. Само собой ясно, что на самом деле могут иметь место и все промежуточные между приведенными величинами значения  $\gamma_B$ . При построении практических формул дело, очевидно, идет лишь о том, чтобы объединить более или менее однородные явления и характеризовать полученную группу некоторым средним групповым коэффициентом.

Совершенно ясно, что точность вычислений, основанных на подобных формулах, сравнительно невелика; лишь если имеются данные опыта для условий, совершенно подобных тем, которые имеются в виду произвести, можно с уверенностью ожидать полного совпадения результатов расчета с действительностью. В противном случае надо всегда быть готовым к некоторым несоответствиям в этой области.

6. Классификация гидравлических явлений. Вообще говоря, все гидравлические явления можно разделить на два больших класса: 1) явления, в которых

преобладает трение, вызванное шероховатостью стенок, — и обратно, 2) явления, в которых трение о стенки не играет существенной роли.

Примером первого рода является движение в трубах и каналах; примером второй группы явлений — истечение через отверстие, водослив и пр.

Во второй группе явлений все соотношения количественно устойчивы; поэтому расчеты могут быть производимы с очень большой точностью; явления при этом могут легко быть полностью воспроизводимы и повторяемы. Оба эти обстоятельства служат причиной, почему такого рода явлениями пользуются в качестве „измерителей“. Обратно, — в первой группе, благодаря разнообразию возможных состояний стенок (в зависимости от материалов и их обработки), все соотношения изменчивы и непостоянны: две трубы, казалось бы, одинакового изделия обнаруживают некоторое несогласие в величине сопротивлений. Ясно, что пользование явлениями второго рода в качестве измерителей совершенно недопустимо. Очевидно, что в подобного рода случаях нет никакого смысла считать с большой точностью, стремиться получать результаты с большим числом знаков.

7. Коэффициент шероховатости  $\lambda$ . Изложенное выше определение коэффициента шероховатости стенки, как средней групповой характеристики, вполне объясняет тот простор, который может быть в установлении основных групп явлений. Это и служит причиной появления того огромного числа всякого рода формул, которые предложены для выражения основного соотношения (35). Мы приведем некоторые главнейшие формулы в дальнейшем в специальных главах, посвященных движению воды в трубах и каналах. Теперь же вернемся еще к общему обсуждению основного соотношения (35).

Выражение

$$i = \frac{bv^2}{R} = \frac{v^2}{C^2} \cdot \frac{1}{R}$$

можно преобразовать в

$$i = \frac{f}{R} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

где, очевидно,

$$f = b \cdot 2g = \frac{2g}{C^2}.$$

Формула Дарси для новых чугунных водопроводных труб при этом приобретает вид

$$i = \frac{4b}{d} v^2 \approx 0,005 \left( 1 + \frac{1}{40d} \right) \frac{4}{d} \frac{v^2}{2g},$$

таким образом,

$$f \approx 0,005 \left( 1 + \frac{1}{40d} \right).$$

В практических приложениях ее обычно принимают в форме

$$i = \frac{h_w}{L} = \lambda \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

где

$$\lambda = 4f = 0,02 \left( 1 + \frac{1}{40d} \right) \dots \dots \dots (36)$$

Преимущество выражения сопротивлений через коэффициент  $f = 2gb$  заключается в том, что величина  $f$  не имеет измерения, является просто численным коэффициентом, оди-

наковым для всех мер, тогда как  $C$  имеет измерение  $\frac{L^{\frac{1}{2}}}{T}$  (т. е. корня из ускорения), а  $b$  — обратную ускорению величину, и, следовательно, численные значения их изменяются в зависимости от того, в каких мерах производить расчет.

8. Удельная работа сил сопротивлений. Коэффициент трения жидкости о стенку по Энвину (Unwin). Так как  $i$  есть работа сил сопротивления на единице длины, отнесенная к единице веса жидкости, а  $\frac{v^2}{2g}$  — кинетическая энергия, заключающаяся в единице веса жидкости, то величина  $\frac{f}{R}$  измеряет работу сил сопротивлений на единице длины, отнесенную к кинетической энергии, заключенной в данном объеме жидкости.

Величина

$$f \frac{v^2}{2g} = bv^2 = Ri = \frac{\tau_0}{\gamma}$$

представляет собой также отнесенную к единице веса силу трения, приходящуюся в беспорядочном движении на единицу поверхности стенки.

Величину  $f$  будем вместе с Энвином (Unwin, Treatise on hydraulics; 1897, стр. 133) называть коэффициентом трения жидкости о стенку. Энвин приводит следующие величины коэффициентов трения, полученных при движении в безграничной воде широких плоских фигур.

Как видим коэффициент трения Дарси  $f = \sim 0,005$  близок к коэффициенту первого ряда таблицы.

ТАБЛИЦА 7.

| Род поверхности                                            | $f$           |
|------------------------------------------------------------|---------------|
| Свежеокрашенное железо . . . . .                           | 0,0049        |
| Крашеная строганая доска . . . . .                         | 0,0035        |
| Поверхность жел. корабля (Rankine) . .                     | 0,0036        |
| Поверхность, покрытая лаком (Froude)                       | 0,0026        |
| Поверхность, покрытая песком различной крупности . . . . . | 0,0040—0,0080 |

Величина коэффициента трения  $f$ , приведенная в последней графе таблицы (опыт Дарси—Базена), во всяком случае одного порядка с коэффициентом табл. на стр. 117.

К подобным же величинам привели опыты Энвина над трением при вращении дисков. (См. Enc. Brit. 11 изд., т. XIV, стр. 57).

### § 35. Показательные формулы.

В формулах Дарси—Базена сопротивления принимаются пропорциональными квадрату скорости. На самом деле, как мы указали еще в начале главы, сопротивления в беспорядочном движении пропорциональны не квадрату, а степени лишь близкой ко второй. Это обстоятельство и приводит к типу формул, подобных выражению Прони

$$\frac{Rl}{v^2} = \alpha \left( 1 + \frac{\beta}{v} \right),$$

изменением коэффициента  $b$  исправляющему неправильность основного построения формулы.

1. Формула Сен-Венана (Saint-Venant). Всего лучше все эти явления учитываются применением так называемых показательных формул, т. е. соотношений вида

$$i = \frac{h_w}{L} = \frac{k \cdot v^n}{R^m},$$

где  $k$  — некоторый коэффициент, зависящий лишь от шероховатости стенок, а постоянные  $n$  и  $m$  — показатели степени, указывающие зависимость сопротивлений от той или иной степени скорости и гидравлического радиуса. Нанося на график результаты опытов в логарифмической шкале (т. е. применяя логарифмические анаморфозы), непосредственно из чертежа находят величины  $k$ ,  $n$  и  $m$ . Показательные формулы были предложены еще в 60-х годах прошлого столетия Сен-Венаном и Хагэнном.

В настоящее время формулы эти в большом употреблении, преимущественно у английских и американских гидравликов; практическое пользование ими делается особенно удобным в графической интерпретации в виде номограмм (см. „Равномерное движ. жидкости в трубах и каналах“).

Энвин (см. *Hydraulics*, стр. 217) дал для метрического и футового размера на основании подробного анализа очень большого числа опытов следующие значения показателей  $n$ ,  $m$  и коэффициента  $k$ .

ТАБЛИЦА 8.

| Род труб                           | $k$    |        | $m$  | $n$  |
|------------------------------------|--------|--------|------|------|
|                                    | метры  | футы   |      |      |
| Жесть . . . . .                    | 0,0169 | 0,0265 | 1,10 | 1,72 |
| Железо . . . . .                   | 0,0131 | 0,0226 | 1,21 | 1,75 |
| Железо, крытое асфальтом . . . . . | 0,0183 | 0,0254 | 1,13 | 1,85 |
| Клепаная железная труба . . . . .  | 0,0140 | 0,0260 | 1,39 | 1,87 |
| Чугунная труба (новая) . . . . .   | 0,0166 | 0,0215 | 1,17 | 1,95 |
| „ „ (очищенная) . . . . .          | 0,0199 | 0,0243 | 1,17 | 2,00 |
| „ „ (загрязненная) . . . . .       | 0,0364 | 0,0440 | 1,16 | 2,00 |

Из таблиц ясна причина, побудившая Дарси признать для выражения сопротивления чугунных труб простую формулу (36).

2. Формула Рейнольдса. Крайне интересную попытку построить для трубы универсальную формулу, обнимающую все формы движений, дал Рейнольдс.

В самой общей форме можно написать

$$\Delta p = k \cdot D^x \cdot \eta^y \cdot \rho^z \cdot v^n \cdot l \quad \dots \dots \dots (I)$$

соотношение, лишь выражающее общую зависимость падения давления вдоль трубы от всех возможных факторов<sup>1)</sup>.

Подставляя теперь величины размерности входящих в выражение (1) величин, получаем

$$\begin{aligned} \frac{M \cdot L}{T^2 \cdot L^2} &= k \cdot (L)^x \cdot \left(\frac{M}{LT}\right)^y \cdot \left(\frac{M}{L^3}\right)^z \cdot \left(\frac{L}{T}\right)^n \cdot L = \\ &= k \cdot L^{x-y-3z+n+1} \cdot M^{y+z} \cdot T^{-(y+n)}. \end{aligned}$$

Так как показатели при величинах  $L$ ,  $M$  и  $T$  должны быть в обеих частях уравнения одинаковы, то получаем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} x - y - 3z + n &= -1 \\ y + z &= +1 \\ -(y + n) &= -2 \end{aligned} \right\},$$

решая, имеем

$$\begin{cases} x = n - 3, \\ y = 2 - n, \\ z = n - 1, \end{cases}$$

$$\frac{\Delta p}{l} = k' \cdot D^{n-3} \cdot \eta^{2-n} \cdot \rho^{n-1} \cdot v^n$$

или, деля уравнения на  $\gamma = g \rho$ ,

$$\frac{\Delta p}{l \cdot \gamma} = i = \left(\frac{k'}{g}\right) \cdot \left(\frac{\eta}{\rho}\right)^{2-n} \cdot \left(\frac{v^n}{a^{3-n}}\right) = \text{const} \cdot \left(\frac{\eta}{\rho}\right)^{2-n} \cdot \left(\frac{v^n}{a^{3-n}}\right) \quad (II)$$

<sup>1)</sup> В выражении этом  $\eta$  — коэффициент внутреннего трения;  $\rho = \frac{\gamma}{g}$  — масса единицы объема.

Согласно этой формуле, влияние вязкости, диаметра и пр. зависит от значения показателя  $n$ .

Если  $n=2$ ;  $2-n=0$

$$i = \text{const} \cdot \frac{v^3}{d^5},$$

имеем формулу Дарси (36).

Если  $n=1$  (струйчатое движение  $v < v_{кр}$ ), получаем

$$i = \text{const} \frac{\eta}{\rho} \cdot \frac{v}{d^3} = \text{const} \cdot \frac{v}{d^3},$$

т. е. формулу Пуазейль-Хагенаха для капиллярных трубок.

Величина  $\frac{\eta}{\rho}$  зависит от температуры; по буквальному смыслу ур-ния (II) сопротивление лишь в том случае вообще не зависит от температуры, если  $n=2$ ; если  $n<2$ , то сопротивление и в беспорядочном движении должно несколько зависеть от вязкости и уменьшаться с возрастанием температуры.

С этим согласуются результаты опытов М. Мэра (M. Mair) над сопротивлением в чистой  $1\frac{1}{2}$ -дюймовой латунной трубе при различных температурах.

В этих опытах  $n$  оказалось равным 1,795.

Вот средние значения коэффициента трения  $f$  при различных температурах для скоростей от 4 до 9 фут.

| $t^{\circ}\text{C}$ | $14^{\circ}$           | $43^{\circ}$           | $71^{\circ} 1)$        |
|---------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| $f \dots$           | от 0,0044<br>до 0,0052 | от 0,0037<br>до 0,0041 | от 0,0035<br>до 0,0038 |

### § 36. Выражение внутреннего трения в беспорядочном движении по Буссинеску.

1. Величина силы внутреннего трения в беспорядочном движении. Приведенные в предыдущих параграфах соотношения дают общую оценку работы

1) Enc. Brit., XI изд., отд. Hydraulics.

сопротивлений во всем сечении и тем самым служат основанием для решения целого ряда вопросов практической гидравлики, поскольку приходится искать соотношения между полным расходом или средней скоростью, уклоном и пр. Однако, все вышеизложенное не дает еще детальной картины движения, не может, например, установить даже сколько-нибудь предположительно картину изменения скоростей по сечению.

Для решения подобного рода вопросов необходимо, очевидно, обратиться к рассмотрению сил внутреннего трения, проявляющегося между частицами внутри потока. Для струйчатого движения выражение внутреннего трения, построенное на законах Ньютона, приведено в § 31:

$$T = F \cdot \eta \frac{du}{dn} \dots \dots \dots (A)$$

Для беспорядочного движения вопрос еще более затрудняется тем, что реальных струек не имеется, и, говоря о каких бы то ни было силах в какой-либо точке, надо понимать эти силы опять-таки в среднем „статистическом“ смысле.

Таким образом, постоянная сила  $T$ , действующая в точке  $A$  внутри жидкости по некоторому направлению  $S$ , получается, приравнявая импульс от действия этой силы в течение некоторого времени  $\tau$ , достаточного для получения среднего устойчивого результата, сумме импульсов на то же направление за то же время  $\tau$  всех мгновенных сил  $T'$ , действующих каждая в течение малого промежутка времени  $\delta t$ ; следовательно,

$$T, \cdot \tau = \int_0^{\tau} T' \delta t; \quad T, = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} T' \delta t.$$

Эти осредненные силы (actions moyennes — средние „действия“ — Буссинеска) в конце концов, очевидно, зависят от средних местных скоростей и ускорений. Так, например, в медленно изменяющемся движении, оттого, что „средние“ ускорения в плоскостях живых сечений равны нулю, равны нулю в них также и „средние действия“ сил инерции, благодаря чему и в беспорядочном движении в случае медленно изменяющегося движения давление в плоскостях живых сечений распространяется по гидростатическому закону.

Средние действия сил внутреннего трения направлены касательно к средним местным скоростям, т. е. касательно к „струям“ так, как если бы последние действительно существовали.

При этом Буссинеск предложил выражать силы сопротивления между струйками посредством формулы

$$T_r = F \cdot \epsilon \cdot \frac{du}{dn}, \dots \dots \dots (B)$$

служащей для выражения сил трения в струйчатом движении, с тою лишь разницей, что, вместо постоянного для данной жидкости и температуры коэффициента вязкости  $\eta$ , входящего в уравнение (A) в случае струйчатого движения, в выражение (B) силы трения между струями в беспорядочном движении входит особый переменный по сечению коэффициент внутреннего трения беспорядочного движения, зависящий, как выражается Буссинеск, от степени беспорядочности движения (*intensité d'agitation tourbillonnaire*) в данной точке.

Выше уже было указано, что беспорядочность движения увеличивается с возрастанием:

- 1) шероховатости стенки,
- 2) скорости у стенки.

Кроме этих прямых непосредственных факторов, обуславливающих интенсивность „зарождения“ беспорядочных движений, увеличению степени беспорядочности, вообще говоря, содействуют:

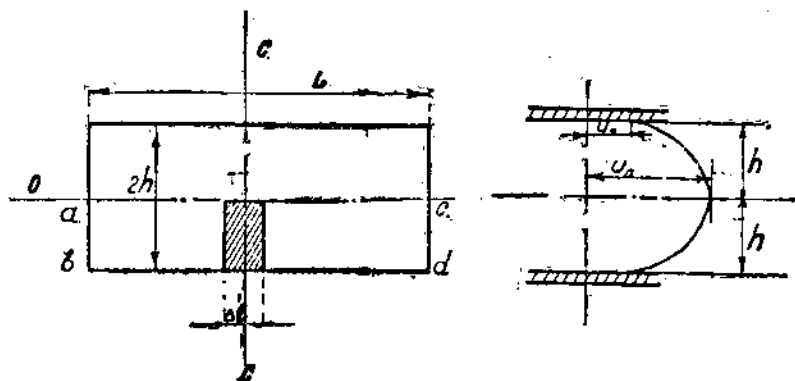
- 3) плотность жидкости,
- 4) полнота сечения (*ampleur de la section* Буссинеска), т. е. мера приходящегося на определенную величину поверхности стенки объема потока, в котором зародившиеся на стенке беспорядочные движения могли бы свободно развиваться.

Величина эта непосредственно характеризуется гидравлическим радиусом, как величиной, измеряющей отношение площади сечения к смоченному периметру, или в определенном отсеке потока между двумя его живыми сечениями — отношение объема отсека к поверхности стенки.

2. Коэффициент внутреннего трения по Буссинеску. На основании вышеизложенных соображений Буссинеск дал следующие выражения коэффициента трения в частных случаях: а) прямоугольного потока бесконечной ширины; б) круглой цилиндрической трубы.

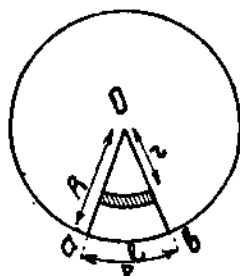
### а) Прямоугольный поток.

Предположим, что ширина прямоугольного потока  $L$  весьма велика по сравнению с его высотой  $2h$ ; в силу этого в сечениях потока  $c-c$ , достаточно удаленных от боковых стенок, движения одинаковы. Очевидно, кроме того, что



Фиг. 66.

движение симметрично относительно оси  $O-O$ ; случай этот одинаково относится либо к движению в прямоугольной трубе, либо в открытом канале, представляющем, очевидно, лишь нижнюю половину  $abcd$  такой трубы. В рассматриваемом случае область потока, подчиненная беспорядочным движениям, возникающим на некоторой части стенки  $\Delta l$ , представляет собою прямоугольник  $\Delta lh$  (заштрихован); гидравлический радиус, очевидно, равен  $h$  (фиг. 66).



Фиг. 67.

Согласно предположению Буссинеска беспорядочность движения одинакова во всем заштрихованном объеме и, согласно вышеизложенному, принимает вид:

$$\epsilon = A \cdot \gamma \cdot H \cdot u_0,$$

где  $A$  — коэффициент, зависящий от шероховатости стенки.

б) Для круглой трубы область, подчиненная возникающим на элементе стенки  $\Delta l$  беспорядочным движениям, представляется в виде сектора  $aOb$  (фиг. 67).

По мере приближения к центру зародившиеся на поверхности стенки движения принуждены разворачиваться во все более и более тесном пространстве; происходит как бы концентрация беспорядочных движений; степень беспорядочности, следовательно, по мере приближения к центру возрастает; возрастание беспорядочности происходит в зависимости от величины  $\frac{R}{r}$ ; таким образом,

$$u = A \cdot \gamma \cdot u_0 \cdot \frac{R}{2} \psi \left( \frac{R}{r} \right),$$

где  $\frac{R}{2}$  — гидравлический радиус круглого сечения, а  $\psi \left( \frac{R}{r} \right)$  — некоторая определенная функция от  $\frac{R}{r}$ .

В своих первых работах (*Théorie des eaux courantes*, 1877) Буссинеск сделал относительно функции  $\psi$  наиболее простое предположение, а именно, положил

$$\psi \left( \frac{R}{r} \right) = \frac{R}{r}.$$

Полученная при этом картина распределения скоростей в общем хорошо совпадала с результатами опытов Дарси над распределением скоростей в трубах. Впоследствии Буссинеск на основании более детального экспериментального изучения распределения скоростей в трубе Базеном усложнил вид  $\psi \left( \frac{R}{r} \right)$ .

Мы вернемся к этим вопросам и сопоставим выводы Буссинеска с результатами опытов во второй части курса. Здесь же ограничимся лишь общим указанием на достаточно удовлетворительную сходимость опыта и теории.

Заметим еще, что сопротивления определяются по формуле (B) лишь внутри потока, где изменение скорости непрерывно и  $\frac{du}{dn}$  тем самым конечно. На внешних границах потока у стенки, как было выше указано, изменение скорости претерпевает разрыв; здесь, согласно Буссинеску,

величина сопротивления на единице поверхности просто равна

$$\tau \cdot B \cdot u_0^2.$$

Величина эта в нашем предыдущем изложении обозначалась  $\tau(u_0)$ .

### § 37. Потери на „удар“.

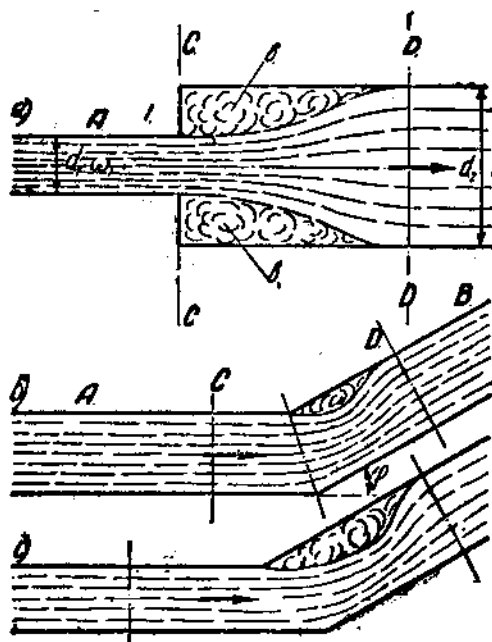
1. Картина явления. Рассмотрим теперь обстоятельства, сопровождающие быстрые изменения конфигурации

потока, явления, которые принято называть явлениями „удара“.

Фиг. (68-а) соответствует „удару“ при внезапном увеличении сечения. В сечении С труба А (площадь сечения  $\omega_1$ ) соединяется с трубой В (площадь сечения  $\omega_2$ ).

Обе трубы предполагаются достаточно длинными для того, чтобы влево от сечения С—С и вправо от сечения D—D установилось равномерное движение. В этих частях поэтому имеют место „нормальные“ потери от трения струй между собой

и о стенки, рассмотренные в предыдущих отделах. Между сечениями С и D имеется сравнительно короткий переходный участок (С—D), на котором и происходит быстрое изменение режима, происходит почти внезапное изменение величины скорости с  $v_1 = \frac{Q}{\omega_1}$  в сечении С—С на  $v_2 = \frac{Q}{\omega_2}$  в сечении D—D.



Фиг. 68.

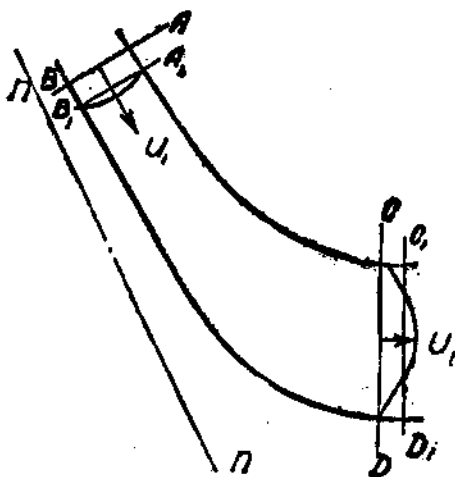
Фиг. (68-б) соответствует удару при внезапном изменении направления потока. Трубы А и В одинакового сечения и формы в сечении  $O—O$  соединены под углом  $\varphi$ . Здесь, таким образом, на переходном участке  $C—D$  имеет место быстрое изменение направления скорости, хотя величина ее остается постоянной. Случай (с) соответствует одновременному резкому изменению как величины, так и направления скорости.

Все эти явления быстрого изменения конфигурации потока сопровождаются значительными потерями энергии; потери эти, сосредоточивающиеся в переходных участках, называются обычно потерями „на удар“.

По сравнению с последними, сопротивление от трения в установившемся равномерном движении, вообще говоря, крайне незначительны; обыкновенно в пределах переходных участков ими даже совершенно можно пренебрегать, ограничиваясь, таким образом, при рассмотрении случаев быстрого изменения обстоятельств движения лишь потерями на „удар“.

2. Случай внезапного увеличения сечения (теорема Борда). При рассмотрении этого вопроса со времени Беланже (Bélanger)<sup>1)</sup> пользуются законом изменения количества движения, примененным к находящемуся в установившемся движении потоку жидкости.

В потоке (фиг. 69) выделим отсек жидкости между двумя живыми сечениями  $AB$  и  $CD$ . Рассмотрим элементарное перемещение отсека в течение бесконечно малого промежутка



Фиг. 69.

<sup>1)</sup> Знаменитый французский инженер и профессор Ecole de ponts et chaussées. Приводимое здесь рассмотрение дано им в 40-х годах в лекциях, читанных в названной выше школе.

времени  $\Delta t$  из положения  $ABCD$  в положении  $A'B'C'D'$ ; очевидно, объемы  $ABA'B'$  и  $CDC'D'$  равны между собой и равны каждый сам по себе  $Q\Delta t$ .

Применим закон изменения количества движения к отсеку на рассматриваемом перемещении. Так как движение установившееся, то изменение количества движения отсека равно разности количеств движения в объемах  $CDD'C'$  и  $ABB'A'$ , т. е. равно разности  $\frac{\gamma}{g} Q \Delta t \alpha_0 v_2$  и  $\frac{\gamma}{g} Q \Delta t \alpha_0 v_1$  <sup>1)</sup>; при

этом вектор, изображающий направление количества движения, совпадает с направлением средних скоростей  $v_1$  и  $v_2$ .

На основании закона изменения количества движения имеем, что проекция на какое-нибудь направление изменения количества движения системы за некоторый промежуток времени равна импульсу за то же время проекций на выбранное направление действующих на систему внешних сил <sup>2)</sup>.

В применении к нашему отсеку, выбирая направление  $n-n$ , имеем

$$\frac{\gamma}{g} Q \cdot \Delta t \left( \alpha_0 v_2 \cdot \cos(v_2, n) - \alpha_0 v_1 \cos(v_1, n) \right) = \sum F_i \cos(F_i, n) \cdot \Delta t,$$

где  $\sum F_i$  обозначает сумму всех действующих на отсек внешних сил, т. е. давлений в плоскостях живых сечений, а также реакций стенок и сил трения на них.

Для установившегося движения, для которого величины расхода, скоростей и действующих сил не изменяются по времени, имеем

$$\frac{\gamma}{g} Q \left[ \alpha_0 v_2 \cdot \cos(v_2, n) - \alpha_0 v_1 \cos(v_1, n) \right] = \sum F_i \cos(F_i, n).$$

Величины  $\frac{\gamma}{g} Q \alpha_0 v_2$  и  $\frac{\gamma}{g} Q \alpha_0 v_1$  представляют собой количества движения, заключенные в вытекающей и втекающей в отсек в единицу времени массе жидкости.

Разность проекций этих величин непосредственно равна сумме проекций действующих на отсек внешних сил.

<sup>1)</sup> В этих выражениях коэффициент  $\alpha_0$  учитывает неодинаковость скоростей в сечениях. См. выше стр. 71.

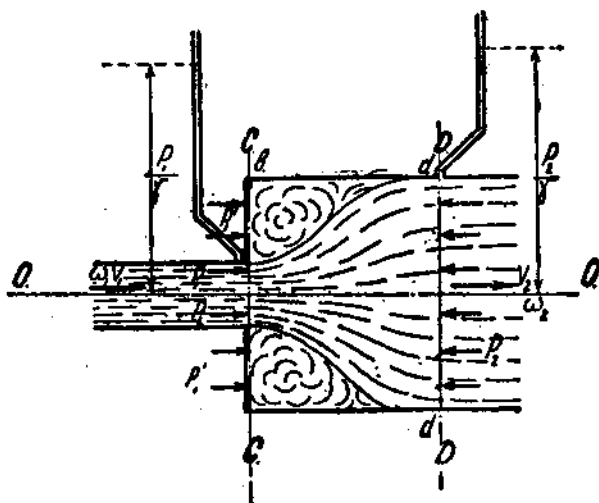
<sup>2)</sup> Очевидно, что импульсы внутренних сил, как попарно равных и противоположных, уничтожаются.

Применяя вышеизложенное к случаю внезапного расширения сечения, имеем для оси  $O-O$  (фиг. 70) изменение количества движения за единицу времени

$$\frac{\gamma}{g} Q \Delta t (\alpha_0 v_2 - \alpha_0 v_1).$$

При составлении импульса сил пренебрегаем, как сравнительно малыми, силами трения струй о стенки.

Таким образом, в выражение импульса войдут лишь равнодействующие давлений на площадку  $a-a$  в сечении  $C$ ,



Фиг. 70.

на площадку  $d-d$  в сечении  $D$ , равные соответственно  $\omega_1 p_1$  и  $\omega_2 p_2$ , и, наконец, равнодействующая давлений на кольцевую поверхность  $a-b$ , которую приравниваем

$$(\omega_2 - \omega_1) p'_1,$$

где  $p'_1$  есть некоторое среднее давление на эту поверхность.

Уравнение изменения количества движения примет вид

$$\frac{\gamma}{g} Q (\alpha_0 v_2 - \alpha_0 v_1) = \omega_1 p_1 + (\omega_2 - \omega_1) p'_1 - \omega_2 p_2 \dots (a)$$

Все затруднение, очевидно, в определении давления  $p'_1$ . Беланже в своем выводе предполагает, что среднее давление  $p'_1$  равно  $p_1$ , давлению в центре тяжести струи  $a-a$ . Это предположение равносильно тому, что давление по всему сечению  $C-C$  распространяется по гидростатическому закону, т. е. не только в пределах струи  $a-a$ , где это, благодаря параллелизму струй, совершенно верно, но также и в пределах  $a-b$ , т. е. кольцевой поверхности, граничащей с вихревым мешком ( $k$ ).

Если принять предположение Беланже, то из уравнения (а) непосредственно следует, заменяя  $Q = \omega_2 v_2$  и считая  $\alpha_0 = \sim 1$ :

$$\frac{v_2^2}{g} \left( 1 - \frac{v_1}{v_2} \right) = \frac{p_1 - p_2}{\gamma}.$$

Удельная энергия в сечении  $D-D$

$$E_2 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma} - \frac{v_2^2}{2g} + \frac{2v_2 v_1}{2g} = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} - \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g};$$

таким образом, потеря энергии (потеря напора) при ударе

$$h_{\text{уд}} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} \dots \dots \dots (37)$$

Это и есть теорема Борда (Borda)<sup>1)</sup>, называемая по имени французского ученого, впервые нашедшего соотношение (37).

3. Опыты Гибсона. Соотношение (37) в общем достаточно удовлетворительно оправдывается опытом. Ясно отсюда, что и предположение Беланже должно в общем быть правильным.

Гибсон (Gibson) в своем курсе гидравлики приводит данные опытов в трубах, размеры которых приведены на фиг. 71.

(Таблица из Гибсона приведена на стр. 137).

При этом помещенные в таблице значения  $p'$  вычисляются как средние арифметические из показаний пьезометров 3, 4 и 5. Как видим, в опытах Гибсона расходимость теории с опытом увеличивается с увеличением скоростей.

<sup>1)</sup> „Mémoire sur l'écoulement des fluides par les orifices des vases par M le chevalier de Borda (Hist. de l'Ac. R. de Science, 1766).

Нам представляется, что причиной этого явления может быть отчасти недостаточность расстояния  $l$  между сечениями С—С и манометром 9; возможно, что в сечении 9 еще не успевало установиться параллельное движение. Однако, тот факт, что с увеличением скоростей возрастает также и расходимость величин  $p$  и  $p'$ , указывает, что совпадения теории с опытом здесь быть не должно, что потери напора должны быть на самом деле больше, чем следует по формуле Борда.

Вообще говоря, в приведенном выше выводе Беланже самым слабым местом является несомненно именно предположение относительно распределения давлений по кольцевой поверхности ( $a-b$ ).

Желательно поэтому вовсе избежать необходимости так или иначе учитывать величину этого давления.

4. Теория удара по Борда. Сам Борда получил соотношение (37), непосредственно применяя к рассмотрению явления найденные незадолго перед тем Гюйгенсом теоремы о потере живой силы при ударе неупругих тел.

По Борда, масса жидкости, вытекающая из трубы А со скоростью  $v_1$ , нагоняет двигающуюся более медленно жидкость в трубе В со скоростью  $v_2$  и, ударившись, продолжает далее двигаться с нею вместе, не разъединяясь, с общей скоростью  $v_3$ , подобно тому, что происходит при свободном ударе неупругих шаров или вообще двух неупругих тел.

Хотя результат, к которому пришел Борда, верен, однако, его вывод скорее блестящая аналогия, чем результат строго механического уозрения. Жидкости, по существу, вовсе не неупруги, и прилагать к рассматриваемому случаю непосредственно теорию удара свободных неупругих тел не представляется возможным.

5. Неупругий удар. Теорема Карно. Вопрос ставится совершенно иначе, если разбираемый случай рас-

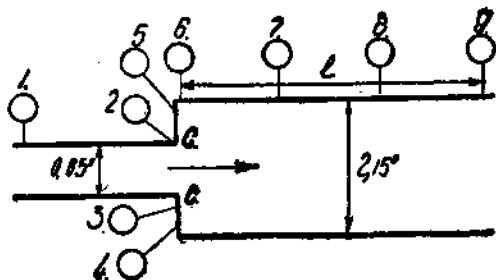


Fig. 71.

сма тривать с точки зрения теории *неупругого удара*, как последняя рассматривается вообще в динамике системы и если в частности воспользоваться для определения потерь так называемой теоремой Карно.

Неупругим ударом в динамике системы называется быстрое (почти мгновенное) наложение на систему остающихся связей. Отдельные элементы системы могут состоять из тел упругих либо неупругих. Это безразлично. Необходимо лишь, чтобы внезапно введенные в систему связи сохранялись, не уничтожались. Тем самым после неупругого удара движения системы подчиняются новым связям, т. е. возможные перемещения системы уже иные, соответствующие новым связям, чем были раньше до удара.

В упругом ударе этот „первый“ период внезапного наложения связей сопровождается „вторым“ периодом столь же быстрого полного их разрушения; таким образом, по окончании этого периода возможные перемещения системы — те же, что и до удара. В. Л. Кирпичев <sup>1)</sup> предлагает называть „первый“ период (наложение связей) просто „ударом“; второй — разрушение связей — „взрывом“. Таким образом, в „упругом ударе“ удар сопровождается взрывом; в неупругом ударе взрыва нет, явление ограничивается лишь „ударом“.

В неупругом ударе величина живой силы, потерянной системой, определяется по так называемой теореме Карно. Согласно последней, величина живой силы, потерянная системой, равна живой силе, соответствующей потерянными скоростям, т. е. равна живой силе, которую имела бы система, если бы каждая точка ее обладала той скоростью, которую она в результате удара потеряла.

Эта общая теорема дает возможность, хотя бы приближенно, решать весьма много вопросов в гидравлике. Особенно важно ее применение в теории гидравлических ротационных машин (турбин, центробежных насосов и т. д.).

В применении к рассматриваемому случаю теорема Карно непосредственно приводит к теореме Борда.

Действительно, в нашем случае уравнением связи служит уравнение непрерывности, в силу которого скорость в трубе В, при полном ее заполнении, должна иметь величину

$$v_2 = \frac{Q}{\omega_2} = v_1 \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

<sup>1)</sup> Беседы о механике, стр. 320, СПб., 1907.

ТАБЛИЦА 9.

(Osborn, "Hydraulics and its applications", стр. 84, 1908 г. London).

| №  | Скорость в фут. в сек. |       | Давление по манометру в футах |              |       |       |             | $\frac{p_1 + \frac{v_1^2}{2g}}{\gamma}$ | $\frac{p_2 + \frac{v_2^2}{2g}}{\gamma}$ | Потеря напора из опыта | Вычисл. потеря напора $\frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}$ | Оноше-ние дей-ствит. по-тери нап. к вычисл. |
|----|------------------------|-------|-------------------------------|--------------|-------|-------|-------------|-----------------------------------------|-----------------------------------------|------------------------|--------------------------------------------------|---------------------------------------------|
|    | $v_1$                  | $v_2$ | (1)                           | (2 = $p^1$ ) | (7)   | (8)   | (9) = $p_2$ |                                         |                                         |                        |                                                  |                                             |
| 1  | 0,262                  | 2,87  | 0,670                         | 0,655        | 0,650 | 0,658 | —           | 0,783                                   | 0,676                                   | 0,107                  | 0,1059                                           | 1,011                                       |
| 2  | 0,382                  | 4,195 | 2,100                         | 2,078        | 2,070 | 2,083 | 2,108       | 2,351                                   | 2,118                                   | 0,233                  | 0,226                                            | 1,031                                       |
| 3  | 0,549                  | 6,01  | 0,675                         | 0,640        | 0,622 | 0,645 | 0,710       | 1,203                                   | 0,720                                   | 0,483                  | 0,465                                            | 1,041                                       |
| 4  | 0,8235                 | 9,02  | 1,480                         | 1,425        | 1,378 | 1,440 | 1,570       | 2,690                                   | 1,587                                   | 1,103                  | 1,041                                            | 1,060                                       |
| 5  | 1,111                  | 12,19 | 2,735                         | 2,605        | 2,545 | 2,630 | —           | 4,915                                   | 3,199                                   | 2,016                  | 1,096                                            | 1,058                                       |
| 6  | 1,386                  | 15,20 | 1,040                         | 1,090        | 0,962 | 1,070 | 1,463       | 4,682                                   | 1,519                                   | 3,163                  | 2,975                                            | 1,064                                       |
| 7  | 1,657                  | 18,18 | 1,080                         | 0,885        | 0,702 | —     | 1,395       | 6,015                                   | 1,468                                   | 4,547                  | 4,250                                            | 1,069                                       |
| 8  | 2,185                  | 23,95 | 1,440                         | 1,170        | 0,855 | 1,120 | 2,040       | 10,080                                  | 2,154                                   | 7,926                  | 7,350                                            | 1,080                                       |
| 9  | 2,532                  | 27,80 | 1,750                         | 1,455        | 1,055 | —     | 2,470       | 13,465                                  | 2,635                                   | 10,830                 | 9,940                                            | 1,091                                       |
| 10 | 2,841                  | 31,20 | 2,150                         | 1,810        | 1,285 | —     | 2,990       | 16,930                                  | 3,066                                   | 13,854                 | 12,490                                           | 1,110                                       |

При переходе из сечения  $C—C$  в  $D—D$  налагается связь, в силу которой скорость должна быстро упасть с  $v_1$  до  $v_2$ . Потерянная скорость:

$$v_1 - v_2.$$

Живая сила, соответствующая потерянной скорости, отнесенная к единице веса

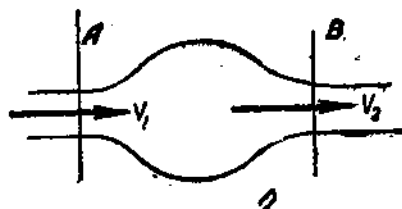
$$h_w = \frac{1}{2g}(v_1 - v_2)^2,$$

т. е. выражение (37).

### § 38. Местные потери. Коэффициент сопротивления Вейсбаха (Weissbach).

Как мы видели выше, в случае внезапного расширения сечения теорема Карно дает результаты, подтверждаемые опытом. К сожалению, это почти единственный случай, когда умозрительными соображениями удастся сколько-ни-

будь удовлетворительно определить величину потерь. Обыкновенно потери, происходящие при быстрых изменениях конфигурации, потери, которые в гидравлике принято характеризовать определением „местных“, приходится учитывать посредством тех или иных эмпирических формул.



Фиг. 72.

При этом большую пользу приносит понятие о так называемом коэффициенте сопротивления, введенным еще в 40-х годах прошлого столетия Вейсбахом.

Суть дела заключается в следующем. Так как в беспорядочном движении сопротивления пропорциональны примерно квадрату скорости, то потерю удельной энергии на отсеке  $AB$  потока (фиг. 72), в котором нарушено медленно изменяющееся движение, можно выразить в функции от кинетической энергии  $\frac{v^2}{2g}$ . При этом потери можно отнести

либо к скорости  $v_1$ , либо к  $v_2$ . Таким образом, потерю напора  $h_m$  на участке  $AB$  можно выразить

$$h_{m, AB} = \zeta_{(1)} \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_{(2)} \frac{v_2^2}{2g}, \dots (38)$$

где  $\zeta$  — абстрактное число.

Коэффициент  $\zeta$  и есть коэффициент сопротивления Вейсбаха. Очевидно, таким коэффициентом можно характеризовать не только „местные потери“.

Так, например, для случая прямой цилиндрической трубы длины  $L$  и диаметра  $d$  коэффициент сопротивления

$$\zeta = \lambda \cdot \frac{L}{d}.$$

Для случая внезапного расширения, переписывая формулу (37) соответственно

$$h_m = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} = \frac{v_1^2}{2g} \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \frac{v_2^2}{2g} \left(\frac{v_1}{v_2} - 1\right)^2,$$

имеем

$$\zeta_{(1)} = \left(\frac{v_1 - v_2}{v_1}\right)^2; \quad \zeta_{(2)} = \left(\frac{v_1 - v_2}{v_2}\right)^2.$$

В справочных книжках приводятся значения коэффициентов  $\zeta$  для различного рода местных потерь, как, например, для случая (фиг. 68) внезапного изменения направления труб, закруглений, водопроводных клапанов, задвижек и пр.

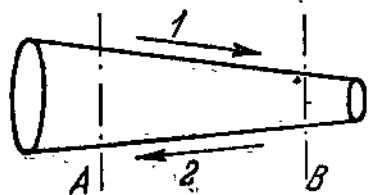
Некоторые из этих коэффициентов мы воспроизведем во второй части курса. Заметим лишь, что к большинству таких коэффициентов в справочниках надлежит относиться с осторожностью. Обычно не приводятся совершенно данных об условиях опыта и размерах испытанных расположений. Очень часто приводятся коэффициенты, полученные еще самим Вейсбахом из сравнительно небольшого числа опытов.

При этом вопрос о том, насколько эти формулы общи и насколько по общему построению они отвечают тому или иному явлению, часто даже не подвергается рассмотрению.

Область изучения явлений местных потерь поэтому надо в общем считать совсем не исследованной, и здесь имеем еще обширное поле деятельности как для чисто экспериментального определения коэффициентов, так и для изучения всего явления в целом.

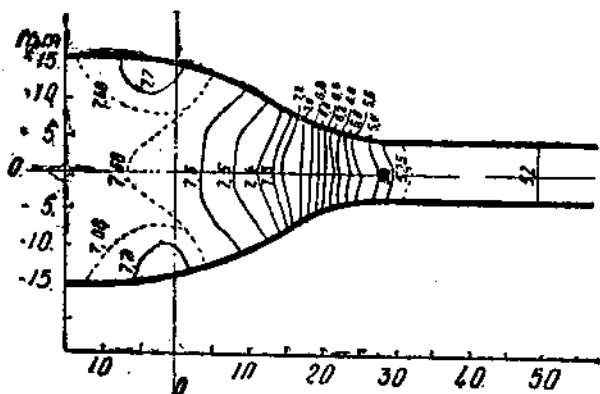
### § 39. Потери в расходящемся и сходящемся потоке.

1. Критическая скорость в сходящемся и расходящемся потоке. Рассмотрим еще вопрос о потерях в сходящемся и расходящемся потоке. Дело в том, что если определять потерю напора, скажем, между сечениями А и В (фиг. 73) при движении слева направо (в сходящемся потоке) и справа налево (в расходящемся потоке), то, как показывает опыт, потери эти будут далеко не одинаковы. Они будут именно много больше в случае расходящегося потока.



Фиг. 73.

Уже Рейнольдс отметил, что расходящиеся стенки (divergent boundaries) увеличивают „степень беспорядочности“, сходящиеся — наоборот. Расходящиеся стенки уменьшают „устойчивость“ движения, благодаря чему величина критической скорости соответственно понижается по сравнению

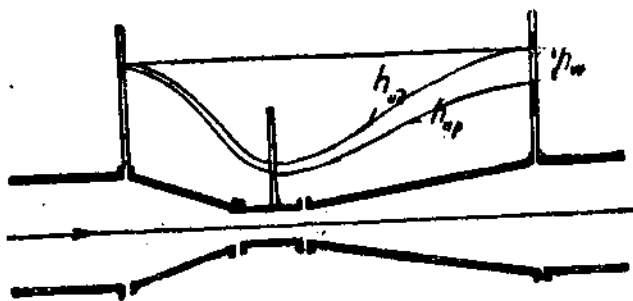


Фиг. 74.

с цилиндрической трубой; обратно, при сходящихся стенках движение из струйчатого переходит в беспорядочное при значительно больших скоростях, чем в цилиндрической трубе; величина критической скорости повышается.

2. Опыты Гохшильда (Hochschild). Гохшильд<sup>1)</sup> в своих опытах над движением жидкостей в суживающихся, а затем расширяющихся каналах (один из опытных каналов приведен на фиг. 74) показал, что в головной, суживающейся части распределение давлений весьма близко совпадает с тем, которое соответствует потенциальному движению.

Таким образом, здесь влияние сил сопротивления незначительно, и последние не нарушают существенно картины движения, получаемой в предположении жидкости идеальной. Наоборот, в расширяющейся части, благодаря



Фиг. 75.

усиленной турбуленции, картина движения резко разнится от соответствующей потенциальной.

Потери в расходящемся потоке увеличиваются по мере увеличения угла расходимости. Это и служит причиной того, почему, например, в водомере Вентури сходящаяся часть делается короткой, тогда как расходящийся конус делается по возможности длинным с малым углом расходимости. В первой части (фиг. 75) потери невелики; потенциальная энергия переходит почти полностью в кинетическую; наоборот, в расходящейся части даже при пологих конусах восстановление кинетической энергии в потенциальную совершается с значительными потерями.

3. Опыты Андреса (Andres). Интересный опыт в этом направлении произвел К. Андрес<sup>2)</sup>.

Последний передвигал через движущуюся в соплах жидкость (одно из испытаний Андреса, см. фиг. 76) соеди-

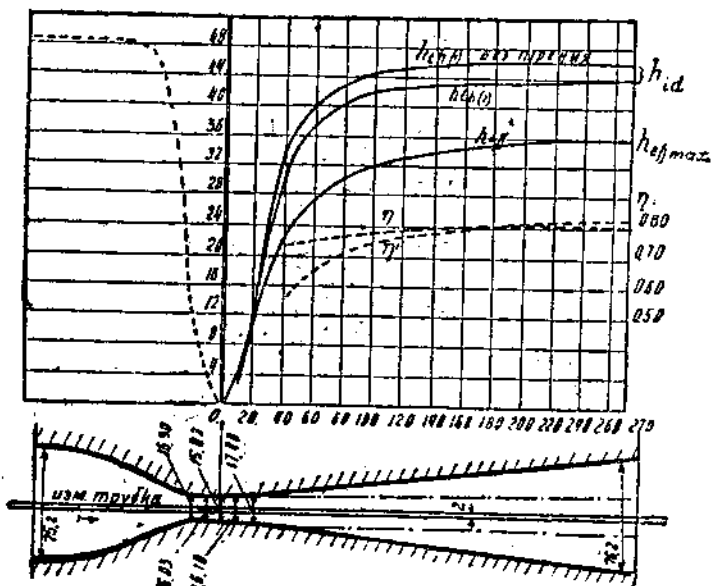
<sup>1)</sup> Mitteilungen über Forschungsarbeiten. Heft 114, Berlin, 1912.

<sup>2)</sup> Mitteilungen über Forschungsarbeiten, Heft 76.

ненную с манометром тоненькую трубочку с отверстием; устанавливая последнюю в том или ином сечении, можно было измерять величину давления в различных сечениях потока.

Одна из полученных им диаграмм изображена на фиг. 76.

Кривая  $h_{ef}$  изображает полученную из опыта кривую давлений,  $h_{th(1)}$ ,  $h_{th(2)}$  представляют собою кривые давлений, вычисленные по уравнению Бернулли, первая—не принимая



Фиг. 76.

во внимание никаких потерь, вторая — считая потери как нормальные от трения по формуле равномерного движения.

Кривая  $\eta = \frac{h_{ef}}{v_m^2 - v^2}$  есть так называемый коэффициент вос-

становления, т. е. отношение действительной потенциальной энергии в сечении к теоретической, т. е. к той, которая имела бы место, если бы потерь вовсе не было.

В приведенном примере коэффициент восстановления сравнительно высок, около 0,77; в случае более резко расходящегося русла коэффициент этот падает иногда до 0,52 (см. Андрес, стр. 33).

4. Величина потерь и распределение удельной энергии в расходящихся насадках. Величина потерь, как было выше указано, в расходящихся потоках возрастает с углом расхождения; уже при сравнительно не слишком большом угле потеря почти что достигает величины, определяемой по теореме Борда, т. е. коническая вставка между трубами I и II как будто уже не оказывает влияния; явление протекает так, как если бы трубы соединялись непосредственно, как изображено на фиг. 77. Очевидно, надо предполагать, что в этом случае при движении в расходящейся части  $k$  не имеет места непрерывное заполнение конической части движущимся потоком. Повидимому, движущийся поток ( $n$ ) отделен от стенок вихревым мешком  $b$  и  $b$  и в сечении  $B$  ударяется о медленно движущуюся жидкость в трубе II.

На фиг. 78, заимствованной из упомянутой выше работы Гохшильда, изображено распределение полной энергии

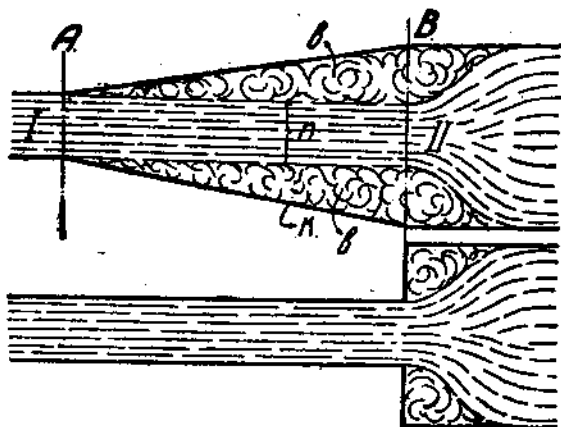
$\left(\frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}\right)$  в различных сечениях расширяющегося канала,

в виду того, что, как показали предварительные опыты, давления в одном и том же сечении мало разнятся друг от друга, кривые на фиг. 77 в общем изображают распределение скоростей. Указанное выше предположение об отделении потока от стенки и образовании вихревого мешка подтверждается этими опытами. Особенно интересна диаграмма (4), изображающая распределение скоростей уже за пределами расширяющейся части в цилиндрической трубе; как видим, и здесь скорости далеко еще не выравнялись, и струя продолжает течь в середине трубы, отделенная от стенок пространством, наполненным водоворотами.

В настоящее время гидравлика не располагает еще достаточным количеством опытов, которые позволяли бы точно заключить, при каких условиях (углах расхождения и скоростях) происходит отделение струи от стенки и движение струи с поверхностями раздела, окаймленной вихревыми мешками. Есть кое-какие основания предполагать, что с увеличением скорости угол, при котором происходит отделение, уменьшается. Что касается величины угла, то,

судя по всему, он невелик и при малых скоростях близок к  $10^\circ$ .

5. О восстановлении кинетической энергии в потенциальную. То обстоятельство, что восстановление кинетической энергии в потенциальную сопровождается значительными потерями и не происходит в совершенной форме, дает нам, между прочим, очень простое объяснение той разницы, которая наблюдается в отдачах гидравлических двигателей и центробежных насосов.

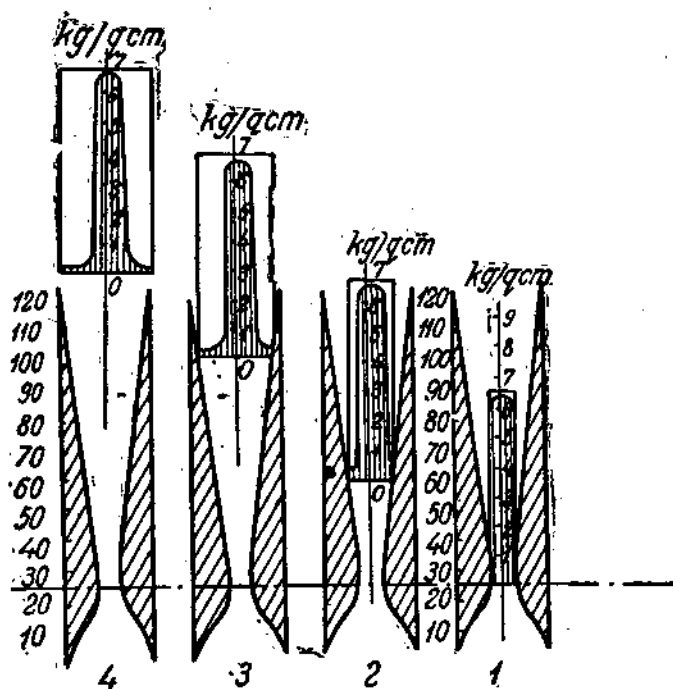


Фиг. 77.

Тогда как турбины строятся в настоящее время настолько совершенно, что достигаются порой коэффициенты полезного действия значительно выше 0,85, а отдача 0,8—0,85 считается уже обычной, в турбинных насосах при самой тщательной конструкции и лучшей постройке коэффициент полезного действия значительно ниже. Отдачу 0,6—0,7 надо считать нормальной. Более высокие коэффициенты полезного действия получаются редко и при исключительных условиях.

Обстоятельство это объясняется, по нашему мнению, тем, что в турбинах на всем протяжении движения воды до выхода из рабочего колеса имеется переход потенциальной энергии в кинетическую, совершаемый, как выше было указано, почти без потерь. Наоборот, в турбинном

(центробежном) насосе имеет место все время переход кинетической энергии в потенциальную. Связанная с последним неизбежность значительного рассеяния энергии и ведет к тому, что при всех прочих равных условиях двигатель всегда будет совершеннее и лучше работать, чем насос.



Фиг. 18.

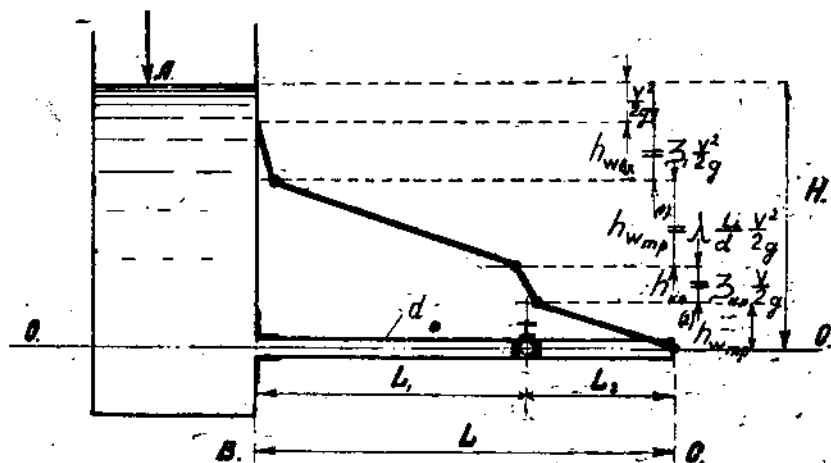
Хотя факт увеличения потерь в расходящемся потоке был известен уже давно<sup>1)</sup>, тем не менее к обстоятельному изучению этого вопроса приступили в самое последнее время в связи с тем значением, которое имеет „восстановление кинетической энергии“ в турбинных насосах и пр.

<sup>1)</sup> См., например, во II части опыт Фрэнсиса (Fransis) (1860 г.) и Флигнера (Flegner) (1875 г.) над истечением через конически расходящиеся насадки.

## § 40. Практические приложения уравнения Бернулли. Принцип наложения потерь.

Наметим теперь общий путь решения различного рода практических вопросов, исходя из уравнения Бернулли и пользуясь для выражения сопротивления выводом и соображениями последних параграфов. Всего лучше это сделать разбором ряда отдельных случаев.

1. Истечение из бака через трубопровод в атмосферу. Истечение воды из бака *A* через трубку



Фиг. 79.

длиною  $L = 100$  м, диаметром  $d = 10$  см, вделанную заподлицо в стенку бака. В трубе устроен водопроводный клапан *k*. Уровень воды в баке постоянный. Напор (превышение свободного уровня воды в баке над центром трубы в сечении *B*)  $H = 10$  м.

Беря ось  $O-O$  за плоскость сравнения, напишем уравнение Бернулли для свободной поверхности *A* и выходного сечения трубы *C* (фиг. 79).

Составляя уравнение, имеем

$$H + \frac{p_a}{\gamma} + \frac{v_a^2}{2g} = \frac{p_a}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + \Sigma h_w$$

В этом выражении  $\frac{p_a}{\gamma}$  — одинаковые в сечениях А и С давления, равные атмосферному;  $v_a$  — средняя скорость в сечении А, величина, благодаря значительным размерам сечения, малая;  $v$  — скорость в трубе; таким образом пренебрегая  $v_a$ , имеем

$$H = \frac{v^2}{2g} + \sum h_w$$

При определении  $\sum h_w$  придется считаться со следующими отдельными потерями:

а) Потеря при входе в трубу обуславливается тем, что (фиг. 80), входя, струя сначала суживается, а затем расширяется до полного сечения трубы, причем при расширении и происходит потеря энергии.

Величина этой потери на вход

$$h_{w \text{ вх}} = \zeta_1 \frac{v^2}{2g},$$

где для случая, изображенного на фиг. 80,  $\zeta_1 \approx 0,5$  (см. II часть).

б) Потери на прямых участках цилиндрических труб длин  $L_1$  и  $L_2$ , равные согласно формуле (36),

$$h_{w \text{ тр}_1} = \lambda \cdot \frac{L_1}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \text{ и } h_{w \text{ тр}_2} = \lambda \cdot \frac{L_2}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

Примем, по Дарси, для новых труб

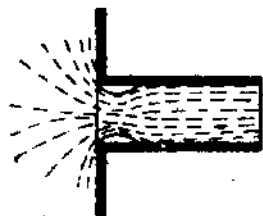
$$\lambda = 0,02 \left( 1 + \frac{1}{40d} \right) = 0,025 = \frac{1}{40}.$$

с) Потери в водопроводном клапане

$$h_{w \text{ кл}} = \zeta_{\kappa} \frac{v^2}{2g}.$$

Берем  $\zeta$  — для водопроводного клапана = 7 <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Б. А. Бахметев и М. В. Кирпичев. О сопротивлении водопроводных клапанов. Изв. СПб, П. И. 1908 г., т. 10.



Фиг. 80.

2. Наложение потерь. При решении вопросов, подобных поставленному, делают, по почину французских гидравликов начала XIX столетия, предположение, что отдельные потери просто складываются, т. е. что общая потеря на определенном потоке, обусловленная совокупным действием всех сопротивлений вместе взятых, равна сумме отдельных потерь; такой прием „наложения потерь“, с самого начала введенный в гидравлику без особого рассмотрения его допустимости и поддерживаемый традицией, на самом деле несомненно неправилен. Действительно, хотя бы для рассматриваемого случая потери в прямых трубах берутся с коэффициентом, соответствующим установившемуся равномерному движению, движению с определенной картиной распределения скоростей и с обуславливаемой таковой беспорядочностью движения.

Ясно, что, например, непосредственно за входным в трубу участком или после клапана нормальное распределение скоростей нарушено. Беспорядочность движения отлична от нормальной, соответствующей равномерному установившемуся движению; очевидно, отличны и сопротивления.

В настоящее время, однако, гидравлика не располагает ни опытным ни теоретическим материалом, достаточным для учета подобного рода неправильностей. Поэтому волей-неволей, за неимением лучшего, мы принуждены пользоваться принципом наложения потерь, имеющим огромное достоинство простоты и гибкости в приложениях.

К тому же обратим внимание на то, что в наиболее важных практических случаях приходится иметь дело с длинными линиями трубопроводов, каналов и пр.; в этом случае влияние таких отклонений и неправильностей незначительно.

3. Коэффициент сопротивления системы. Возвращаясь к рассматриваемому случаю, составим величину

$$\Sigma h_w = H_w;$$

потерянный напор

$$\begin{aligned} H_w &= h_{w_{\text{вх}}} + h_{w_{\text{тр}_1}} + h_{w_{\text{вх}}} + h_{w_{\text{тр}_2}} = \\ &= \frac{v^2}{2g} \left( \zeta_1 + \lambda \cdot \frac{L_1}{d} + \zeta_2 + \lambda \cdot \frac{L_2}{d} \right) = \zeta_c \frac{v_2^2}{2g}. \end{aligned}$$

Величина  $\zeta_c$  является суммой отдельных коэффициентов сопротивлений; мы будем называть его общим коэффициентом сопротивления системы.

Численно он равен

$$\zeta_c = 0,5 + \frac{100}{40 \cdot 0,1} + 7 = 32,5.$$

Общее уравнение

$$H = \frac{v^2}{2g} + \zeta_c \frac{v^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} (1 + \zeta_c).$$

Численно

$$10 = \frac{v^2}{2g} (1 + 32,5).$$

Отсюда

$$v = \sqrt{\frac{2g \cdot 10}{33,5}} = 2,42 \text{ м/сек.}$$

Расход

$$Q = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot 2,42 = \frac{\pi \cdot 0,1^2}{4} \cdot 2,42 = 0,019 \text{ м}^3/\text{сек.}$$

Кинетическая энергия в единице веса вытекающей из трубы воды  $\frac{v^2}{2g}$ ; согласно уравнению, она составляет лишь

$\frac{1}{\zeta_c + 1} = \frac{1}{33,5}$  части начальной энергии, заключающейся

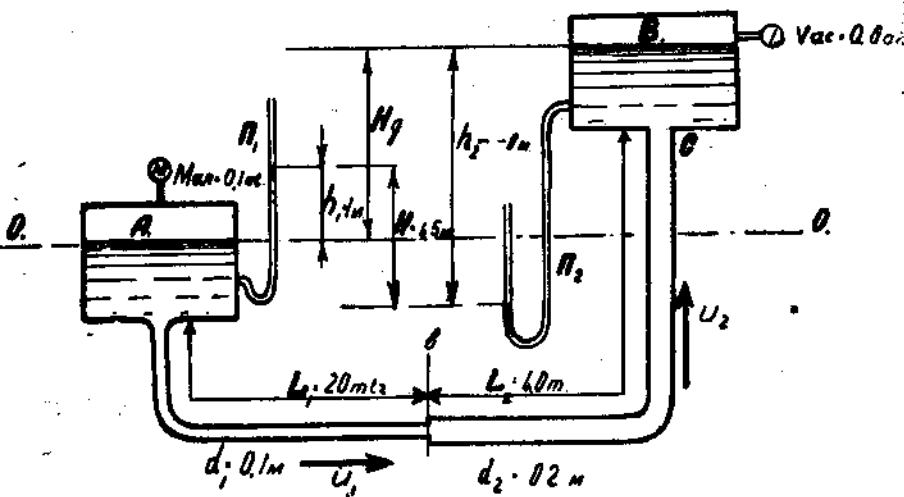
в единице веса воды в баке. Остальные  $\frac{\zeta_c}{\zeta_c + 1} = \frac{32,5}{33,5}$  части энергии рассеяны на сопротивление. На фиг. 79 изображено также схематическое изменение пьезометрической высоты вдоль потока.

4. Перетекание жидкости по трубопроводу из одного закрытого сосуда в другой. В качестве второго примера рассмотрим следующий.

Вода из закрытого сосуда А по системе труб переходит в вышележащий сосуд В (фиг. 81). Геометрическая разность уровней  $H_c = 2,5 \text{ м}$ . В сосудах А над свободной поверхностью жидкости поддерживается постоянное манометрическое давление, равное 0,1 атм. (измеряемое в пьезометре  $\Pi_1$

высотой столба  $h_1 = 1$  м), в сосуде  $B$  поддерживается вакуум  $p_1 = 0,6$  атм., измеряемый пьезометрической высотой (пьезометр  $\pi_2$ ) — 6 м. Сечения сосудов велики, так что скоростями на свободных поверхностях пренебрегаем.

Размеры и длины труб ясны из чертежа. Труба 1 соединяется с сосудом  $A$  плавной переходной частью, уменьшающей потери при входе до минимума. В сечении  $b$  — внешнее расширение при перемене диаметра трубы. В  $C$  труба непосредственно примыкает к плоской стенке бака.



Фиг. 81.

Составим уравнение Бернулли для сечения  $A$  и  $B$ .

За плоскость сравнения примем плоскость  $O-O$ , совпадающую с свободной поверхностью  $A$ ; имеем

$$\frac{p_A}{\gamma} = H_g + \frac{p_B}{\gamma} + \sum h_{\text{тр}},$$

вычитывая из обеих частей уравнения по  $\frac{p_a}{\gamma}$ , где  $p_a$  — атмосферное давление, получим

$$\frac{p_A - p_a}{\gamma} = H_g - \frac{p_a - p_B}{\gamma} + \sum h_{\text{тр}}$$

$$h_1 = H_g - h_2 + \sum h_w.$$

$$\sum h_w = h_1 - (H_g - h_2) = H = 4,5 \text{ м. . . . . (a)}$$

где  $H$  — величина полного напора — есть непосредственно разность уровней в пьезометрах 1 и 2.

Итак, в рассматриваемом случае весь напор тратится на сопротивления; последние состоят из:

1) потери на вход в трубу; благодаря закругленности входной части

$$h_{w \text{ вх}} = \zeta_1 \cdot \frac{v^2}{2g}; \quad \zeta_1 = \sim 0,25;$$

2) потери на трение в трубе 1

$$h_{w \text{ тр}} = \lambda_1 \cdot \frac{L_1}{d} \cdot \frac{v_1^2}{2g} = \frac{1}{40} \cdot \frac{20}{0,1} \cdot \frac{v_1^2}{2g} = 5 \cdot \frac{v_1^2}{2g};$$

3) добавочной потери на закругление

$$h_{w \text{ закр}} = \zeta_{\text{закр}} \frac{v_1^2}{2g}, \text{ где } \zeta_{\text{закр}} \text{ около } 0,15 - 0,20^1);$$

4) потери на удар (по Борда) в сечении  $b$

$$h_{w \text{ уд}} = \frac{v_2^2}{2g} \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right)^2 = \frac{v_2^2}{2g} (4 - 1)^2 = 9 \frac{v_2^2}{2g};$$

5) потери на трение во второй трубе (по Дарси)

$$h_{w \text{ тр}} = 0,023 \cdot \frac{40}{0,2} \cdot \frac{v_2^2}{2g} = 4,6 \cdot \frac{v_2^2}{2g};$$

6) потери на закругление во второй трубе

$$h_{w \text{ закр}} = \zeta_{\text{закр}} \cdot \frac{v^2}{2g};$$

7) потери на выход из второй трубы в бак  $B$ .

<sup>1)</sup> См. II часть.

По теореме Борда непосредственно имеем

$$h_{w \text{ вых}} = \frac{(v_2 - v_B)^2}{2g},$$

где  $v_B$  — скорость воды в баке. Так как последняя приблизительно равна нулю, то потеря

$$h_{w \text{ вых}} = \frac{v_2^2}{2g},$$

т. е. теряется вся энергия, соответствующая скорости. Таким образом,

$$\begin{aligned} \sum h_w &= \frac{v^2}{2g} (0,05 + 5 + 0,2) + \frac{v_2^2}{2g} (9 + 4,6 + 0,2 + 1) = \\ &= 5,25 \frac{v_1}{2g} + 14,8 \frac{v_2^2}{2g}. \end{aligned}$$

Относя все к  $v_2$ , имеем, принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{v_2} &= \frac{\omega_2}{\omega_1} = 4, \\ \sum h_w &= 5,25 \cdot \frac{v_2^2}{2g} \cdot 16 + 14,8 \cdot \frac{v_2^2}{2g} = \sim 99 \frac{v_2^2}{2g}. \end{aligned}$$

Подставляя в (а), имеем

$$\begin{aligned} H &= 4,5 \text{ м} = 99 \cdot \frac{v_2^2}{2g}; \\ v_2 &= \sqrt{2g \frac{4,5}{99}} = \sim 0,93 \text{ м/сек.} \end{aligned}$$

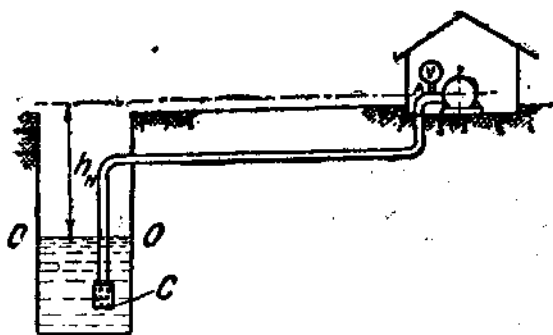
5. Определение вакуума во всасывающей трубе центробежного насоса. Определим еще вакуум во всасывающей трубе насоса (фиг. 82) в точке А при следующих данных:

Полная длина трубы  $L = 20 \text{ м}$ ; диаметр  $d = 20 \text{ см}$ ; расход  $Q = 60 \text{ л/сек}$ ; высота оси насоса над поверхностью воды в колодце  $h_n = 4,5 \text{ м}$  (фиг. 82).

Труба снабжена предохранительной сеткой С и обратным клапаном; общее сопротивление их оцениваем коэффициентом  $\zeta_1 = 5$ .

Предполагая, что движение установившееся (центробежный насос), применяем уравнение Бернулли к сечению О—О (поверхность воды в колодце); пренебрегая скоростью в О—О и называя давление в А через  $p_x$ , напишем

$$\frac{p_a}{\gamma} = h_n + \frac{p_x}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + \sum h_w.$$



Фиг. 82.

Таким образом, искомый вакуум

$$V_{ac} = \frac{p_a - p_x}{\gamma} = h_n + \frac{v^2}{2g} + \zeta_c \frac{v^2}{2g}.$$

Оценивая сопротивления в трех коленах величиною  $\zeta_c = 3 \times 0,2 = 0,6$  и беря  $\lambda = \frac{1}{30}$ , имеем

$$\zeta_c = 5 + \frac{1}{30} \cdot \frac{20}{0,2} + 0,6 = 8,93 \approx 9,$$

$$v = \frac{0,0600}{0,0314} = 1,91 \text{ м/сек.}; \quad \frac{v^2}{2g} \approx 19 \text{ м.}$$

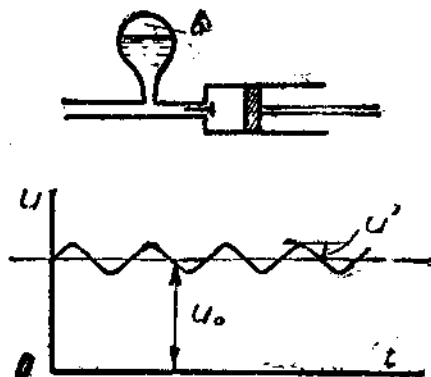
$$V_{ac} = 4,5 + 0,19 \times 10 = 6,4 \text{ м.}$$

Вакуум быстро увеличивается с расходом. Так, например, если бы  $Q$  было равно 90 л/сек, скорость сделалась бы равной  $\sim 2,9$  и  $\frac{v^2}{2g} = 0,42$ .

Вакуум был бы равен  $4,5 + 4,2 = 9,7$ ; очевидно, такая степень разрежения практически была бы недопустима, и насос работал бы неудовлетворительно.

Пример этот ясно обнаруживает влияние на вакуум сопротивлений во всасывающей трубе и ясно указывает, насколько необходимы соответственные подсчеты при установке насосов.

6. Определение максимального вакуума во всасывающей трубе поршневого насоса. Предположим теперь, что вместо центробежного установлен насос поршневой, делающий  $n = 120$  оборотов в минуту. Благодаря этому, движение в трубе будет неустановившимся, переменным. Колебания скорости воды в трубе



Фиг. 83.

смягчаются присутствием воздушного колпака  $b$  (фиг. 83), но полного уничтожения колебаний скорости, очевидно, нет. Предположим для простоты, что скорость воды в трубе следует соотношению

$$v = v_0 (1 + \xi \sin \omega t),$$

где  $\xi v_0 = v'$  есть наибольшее отклонение скорости от средней.

Применим к движению в трубе уравнение неустановившегося движения (26); очевидно, имеем

$$\frac{p_a - p_x}{\gamma} = \text{Vac} = h_H + \frac{v^2}{2g} + \zeta_c \frac{v^2}{2g} + \frac{1}{g} \cdot \frac{dQ}{dt} \int_0^L \frac{ds}{\omega},$$

$$\int_0^L \frac{ds}{\omega} = \frac{L}{\omega} \text{ и } \text{Vac} = h_H + \frac{v^2}{2g} + \zeta_c \frac{v^2}{2g} + \frac{L}{g} \cdot \frac{dv}{dt},$$

Определим наибольшую величину  $\frac{L}{g} \cdot \frac{dv}{dt}$ , т. е. наибольшее увеличение вакуума от переменного движения. Имеем  $\frac{dv}{dt} = \xi v_0 \cdot \omega \cdot \cos \omega t$ ; наибольшая величина  $\frac{L}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{L}{g} \xi v_0 \omega$ .

При  $n = 120$  об/мин.  $\omega = 4\pi$ ; принимая  $\xi = 0,1$ , получаем

$$\frac{L}{g} \xi v_0 \omega = \frac{20}{9,81} \cdot 0,1 \cdot 1,91 \cdot 4\pi = 4,9 \text{ м.}$$

Таким образом, наибольший вакуум, если считать сопротивление в переменном движении одинаковым с установившимся, получается равным  $6,4 + 4,9 = 11,3$  м.

Как видим, даже в случае не слишком быстрогоходного насоса и с сильно смягченными воздушным колпаком колебаниями получаютс я разрывы непрерывности. Этим и объясняются сопровождаемые сильными сотрясениями „удары“, наблюдаемые при работе поршневых насосов и трудности, встречаемые при проектировании „быстроходных поршневых насосов“.

#### § 41. Сопротивления в неравномерном медленно изменяющемся движении.

1. „Нормальные“ потери в неравномерном движении. В рассмотренных выше случаях сходящегося и расходящегося потоков мы предполагали сравнительно быструю сходимость и расходимость; обратимся теперь к случаю неравномерного медленно изменяющегося движения, в котором сходимость или расходимость потока ничтожны.

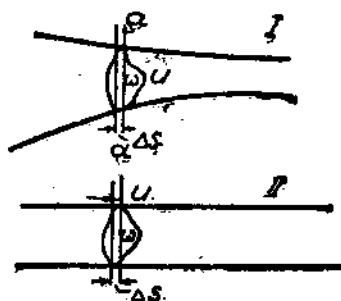
При учете сопротивления в таком движении (в неравномерном и неустановившемся) обычно сравнивают потери напора с теми, которые имели бы место при той же конфигурации потока в установившемся и равномерном движении: другими словами, величину потери напора

$$\Delta h_{\omega} = \frac{dh_{\omega}}{ds} \Delta s = - \frac{dE}{ds} \Delta s$$

на промежутке  $\Delta s$ , соответствующем сечению площади  $\omega$ , сравнивают с потерей  $\Delta h_{\omega(n)}$ , которая имела бы место на

том же промежутке  $\Delta s$ , в установившемся движении по цилиндрической трубе (фиг. 84, II) того же сечения  $\omega$ .

Соответствующие потери в равномерном установившемся движении будем называть „нормальными“.



Фиг. 84.

Легко показать, что как в установившемся, так и в неравномерном движении потери будут больше „нормальных“ в случае ускоренного движения и меньше в случае замедленного.

Начнем с неравномерного движения.

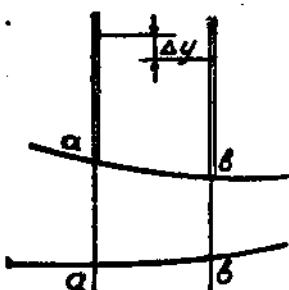
2. Перераспределение скоростей по сечению. Рассмотрим два смежных сечения  $a$  и  $b$  потока, находящегося

в установившемся неравномерном движении (фиг. 85). Пусть при этом движение удовлетворяет условиям медленной изменяемости. Если пренебречь сопротивлениями и назвать  $\Delta y$  разность пьезометрических высот, то для каждой струйки имеем

$$\Delta \left( \frac{u^2}{2g} \right) = \Delta y$$

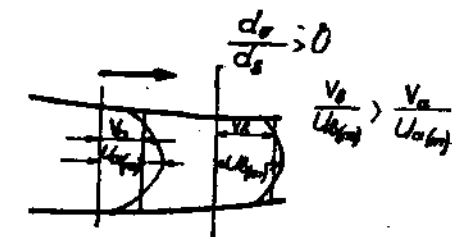
или

$$\Delta y = \frac{u \Delta u}{g},$$



откуда

$$\Delta u = \frac{g \cdot \Delta y}{u}.$$



Фиг. 85.

Таким образом, оказывается, что абсолютное изменение скорости струйки обратно пропорционально величине скорости струйки. Ясно, что

наибольшему изменению будут подвергаться, вообще говоря, меньшие скорости; таким образом, в случае ускорен-

ного движения  $\left(\frac{du}{ds} > 0\right)$  скорости у стенок будут возрастать на большую величину, чем скорости в центре сечения. Следовательно, скорости вообще стремятся выравниваться, т. е. отношение

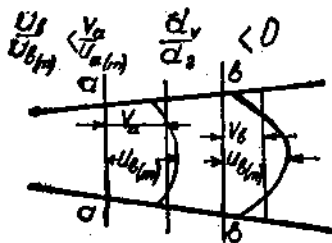
$$\frac{v}{u_{\max}} = \frac{\text{средн. скорость}}{\text{наибольш. скор.}}$$

будет возрастать (фиг. 85).

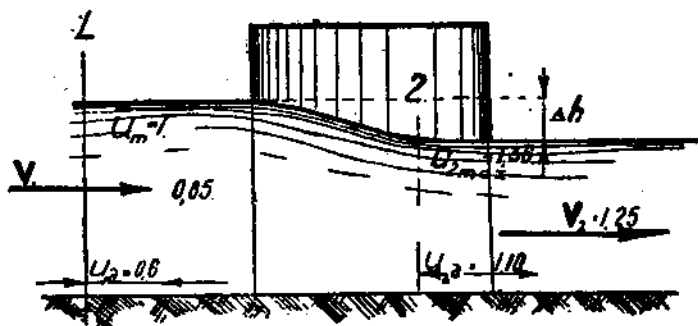
В замедленном движении получится обратная картина; скорости у стенок, как, вообще говоря, меньшие, подвергнутся наибольшему искажению, и неравномерность распределения скоростей по сечению увеличится (фиг. 86).

Итак, при неравномерном движении всегда имеет место перераспределение скоростей по сравнению с равномерным.

3. Пример. Сужение русла искусственными сооружениями. Особенно заметно такое перераспре-



Фиг. 86.



Фиг. 87.

деление при сравнительно резких изменениях потока. Рассмотрим, например, перераспределение скоростей при стеснении реки искусственными сооружениями: быками мостов, плотинами и пр. Здесь мы можем встретиться с крайне сильным увеличением донной скорости.

Для примера предположим, что русло реки (фиг. 87) стеснено искусственными сооружениями настолько, что средняя скорость увеличивается с 0,85 м/сек., до 1,25 м/сек., (в сечениях 1 и 2 фиг. 87). Пренебрегая сопротивлениями, вычисляем падение

$$\Delta h = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = \frac{(1,25)^2 - (0,85)^2}{2g} = 0,043 \text{ м.}$$

Если скорости  $u_{1\max}$  на поверхности  $u_{10}$  по дну в сечении 1 были соответственно равны 1 м/сек., и 0,6 м/сек., то в суженном сечении они достигнут величин

$$u_{2\max} = \sqrt{u_{1\max}^2 + 2g\Delta h} = \sqrt{1,84} = 1,36 \text{ м/сек.}$$

$$u_{20} = \sqrt{u_{10}^2 + 2g\Delta h} = \sqrt{1,20} = 1,10 \text{ м/сек.,}$$

что составит увеличение скоростей соответственно на 36% и на 83,5% при увеличении средней скорости на 47%.

Этот пример наглядно показывает, насколько близоруко при расчете различных искусственных сооружений считаться лишь с изменением средних скоростей и основываться на данных, получаемых из опытов с равномерным движением.

Ясно, например, что при сужении русла донная скорость растет быстрее средней, а ведь именно величиной донной скорости обуславливается преимущественно размыв дна.

Очевидно, что при замедленном движении будет иметь место обратное явление; большее, против средней, уменьшение донной скорости будет создавать более благоприятные, чем при равномерном движении с той же средней скоростью, условия для отложения наноса.

4. Влияние неравномерности движения на величину сопротивлений. Выше мы показали, что сопротивления от трения обуславливаются прежде всего величиной донной скорости. Таким образом, надо в согласии с изложенным выше ожидать, что в ускоренном движении сопротивления будут больше, в замедленном — меньше нормальных.

Если подобным образом легко учесть качественное влияние неравномерности движения на величину сопротивления, то количественно это представляется в высшей степени трудным.

Во-первых, перераспределению скоростей, вызываемому неравномерностью движения, противодействуют силы трения, стремящиеся в общем вернуть движение к нормальному виду; кроме того, не надо упускать из виду, что сопротивления обуславливаются общей степенью беспорядочности движения, а, как мы выше видели, увеличению последней чрезвычайно благоприятствует расхожимость стенок — и наоборот. Эти общие причины действуют таким образом в направлении, обратном влиянию перераспределения скоростей и т. д.

Ясно, что здесь, вообще говоря, имеет место очень сложное явление, являющееся следствием взаимодействия целого ряда факторов.

Между тем, мы имеем до настоящего времени лишь самое ничтожное число опытов в интересующем нас направлении, — материал, явно недостаточный для возможности сколько-нибудь конкретных решений.

Большую часть поэтому приходится довольствоваться тем, что в медленно изменяющемся движении считать сопротивления одинаковыми с нормальными.

## § 42. Случай неустановившегося движения в цилиндрической трубе.

Рассмотрим отсек  $AB$  жидкости (фиг. 88), находящейся в цилиндрической трубе в установившемся равномерном движении, которому соответствует нормальное распределение скоростей по сечению ( $bb$ ). Потеря напора на нормальное сопротивление длины  $\Delta s$  при этом равна  $\Delta h_0$ .

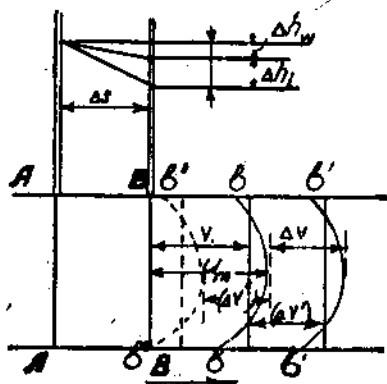
Пусть теперь находящейся в трубе жидкости сообщено некоторое ускорение  $\frac{\partial v}{\partial t}$ . Благодаря этому, согласно уравнению (26), должен будет увеличиваться пьезометрический уклон вдоль трубы; разность давлений в сечениях  $A$  и  $B$  будет теперь для каждой струйки

$$\Delta h = \Delta h_0 + \Delta h_1 = \Delta h_0 + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \Delta s.$$

Изменение скорости каждой струйки в течение элемента времени  $\Delta t$

$$\Delta u = \frac{\partial v}{\partial t} \Delta t = \frac{\Delta h_1}{\Delta s} g \cdot \Delta t = i \cdot g \cdot \Delta t.$$

Таким образом, изменение скоростей всех струек одинаково; кривая скоростей просто передвинется вправо в положение  $b'b'$  при положительном ( $\Delta v$ ), т. е. при ускоренном по времени движении, или влево в положение  $b''b''$  при отрицательном ( $\Delta v$ )<sup>1)</sup>, т. е. при замедленном движении.



Фиг. 88.

Следовательно, в неустановившемся, переменном по времени движении скорости „выравниваются“ при ускоренном движении; и обратно, в замедленном движении неодинаковость скоростей относительно увеличивается.

В согласии со сказанным в предыдущем параграфе мы имеем в первом случае увеличение, во втором — уменьшение сопротивлений против нормальных.

Однако, подобно тому как и в неравномерном дви-

жении, количественный учет этих изменений большею частью представляется пока невозможным. Если движение изменяется по времени очень медленно, можно и в случае переменного движения считать сопротивления одинаковыми с нормальными. Оказывается также возможным оценить, хотя бы приблизительно, потери в случае быстрых колебаний в трубе<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> См. проф. Б. А. Бахметев. Введение в изучение неустановившегося движения. (Изд. 1915 г.).

## ЧАСТЬ II.

### I. ИСТЕЧЕНИЕ ЧЕРЕЗ ОТВЕРСТИЯ.

#### ГЛАВА ПЕРВАЯ.

#### ИСТЕЧЕНИЕ ЧЕРЕЗ ОТВЕРСТИЕ В ТОНКОЙ СТЕНКЕ.

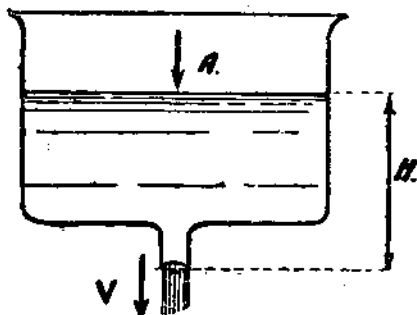
##### § 1. Формула Торичелли.

Вопрос о величине скорости, с которою тяжелая жидкость вытекает под напором  $H$  через отверстие в стенке сосуда (фиг. 89), разрешен еще в XVII столетии Торичелли (Toricelli). Последний опытным путем пришел к заключению, что скорость эта равна скорости тела, свободно падающего с высоты  $H$ , т. е.

$$v = \sqrt{2gH} \quad (1)$$

Теоретическим путем, однако, соотношение (1) было получено значительно позже, хотя доказательством „Торичеллиева закона“ и вообще теоретическим рассмотрением вопроса об истечении жидкости

занимались в конце XVII и начале XVIII столетий почти все сколько-нибудь выдающиеся математики и механики, так что „задачу об истечении“ можно считать отправной точкой научного развития механики жидкого тела.



Фиг. 89.

##### § 2. Решение Бернулли; коэффициент сопротивления $\zeta$ .

Полностью вопрос удалось решить лишь Бернулли (Hydrodynamica 1743 г.) путем применения закона живых сил.



есть полный напор; таким образом, имеем

$$v = \sqrt{\frac{2gH_0}{1+\zeta}} = \varphi \sqrt{2gH_0}, \quad \dots \dots (2)$$

где

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}} \quad \dots \dots \dots (2^{bis})$$

### § 3. Коэффициент скорости $\varphi$ .

Величину  $\varphi = \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}} = \frac{v}{\sqrt{2gH_0}}$ , меньшую единицы и измеряющую отношение действительной скорости к теоретической (которая имела бы место, если бы жидкость была идеальной), называют коэффициентом скорости.

Переписывая формулу (2) в виде

$$H_0 = \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{1}{\varphi^2} = \frac{v^2}{2g} \cdot (1+\zeta), \quad \dots \dots (3)$$

имеем

$$\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1 \quad \dots \dots \dots (3^{bis})$$

Очевидно, из полной удельной энергии  $H_0$  сохраняется в виде кинетической при истечении струи

$$\frac{v^2}{2g} = \varphi^2 H_0 = \frac{1}{1+\zeta} H_0.$$

Теряется на сопротивления

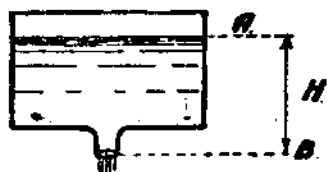
$$H_0 - \frac{v^2}{2g} = (1 - \varphi^2) H_0 = \frac{\zeta}{1+\zeta} H_0.$$

Для случая открытого сосуда ( $p_A = p_B$ ) очевидно имеем

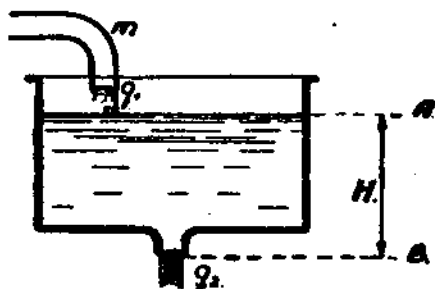
$$v = \varphi \sqrt{2gH} = \sqrt{\frac{2gH}{1+\zeta}}.$$

## § 4. Влияние скорости подхода и сил инерции.

Если сечение отверстия мало по сравнению с сечением сосуда в А, так что можно пренебрегать скоростью на поверхности, то уравнение (2) применимо для определения скорости истечения жидкости и в случае неустановившегося движения, т. е. если уровень жидкости не поддерживается в А постоянно.

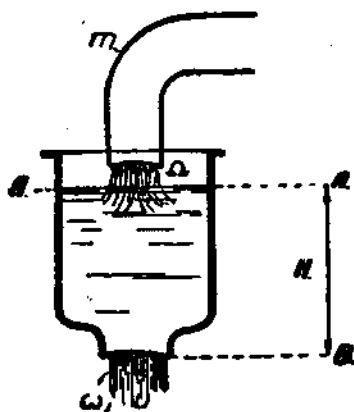


Фиг. 91.



Фиг. 92.

ным; надо лишь, чтобы изменения уровня А (фиг. 91), а вместе с ним и напора  $H$ , совершались бы медленно, так что были бы малы ускорения. Тогда возможно пренебрегать силами инерции внутри жидкости и с достаточной степенью точности (тем, очевидно, большей, чем медленнее изменяется напор) применять уравнение (2) к случаю переменного напора.



Фиг. 93.

Это одинаково возможно как в случае, если напор медленно понижается при опорожнении сосуда через малое отверстие, так и тогда, когда сосуд наполняется благодаря притоку извне  $q_1$  большему, чем расход  $q_2$  (фиг. 92).

Наоборот, уравнение (2) лишь с весьма небольшой степенью приближения может быть применено для определения скорости в случае (фиг. 93), когда отверстие

сравнительно велико, хотя бы уровень  $A$  и поддерживался постоянным. Действительно, в этом случае притекающая по трубе  $m$  жидкость, по объему достаточная для поддержания постоянного напора  $H$ , создает на поверхности крайне неправильные движения, благодаря чему невозможно точное определение величин скоростей и давления в выражении уравнения Бернулли для сечения  $A - A^1$ ).

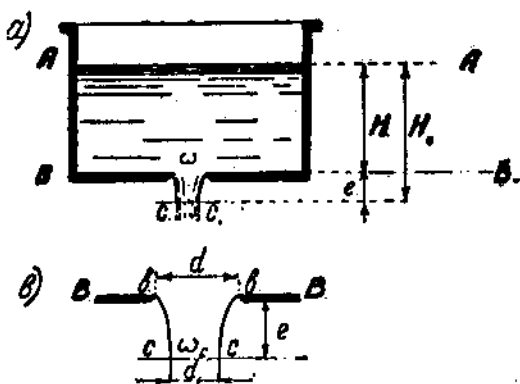
## § 5. Сжатие струи при истечении через отверстие.

В предыдущем мы предполагали, что устройство отверстия (фиг. 89—93) таково, что жидкость вытекает „полным“ сечением, все скорости в плоскости отверстия одинаковы по величине и параллельны между собою; сечение вытекающей струи равновелико сечению отверстия  $\omega$ .

Очевидно, расход

$$Q = \omega v = \omega \varphi \sqrt{2gH_0}.$$

Во многих, однако, случаях струя при истечении претерпевает значительное изменение формы. Фиг. 94, например, соответствует так называемому истечению через



Фиг. 94.

<sup>1)</sup> Обычно в курсах гидравлики для этого случая уравнение (2) приводится в следующем виде: считая давление и скорость на поверхности  $A - A$  равномерно распределенными и определяя величину скорости, как  $v_0 = \frac{Q}{\Omega}$ , где  $Q$  — расход, а  $\Omega$  — сечение, пишут

$$H + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{v_0^2}{2g} = \frac{p_B}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + \Sigma h_{\omega}.$$

Заменяя отношение скоростей  $v : v_0$  обратным отношением площадей живых сечений в  $A$  и  $B$   $\frac{v_0}{v} = \frac{\omega}{\Omega}$ , получают

$$v = \varphi \sqrt{\frac{2gH}{1 - \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2}}.$$

Очевидно, точность этого уравнения невелика.

плоскую тонкую стенку. В этом случае струя при вытекании через отверстие получает „сжатие“, так что на некотором расстоянии  $\epsilon$  (фиг. 94-б) от плоскости отверстия в сечении  $c-c$  сечение струи  $\omega_c$  уже много меньше площади отверстия  $\omega$ ). Очевидно, в области  $bb-cc$  применять уравнение Бернулли ко всему сечению, благодаря кривизне струй, нельзя.

Уравнение Бернулли можно применять лишь за сечением  $c-c$ , где форма струи изменяется уже медленно, и давления в ее сечениях можно считать распространенными по гидростатическому закону.

## § 6. Коэффициент сжатия $\epsilon$ и коэффициент расхода $\mu$ .

6. Отношение площади сжатого сечения  $\omega_c$  к площади отверстия  $\omega$  называется коэффициентом сжатия:

$$\epsilon = \frac{\omega_c}{\omega} \dots \dots \dots (4)$$

Расход

$$Q = \omega_c v = \alpha \cdot \epsilon \cdot \varphi \sqrt{2gH_0} = \mu \cdot \omega \sqrt{2gH_0}, \dots \dots \dots (5)$$

где

$$\mu = \epsilon \cdot \varphi \dots \dots \dots (6)$$

так называемый „коэффициент расхода“.

Эти термины введены Бидоном (Bidone)<sup>2)</sup>, который разделял распространенный среди гидравликов того времени взгляд, что при истечении жидкости из отверстия в тонкой стенке существует „наиболее“ сжатое сечение, площадь которого наименьшая и пройдя которое струя вновь слегка расширяется. В настоящее время более точные опыты показали, что наиболее сжатого сечения в указанном выше смысле не существует вовсе, что на самом деле струя (как при истечении через горизонтальное, так и через вертикальное отверстие), претерпев сравнительно резкое изменение в самом начале движения, в дальнейшем также продолжает все время уменьшаться; изменение это, однако, происходит уже весьма медленно.

<sup>1)</sup> Явление сжатия струи известно уже в XVII стол. (Newton). „Сжатое“ сечение  $c-c$  Ньютон называл „vena contracta“.

<sup>2)</sup> Mém. Ac. de Turin 1830.

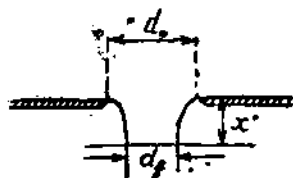
## § 7. Опыты Базена и Мази.

В таблице 1 приведены результаты в высшей степени точно исполненных опытов Базена <sup>1)</sup> над изменением сечения струи при истечении жидкости через круглое отверстие диаметром 200 мм в вертикальной и горизонтальной тонкой стенке (фиг. 95).

ТАБЛИЦА 1.

| Вертикальное отверстие |            |                 |            | Горизонтальное отверстие |            |                 |            |
|------------------------|------------|-----------------|------------|--------------------------|------------|-----------------|------------|
| $\frac{x}{d_0}$        | $\epsilon$ | $\frac{x}{d_0}$ | $\epsilon$ | $\frac{x}{d_0}$          | $\epsilon$ | $\frac{x}{d_0}$ | $\epsilon$ |
| 0,40                   | 0,608      | 1,17            | 0,590      | 0,37                     | 0,600      | 0,64            | 0,573      |
| 0,65                   | 0,597      | 1,67            | 0,583      | 0,46                     | 0,594      | 0,72            | 0,566      |
| 0,85                   | 0,595      | 2,57            | 0,569      | 0,55                     | 0,582      | 0,81            | 0,560      |

Приведенные в таблице данные подтверждают высказанное выше положение об отсутствии наиболее сжатого сечения. Тем не менее для удобства дальнейшего изложения мы сохраним терминологию Билона. Будем лишь понимать коэффициент сжатия условно, как величину, характеризующую степень сжатия, и будем относить этот коэффициент к тому сечению, где резкое сужение уже окончилось и струя близка к параллелизму. Старые гидравлики считали, что для круглого отверстия резкое сжатие прекращается примерно на расстоянии от плоскости отверстия, равном радиусу. Это правило подтверждается опытами Мази <sup>2)</sup> над истечением через отверстия от 10—25 мм диаметром при напоре от 1,35 по 3,54 м. В таблице 2 приведены результаты опытов Мази над размерами струй. В пределах его опытов относительная форма струй не меняется. На фиг. 96 изображена форма струи.

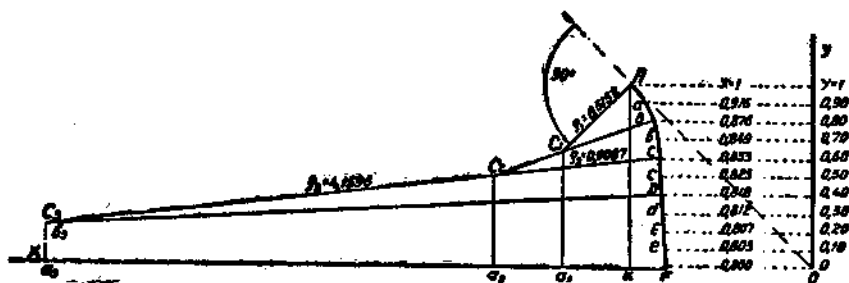


Фиг. 95.

<sup>1)</sup> Expériences sur la contraction des veines liquides.

<sup>2)</sup> II Polytechnico 1895.

Очевидно, коэффициент сжатия у Маззи равен квадрату отношений диаметров и равен 0,64. Полученные Базеном величины (коэффициент сжатия 0,6 и меньше) объясняются значительными размерами отверстий.



Фиг. 96.

ТАБЛИЦА 2.

| $x = \frac{l}{r_0}$ | $y = \frac{d}{d_0}$ | $x = \frac{l}{r_0}$ | $y = \frac{d}{d_0}$ |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 1,000               | 0,0                 | 0,818               | 0,6                 |
| 0,916               | 0,1                 | 0,812               | 0,7                 |
| 0,876               | 0,2                 | 0,808               | 0,8                 |
| 0,849               | 0,3                 | 0,804               | 0,9                 |
| 0,833               | 0,4                 | 0,801               | 1,0                 |
| 0,826               | 0,5                 |                     |                     |

## § 8. Значения коэффициента скорости и коэффициента расхода.

Что касается коэффициента скорости  $\varphi$ , то, согласно опытам, он колеблется обычно в пределах от 0,97 до 0,99, чему соответствует  $\zeta$ , определяемый из следующей таблички:

ТАБЛИЦА 2.

| $\varphi$ | $\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1$ |
|-----------|-----------------------------------|
| 0,970     | 0,063                             |
| 0,975     | 0,052                             |
| 0,980     | 0,041                             |
| 0,985     | 0,031                             |
| 0,990     | 0,020                             |

Наибольшее практическое значение, очевидно, имеет коэффициент расхода  $\mu$ , так как на практике обычно приходится пользоваться лишь соотношением (5):

$$Q = \mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2gH_0}.$$

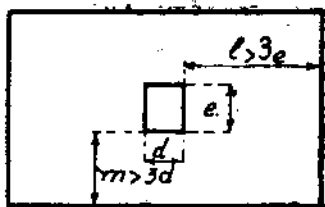
Естественно, что наибольшее число опытов было произведено именно для определения этой величины <sup>1)</sup>.

Приведем результаты некоторых из них.

1. Опыты над истечением через отверстие в тонкой стенке с „совершенным“ сжатием. В нижеследующих таблицах 3—6 приведены результаты опытов, относящихся к случаю так называемого „совершенного“ сжатия, когда отверстие мало по сравнению с размерами сосуда, и стенки на истечение влияния не оказывают. Согласно опыту, для этого необходимо, чтобы расстояние от кромки до стенки (фиг. 97) было бы по крайней мере в три раза более длины соответственного ребра ( $l > 3e$ ;  $m > 3d$ ).

Если это условие не соблюдено и стенки подходят ближе к отверстию, сжатие соответственно уменьшается, и коэффициент расхода увеличивается.

Истечение с подобного рода „несовершенным“ сжатием сравнительно плохо изучено. В виду этого, при пользовании явлением истечения в качестве „измерителя“ (для точного определения расходов), если желательно употреблять готовые, имеющиеся в таблицах коэффициенты, необходимо устраивать истечение непременно с „совершенным“ сжатием. Если же обстоятельства принуждают пользоваться истечением с „несовершенным“ сжатием, то необходимо предварительно произвести специальную тарировку явления, т. е. определить коэффициенты расхода для данных частных условий.



Фиг. 97.

<sup>1)</sup> В высшей степени полная сводка результатов опытов над истечением вместе с подробным изложением вопроса имеется в работе. И. Ф. Чорба: Об определении коэффициента расхода при истечении из отверстий в тонкой стенке и т. д., Варшава, 1911.

ТАБЛИЦА 3.

Коэффициенты расхода по опытам Базена (1890—1892) для круглых отверстий в тонкой стенке.

| Круглые отверстия                        | Диаметр ( $d$ )<br>в м | Напор<br>в м | Среднее<br>значение<br>$\mu$ |
|------------------------------------------|------------------------|--------------|------------------------------|
| В вертикальной стенке . . . . .          | 0,2                    | 0,95—1,00    | 0,598                        |
| В горизонтальной<br>стенке } I . . . . . | 0,1                    | 0,90—1,00    | 0,604—0,608                  |
|                                          | 0,2                    | 0,94—1,00    | 0,600—0,604                  |

ТАБЛИЦА 4.

Коэффициенты расхода  $\mu$  (по Hamilton Smith'y: Hydraulics N. Y. 1886) для квадратных отверстий в вертикальной тонкой стенке.

| Напор в центре<br>отверстия<br>в м | Сторона квадрата в м |       |       |       |       |       |
|------------------------------------|----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                                    | 0,006                | 0,015 | 0,03  | 0,06  | 0,18  | 0,30  |
| 0,12                               | —                    | 0,637 | 0,621 | —     | —     | —     |
| 0,15                               | —                    | 0,633 | 0,619 | 0,605 | 0,597 | —     |
| 0,18                               | 0,660                | 0,630 | 0,617 | 0,605 | 0,598 | —     |
| 0,21                               | 0,656                | 0,628 | 0,616 | 0,605 | 0,599 | 0,596 |
| 0,24                               | 0,652                | 0,625 | 0,615 | 0,605 | 0,600 | 0,597 |
| 0,27                               | 0,650                | 0,623 | 0,614 | 0,605 | 0,601 | 0,598 |
| 0,30                               | 0,648                | 0,622 | 0,613 | 0,605 | 0,601 | 0,599 |
| 0,40                               | 0,642                | 0,618 | 0,610 | 0,605 | 0,602 | 0,601 |
| 0,60                               | 0,637                | 0,615 | 0,608 | 0,605 | 0,604 | 0,602 |
| 0,90                               | 0,632                | 0,612 | 0,607 | 0,605 | 0,604 | 0,603 |
| 1,20                               | 0,628                | 0,610 | 0,606 | 0,605 | 0,603 | 0,602 |
| 1,80                               | 0,623                | 0,609 | 0,605 | 0,604 | 0,603 | 0,602 |
| 2,40                               | 0,619                | 0,608 | 0,605 | 0,604 | 0,603 | 0,602 |
| 3,00                               | 0,616                | 0,606 | 0,604 | 0,603 | 0,602 | 0,601 |
| 6,00                               | 0,606                | 0,603 | 0,602 | 0,602 | 0,601 | 0,600 |
| 30,00                              | 0,599                | 0,598 | 0,598 | 0,598 | 0,598 | 0,598 |

ТАБЛИЦА 5.

Коэффициенты расхода  $\mu$  (по Смитту) для круглых отверстий в вертикальной тонкой стенке.

| Напор в центре<br>отверстия<br>в м | Диаметры в м |       |       |       |       |       |
|------------------------------------|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                                    | 0,006        | 0,015 | 0,03  | 0,06  | 0,18  | 0,30  |
| 0,12                               | —            | 0,631 | 0,618 | —     | —     | —     |
| 0,15                               | —            | 0,627 | 0,615 | 0,600 | 0,592 | —     |
| 0,18                               | 0,655        | 0,624 | 0,613 | 0,601 | 0,593 | —     |
| 0,21                               | 0,651        | 0,622 | 0,611 | 0,601 | 0,594 | 0,590 |
| 0,24                               | 0,648        | 0,620 | 0,610 | 0,601 | 0,594 | 0,591 |
| 0,27                               | 0,646        | 0,618 | 0,609 | 0,601 | 0,595 | 0,591 |
| 0,30                               | 0,644        | 0,617 | 0,608 | 0,600 | 0,595 | 0,591 |
| 0,40                               | 0,638        | 0,613 | 0,605 | 0,600 | 0,596 | 0,593 |
| 0,60                               | 0,632        | 0,610 | 0,604 | 0,599 | 0,597 | 0,595 |
| 0,90                               | 0,627        | 0,606 | 0,603 | 0,599 | 0,597 | 0,597 |
| 1,20                               | 0,623        | 0,605 | 0,602 | 0,599 | 0,598 | 0,596 |
| 1,80                               | 0,618        | 0,604 | 0,600 | 0,598 | 0,597 | 0,596 |
| 2,40                               | 0,614        | 0,603 | 0,600 | 0,598 | 0,596 | 0,596 |
| 3,00                               | 0,611        | 0,601 | 0,598 | 0,597 | 0,596 | 0,595 |
| 6,00                               | 0,601        | 0,598 | 0,596 | 0,596 | 0,596 | 0,594 |
| 60,00                              | 0,593        | 0,592 | 0,592 | 0,592 | 0,592 | 0,592 |

Как видим из приведенных таблиц коэффициент расхода для данного напора, вообще говоря, несколько уменьшается с увеличением размеров отверстия.

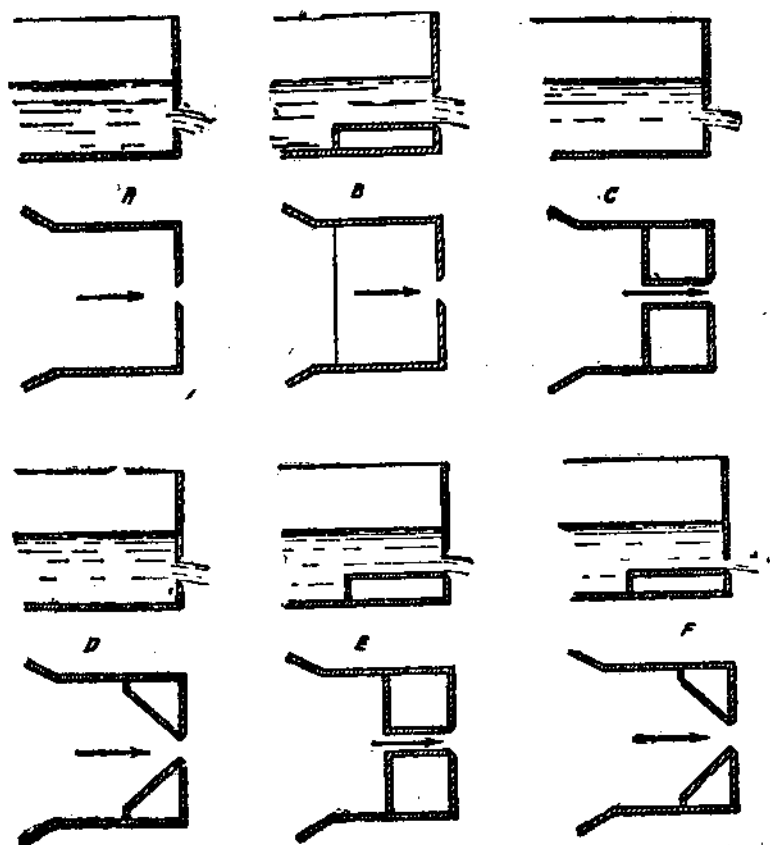
Для определенного отверстия коэффициент уменьшается с напором для малых отверстий; для больших сперва увеличивается (до напоров  $h = 0,90 - 1$  м), затем несколько уменьшается.

II. Неполное сжатие. Особый практический интерес имеет случай так называемого „неполного“ сжатия (фиг. 98), когда на той или иной части кромки отверстия сжатие упразднено



Фиг. 98.

введением стенки л. К этому случаю относится очень много встречающихся на практике расположений: водоспуски плотин, мельничные лотки и прочие отверстия.



Фиг. 99.

Ниже мы приводим результаты опытов Лебро (Lesbros) и Грэффа (Graeff) над истечением при неполном сжатии как в атмосферу, так и в лоток (фиг. 99).

ТАБЛИЦА 6.

Коэффициенты расхода  $\mu$  по опытам Понселе (Poncelet) и Леброс (Lebros) для прямоугольных отверстий (ширину  $b = 0,2$  и  $b = 0,6$  м) в вертикальной тонкой стенке.

| Напор $H$<br>(в м) над<br>верхним<br>ребром<br>отверстия | Ширина отверстия $b = 0,2$ м |       |       |       |       | $b = 0,6$ м |       |
|----------------------------------------------------------|------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------------|-------|
|                                                          | Высота отверстия $h$ в м     |       |       |       |       | $h$ в м     |       |
|                                                          | 0,01                         | 0,02  | 0,03  | 0,05  | 0,10  | 0,20        | 0,02  |
| 0,01                                                     | 0,701                        | 0,660 | 0,630 | 0,607 | —     | —           | 0,644 |
| 0,02                                                     | 0,694                        | 0,659 | 0,634 | 0,615 | 0,596 | 0,572       | 0,643 |
| 0,03                                                     | 0,688                        | 0,659 | 0,638 | 0,620 | 0,600 | 0,578       | 0,642 |
| 0,04                                                     | 0,683                        | 0,658 | 0,640 | 0,623 | 0,603 | 0,582       | 0,642 |
| 0,05                                                     | 0,679                        | 0,658 | 0,640 | 0,625 | 0,605 | 0,585       | 0,641 |
| 0,06                                                     | 0,676                        | 0,657 | 0,640 | 0,627 | 0,607 | 0,587       | 0,641 |
| 0,08                                                     | 0,670                        | 0,656 | 0,638 | 0,629 | 0,610 | 0,589       | 0,640 |
| 0,10                                                     | 0,666                        | 0,654 | 0,637 | 0,630 | 0,611 | 0,592       | 0,639 |
| 0,14                                                     | 0,660                        | 0,651 | 0,635 | 0,630 | 0,613 | 0,595       | 0,637 |
| 0,20                                                     | 0,655                        | 0,648 | 0,633 | 0,630 | 0,615 | 0,598       | 0,635 |
| 0,30                                                     | 0,650                        | 0,644 | 0,632 | 0,629 | 0,616 | 0,600       | 0,633 |
| 0,50                                                     | 0,644                        | 0,640 | 0,630 | 0,628 | 0,617 | 0,603       | 0,630 |
| 1,00                                                     | 0,632                        | 0,633 | 0,628 | 0,626 | 0,615 | 0,605       | 0,605 |
| 1,50                                                     | 0,615                        | 0,619 | 0,620 | 0,620 | 0,611 | 0,602       | 0,602 |
| 2,00                                                     | 0,611                        | 0,612 | 0,612 | 0,613 | 0,607 | 0,601       | 0,601 |
| 3,00                                                     | 0,609                        | 0,610 | 0,608 | 0,606 | 0,603 | 0,601       | 0,601 |

ТАБЛИЦА 7.

Коэффициент расхода  $\mu$  в формуле  $Q = \mu \cdot b \cdot \epsilon \sqrt{2g \left( H_1 + \frac{\epsilon}{2} \right)}$  по опытам Лебро. Напор  $H_1$  измерялся

в верхней кромке отверстия. Размер  $\epsilon = 0,2$  м.

| Напор $H_1$<br>в верхней<br>кромке<br>отверстия | Т и п о т в е р с т и я |            |              |            |              |            |              |            |              |            |              |            |
|-------------------------------------------------|-------------------------|------------|--------------|------------|--------------|------------|--------------|------------|--------------|------------|--------------|------------|
|                                                 | A                       |            | B            |            | C            |            | D            |            | E            |            | F            |            |
|                                                 | В<br>атмосф.            | В<br>лоток | В<br>атмосф. | В<br>лоток | В<br>атмосф. | В<br>лоток | В<br>атмосф. | В<br>лоток | В<br>атмосф. | В<br>лоток | В<br>атмосф. | В<br>лоток |
| 0,02                                            | 0,572                   | 0,480      | 0,599        | 0,480      | —            | 0,496      | 0,589        | —          | —            | —          | —            | 0,488      |
| 0,05                                            | 0,585                   | 0,511      | 0,608        | 0,510      | 0,631        | 0,531      | 0,595        | —          | —            | 0,528      | 0,636        | 0,520      |
| 0,10                                            | 0,592                   | 0,542      | 0,615        | 0,538      | 0,631        | 0,563      | 0,601        | —          | —            | 0,560      | 0,639        | 0,552      |
| 0,20                                            | 0,598                   | 0,574      | 0,621        | 0,566      | 0,632        | 0,591      | 0,607        | —          | 0,708        | 0,589      | 0,643        | 0,582      |
| 0,50                                            | 0,603                   | 0,599      | 0,623        | 0,592      | 0,631        | 0,621      | 0,611        | —          | 0,680        | 0,591      | 0,644        | 0,613      |
| 1,00                                            | 0,605                   | 0,601      | 0,624        | 0,600      | 0,628        | 0,628      | 0,612        | —          | 0,676        | 0,601      | 0,642        | 0,623      |
| 1,50                                            | 0,602                   | 0,601      | 0,624        | 0,602      | 0,627        | 0,627      | 0,611        | —          | 0,672        | 0,604      | 0,641        | 0,624      |
| 2,00                                            | 0,601                   | 0,601      | 0,619        | 0,602      | 0,626        | 0,626      | 0,611        | —          | 0,668        | 0,604      | 0,640        | 0,624      |
| 3,00                                            | 0,601                   | 0,601      | 0,614        | 0,601      | 0,624        | 0,624      | 0,610        | —          | 0,665        | 0,602      | 0,638        | 0,622      |

ТАБЛИЦА 8.

Коэффициенты расхода  $\mu$  по опытам Грэффа. Напор измерялся над верхней кромкой отверстия. Размер  $e > 30$  мм.

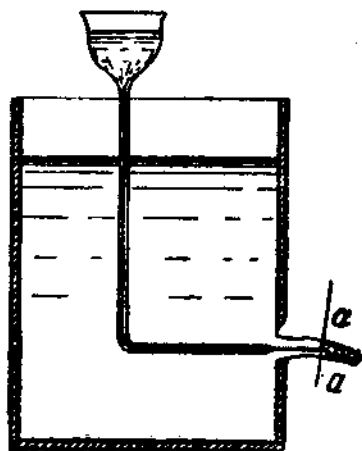
| Значение<br>$\frac{H_1}{e}$ | Тип отверстия |            |              |            |              |            |              |            |
|-----------------------------|---------------|------------|--------------|------------|--------------|------------|--------------|------------|
|                             | A             |            | B            |            | C            |            | D            |            |
|                             | В<br>атмосф.  | В<br>лоток | В<br>атмосф. | В<br>лоток | В<br>атмосф. | В<br>лоток | В<br>атмосф. | В<br>лоток |
| 1                           | 0,61          | 0,57       | 0,67         | 0,60       | 0,65         | 0,64       | 0,70         | 0,60       |
| 5                           | 0,62          | 0,61       | 0,67         | 0,62       | 0,64         | 0,64       | 0,69         | 0,64       |
| 10                          | 0,62          | 0,61       | 0,67         | 0,63       | 0,63         | 0,63       | 0,69         | 0,65       |
| 20                          | 0,61          | 0,61       | 0,66         | 0,63       | 0,63         | 0,63       | 0,68         | 0,65       |
| 40                          | 0,61          | 0,61       | 0,66         | 0,63       | 0,62         | 0,62       | 0,68         | 0,65       |
| 100                         | 0,60          | 0,60       | 0,66         | 0,62       | 0,60         | 0,60       | 0,68         | 0,64       |
| 400                         | 0,60          | 0,60       | 0,65         | 0,62       | 0,60         | 0,60       | 0,67         | 0,63       |
| 1 000<br>и выше             | 0,60          | 0,60       | 0,65         | 0,62       | 0,60         | 0,60       | 0,67         | 0,63       |

## § 9. Сопротивления при истечении из отверстия в тонкой стенке.

Струя, вытекающая из отверстия в тонкой стенке, имеет устойчивую, гладкую и прозрачную, как кристалл, поверхность. Наибольшим совершенством и красотой обладает струя, вытекающая из сосуда значительных размеров, в котором жидкость находится в совершенном покое.

Струйка анилина (фиг. 100), влущенная в вытекающую струю, на некотором протяжении тянется в виде резко очерченной правильной нити.

Это обстоятельство указывает, что при истечении жидкости из отверстия в тонкой стенке мы имеем дело со струйным движением; струйчатость движения нарушается уже лишь на некотором расстоянии от кромки отверстия, где-



Фиг. 100.

либо около сечения  $a-a$ , здесь окрашенная струйка теряет правильность, начинает „вихриться“, на коротком расстоянии получается общее окрашивание струи; поверхность ее покрывается рябью; вся струя как бы вибрирует, теряя одновременно прежнюю прозрачность. Выше (см. I ч., стр. 96) мы видели, что при струйном движении: 1) сопротивления пропорциональны первой степени скорости; 2) зависят от температуры; 3) материал стенок не оказывает влияния на движение.

Что касается последнего обстоятельства, то опыт пока не обнаружил влияния материала стенок на обстоятельства истечения.

## § 10. Опыты над влиянием температуры на истечение.

Опыты над влиянием температуры на истечение производили Энвин <sup>1)</sup> и М. Мэр. Результаты опытов с так называемыми коноидальными насадками (см. ниже), диаметром 0,394" и 1,5" при напорах около 1,5 фут., дали нижеследующие данные (см. таблицу).

| Коноид. насадки $d = 0,394''$<br>Энвин |       |       |       | Коноид. насадки $d = 1,5''$<br>Мэр |       |       |       |
|----------------------------------------|-------|-------|-------|------------------------------------|-------|-------|-------|
| Температура<br>(Фаренгейт)             | 190°  | 130°  | 60°   | Температура<br>(Фаренгейт)         | 170°  | 110°  | 55°   |
| $\mu$                                  | 0,987 | 0,974 | 0,942 | $\mu$                              | 0,981 | 0,967 | 0,961 |

Коэффициент расхода, как и следовало ожидать, увеличивается с температурой. Опыты с отверстием в тонкой стенке не показали влияния температуры на увеличение коэффициента расхода; однако, возможно, что при увеличении температуры уменьшается коэффициент сжатия  $\epsilon$ , благодаря чему коэффициент  $\mu = \epsilon \cdot \phi$  и изменяется мало. Наоборот, в коноидальной насадке коэффициент сжатия остается почти неизменным (близок к единице); тем самым увеличение коэффициента расхода целиком вызвано увеличением коэффициента скорости, т. е. относительным уменьшением сопротивлений.

<sup>1)</sup> Unwin, Phil Mag., 1878.

## § 11. Зависимость сопротивлений от скорости.

Посмотрим теперь еще, как обстоит дело с зависимостью сопротивлений от скорости. Если бы сопротивления были пропорциональны квадрату скорости, то в выражении (3)

$$H = \frac{v^2}{2g} (1 + \zeta)$$

величина  $\zeta$  была бы постоянной; вместе с нею был бы постоянен в силу (2<sup>bis</sup>) и  $\varphi = \sqrt{\frac{1}{1 + \zeta}}$ .

Наоборот, предположив, что сопротивления пропорциональны первой степени скорости, вместо (3), надо было бы написать

$$H_0 = \frac{v^2}{2g} + kv,$$

где  $k$  — некоторый численный коэффициент.

Сопоставляя, получаем

$$H_0 = \frac{v^2}{2g} \left( 1 + \frac{2kg}{v} \right),$$

коэффициент

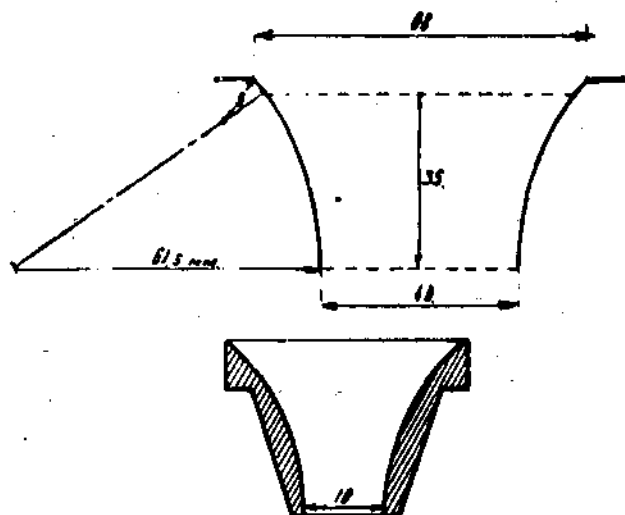
$$\zeta = \frac{2gk}{v} = \sim \frac{2gk}{\sqrt{2gH}} = \frac{k}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{H}} = \frac{k'}{\sqrt{H}}; \quad \varphi = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{k'}{\sqrt{H}}}}$$

Таким образом, в случае, если сопротивления при истечении пропорциональны первой степени скорости, коэффициент скорости должен с напором увеличиваться. Это

| Напор в м | 0,02  | 0,5   | 3,5   | 70    | 103   |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\varphi$ | 0,959 | 0,967 | 0,974 | 0,994 | 0,994 |
| $\zeta$   | 0,087 | 0,069 | 0,052 | 0,012 | 0,012 |

подтверждается следующим результатом опытов Вейсбаха над истечением через коноидальный, очерченный приблизительно по форме струи насадок (фиг. 101), в котором удавалось получить коэффициент сжатия равным единице (табл. стр. 177).

К сожалению, это пока единственный, хотя и достаточно красноречивый опыт, который мы можем привести в подтверждение высказанного выше положения. Большинство исследователей ограничивалось определением лишь



Фиг. 101.

коэффициента расхода. При истечении через отверстие в тонкой стенке увеличение коэффициента скорости, повидимому, заслоняется параллельным увеличением сжатия. Для полного уяснения явления необходимы, очевидно, дальнейшие, вообще говоря, очень тонкие опыты.

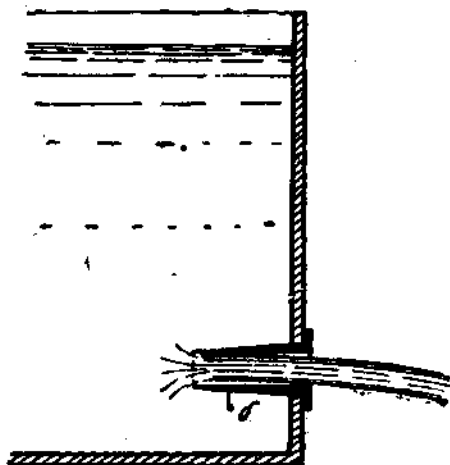
## § 12. Теоретическое определение коэффициента сжатия.

Как видим из приведенных выше данных, коэффициент скорости при истечении через тонкую стенку близок к единице, другими словами, действительная скорость близка к той, которая имела бы место, если бы потерь не было

вовсе и жидкость была бы идеальной. Это обстоятельство в связи со струйчатым состоянием движения заставляет предполагать, что все движение вообще мало отличается от того, которое имело бы место, если бы жидкость была идеальной; если же это так, то к рассматриваемому явлению, вообще говоря, приложимы выводы гидродинамики.

Действительно, еще Гельмгольц <sup>1)</sup> рассмотрел вопрос об истечении идеальной жидкости через так называемый насадок Борда (фиг. 102), т. е. цилиндрическую, обращенную внутрь сосуда трубку (δ). Если предположить сосуд (и вместе с ним насадок) бесконечно широким, так что отверстие представляет собой бесконечно длинную щель, то получается случай плоского двухразмерного движения; для потенциального движения в этом случае уравнение непрерывности (см. I ч., стр. 86) будет

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0.$$



Фиг. 102.

Остается найти вид функции  $\Phi$ , удовлетворяющей данным условиям на границах. Гельмгольц воспользовался для этой цели так называемыми „конформными“ изображениями и вывел теоретический коэффициент сжатия

$$\varepsilon = 0,5,$$

вполне оправдываемый опытом. Метод Гельмгольца был в дальнейшем развит и усовершенствован Кирхгофом <sup>2)</sup>. Последний между прочим рассмотрел случай истечения

<sup>1)</sup> Monatsberichte der Berl. Akad. 1868.

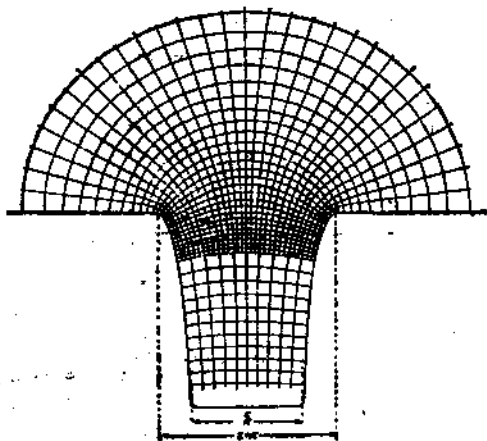
<sup>2)</sup> Mechanik. Лекц. XXI, XXII. 1869.

через бесконечно длинную щель в плоской стенке (фиг. 103) и нашел, что для этого случая коэффициент сжатия

$$\epsilon = \frac{\pi}{\pi + 2} = 0,61^1)$$

величина, в общем близкая к результатам опыта.

На фиг. 103 изображены, по Кирхгофу, линии тока (траектории) и ортогональные к ним линии равного потенциала скоростей. Зная картину распределения скоростей, не трудно уже, пользуясь



Фиг. 103.

основным соотношением потенциального движения (I ч.)  $E = \text{const}$ , получить и картину распределения давлений.

Хэльшоу (Hele Shaw)<sup>2)</sup> уже получил непосредственно опытом форму и расположение линий тока в струйчатом движении, наблюдая движение окрашенных струй глицерина в тонком промежутке между двумя параллельными стеклами. На

фиг. 104 приведены схемы фотографий с некоторых движений, демонстрированных Хэльшоу. Из опытов его между прочим следует, что расположение траекторий в струйчатом движении вязкого глицерина весьма близко к картине, которую гидродинамика дает для идеальной жидкости.

Буссинеск<sup>3)</sup> исходил при рассмотрении вопроса об истечении через отверстие в тонкой стенке непосредственно из теории потенциала; он показал, что величины скоростей

<sup>1)</sup> Элементарный вывод приведен у Фанля (Föppl) Techn. Mech. B. VI, стр. 377. Много интересных рисунков, изображающих различные случаи движения, приведены у Ламба (Lamb): Hydrodynamics, гл. IV.

<sup>2)</sup> Transact. Instit. Naval Architects, 1898. См. также Engineering 1897—1899.

<sup>3)</sup> Theorie des eaux courantes, 1887, стр. 536.

внутри сосуда пропорциональны ньютоновым силам притяжения, оказываемым массой, соответственным образом распределенной по плоскости отверстия. Найденные им значения теоретических коэффициентов сжатия:

для прямоугольной щели  $\varepsilon = 0,628$ ,

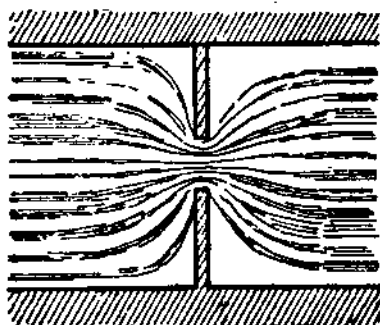
для круглого отверстия  $\varepsilon = 0,657$ .

Мы привели все эти данные, чтобы показать, что в тех областях, где явления движения реальных жидкостей в достаточной мере могут подвергаться теоретическому анализу, получается более чем удовлетворительное совпадение результатов теории с практикой.

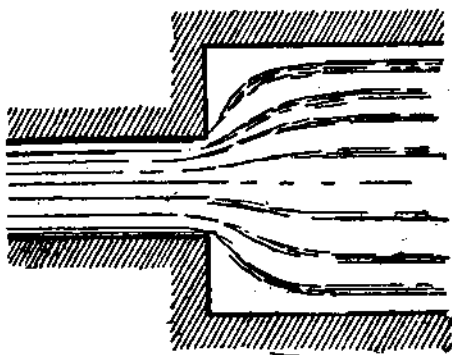
### § 13. Механическая сущность явления

К рассмотрению механической сути некоторых, сопровождающих истечение явлений можно подойти еще следующим, более элементарным путем.

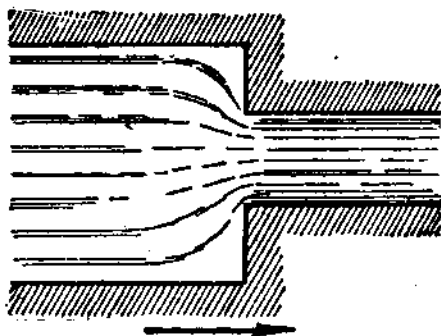
На стенке  $D-C$  (фиг. 105), достаточно удаленной от отверстия  $EF$ , скорости малы, близки к нулю; поэтому давление на этой стенке весьма



а) Струйчатое движение через диафрагму.



б) Внезапное сужение.



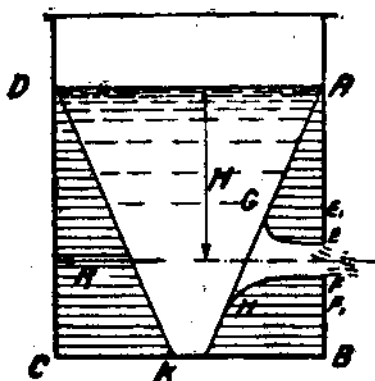
с) Внезапное расширение.

Фиг. 14.

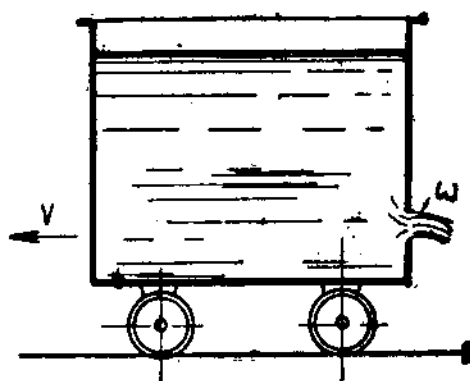
мало отличается от гидростатического и изображается треугольником  $ДСК$ . Иначе обстоит дело на стенке  $A—B$ , в которой проделано отверстие. Здесь давление совпадает с гидростатическим лишь вдали от отверстия, вблизи же последнего, где скорости уже достаточно велики, давления в силу соотношения

$$\frac{p}{\gamma} + z = \text{const} - \frac{v^2}{2g} = h - \frac{v^2}{2g}$$

меньше гидростатического, и в точках  $E$  и  $F$  на кромке отверстия равны атмосферному.



Фиг. 105.



Фиг. 106.

Пусть кривые  $GE$  и  $HF$  изображают распределение давлений в кольцевом пространстве  $EE'—FF'$ , вокруг отверстия.

Очевидно, давление на стенку  $AB$  меньше, чем на стенку  $CD$ ; разность давлений для вертикального и плоского сечения (фиг. 105) изображается, очевидно, площадью  $GEPH$ . Избыток давления сказывается в появлении некоторой силы  $R$ . Если, например, сосуд с вытекающей струей поставить на колеса (фиг. 106), то он под влиянием этой силы начнет двигаться в направлении, противоположном вытекающей струе.

Величину этой силы, или, как ее называют „реакции струи“, не трудно определить, пользуясь законом измене-

ния количества движения. Действительно, предполагая стенку  $AB$  сосуда вертикальной, назначая оси, как показано на чертеже (фиг. 107), и составляя уравнение изменения количества движения по оси  $x$ , имеем

$$Mv = R',$$

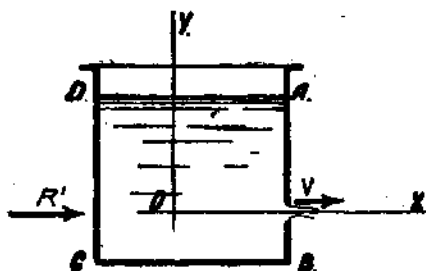
где  $M$  — масса вытекающей в единицу времени через отверстие жидкости

$$\left( M = \frac{\gamma}{g} Q = \frac{\gamma}{g} \varepsilon \cdot \omega \cdot v \right),$$

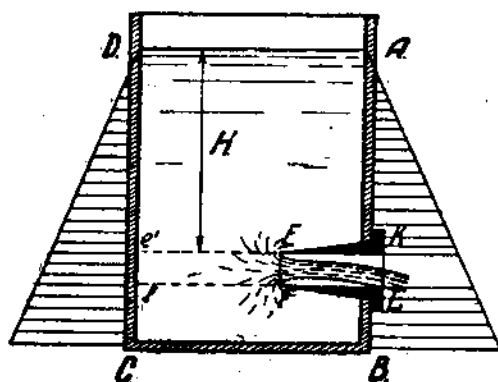
$R'$  — равнодействующая проекций на ось  $x$  всех внешних, действующих на находящуюся в сосуде жидкость сил, т. е. сила, равная по величине, но противоположная по направлению найденной выше реакции  $R$  (избытку давления жидкости на стенку  $C-D$ ).

Таким образом по численной величине

$$R = \frac{\gamma}{g} \varepsilon \omega v^2 = \frac{\gamma}{g} \cdot \varepsilon \omega \varphi^2 \cdot 2gH = 2\gamma H \omega \cdot \varepsilon \cdot \varphi^2 = 2\gamma H \omega \cdot \mu \cdot \varphi. \quad (7)$$



Фиг. 107.



Фиг. 108.

\* Зная коэффициенты сжатия и скорости, можно из соотношения (7) определить  $R$ ; обратно, зная  $R$ , можно найти величину  $\varepsilon \varphi^2$  или  $\mu \varphi$ .

Величина  $R$  весьма просто определяется для случая насадки Борда. Действительно, в этом случае, если трубка (фиг. 108) достаточно длинна (около  $3a$ ) и стенки ее тонки,

давление по стенке  $A-B$  не отличается от гидростатического, и реакция  $R$  просто равна давлению жидкости на проекцию  $e'f$  отверстия на стенке  $CD$ , т. е.

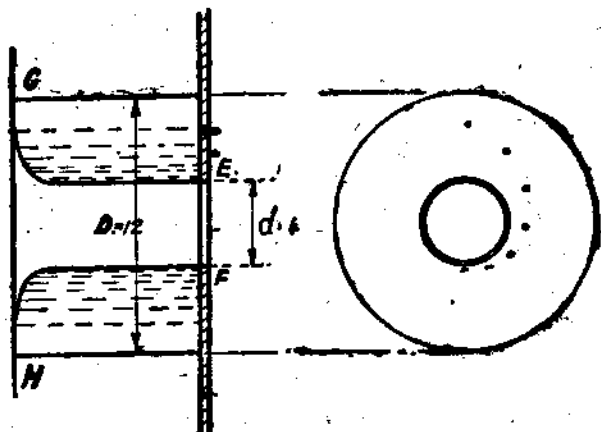
$$R = \omega \cdot \gamma H.$$

Сопоставляя с формулой (7), имеем в этом случае

$$\varepsilon \varphi^2 = \mu \cdot \varphi = 0,5.$$

Если принять  $\varphi = 1$ , получаем  $\varepsilon = 0,5$ , результат, полученный Кирхгофом и хорошо оправдываемый экспериментом.

Соотношение (7) хорошо оправдывается опытом и в случае тонкой стенки, как подтвердили опыты гидравлической Лаборатории Ленинградского Политех. Института. В плоскости  $E \rightarrow F$  (фиг. 109) просверлены на различных радиусах небольшие отверстия (около 2 мм), в которых вделаны небольшие пьезометрические трубочки, соединяе-



Фиг. 109.

мые с манометром. Таким образом, кривая распределения давлений в плоскости отверстия получается непосредственно из опыта. На чертеже приведена одна из полученных кривых, теоретически вычисленная величина

$$\mu \varphi = 0,62,$$

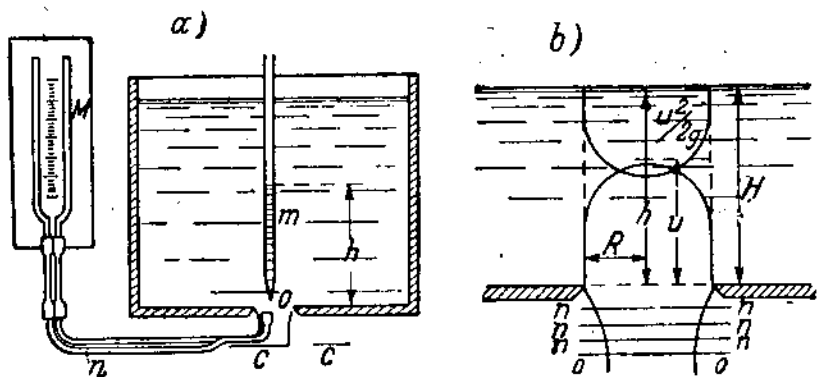
полученная непосредственным измерением  $\sim 0,60$ .

#### § 14. Опытное определение распределения скоростей и давлений при истечении.

В связи с предыдущим в высшей степени интересными являются опыты Базена <sup>1)</sup> над распределением скоростей

<sup>1)</sup> Mem. Ac. de Sc. T. XXXII. См. также упомянутую выше работу Чорба, стр. 28, где приведены также данные о работах других исследователей.

и давлений при истечении жидкости через отверстие в тонкой стенке. Для определения давлений Базен опускал сверху в сосуд открытую с обоих концов стеклянную, внизу заостренную и снабженную делениями трубку  $m$ ; устанавливая острие трубки  $O$  в различных точках, Базен непосредственным отсчетом высоты столба жидкости  $h$  (заштриховано) определял пьезометрическое давление в соответственной точке. В частности, передвигая острие в плоскость отверстия, Базен нашел, что наибольшее давление в центре отверстия  $h$  составляет около 0,59 напора, т. е.  $h \approx 0,59 H$ . Давление, по мере удаления от центра, убывает; сперва,



Фиг. 110.

как показывает кривая на черт. 110 —  $b$ , медленно, так что на расстоянии  $0,8 R$  от центра давление  $h \approx 0,5 H$ , затем быстро падая до атмосферного на кромке отверстия. С другой стороны, непосредственные измерения величин скоростей помощью особых трубок Пито  $n$  (фиг. 110- $a^1$ ) показали, что скорости в плоскости отверстия уменьшаются от края к центру отверстия. В центре  $u \approx 0,64 \sqrt{2gH}$ , что как раз соответствует  $\sqrt{2gH(1-0,59)}$ . И для других точек опыт вполне подтверждает правильность основного соотношения

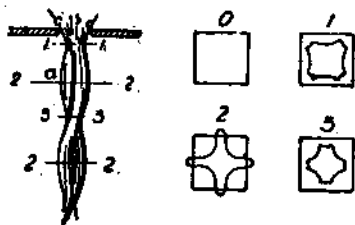
$$\frac{u^2}{2g} + h = H.$$

<sup>1)</sup> См ниже главу об измерениях скоростей и расходов в открытых руслах.

Базен измерил скорости в целом ряде плоскостей ( $n-n$ ) на разных расстояниях от плоскости отверстия. Как показал опыт, скорости по мере удаления от сосуда выравниваются и в плоскости  $O-O$ , где резкое сжатие прекратилось, практически одинаковы по всему сечению.

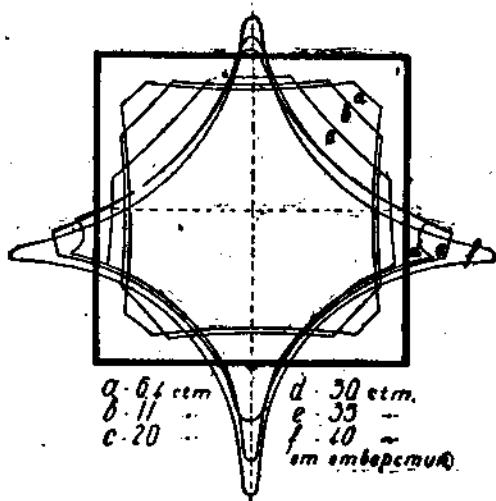
## § 15. Инверсия струй.

Упомянем еще о крайне любопытном явлении, сопровождающем истечение через отверстие и особенно ярко выраженном при истечении через прямоугольные, треугольные, вообще не круглые отверстия. Струя по выходе из отверстия претерпевает в этом случае значительные изменения формы; так, например,



Фиг. 11.

струя, вытекающая через квадратное отверстие, пройдя в сжатом сечении 1—1 восьмиугольную форму, превращается затем в (сечении 2—2, фиг. 111) в крест, притом оконечности креста расположены против сторон квадрата, впадины против углов. Пучности 2—2 соответствует сужение струи в 3—3; затем струя снова расширяется и т. д.



Фиг. 112.

Мы не будем входить в дальнейшие подробности этого необыкновенно красивого и любопытного явления. Отметим лишь, что при-

чиной явления, называемого „инверсией струй“, считают соединенное действие неодинакового наклона подходящих

к отверстию струй с силами поверхностного натяжения. На чертеже (фиг. 112) приведен один из результатов в высшей степени точных измерений форм вытекающих струй, произведенных Лебро <sup>1)</sup>.

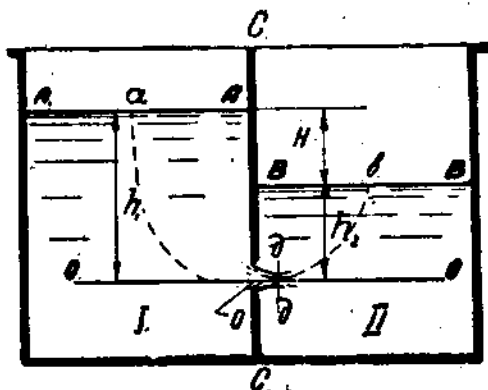
## § 16. Затопленное отверстие.

Рассмотрим еще случай истечения через отверстие (фиг. 113) в тонкой стенке  $C-C$ , разделяющей два сосуда I и II с постоянными уровнями  $AA$  и  $BB$ , предполагая притом, что уровень  $B-B$  выше отверстия, так что последнее „затоплено“. Опыт показывает, что расход в этом случае равен

$$Q = \mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2gH}, \dots \dots \dots (a)$$

где  $H$  — разность ураниений в сосудах. При этом оказывается, что коэффициент расхода  $\mu$  для затопленного отверстия почти не отличается от того же коэффициента для отверстия свободного <sup>2)</sup>.

Соотношение (a) легко может быть получено на основании самых простых соображений. Можно, например, рассматривая движение какой-либо струйки, применить уравнение Бернулли к точкам ее  $a-b$  на свободных поверхностях жидкости в сосудах.



Фиг. 113.

Пренебрегая, при сосудах достаточных размеров, скоростями на поверхностях  $AA$  и  $BB$  и принимая во внимание, что давления на них одинаковы, получим в этом случае

$$H = \Sigma h, \dots \dots \dots (b)$$

т. е. что весь напор тратится на сопротивления.

<sup>1)</sup> Mem. Ac. (Sav. etr.) T. XIII (1832); см. также работы: Bidone — Mem. Ac. Turin (1830); Poncelet—Lesbros—Mem. Ac. (Sav. etr.) T. III (1832); Magnus—Ann. Phys. Ch. (1855); Sovart, An. chim. ph. (1833).

<sup>2)</sup> По опытам Вейсбаха он немного (на 1—1,5%) ниже.

К потерям на протяжении до сечения  $\delta - \delta$  (измеряемым, очевидно, тем же коэффициентом  $\zeta$ , которым учитываются потери в случае свободного истечения) надлежит еще прибавить потери в сосуде II. Пренебрегая потерями на трение вытекающей струи об окружающую ее „мертвую“ воду и ограничивая оценку потерь учетом лишь потери на удар при быстром изменении конфигурации вытекающей струи, имеем, по Борда,

$$h_{w_1} = \frac{(v - v_2)^2}{2g} = \frac{v^2}{2g},$$

где  $v$  — скорость в струе в сечении  $\delta - \delta$ , а  $v_2$  — равная нулю, скорость в сосуде II. Уравнение (b) представится теперь в виде

$$H = \zeta \frac{v^2}{2g} + \frac{v^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} (1 + \zeta), \quad \dots \dots \dots (c)$$

одинаковом с уравнением (3) для свободного истечения жидкости. Вводя коэффициент сжатия  $\epsilon$  (отношение сечения струи в  $\delta - \delta$  к площади отверстия  $\omega$ ) и (как § 1) коэффициент скорости  $\varphi = \sqrt{\frac{1}{1 + \zeta}}$ , имеем расход

$$Q = \epsilon \cdot \omega \cdot \varphi \cdot \sqrt{2gH} = \mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2gH}.$$

Почти что полное совпадение коэффициентов расхода  $\mu$  для случая свободного и затопленного отверстия свидетельствует о том, что мало отличаются и коэффициенты сжатия <sup>1)</sup>. Таким образом, судя по всему, конфигурация струи при истечении в воздух и под уровень, по крайней мере вблизи отверстия, одинакова.

Очевидно, во втором случае, на некотором расстоянии от отверстия устойчивое струйчатое движение струи разрушается; вместе с тем несомая струей кинетическая энергия целиком рассеивается в беспорядочных движениях внутри сосуда.

К соотношению (C) можно подойти также иным путем. Принимая во внимание, что в струе (в сечении  $\delta - \delta$  и дальше) движение медленно изменяющееся, и что в силу этого в сечении давления распределены гидростатическому закону,

<sup>1)</sup> Уменьшение  $\mu$  надлежит скорее отнести к некоторому уменьшению  $\varphi$ .

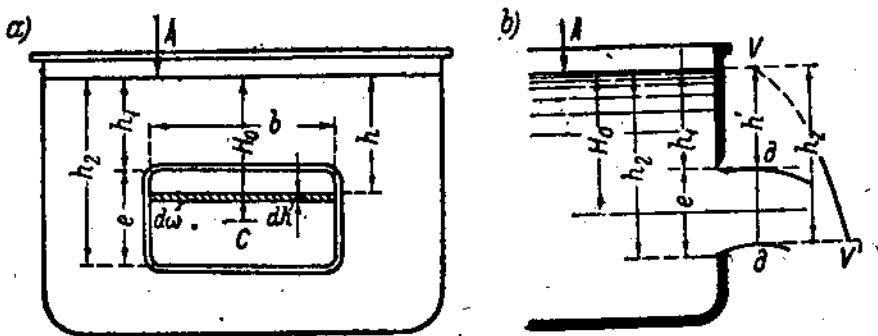
получаем, применяя уравнения Бернулли к сечениям А—А и  $\delta-\delta$ ,

$$h_1 + \frac{p_a}{\gamma} = \left( \frac{p_a}{\gamma} + h_2 \right) + \frac{v^2}{2g} + \zeta \frac{v^2}{2g}^1).$$

Отсюда непосредственно получаем (с) и т. д.

## § 17. Истечение через большие отверстия.

В предыдущем мы предполагали размеры отверстия настолько малыми по сравнению с напором, что можно было пренебрегать различием величин скоростей в разных точках сечения и считать скорость по всему сечению одинаковой. Подобного допущения никак уже нельзя сделать в случае



Фиг. 114.

(фиг. 114) большого отверстия, в котором размеры последнего уже не малы по сравнению с напором, и скорости в различных точках струи могут существенно различаться друг от друга. (На фиг. 114-б кривая  $v-v'$  изображает теоретическое распределение скоростей в вертикальном сечении  $\delta-\delta$  для случая идеальной жидкости).

Для определения расхода в этом случае классическая гидравлика поступала следующим образом: предполагая,

<sup>1)</sup> За плоскость сравнения взята плоскость 0—0; скорость в А равна нулю;  $p_a$  — атмосферное давление;  $h_2$  — пьезометрическое давление в струе.

что элементарный теоретический расход  $dq$  через элемент площади  $d\omega$  равен

$$dq = d\omega \cdot \sqrt{2gh},$$

где  $h$  — переменная глубина соответственного элемента сечения под свободной поверхностью; рядом горизонтальных линий разбивали сечение на элементарные полоски площадью  $b dh$ , где  $b$  — переменная по высоте ширина отверстия, и приравнивали расход

$$Q = \mu \int_{h_1}^{h_2} b \sqrt{2gh} \cdot dh, \dots \dots \dots (d)$$

где  $\mu$  — некоторый коэффициент расхода.

Для данной фигуры, для которой известна зависимость  $b$  от  $h$ , вычисление расхода по (d) сводилось, очевидно, к простой квадратуре.

При этом обычно сравнивали значение определенного интеграла

$$I = \int_{h_1}^{h_2} b \sqrt{h} \, dh$$

с величиной  $\omega \sqrt{H_0}$ , где  $\omega$  — полная площадь сечения, а  $H_0$  — глубина погружения центра тяжести отверстия.

**Пример.** Для примера приведем расчет для прямоугольного и круглого отверстий.

а) Прямоугольное отверстие (фиг. 115)

$$I = \int_{h_1}^{h_2} b dh \sqrt{h} = \frac{2}{3} b \left[ h_2^{3/2} - h_1^{3/2} \right].$$

$$\text{Вводя } h_2 = H_0 + \frac{e}{2} = H_0 \left( 1 + \frac{e}{2H_0} \right);$$

$h_1 = H_0 \left( 1 - \frac{e}{2H_0} \right)$  и разлагая в строку Ньютона, имеем

$$\left( 1 \pm \frac{e}{2H_0} \right)^{3/2} = 1 \pm \frac{3}{2} \cdot \frac{e}{2H} + \frac{3}{8} \cdot \frac{e^2}{4H^2} \pm \frac{1}{16} \cdot \frac{e^3}{8H^3} +$$

Ограничиваясь приведёнными членами ряда и подставляя, имеем

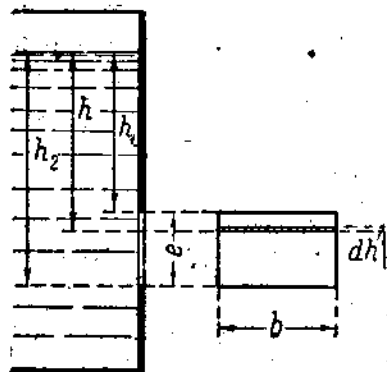
$$l = \frac{2}{3} b H_0^{3/2} \left[ \frac{3}{2} \cdot \frac{e}{H_0} - \frac{1}{64} \cdot \frac{e^3}{H_0^3} \right] = e \cdot b \sqrt{H_0} \left[ 1 - \frac{1}{96} \frac{e^2}{H_0^2} \right].$$

Очевидно,

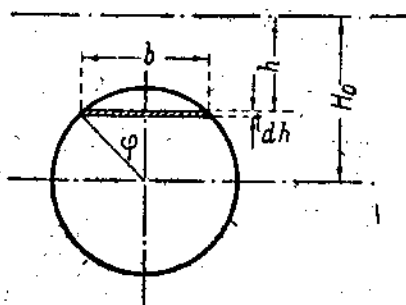
$$\frac{l}{\omega \sqrt{H_0}} = \left[ 1 - \frac{1}{96} \frac{e^2}{H_0^2} \right].$$

б) Круглое отверстие (фиг. 116).

$$l = \int_{H_0-r}^{H_0-r} b \cdot dh \sqrt{h}; \quad b = 2r \cdot \sin \varphi.$$



Фиг. 115.



Фиг. 116.

Так как  $h = H_0 - r \cos \varphi$ , то  $dh = r \sin \varphi \cdot d\varphi$ ,

$$\begin{aligned} l &= \int_0^\pi 2r \cdot \sin \varphi \sqrt{H_0 - r \cos \varphi} \cdot r \sin \varphi \cdot d\varphi = \\ &= 2r^2 \sqrt{H_0} \int_0^\pi \sin^2 \varphi \sqrt{1 - \frac{r}{H_0} \cos \varphi} \cdot d\varphi. \end{aligned}$$

Разлагая в ряд, получаем

$$I = 2r^2 \sqrt{H_0} \int_0^\pi \left[ \sin^2 \varphi \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{r}{H_0} \cos \varphi - \frac{1}{8} \cdot \frac{r^2}{H_0^2} \cos^2 \varphi - \frac{1}{16} \cdot \frac{r^3}{H_0^3} \cos^3 \varphi - \dots \right) \right] d\varphi.$$

Ограничиваясь приведенными членами ряда и интегрируя, имеем

$$I = \pi r^2 \sqrt{H_0} \left[ 1 - \frac{1}{32} \cdot \frac{r^2}{H_0^2} \right], \text{ т. е. } \frac{I}{\omega \sqrt{H_0}} = 1 - \frac{1}{32} \cdot \frac{r^2}{H_0^2}.$$

В случае  $H_0 = r$ ;  $\frac{I}{\omega \sqrt{H_0}} = 0,964$  и т. д.

Убедившись в том, что для большинства случаев разницы между  $I$  и  $\omega \sqrt{H_0}$  мала, заменяли соотношение (д) более простым выражением

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gH}, \dots \dots \dots (e)$$

гласящим, что расход через отверстие равен помноженной на коэффициент расхода площади сечения отверстия на скорость, соответствующую напору в центре тяжести.

В старых курсах обычно многие страницы заполнены примерами и подобными сопоставлениями, произведенными для самых разнообразных форм отверстий.

Необходимо отметить, что подобного рода вычисления имеют лишь весьма относительную ценность. Действительно, прежде всего уравнение (д) можно на самом деле прилагать лишь к сжатому сечению  $\delta - \delta$ , где струи почти параллельны и скорости соответственно равны.

Таким образом, вместо (д), надо было написать:

$$Q = \varphi \int_{h_1}^{h_2} v \sqrt{2gH} dH, \dots \dots \dots (d')$$

где величины, отмеченные индексом, относятся к сжатому сечению, а  $\varphi$  — „средний“ коэффициент скорости.

Таким образом, для вычисления расхода необходимо прежде всего знать форму струи, что само по себе затруднительно. Далее, для оправдания соотношения, подобного (d), пришлось бы: 1) сравнивать величины

$r = \int_{h_1}^{h_2} b' \sqrt{h'} dh'$  с  $\omega' \sqrt{H_1}$ , 2) находить коэффициент сжатия

$\epsilon = \frac{\omega'}{\omega}$  и 3) знать, кроме того, коэффициент скорости  $\varphi$ .

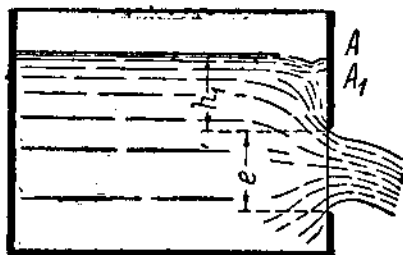
Все это достаточно сложно и необходимо лишь в некоторых исключительных случаях <sup>1)</sup>.

В большинстве же практических приложений достаточно определять лишь величину расхода; в этом случае гораздо проще непосредственно пользоваться соотношением (e), определяя  $\mu$  из опыта.

Определенный из опыта для данной соотношений (формы и размеров отверстия и сосуда, величины напора и т. д.) коэффициент расхода включает уже в себе все необходимые поправки.

В случае больших отверстий, при недостаточных размерах сосуда по сравнению с величиною отверстия, весьма часто может иметь место „неполное“ сжатие. В частности, если отверстие недостаточно глубоко погружено (величина  $h_1$  или, вернее, отношение  $\frac{h_1}{e}$  — фиг. 117 — мало), поверхность жидкости в сосуде вблизи отверстия может понизиться, принимая, вместо горизонтальной, вогнутую форму  $AA_1$ .

Очевидно, во всех таких случаях неполного сжатия коэффициенты расхода очень изменчивы; определенные опытом они годятся для употребления лишь при совершенно тождественных с опытом условиях и имеют потому ограниченное, строго определенное применение.



Фиг. 117.

<sup>1)</sup> Например, случай „прыжка“ при вытекании жидкости из-под щита в лоток. См. Б. А. Бахметев. О неравномерном движении жидкости в открытом русле, гл. IV.

В частности, в случаях, подобных изображенному на фиг. 117, где отверстие мало погружено, разница между значением интеграла  $\int_{h_1}^{h_2} b \sqrt{h} dh$  и  $\omega \sqrt{H_0}$  получается уже

довольно значительной, такие случаи являются промежуточными между отверстием и „водосливом“.

Отметим, что в практике гидротехнических сооружений приходится иметь дело по преимуществу с большими отверстиями и почти всегда с неполным сжатием (водоспуски всякого рода, отверстия в плотинах, отверстия в шлюзных воротах и пр.). К крайнему сожалению, гидротехника в настоящее время имеет в высшей степени скудный запас сведений и коэффициентов для движения жидкости в подобного рода случаях. Для гидравлических лабораторий и практиков-гидротехников имеется здесь еще более, чем обширное поле деятельности. В частности, при проектировании серьезных сооружений, если важно точно знать коэффициенты расхода, всего целесообразнее предварительно их определить в лаборатории на модели. Если модель не слишком уж мала, то коэффициенты расхода для „подобных“ отверстий будут весьма близки друг к другу.

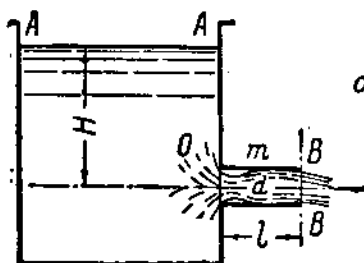
---

## ГЛАВА ВТОРАЯ.

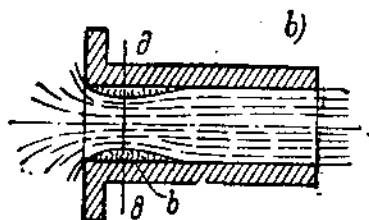
### ИСТЕЧЕНИЕ ЧЕРЕЗ НАСАДКИ.

#### § 18. Внешний цилиндрический насадок (насадок Вентури).

Представим себе, что к отверстию в тонкой стенке  $O$  сечения  $\varphi$  приставлена цилиндрическая трубка  $m$  (фиг. 118). Если длина трубки, называемой в таком случае цилиндрическим внешним насадком, достаточна (при круглом отверстии длина трубки  $l$  не менее  $3,5 - 4d$ ),



Фиг. 118-а.



Фиг. 118-б.

то жидкость вытекает из отверстия насадка полным сечением, при этом расход больше, чем в случае отверстия в тонкой стенке, а именно, коэффициент расхода в формуле

$$Q = \mu \cdot \varphi \cdot \sqrt{2gH}$$

получается из опыта около  $\mu = 0,82$ ; таким образом расход увеличен против случая тонкой стенки примерно в  $\frac{0,82}{0,61} = 1,34$  раза. Так как жидкость вытекает в конце трубки полным сечением, то, очевидно, в этом сечении сжатие отсутствует, коэффициент сжатия  $\epsilon = 1$ , тем самым в силу

соотношения (6)  $\varphi = \mu = 0,82$ . Таким образом, хотя расход увеличен, но скорость уменьшилась. Уменьшение скорости может произойти лишь благодаря возрастанию сопротивления. Соответствующий  $\varphi = 0,82$  коэффициент сопротивления  $\zeta$  в формуле

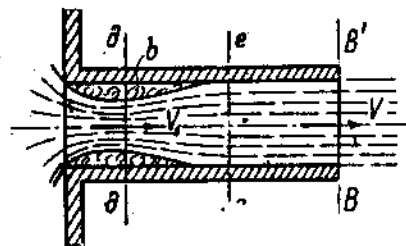
$$v = \varphi \sqrt{2gH} = \sqrt{\frac{2gH}{1+\zeta}}$$

получается равным

$$\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1 = \sim 0,5 \dots \dots \dots (1)$$

Как видим, потеря весьма значительна по сравнению с малыми величинами (0,04—0,06), получающимися при истечении через тонкую стенку.

Причина этих потерь кроется в следующем. При вытекании из сосуда в насадок, благодаря острому краю входного ребра, струя сперва претерпевает сжатие (фиг. 119); затем, пройдя наиболее сжатое сечение  $d-d$ , расширяется, и, достигнув в сечении  $e-e$  стенок насадки, далее полностью заполняет сечение. На участке  $d-e$  происходит быстрое расширение струи, а таковое, как было указано выше, всегда связано с значительной потерей



Фиг. 119.

энергии. Между стенкой и „живой“ струей получается „мертвое“, заполненное водоворотами пространство ( $b$ ).

Вытекающая через цилиндрический насадок струя непрозрачна; поверхность ее покрыта волнующейся рябью. Это свидетельствует о значительной беспорядочности движения в струе.

Найденный опытом коэффициент расхода 0,82 получается путем элементарного теоретического расчета, если потери на участке  $d-e$  оценить непосредственно по теореме Борда.

Действительно, называя скорость в выходном сечении (фиг. 119)  $v$ , а в сжатом —  $v_1$  и замечая, что,  $v = \alpha v_1$ , где

$\varepsilon$  — коэффициент сжатия, получаем сумму потерь

$$\begin{aligned}\sum h_w &= \zeta \frac{v_1^2}{2g} + \frac{(v_1 - v)^2}{2g} = \\ &= \frac{v^2}{2g} \left[ \frac{\zeta}{\varepsilon^2} + \left( \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right)^2 \right].\end{aligned}$$

Если принять  $\zeta = 0,06$  и  $\varepsilon = 0,63$ , то получим <sup>1)</sup>

$$\sum h_w = \frac{v^2}{2g} \left[ \frac{0,06}{0,63^2} + \left( \frac{1}{0,63} - 1 \right)^2 \right] = \sim 0,5 \frac{v^2}{2g},$$

т. е. как раз величину, определяемую уравнением (1).

Очевидно, при иных значениях  $\zeta$  и  $\varepsilon$  могут получиться иные значения общего коэффициента сопротивления насадка, а с ним и  $\rho$ .

### § 19. О величине вакуума в насадке Вентури.

Благодаря сжатию струи в начале насадка давление в полости  $b$  должно быть меньше наружного; если истечение происходит в атмосферу, то в полости должен быть вакуум.

Наличие вакуума в цилиндрическом внешнем насадке была обнаружена и описана еще в 1799 г. итальянцем Вентури, именем которого обычно и называется внешний цилиндрический насадок. На фиг. 120 изображена схема опыта Вентури. Приключенная к небольшому отверстию в стенке насадка пьезометрическая трубка  $m$  погружена другим концом в сосуд  $c$ . Благодаря разрежению, жидкость из сосуда  $c$  подымается в трубке на высоту  $h$ , являющуюся мерилем величины вакуума. В своих опытах Вентури получил  $h = 0,75 H$ .

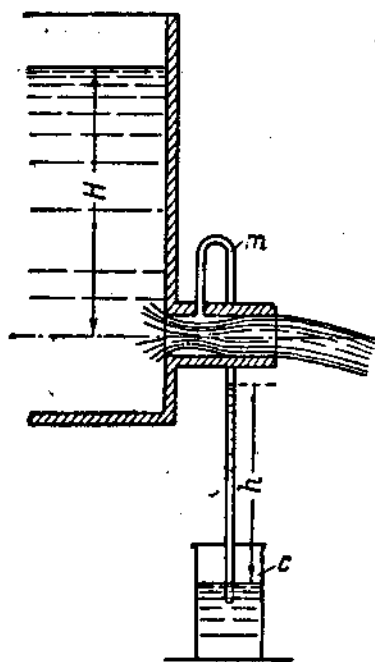
В Гидравлической Лаборатории Ленинградского Политехнического Института опыт Вентури был повторен, при этом в стенке насадка был вставлен целый ряд пьезометрических трубочек, соединенных с дифференциальными манометрами. В результате получается полная картина распределения давления вдоль стенки насадка. Результат одного из опытов изображен на фиг. 121. Отрицательные

<sup>1)</sup> Эти цифры взяты из опыта над насадком Вентури  $d = 3$  см при  $H = 0,8$  м, произведенного в Гидр. Лабор. Ленинград. Политехн. Инст.

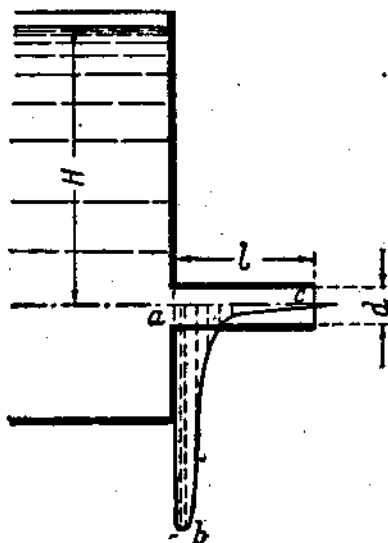
ординаты кривой  $abc$  непосредственно дают величину вакуума в данной точке стенки. Наибольший вакуум достиг  $0,8 H$ .

Величина эта получается также в результате следующего элементарного подсчета. Применяя уравнение Бернулли к свободной поверхности  $AA$  и к сжатому сечению  $d-d$  (фиг. 118) и называя давление в последнем  $p_d$ , имеем

$$H + \frac{p_a}{\gamma} = \frac{p_d}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g}(1 + \zeta),$$



Фиг. 120.



Фиг. 121.

где  $p_a$  — внешнее давление (атмосферное), а  $\zeta$  — коэффициент сопротивления при истечении через тонкую стенку.

Отсюда вакуум (пьезометрический)

$$h = \frac{p_a - p_d}{\gamma} = \frac{v_1^2}{2g}(1 + \zeta) - H.$$

Но, с другой стороны:

$$\frac{v_1^2}{2g} = \frac{v^2}{2gz} = \frac{\mu^2}{z^2} H.$$

Таким образом, имеем

$$V_{ac} = h_{\text{max}} = H \left[ \frac{\mu^2}{z^2} (1 + \zeta) - 1 \right]. \dots \dots (8)$$

Подставляя  $\mu = 0,82$ ;  $z = 0,63$ ;  $\zeta = 0,06$ , имеем

$$V_{ac} = h_{\text{max}} = \sim 0,8 H.$$

Как видим, вакуум достигает весьма значительной величины. Благодаря этому при проходе жидкости через суженное сечение выделяется растворенный в воде воздух. Выделившиеся пузырьки воздуха в значительной мере способствуют уменьшению прозрачности вытекающей струи.

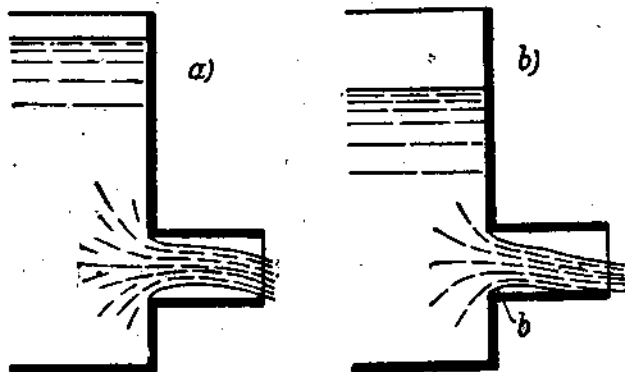
## § 20. Условия работы насадка Вентури полным сечением.

Чем больше напор, тем больше разрежение. Очевидно, с возрастанием напора может, наконец, наступить момент, когда вакуум достигнет наибольшей возможной теоретической величины (1 атм  $\sim 10$  м водяного столба). Соответствующий предельный напор  $H_{\text{max}}$  получается около

$$H_{\text{max}} = \sim \frac{10}{0,8} = \sim 12,5 \text{ м.}$$

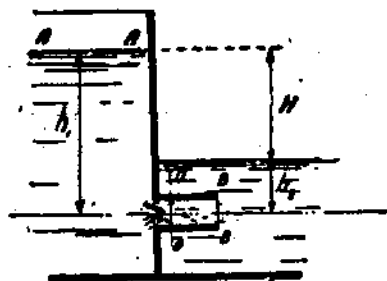
Очевидно, при напорах больше  $H_{\text{max}}$  движение жидкости через насадок в описанных выше условиях (полным сечением с коэффициентом расхода  $\mu = 0,82$ ) уже физически невозможно, так как наличие такого рода движения требовала бы отрицательных давлений в жидкости (растягивающих напряжений). Ясно, что истечение должно изменить свой характер, протекать при иных условиях. На самом деле в этом случае может иметь место либо просто свободное истечение (с коэффициентом  $\mu$ , соответствующим истечению через тонкую стенку) (фиг. 122-а), когда струя вовсе не касается стенки, либо движение, подобное изображенному на фиг. 122-б, когда струя как бы прилипает к одному из краев стенки. В последнем случае между

струей и стенкой, в полости  $b$ , образуется вакуум, благодаря чему расход в этом случае несколько больше, чем в случае (а). Все явление однако неустойчиво. Ввиду этого в приложениях правильнее и осторожнее в таких случаях



Фиг. 122.

считаться лишь с устойчивой формой (а). При этом необходимо иметь в виду, что полученное выше значение  $H_{\text{max}} = 12,5 \text{ м}$  — величина теоретическая. На самом же деле



Фиг. 123.

уже при значительно меньших напорах разрежение настолько сильно, что благодаря освобождению массы растворенного воздуха все явление нарушается.

Изображенные на фигуре 122 случай соответствуют истечению в атмосферу.

При истечении под уровень (фиг. 123), если напор  $H$  (разность уровней) настолько велик, что разрежение

превосходит возможный предел, струя также отделяется от стенок, в этом случае пространство между живой струей и стенками наполнено мертвым водоворотным пространством:

При истечении под уровень, однако, величина  $H_{\max}$  напора, при котором движение полным сечением делается уже физически невозможным, может быть значительно больше, чем при истечении в атмосферу. На самом деле, определяемая по (8) величина  $h_{\max}$  показывает, насколько давление в сжатом сечении меньше, чем наружное при выходе (у сечения  $B-B$ ). Если насадок затоплен, то давление в  $B-B$  соответствует столбу жидкости  $h_2$  и вакуум в  $\delta-\delta$  равен

$$\begin{aligned} V_{ac} = h_{\max} - h_2 &= H \left[ \frac{\mu^2}{\epsilon_1^2} (1 + \zeta) - 1 \right] - h_2 = \\ &= \sim (0,8H - h_2) \dots \dots \dots (8') \end{aligned}$$

Таким образом, как мы видим, вакуум уменьшается на величину противодействия, соответствующего глубине подтопа  $h_2$  <sup>1)</sup>.

Обратим еще внимание на то, что форма движения полным сечением заменится одной из форм фиг. 122, если в полость  $b$  (фиг. 119) так или иначе, вследствие неплотности стенок насадка, проникает воздух; кроме того, если истечение происходит в атмосферу, чтобы получить истечение через насадок полной струей (с  $\mu = 0,82$ ), а не истечение по фиг. 122-а (с  $\mu$  около 0,6), необходимо закрыть предварительно отверстие снаружи (по  $B-B$ , а не со стороны сосуда (фиг. 119), так, чтобы весь насадок был заполнен водой, и затем, постепенно открывая, осторожно „запустить“ явление. Последнее вообще не слишком устойчиво и легко сравнительно переходит в тип фиг. 122-а, если случайно несомый струей кусок дерева или что-либо иное „сорвет“ вакуум, дав возможность воздуху проникнуть в полость  $b$  с наружного края насадка.

<sup>1)</sup> Уравнение (8') может быть получено следующим путем: применяя уравнение Бернулли к  $A-A$  и  $\delta-\delta$ , имеем (см. фиг. 123).

$$h_1 + \frac{p_a}{\gamma} = \frac{p_\delta}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} (1 + \zeta),$$

откуда

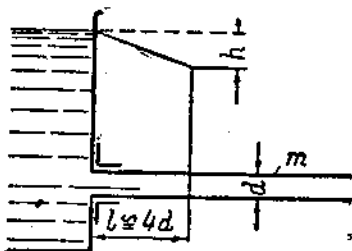
$$V_{ac} = \frac{p_a - p_\delta}{\gamma} = \frac{v_1^2}{2g} (1 + \zeta) - h_2 = \frac{v_1^2}{2g} (1 + \zeta) - H - h_2,$$

что по сопоставлению с рассуждениями, приводимыми к (8), непосредственно дает (8').

Явление делается еще более неустойчивым; если труба коротка, так что сечение, где струя начинает заполнять весь насадок ( $e—e$  фиг. 119), почти совпадает с  $B—B$ . Вот почему для получения устойчивого явления желательно несколько удлинять трубу ( $l \geq 4d$ ).

## § 21. Практические приложения.

Мы столь подробно рассмотрели вопрос об истечении через внешний цилиндрический насадок по той причине, что случай этот весьма часто встречается в приложениях. Укажем несколько из них.



Фиг. 124.

I. На фиг. 124 в боковую стенку резервуара вмазана (или приклепана) „заподлицо“ длинная труба  $m$ . Очевидно, в начале трубы мы целиком имеем явления, описанные выше. На протяжении  $l = 3,5 - 4d$  от начала имеем разность пьезометрических высот

$$h = (1 + 0,5) \frac{v^2}{2g},$$

где  $v$  — скорость в трубе.

Соответственная потеря  $0,5 \frac{v^2}{2g}$  называется обычно потерей „на вход“ в трубу (при острой кромке входного ребра).

II. На фиг. 125 труба  $D$  служит для выпуска воды из водоема, образованного водоудержательной плотиной. Труба эта закрывается щитом  $\mathcal{W}$ , приводимым в действие тягой  $m$ .

Если края трубы не округлены, что весьма часто делается из конструктивных соображений, (фиг. 125-б) изображает вмазку железной клепаной трубы с входом, обрамленным угольником (фиг. 125-с) — вмазку чугунной фланцевой трубы), то движение воды через подобного рода водопропускную трубу вполне соответствует описанному выше случаю внешнего цилиндрического насадка.

Очевидно, расход

$$Q = \mu \cdot \omega \sqrt{2gH},$$

где  $\omega$  — сечение трубы, а  $\mu = 0,82$ , или лучше  $\mu = 0,8$  с некоторым запасом, учитывающим увеличение сопротивления благодаря заклепкам, неровностям стенок, излишней длине трубы и пр.

На практике при расчете пропускной способности трубы с столь высоким коэффициентом расхода надлежит каждый раз убеждаться в том, что физическая возможность подобного движения обеспечена.

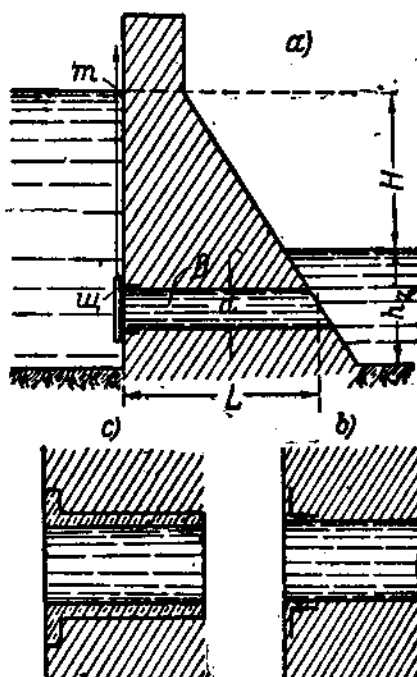
Срыв вакуума и истечение свободной струей (по одному из типов фиг. 122), как мы выше видели, может происходить от трех причин:

1. Недостаточная длина трубы  $L$ . Длина  $L$  должна быть не менее  $3,5 d$  и желательно  $4 d$ .

2. Чрезмерный вакуум, благодаря слишком значительному напору. Практически мы не рекомендовали бы полагаться на вакуум больше  $7-7,5$  м водяного столба.

3. Расположение отверстия с щитом, согласно фиг. 125, но выше нижнего уровня, благодаря чему при открытии щита труба вообще может не заполниться.

Ясно, что если по тем или иным причинам нельзя ожидать работы отверстия полным сечением (как цилиндрического насадка), то следует: 1) либо считать движение по типу 122-а, т. е. с коэффициентом расхода около 0,6; 2) либо округлить входные края трубы (фиг. 126), образовав в начале ее „конoidalный“ насадок, благодаря чему сжатие уничтожается, и коэффициент расхода, отнесенный к выходному сечению, повысится до 0,9 — 0,96.

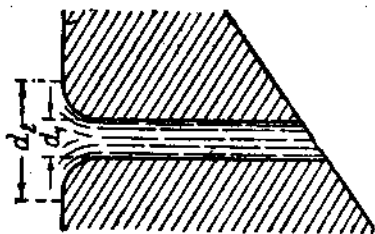


Фиг. 125.

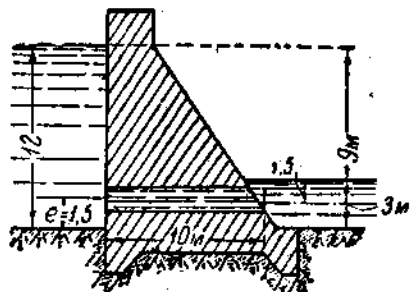
Кажущийся с первого взгляда более рациональным второй способ на самом деле не всегда является таковым: действительно, не говоря уже о том, что значения коэффициентов расхода для коноидальных насадков могут быть весьма разнообразны, во-первых, закругление входного отверстия может быть затруднительно в конструктивном отношении; во-вторых, приходится перекрывать щитом значительную поверхность (на фиг. 126,  $d_2$ ), что вызывает при значительных напорах трудную и тяжелую конструкцию щита и излишне большие подъемные усилия.

*Примеры:*

1. Определить диаметр  $d$  двух круглых труб для пропуска  $50 \text{ м}^3/\text{сек}$  (фиг. 127).



Фиг. 126.



Фиг. 127.

Размеры сооружения и соотношения уровней ясны из чертежа.

Полагая  $\mu = 0,8$ , получаем сечение каждой трубы

$$\omega = \frac{25}{0,8 \cdot \sqrt{2g \cdot 9}} = 2,35 \text{ м}^2,$$

чему соответствует диаметр  $d = 1,73 \text{ м}$ . Делаем  $d = 1,75 \text{ м}$ , располагая ось на высоте  $e = 1,50 \text{ м}$  от дна.

Проверяем условия истечения: 1) длина достаточна, около 5  $d$ ; 2)  $V_{ac} = \sim (0,8 \times 9 - 1,5) = 5,7 \text{ м}$  допустимо; 3) труба затоплена.

II. Определить пропускную способность трубы  $T_1$  диаметром  $d = 2,26 \text{ м}$ ,  $\omega = 4 \text{ м}^2$ , расположенной согласно чертежу (фиг. 128).

Так как труба расположена высоко над нижним уровнем и, кроме того, длина ее мала

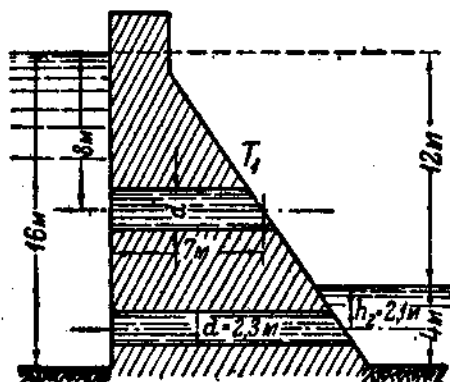
$$\frac{L}{d} = \frac{r}{2 \cdot 26} = 3,1,$$

то истечение надо считать по устойчивому типу фиг. 122-а, что дает при  $\mu = 0,6$

$$Q = 0,6 \times 4 \times 4,43 \times \sqrt{8} = 30 \text{ м}^3/\text{сек.}$$

Труба с закругленным входом, считая  $\mu = 0,95$ , потребовала бы сечения (фиг. 129).

$$\omega = 4 \times \frac{0,6}{0,95} = 2,74 \text{ и } d = 87 = \sim 1,90 \text{ м.}$$



Фиг. 128.

Считая радиус закругления входа  $r = 0,2d = \sim 0,4 \text{ м}$ , получим  $d' = 2,7 \text{ м}$ .

III. Определим еще при условиях предыдущей за-



Фиг. 129.

дачи диаметр трубы  $d_1$ , расположенной близ основания плотины и рассчитаной на пропуск  $Q = 50 \text{ м}^3/\text{сек.}$

Принимая  $\mu = 0,8$ , имеем

$$\omega = \frac{50}{0,8 \cdot 4,43 \cdot \sqrt{12}} = 4,09 \text{ м}^2;$$

$$d_1 = 2,28 = \sim 2,30 \text{ м.}$$

Если допустить вакуум в 7,5 м, то получаем требуемое затопление трубы:

$$h_2 = 0,8 H - V_{ac} = 0,8 \times 12 - 7,5 = 2,1 \text{ м,}$$

что вполне осуществимо.



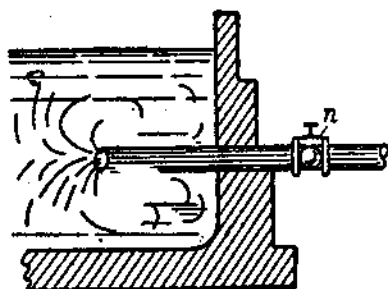
Таким образом коэффициент расхода  $\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,71$ , коэффициент сопротивления

$$\zeta = \frac{1}{\mu^2} - 1 = 2 - 1 = 1,$$

против 0,5 при насадке Вентури.

Результаты эти хорошо оправдываются опытом.

Мы не будем входить в дальнейшие подробности. Ход рассуждений для рассмотрения явления совершенно одинаков с случаем внешнего насадка. Практическое применение насадка Борда мы встречаем, если, например, труба, забирающая жидкость из резервуара, проходит насквозь стену, как изображено на фиг. 131. Важно помнить, что в этом случае сопротивление на вход равно



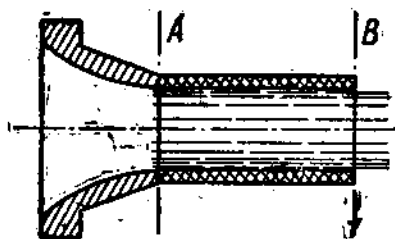
Фиг. 131.

$$\zeta \frac{v^2}{2g} = 1 \frac{v^2}{2g}.$$

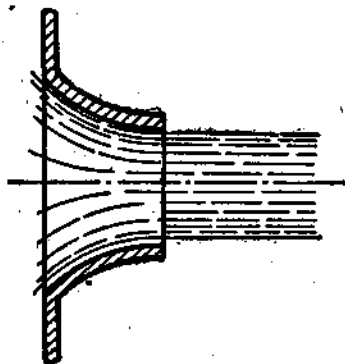
### § 23. Влияние закругления краев.

Если входная кромка насадка закруглена, то сжатие существенно уменьшается и коэффициент расхода увеличивается. Выше уже (стр. 178) мы привели результаты опытов Вейсбаха над так называемым коноидальным насадком. Очевидно, если к такому короткому насадку приделать короткую цилиндрическую трубку (фиг. 132) и получится цилиндрический насадок с закругленным входным краем, то обстоятельства движения мало изменятся. Расход лишь немного уменьшится за счет трения в трубке  $A-B$ . Количественно однако точно учитывать наперед влияние закругления весьма трудно, так как и в этом случае большей частью происходит все-таки сжатие (фиг. 133), величина которого, повидимому, находится в довольно сложной зависимости от диаметра струи и формы очертания

входной кромки. По крайней мере, правило, данное Вейсбахом для насадков с отсутствием сжатия ( $\sigma = 1$ ), полученное знаменитым германским гидравликом из опытов с насадком (фиг. 101), не подтвердилось в Гидравлической Лаборатории Института для насадков других размеров. Во всяком случае, для цилиндрических насадков с закругленным краем (если радиус закругления не слишком мал) коэффициент расхода велик и вряд ли когда опускается ниже 0,95. Отметим также, что определение формы для очертания коноидальных насадков, унич-



Фиг. 152.



Фиг. 133.

тожающих сжатие, имеет существенное значение для проектирования водонаправительных сооружений, как-то: струенаправляющие дамбы, очертания быков, плотин и пр.

## § 24. Конически сходящиеся насадки.

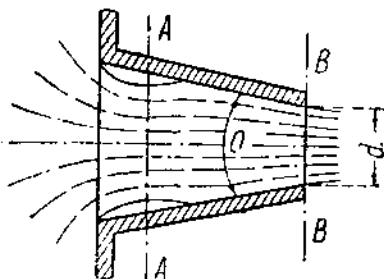
В конически сходящемся насадке (фиг. 134) потеря (на удар за сечением А) меньше, чем в насадке Вентури; с другой стороны, с увеличением угла сходимости  $\theta$  увеличивается сжатие струи по выходе из насадка. В результате получается, что наибольший коэффициент расхода, отнесенный к сечению В—В, получается при определенном угле сходимости ( $\theta = \sim 13^\circ$ ), что хорошо иллюстрируется следующими результатами одного из опытов д'Обюссона (D'Aubuisson) и Кастель (Castel) в Тулузе над насадком с  $d = 15 \text{ мм}$  и длиной 40 мм при напоре 3 м.

Напомним, что в опытах этих входная кромка насадка не была закруглена.

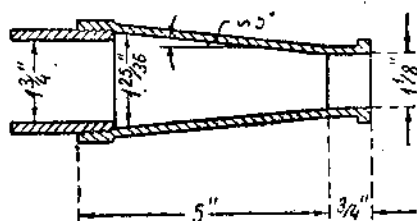
ТАБЛИЦА 91).

| $\theta$ | $\mu$ | $\varphi$ | $\theta$ | $\mu$ | $\varphi$ |
|----------|-------|-----------|----------|-------|-----------|
| 0        | 0,829 | 0,829     | 13° 24'  | 0,946 | 0,963     |
| 3° 10'   | 0,895 | 0,894     | 14° 28'  | 0,941 | 0,966     |
| 5° 26'   | 0,924 | 0,919     | 19° 28'  | 0,924 | 0,970     |
| 7° 52'   | 0,930 | 0,932     | 23° 00'  | 0,914 | 0,974     |
| 10° 20'  | 0,938 | 0,951     | 40° 20'  | 0,870 | 0,980     |
| 12° 04'  | 0,942 | 0,955     | 48° 50'  | 0,847 | 0,984     |

Практически сходящиеся насадки имеют применение в соплах турбин высокого давления (колес Пельтона) и пожарных брандспойтах. В первом случае всему насадку придают мягкие закругленные формы <sup>2)</sup>; наиболее полные ис-



Фиг. 134.



Фиг. 135.

следования над различными формами пожарных насадков произвел в 1888—1890 г. Фриман (Freeman <sup>3)</sup>). С типом брандспойтов, подобных изображенному на фиг. 135, Фриман получил коэффициент расхода 0,98—0,99.

<sup>1)</sup> An. de mines 1838. См. также D'Aubuisson: Hydraulique.

<sup>2)</sup> Подробности см. курс гидравлических двигателей.

<sup>3)</sup> Trans. Amer. Soc. C. E. 1891. Т. 4; см. также „Курс гидравлики“ Hughes & Safford N. Y. 1911, стр. 165; в этом сочинении приведены также данные о потерях в различного рода шлангах. Соотношения между давлением за насадком  $h_{ef}$  и высотой полета струи  $h_f$  (фонтана) см. Воеу: Hydraulics, стр. 177 (опыты Эллиса) и Rühlmann: Hydromechanik (стр. 556, где приведены результаты многочисленных опытов Вейсбаха и др. Из опытов этих следует, что отношение это падает с увеличением абсолютной величины давления.

## § 25. Расходящиеся насадки.

В расходящихся насадках потери (на удар и на „расхождение“, см. I ч., стр. 139) больше, чем в цилиндрическом насадке. Соответственно этому скорость

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gH}{1+\zeta}}$$

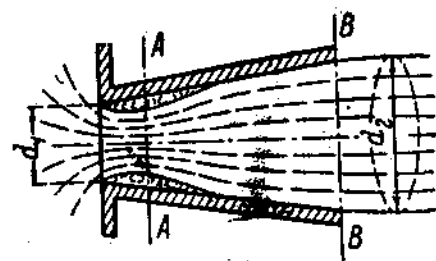
в выходном сечении  $B-B$  (фиг. 136) сравнительно мала; однако, если относить коэффициент расхода к отверстию в тонкой стенке (диаметр  $d_1$ ), т. е. определять  $\mu$  как

$$\mu = \frac{Q}{\frac{\pi d_1^2}{4} \cdot \sqrt{2gH}},$$

то  $\mu$  может достигнуть весьма значительной величины (2—3). Таким образом, приставив к отверстию расходящуюся трубу, можно существенно увеличить расход. Очевидно, увеличение это происходит на счет вакуума в сечении  $A-A$ ; рас-

ходящийся насадок „сосет“ жидкость из сосуда. Само собою очевидно, что описанное действие насадка возможно лишь до тех пор, пока условия истечения соответствуют фиг. 136.

Если угол расхождения велик, то вообще не происходит заполнения насадка движущейся



Фиг. 136.

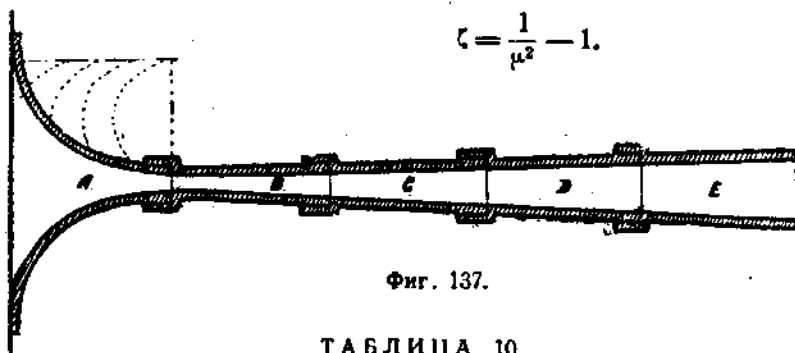
струей, и движение происходит с поверхностью раздела (как изображено на фиг. 78, I ч.). Очевидно, движение нарушается также, если слишком велик напор (см. выше, стр. 199). При этом напор, при котором происходит „срыв“ вакуума, уменьшается с увеличением угла расхождения и вообще меньше, чем для насадка Вентури.

Из опытов над истечением через расходящиеся насадки приведем лишь результаты работ Фрэнсиса<sup>1)</sup> над истечением под уровень через насадок, изображенный на фиг. 137

<sup>1)</sup> Lowell Hydraulic experiments, 1871, стр. 208. См. также Астров, Гидравлика, стр. 142. Опыты других исследователей см. Rühlman, стр. 289 и т. д.

В испытанном насадке первая часть А была очерчена по циклоиде для возможно полного уничтожения сжатия. Фрэнсис в своих опытах постепенно удлинял насадки, навинчивая дополнительные части; угол расхождения при этом оставался постоянным около 5°. Результаты опытов сведены в следующей таблице, в которой также вычислен коэффициент сопротивления

$$\zeta = \frac{1}{\mu^2} - 1.$$



Фиг. 137.

ТАБЛИЦА 10.

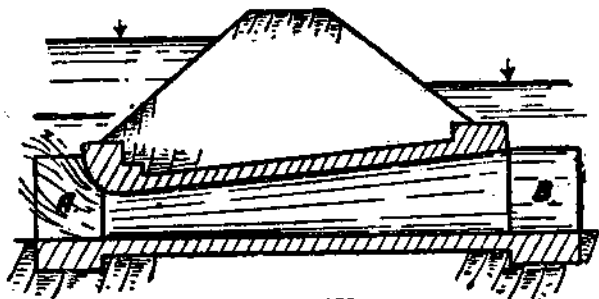
| Тип<br>насадка | Напор<br>в футах<br>от до | Коэффициент расхода,<br>относительный      |                                     | Коэффициент<br>сопротивления |
|----------------|---------------------------|--------------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------|
|                |                           | к узкому ( $d_1$ )<br>сечению на-<br>садка | к конечному<br>сечению на-<br>садка |                              |
| A              | 0,53—1,52                 | 0,927                                      | 0,944                               | 0,16—0,12                    |
| A—B            | 0,20—1,46                 | 1,48—1,59                                  | 0,73—0,78                           | 0,89—0,64                    |
| A—C            | 0,10—1,81                 | 1,89—2,16                                  | 0,36—0,41                           | 6,76—4,95                    |
| A—D            | 0,13—1,36                 | 2,08—2,43                                  | 0,21—0,24                           | 21,95—15,80                  |
| A—E            | 0,11—1,42                 | 2,05—2,39                                  | 0,13—0,15                           | 60—44                        |

Как видим, сопротивления огромны, что подтверждают соображения, высказанные выше (ч. I, стр. 144) относительно величины потерь в расходящемся потоке.

Сопоставляя приведенные выше результаты, мы приходим к выводу, что наименьшие потери имеют место при истечении в тонкой стенке, коноидальных и сходящихся насадках. Поэтому таковые и употребляются в тех случаях,

где необходимо по возможности сберегать энергию (с о п л а гидравлических двигателей, фонтаны, брандсбойты).

Наоборот, в насадках Вентури и особенно в расходящихся увеличение расхода связано с значительной потерей энергии. Очевидно, подобными расположениями надлежит пользоваться лишь в тех случаях, когда энергии беречь



Фиг. 138.

не нужно. Бывают случаи, когда даже важно по возможности рассеять запас энергии и получить воду по возможности „лишенную“ живой силы. Примером может служить труба под насыпью (фиг. 137). Избыток живой силы в вытекающей из трубы воде грозит разрушением отводному лотку В, с каковою целью в практике обыкновенно и ограничивают выходную скорость определенными нормами.

## ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

### КОЭФИЦИЕНТ РАСХОДА СИСТЕМЫ.

#### § 26. Основные определения.

В § 40 части I, разбирая практические приложения уравнения Бернулли, мы определили скорость истечения жидкости из трубы (фиг. 79) в атмосферу из уравнения  $H = \frac{v^2}{2g}(1 + \zeta)$  как

$$v = \sqrt{\frac{2gH}{1 + \zeta}}.$$

В случае (фиг. 81), когда истечение происходило под уровень, скорость определилась как

$$v = \sqrt{\frac{2gH}{\zeta}},$$

где  $\zeta$  был назван нами коэффициентом сопротивления системы.

Называя  $\omega$  площадь живого сечения трубы, к которой относилась скорость  $v$ , можно составить выражение расхода:

$$Q = \omega v = \begin{cases} \omega \sqrt{\frac{1}{1 + \zeta}} \cdot \sqrt{2gH} \\ \omega \sqrt{\frac{1}{\zeta}} \cdot \sqrt{2gH}. \end{cases}$$

Так как в рассмотренных случаях сжатие в концевых сечениях отсутствует, то, очевидно,  $\mu = \varphi$  и по аналогии с (2<sup>bis</sup>), стр. 163, можно ввести обозначение

$$\mu_c = \sqrt{\frac{1}{1 + \zeta_c}} \text{ и } \mu_c = \sqrt{\frac{1}{\zeta_c}}, \dots \dots \dots (\alpha) \text{ } ^1$$

называя  $\mu_c$  коэффициентом расхода системы.

<sup>1)</sup> В зависимости от того, происходит ли истечение свободно или под уровень.

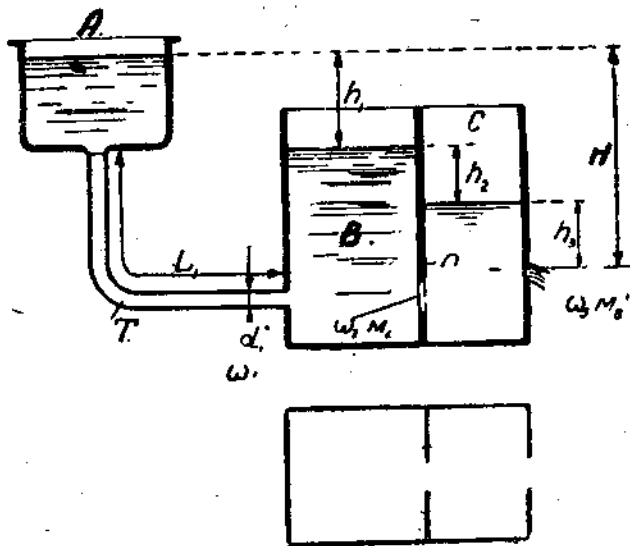
Очевидно,  $\mu_c$  зависит лишь от общего устройства системы и определяется для данной системы раз навсегда либо из уравнения (а) (полагая  $\zeta_c$  = сумме коэффициентов сопротивления отдельных частей), либо непосредственно из опыта. Зависимость между напором и расходом через систему в этом случае определится как

$$Q = \mu_c \omega \sqrt{2gH} \dots \dots \dots (\beta)$$

Такое обобщение очень удобно во многих практических случаях. Приведем несколько примеров.

**§ 27. Истечение из бака через трубу и отстойный бассейн с перегородкой и отверстиями.**

*Пример.* Из бака (фиг. 139) с постоянным уровнем *A* вода подается трубой *T* в ящик, разделенный перегородкой на



Фиг. 139.

два отделения *B* и *C*. В перегородке и в наружной стенке сделаны отверстия сечением  $\omega_2$   $\omega_3$ , которым соответствуют коэффициенты расхода  $\mu_2$  и  $\mu_3$ .

Зная напор  $H$  от  $A$  до центра тяжести отверстия (3), определить для установившегося движения: 1) величину расхода и 2) высоты стояния уровней в отделениях  $B$  и  $C$ .

Установившемуся движению будет, очевидно, соответствовать одинаковый расход через трубу и оба отверстия.

Очевидно, имеем

$$Q = \omega_1 \mu_{c1} \sqrt{2gh_1} = \omega_2 \mu_2 \sqrt{2gh_2} = \omega_3 \mu_3 \sqrt{2gh_3} \dots (1)$$

В этом выражении  $\omega_1$  есть площадь сечения трубы,  $\mu_{c1}$  — обобщенный коэффициент расхода для трубы, определяемый в этом случае (потери на вход, на трение, на закругление, на удар при выходе), как

$$\mu_c = \sqrt{\frac{1}{\zeta}} = \sqrt{\frac{1}{0,5 + \lambda \frac{L_1}{d_1} + \zeta_{\text{закр.}} + 1}}$$

Кроме уравнения (1), имеем

$$H = h_1 + h_2 + h_3 = \frac{Q^2}{2g} \left[ \frac{1}{\omega_1^2 \mu_{c1}^2} + \frac{1}{\omega_2^2 \mu_2^2} + \frac{1}{\omega_3^2 \mu_3^2} \right],$$

равное вообще

$$H = \frac{Q^2}{2g} \cdot \Sigma \left( \frac{1}{\omega \mu} \right)^2 \dots \dots \dots (11)$$

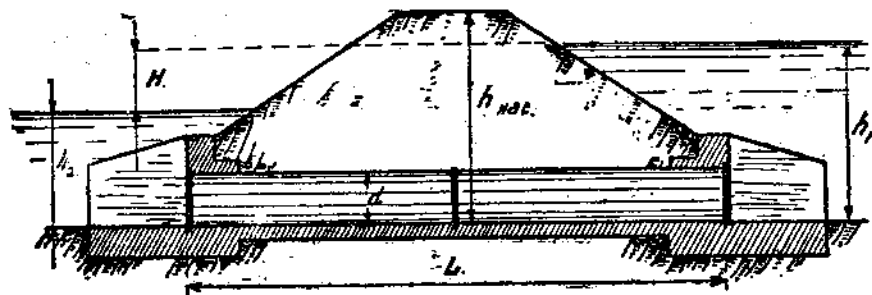
Из этого уравнения сразу определяется расход. Зная последний, уровни определим без затруднения из (1).

## § 28. Труба под насыпью.

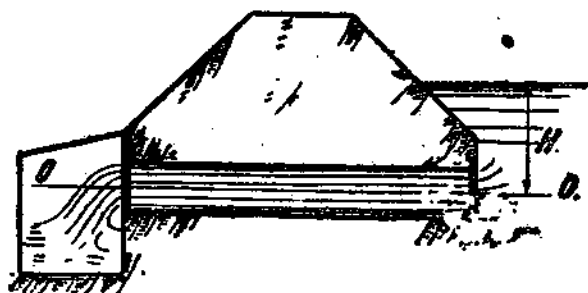
Применим еще вышесказанное к расчету труб (металлических, железобетонных и пр.), служащих для пропуска воды под насыпями линий железных дорог, каналов и пр.

В этом случае (фиг. 140) сопротивления складываются из потери на вход ( $\zeta = \sim 0,5$ ), на трение по длине трубы и, в случае затопленной снизу трубы (фиг. 140), на выход по Борда.

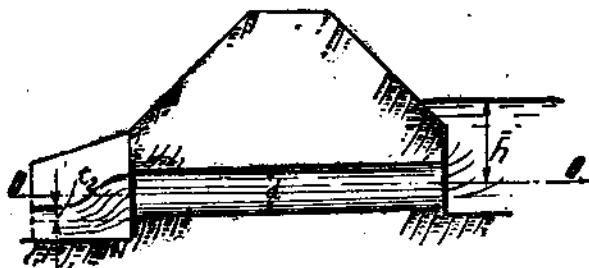
Случай свободного истечения изображен на фиг. 141. В этом случае очевидно,  $H$  считается от верхнего уровня до оси  $O-O$ , проходящей через центр тяжести трубы.



Фиг. 140.



Фиг. 141.



Фиг. 142.

Наиболее затруднительный случай (фиг. 142), где труба наполовину затоплена. В этом случае можно с достаточной точностью придерживаться следующего правила: если  $t_2 < \frac{d}{2}$ , т. е. подтоп не достигает центра трубы,

считать, истечение, как свободное; если  $t_2 > \frac{d}{2}$ , т. е. труба заполнена выше половины, считать трубу затопленной и в формуле (\*) брать  $H$ , как разность уровней выше и ниже трубы.

Таким образом, во всех случаях

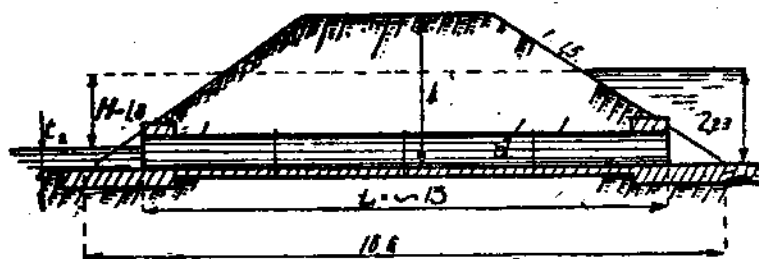
$$\mu_c = \sqrt{\frac{1}{1 + 0,5 + \lambda \frac{L}{d}}}$$

$$Q = \omega \mu_c \sqrt{2gH} \dots \dots \dots (*)$$

Расчет ведется различно в зависимости от частных условий поставленной задачи. Приведем несколько примеров.

## § 29. Примеры расчета труб под насыпью.

**Пример 1.** Определить диаметр железной клепаной трубы для пропуска  $Q = 6,0$  куб. м/сек при бытовой глубине  $t_2 = 0,43$  м.



Фиг. 143.

1) Средние значения для  $\lambda$  можно принять:

1) Клепанные железные трубы  $\lambda = 0,025 = \frac{1}{40}$ .

2) Чугунные (большого диаметра) и бетонные трубы  $\lambda = 0,02 = \frac{1}{50}$ .

Предполагая, что лоток у выпуска трубы обделан камнем, и допуская среднюю скорость в трубе  $1,2 \text{ м/сек}^1$ , получаем

$$\omega = \frac{6,0}{5} = 1,2 \text{ м}^2, \text{ чему соответствует } d = 1,23 \text{ м.}$$

$$\text{Делаем } d = 1,3; \omega = 1,33 \text{ м}^2; v = 4,5; \frac{v^2}{2g} = \frac{4,5^2}{19,62} = 1,03.$$

Так как бытовая глубина  $-t_2 > \frac{d}{2}$ , то считаем трубу как затопленную; определяем

$$\zeta = 1 + 0,5 + \frac{13 \times 1,03}{40 \times 1,3} = \sim 1,76; \mu = \sqrt{\frac{1}{1,76}} = 0,755.$$

$$\text{Подпор } H = 1,76 \times 1,03 = 1,8 \text{ м.}$$

В рассмотренном частном случае подпор  $H$  не превзошел допустимых границ; в этом случае для расчета не было собственно надобности вводить коэффициент  $\mu$ .

*Пример II.* Определим теперь размеры железобетонного люкера (фиг. 144) для пропуска  $15 \text{ м}^3/\text{сек}$  под судоходным



Фиг. 144.

каналом; при этом наибольший допустимый горизонт воды с напорной стороны должен быть ниже бровки насыпи на  $1,5 \text{ м}$ ; при заданном уровне низовой воды перепад  $H$  равен  $2 \text{ м}$ . •

Из уравнения (\*) непосредственно имеем, что

$$\mu \cdot \omega = \frac{Q}{\sqrt{2gH}} = \frac{15}{4,43 \times 1,41} = 2,4.$$

<sup>1)</sup> Нормы допускаемых скоростей в трубах при различных устройствах последних приводятся в курсах мостов.

Подберем теперь потребный диаметр, принимая во внимание, что

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{1,5 + \frac{1}{50} \cdot \frac{50}{d}}}$$

Составляем табличку:

| $d$ | $\omega$ | $\mu$ | $\mu\omega$ |
|-----|----------|-------|-------------|
| 2,0 | 3,14     | 0,71  | 2,23        |
| 2,5 | 4,90     | 0,725 | 3,55        |

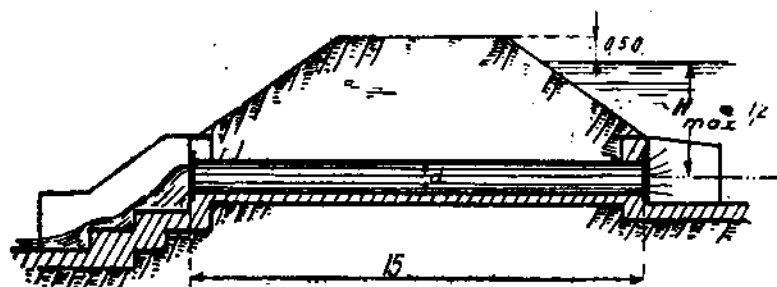
Замечая, что  $\mu$  изменяется сравнительно мало, определяем

$$\omega = \frac{2,4}{0,71} = 3,38;$$

$$d = 2,07.$$

Ставим  $d = 2,10$  м.

*Пример III.* Еще более просто решается вопрос, если задан диаметр трубы.



Фиг. 145.

Определим, например, пропускную способность чугунной трубы (фиг. 145) длиною 15 м и диаметром

соответственно 0,75 и 0,5 м.

$$1) d = 0,75; \mu = \sqrt{\frac{1}{1,5 + \frac{1}{50} \cdot \frac{15}{0,75}}} = 0,725; \omega \mu = 0,32 \text{ кв. м.}$$

$$2) d = 0,75; \mu = \sqrt{\frac{1}{1,5 + \frac{1}{50} \cdot \frac{15}{0,5}}} = 0,69; \omega \mu = 0,136 \text{ кв. м.}$$

Под напором  $H_{\max} = 1,2$  м трубы пропускают

$$Q_1 = 0,32 \sqrt{9,2 \times 1,2} = 0,32 \times 3,04 \cdot \sqrt{1,2} = 1,06 \text{ куб. м/сек.}$$

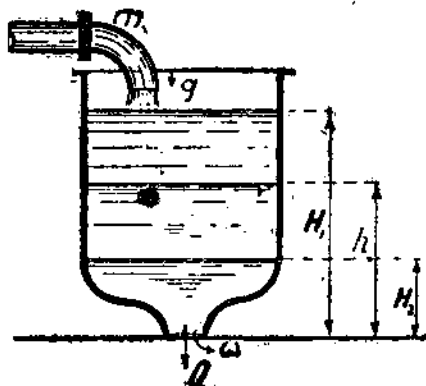
$$Q_2 = 0,136 \sqrt{9,2 \times 1,2} = 0,136 \times 3,04 \cdot \sqrt{1,2} = 0,47 \text{ куб. м/сек.}$$

## ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ. ИСТЕЧЕНИЕ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ НАПОРЕ.

### § 30. Постановка задачи.

Задача об истечении при переменном напоре относится уже к области неустановившегося движения, и общее решение ее требует применения уравнения (§ 26, I ч.) Однако, как было уже указано в начале главы, во многих практических случаях задачу с достаточной точностью можно решать, пользуясь уравнениями установившегося движения. Для этого лишь необходимо, чтобы изменение обстоятельств движения по времени совершалось медленно, так, чтобы можно было пренебрегать в движущемся потоке силами инерции. С формальной стороны в уравнении неустановившегося движения (§ 26, I ч.) в этом случае можно пренебрегать величинами  $\frac{1}{g} \cdot \frac{dv}{dt}$  и т. д., и уравнения (§ 26, I ч.) тем самым превращаются в уравнения установившегося движения.

В настоящем мы исключительно ограничимся рассмотрением случаев подобного медленно изменяющегося по времени движения, отсылая интересующихся общим случаем к специальным сочинениям <sup>1)</sup>. Отметим лишь, что великие основатели гидравлики, ученые первой половины XVIII стол.,



Фиг. 146.

<sup>1)</sup> См. Lorenz, Technische Hydromechanik. Б. А. Бахметев, Введение в изучение неустановившегося движения (курс лекций), изд. 1915 г.

рассматривая вопрос об истечении, трактовали его во всей полноте, т. е. именно как движение неустановившееся.

Назовем  $\Omega$ —площадь сечения сосуда на высоте  $h$  (фиг. 146); для сосуда заданной формы, очевидно,  $\Omega$  есть некоторая функция высоты  $\varphi(h)$ . Называя  $Q$  переменный расход из сосуда, а  $q$  (также переменный по времени)—секундный объем жидкости, поступающей в сосуд (через трубу  $m$ ), составляем дифференциальное уравнение изменения уровня в сосуде на основании следующих соображений.

За элементарный промежуток времени  $\Delta t$  из сосуда вытекает объем жидкости

$$Q\Delta t = \mu\omega\sqrt{2gh}\Delta t;$$

поступает

$$q\Delta t.$$

Изменение объема  $dW$  жидкости, находящейся в сосуде:

$$dW = \Omega \cdot \Delta h = (q - \mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2gh}) \Delta t.$$

Переходя к пределу, получаем

$$\frac{dh}{dt} = \frac{q - \mu \cdot \omega \sqrt{2gh}}{\Omega},$$

где

$$\Omega = \varphi(h); \quad q = \psi(t).$$

В случае, если  $q$  постоянно, правая часть уравнения есть функция одного  $h$ , и решение вопроса сводится к квадратуре

$$t = \int \frac{\Omega dh}{g - \mu \cdot \omega \sqrt{2gh}} + \text{const.}$$

Рассмотрим ряд частных случаев.

### § 31. Призматический сосуд.

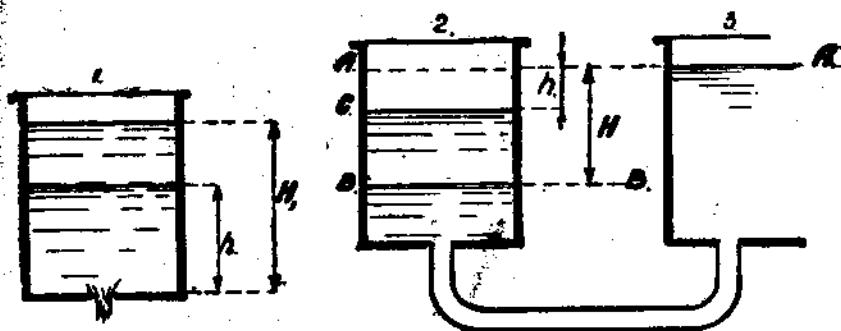
Случай I. Призматический сосуд:  $\Omega = \text{const}$ ;  $q = 0$ .  
Случай опорожнения сосуда (1) или наполнения сосуда (2) из водоема (3) с постоянным уровнем  $A-A$  (фиг. 147).

В этом случае

$$t = C - \int \frac{Q dh}{\mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2gh}}^1) = C - \frac{2Q\sqrt{h}}{\mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2g}}.$$

Отсчитывая время от некоторого момента, при котором напор равнялся  $H_1$ , имеем время, через которое уровень дойдет до  $h$ ,

$$t = \frac{2Q}{\mu \omega \sqrt{2g}} (\sqrt{H_1} - \sqrt{h}) \dots \dots \dots (9)$$



Фиг. 147.

Определим время полного опорожнения бака (1) или наполнения бака (2), начиная с некоторого уровня  $H_1$ ; очевидно, в этом случае  $h_2 = 0$  и, соответственно, время

$$T = \frac{2Q\sqrt{H_1}}{\mu \omega \sqrt{2g}} \dots \dots \dots (9')$$

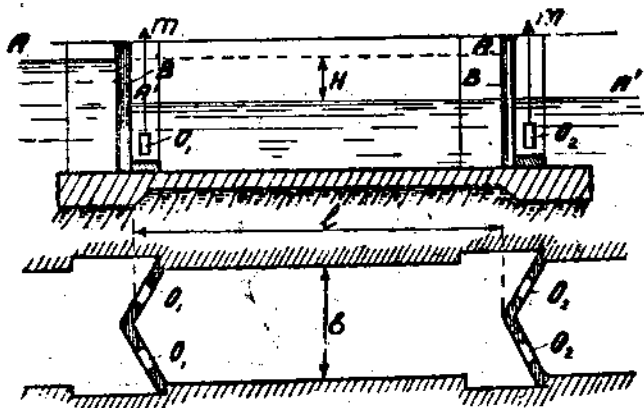
Это время вдвое больше времени  $T_0$ , которое необходимо было бы для соответственного наполнения или опорожнения под постоянным напором  $H_1$ ; действительно,

$$T_0 = \frac{QH_1}{\mu \omega \sqrt{2gH_1}} = \frac{Q\sqrt{H_1}}{\mu \omega \sqrt{2g}} = \frac{1}{2} T \dots \dots (9'')$$

<sup>1)</sup> Во втором случае  $\mu$  есть коэффициент расхода системы.

### § 32. Наполнение и опорожнение шлюзных камер.

Вышеразобранный случай непосредственно прилагается к определению времени наполнения и опорожнения шлюзных камер. На фиг. 148 изображено наиболее простое устройство (в настоящее время уже не столь часто употребляемое), когда отверстия  $O$  устроены непосредственно в воротах  $B$  и открываются тягами  $m$ . В этом случае, на-



Фиг. 148.

зывая сечение отверстий  $\phi$ , имеем время наполнения и опорожнения камер непосредственно по формуле (9)

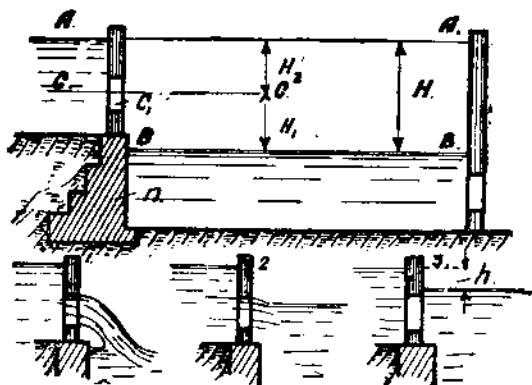
$$T_1 = \frac{2\Omega\sqrt{H}}{\mu\omega_1\sqrt{2g}}; \quad T_2 = \frac{2\Omega\sqrt{H}}{\mu\omega_2\sqrt{2g}},$$

где  $\Omega = bl$  есть площадь камеры.

Более сложен расчет наполнения в том случае, если отверстие  $O$  не затоплено (в шлюзах большого напора с так называемой стенкой падения  $n$ ). В самом деле, в то время как здесь легко составить выражение расхода для периода, когда уровень в камере (фиг. 149) ниже нижней кромки отверстия (1) или выше верхней (3), так что отверстие совершенно свободно, либо совершенно затоплено, — весьма затруднительно точно учесть обстоятельства движения в промежутке (2), когда отверстие подтоплено лишь частью.

Обычно при расчете времени наполнения в этом случае довольствуются следующим приближением.

Разбивают шлюз по высоте на две части: 1)  $H_1$  — от уровня нижнего бьефа до плоскости  $c-c$ , проходящей



Фиг. 149.

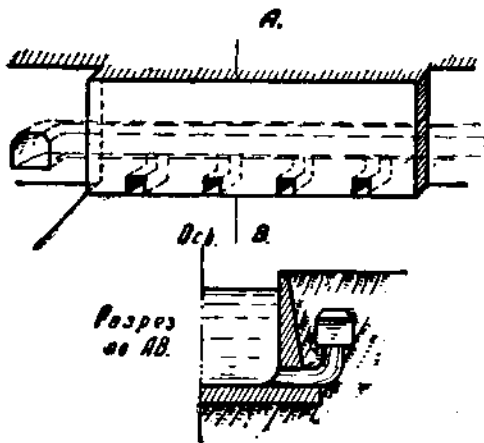
через центр тяжести отверстия; 2)  $H_2$  — от плоскости  $c-c$  до верха. В первой части считают истечение свободным под постоянным напором  $H - H_1 = H_2$ ; соответственное время

$$T_1 = \frac{\Omega H}{\mu \omega_1 \sqrt{2gH_2}};$$

во второй части считают расход, как через затопленное отверстие; время

$$T_2 = \frac{2\Omega \sqrt{H_2}}{\mu \omega \sqrt{2g}}.$$

С формальной стороны совершенно также определяется время наполнения и опорожнения в случае, если приспособления для этой цели устроены в виде водопроводных галлерей (фиг. 150) с рядом отверстий в боковых стенах, дне шлюза и т. д.



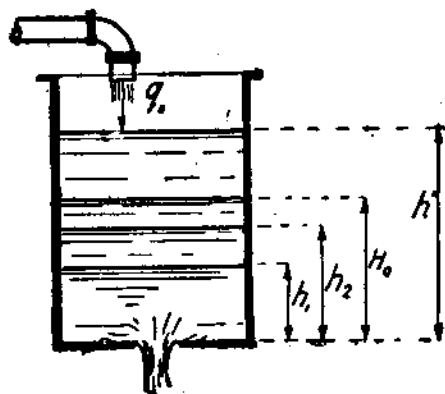
Фиг. 150.

Формулы (9) и (9') непосредственно приложимы и к этому случаю; надо лишь под величиною  $\mu$  разуместь коэффициент расхода системы.

Затруднение здесь именно в определении последнего. В курсах и работах, посвященных вопросам проектирования шлюзов, приводятся приемы вычисления  $\mu$  в подобных случаях. Мы полагаем однако, что подобные расчеты не достаточно достоверны. Для определения их возможно пользоваться моделями.

### § 33. Призматический сосуд с постоянным притоком.

Случай II. Призматический сосуд с постоянным притоком  $q = \text{const} = q_0$  (фиг. 151).



Фиг. 151.

Назовем  $H_0 = \frac{q_0^2}{\omega^2 \mu^2 2g}$

напор, при котором  $Q = q_0$ , т. е. расход равен притоку. Очевидно, при напоре  $h = H_0$  имеет место установившееся движение. Если  $h = h'' > H_0$ , то уровень понижается; при  $h = h' < H_0$  — повышается. В обоих случаях, как легко показать, имеет место асимптотическое приближение уровня к  $H_0$ .

В самом деле,

$$t = C + \int \frac{Q dh}{q_0 - \mu \omega \sqrt{2gh}} = C + \frac{Q}{q_0} \int \frac{dh}{1 - \sqrt{\frac{h}{H_0}}}.$$

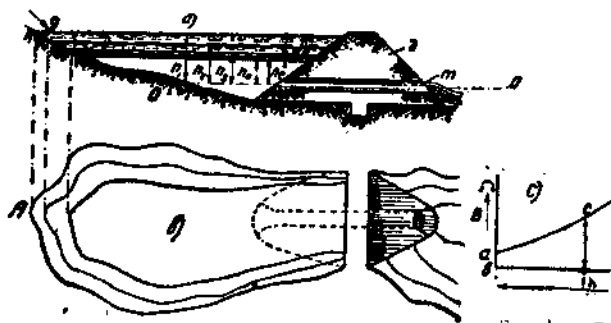
Интегрируя, определяем время  $t_{(1)}^{(2)}$ , необходимое для изменения уровня с  $H_1$  до  $H_2$ :

$$t_{(1)}^{(2)} = \frac{2Q}{q} \left[ H_0 \log \frac{\sqrt{H_0} - \sqrt{H_1}}{\sqrt{H_0} - \sqrt{H_2}} + (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}) \right].$$

Очевидно, для  $H_0 = H_0$ ,  $t = \infty$ .

### § 34. Водоем, образованный в тальвеге дамбой.

Случай III. Случай наполнения или опорожнения водоема, образованного в тальвеге дамбой  $d$  и спускной трубой  $m$  (случай работы трубы в железнодорожной насыпи или умеряющего интенсивность ливневых вод водоема). Ограничимся при этом случаем  $q = q_0$ , когда приток по тальвегу постоянный. Имея план тальвега в горизонталях (фиг. 152), определяем поверхность водоема  $\Omega$  при ряде наполнений  $h_1, h_2, h_3$ , и т. д.; зависимость  $\Omega = f(h)$  может быть изображена графически; в этом случае, очевидно,



Фиг. 152.

площадь фигуры  $abck$  измеряет объем водохранилища между  $h_k$  и  $O-O$ . Интегрирование уравнения (9') всего проще вести приближенно, пользуясь для этой цели любым аналитическим или графическим методом; в огромном большинстве случаев достаточно точно пользоваться так называемым способом трапеций; в этом случае

$$\Delta t'_k = \left( \frac{\Omega(h_k)}{q_0 - \mu \omega \sqrt{2gh_k}} + \frac{\Omega(h_l)}{q_0 - \mu \omega \sqrt{2gh_l}} \right) \left( \frac{h_l - h_k}{2} \right)$$

$$t_1^2 = \sum_1^2 \Delta t.$$

### § 35. Истечение при переменном напоре под переменный уровень.

Случай IV. Рассмотрим еще случай истечения при переменном напоре под переменный уровень.

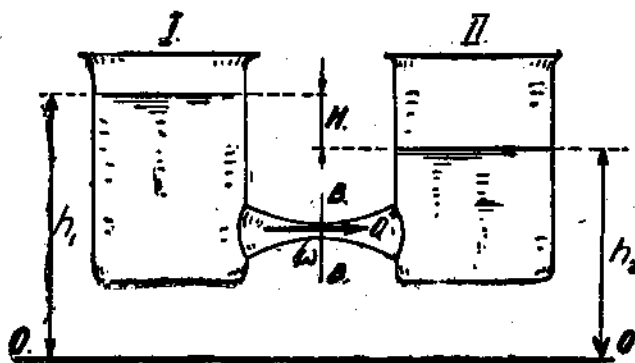
Два сосуда (I и II) сообщаются через отверстие (B) сечения  $\omega$  (фиг. 153); коэффициент расхода  $\mu$ ; относя высоты уровней к некоторой горизонтальной плоскости O—O и изымая сечения соответственных сосудов

$$\Omega_1 = f_1(h_1); \quad \Omega_2 = f_2(h_2),$$

имеем

$$Q dt = \omega \mu \sqrt{2gH} \cdot dt \dots \dots \dots (a)$$

$$Q dt = -\Omega_1 dh_1 = \Omega_2 dh_2,$$



Фиг. 153.

Из последнего уравнения следует, что

$$dh_1 = -dh_2 \frac{\Omega_2}{\Omega_1},$$

так что

$$dH = dh_1 - dh_2 = -dh_2 \left(1 + \frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right) = -dh_2 \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{\Omega_1} = -dh_1 \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{\Omega_2},$$

$$Q dt = -dH \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2}.$$

Подставляя  $Q dt$  из (a), имеем

$$dt = -dH \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2} \cdot \frac{1}{\omega \mu \sqrt{2gH}}.$$

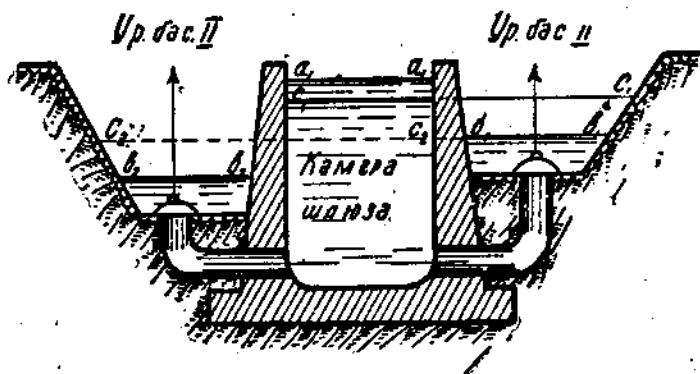
Если сосуд призматической формы, то

$$t_{(1)}^{(2)} = \frac{2\Omega_1\Omega_2(\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2})}{(\Omega_1 + \Omega_2)\omega\mu\sqrt{2g}} \dots \dots \dots (b)$$

Определим еще время, необходимое для того, чтобы уровни сравнялись; для этого в уравнении (b) надо положить  $H_2 = 0$ ; соответственно чему

$$T = \frac{2\Omega_1\Omega_2\sqrt{H}}{(\Omega_1 + \Omega_2)\omega\mu\sqrt{2g}},$$

где  $H$  — начальная разность уровней.



Фиг. 154.

Если один из сосудов (скажем I) велик по сравнению с другим, то, деля числитель и знаменатель уравнения на  $\Omega_1$  и пренебрегая величиною  $\frac{\Omega_2}{\Omega_1}$  по сравнению с единицей, имеем

$$t_{(1)}^{(2)} = \frac{2\Omega_1\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}}{\omega\mu\sqrt{2g}},$$

т. е. формулу (9).

Рассмотренный в этом параграфе случай встречается, например, в шлюзах, снабженных так называемыми уравнительными бассейнами (см. схему фиг. 154).

## II. ИСТЕЧЕНИЕ ЧЕРЕЗ ВОДОСЛИВ.

### ГЛАВА ПЯТАЯ.

#### ИСТЕЧЕНИЕ ЧЕРЕЗ ВОДОСЛИВ С ТОНКОЙ СТЕНКОЙ.

##### § 36. Основные понятия.

Если канал  $k$  (фиг. 155) перегороден стенкой  $c$  и жидкость в своем движении по каналу переливается через нее, то говорят, что жидкость течет через водослив;  $t_1$  и  $t_2$  — глубины в канале до и после водослива;  $p$  — высота стенки водослива;  $b$  — его ширина;  $H$  — напор на водосливе.



Фиг. 155.

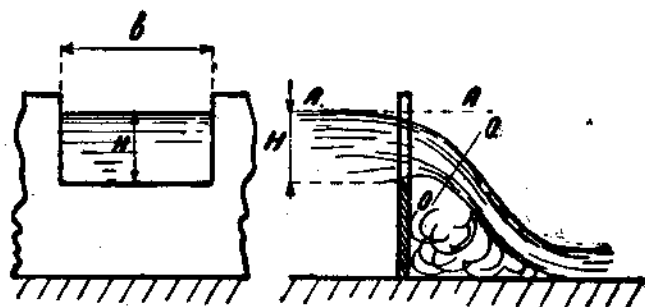
Еще Дюбуа (Dubuat, конец XVIII стол.), стремясь установить зависимость между расходом через водослив и напором, рассматривал истечение через прямоугольный водослив (фиг. 156), как частный случай истечения через широкое отверстие без верхней кромки. На самом деле, применяя формулу (d) (стр. 190) к такого рода отверстию, получаем, отсчитывая глубины от свободной поверхности AA и замечая, что в рассматриваемом случае  $h_2 = H_1$ ;  $h_1 = 0$ ,

$$Q = \frac{2}{3} \mu b H^{3/2} \sqrt{2g} \dots \dots \dots (10')$$

При средних значениях для таких отверстий  $\mu = 0,6 - 0,65$ , получаем  $\frac{2}{3} \mu$  равным 0,4—0,44.

Опыты подтвердили правильность соотношения (10') и дали значения  $\frac{2}{3} \mu$ , близкие к указанным выше. Это обстоятельство послужило причиной того, что рассмотрение Дюбуа (вывод „формулы“ водослива, как частного случая отверстия) получило значительное распространение и часто до сих пор единственно приводится в курсах гидравлики.

Скорость подхода. Если размеры подводящего канала не слишком велики и средняя скорость  $v_0 = \frac{Q}{Bt_1}$  в сечении АА (фиг. 157) не слишком мала, то очевидное влияние этой скорости на увеличение расхода при одном и том



Фиг. 156.

же напоре  $H$  учитывают также со времен Дюбуа следующим образом: вычисляют соответствующий указанной выше скорости подхода скоростной напор  $\Delta h$

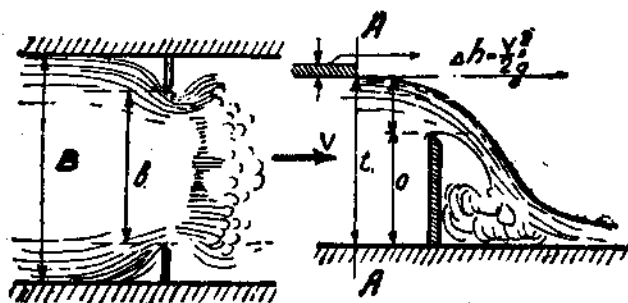
$$\Delta h = \frac{v_0^2}{2g} \dots \dots \dots (11)$$

и прибавляя его к „статическому“ напору  $H$ , получают формулу (10') в виде

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} (H + \Delta h)^{3/2} = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left( H + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{3/2} = \\ = m b \sqrt{2g} \left( H + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{3/2} \dots \dots \dots (10)$$

Величину  $m = \frac{2}{3} \mu$  мы будем называть коэффициентом расхода через водослив.

Совершенно ясно, что применять формулу (d, стр. 190) к определению расхода через водослив можно еще с меньшим основанием, чем к случаю отверстия значительных размеров. Действительно, в последнем случае, особенно при не слишком малом напоре, уравнение (d', ч. II, § 17) правильно хотя бы для сжатого сечения, где имеется параллелизм струй, в случае же водослива по самому существу явления параллелизма струй не имеется. Кривизна струй настолько значительна, что не может быть и речи о гидростатическом распределении давлений в каком-либо сечении  $O-O$  (фиг. 156), таким образом, вывод уравнения (10'), как ча-



Фиг. 157.

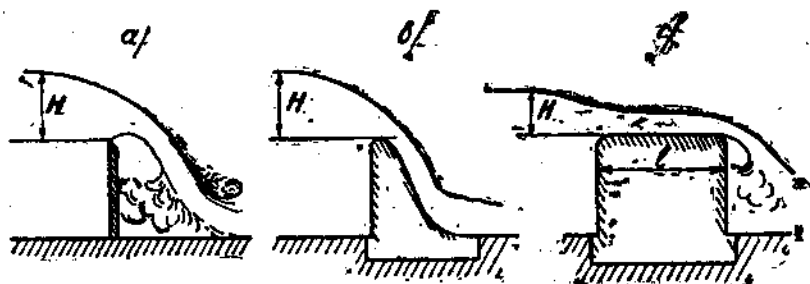
стного случая отверстия, является недопустимым. Что же касается правильности основного соотношения, то таковое является просто на просто следствием размерности. Действительно, вообще говоря, расход является произведением площади сечения на скорость, площадь сечения пропорциональна  $bH$ , скорость —  $\sqrt{2gH}$ , очевидно, расход пропорционален  $b\sqrt{2gH} \cdot H\sqrt{H}$ , что и приводит к уравнению (10').

Весьма полное и всестороннее физическое изучение явления истечения через водослив было произведено в конце прошлого столетия Базеном<sup>1)</sup>. Изучение явления истечения через водослив всего лучше начинать с ознакомления с главнейшими результатами исследования Базена.

<sup>1)</sup> Исследования Базена над истечением через водослив продолжались с 1886 до 1895 г.; подробные результаты напечатаны в ряде мемуаров в *Annales des Ponts et Chaussées* (1888 — 1898). Впоследствии Базен опубликовал сводку главнейших результатов в отдельном мемуаре. *Expériences nouvelles sur l'écoulement en déversoir*, 1898.

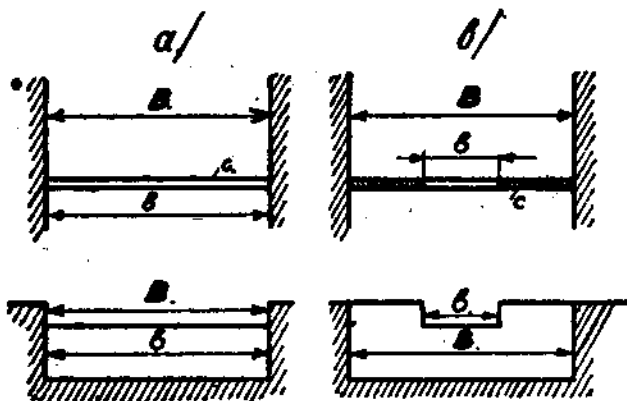
## § 37. Терминология.

1. С точки зрения формы, мы будем различать водослив в тонкой стенке (фиг. 158-а) от водослива с широким порогом (фиг. 158-б), у которого ширина порога  $l$  достаточно



Фиг. 158.

велика по сравнению с напором  $H$ , чтобы на некотором протяжении свободная поверхность переливающейся струи была близка к параллелизму поверхности порога. Нам при-



Фиг. 159.

дется, кроме того, рассматривать водосливы самых разнообразных практических форм, одна из которых, отвечающая типу водосливных каменных плотин, изображена

на фиг. 158-*b*; подобные промежуточные между (а) и (с) формы мы будем называть „водосливами с практическими профилями или формами“.

2. С точки зрения устройства и расположения водослива в плане надлежит отличать водослив без бокового сжатия (фиг. 159-*a*), у которого ширина ребра *b* равна ширине канала *B*, благодаря чему отсутствует сжатие струи



Фиг. 160.

сбоку, от водослива с боковым сжатием (фиг. 159-*b*), в котором, благодаря тому, что ширина прореза в стенке *b* меньше ширины канала *B*, струя истекает с большим или меньшим сжатием сбоку. Подобно случаю отверстия, сжатие это может быть совершен-

ным, если отношение  $\frac{b}{B}$  мало

и стенки не оказывают сколько-нибудь существенного влияния на направление струй вблизи выреза; обратно, если ширина *B* не велика по сравнению с *b*, стенки оказывают влияние на ориентировку струй, сжатие уменьшается, получается водослив с несовершенным сжатием, тип промежуточный между (а) и (b).



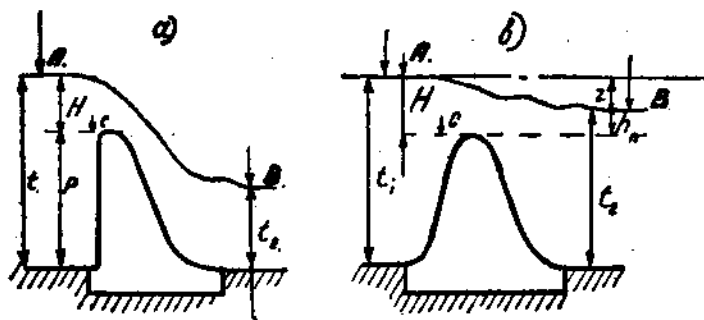
Фиг. 161.

В приведенных выше изображениях стенка водослива предполагалась расположенной перпендикулярно к оси канала. Такое расположение мы будем называть в дальнейшем **прямым водосливом**. В противоположность этому фиг. 160-*a* соответствует „косому“, фиг. 160-*b* — „криволинейному“ водосливу.

3. На фиг. 161-*a* изображен прямоугольный водослив с горизонтальным ребром, на фиг. 161-*b* — с наклонным

ребром. Очевидно, могут иметь место самые разнообразные формы вырезов, из них мы приводим на фиг. 161-с так называемый „треугольный“ водослив.

4. Наконец, надлежит различать водослив затопленный и незатопленный. Истечением через незатопленный водослив мы будем называть случай, изображенный на фиг. 162-а, в котором уровень воды  $B$  за водосливом



Фиг. 162.

ниже ребра  $C$ . Наоборот, на фиг. 159-б уровень  $A$  выше ребра  $C$ . В этом случае водослив будет затопленный, причем величина подтопа измеряется величиною  $h_n$ .

### § 38. Типы струй.

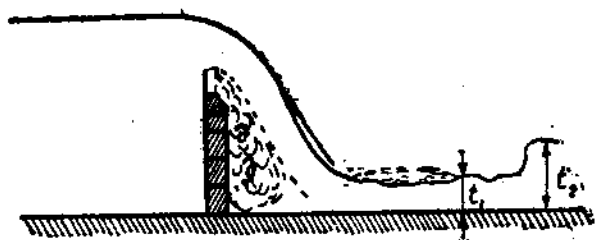
Одним из наиболее важных результатов опытов Базена явилось установление того факта, что истечение через один и тот же водослив может происходить в целом ряде различных типов. Переливающаяся струя может принимать различные формы: изменения формы, в свою очередь, влекут за собой изменение, притом в весьма широких пределах, и коэффициентов расхода. Базен классифицировал возможные формы истечения в виде подразделения на типы, или формы, струй (*forme des nappes*).

1. Свободная струя (*nappe libre*). „Свободной“ Базен называет струю в том случае, если в пространстве  $D$  (фиг. 163) под струей обеспечен свободный доступ воздуха так, что давление под струей равно атмосферному<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Предполагается, что все явление истечения происходит в атмосфере; если истечение имеет место в какой-либо другой среде, то случай „свободной“ струи предполагает давления с обеих сторон струи одинаковыми.



вее пространство под струей наполнится жидкостью, и струя обратится в подтопленную снизу (фиг. 165)<sup>1)</sup>. И в этом

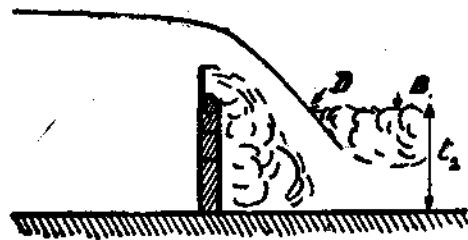


Фиг. 165.

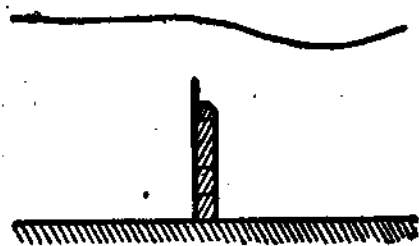
случае непосредственно глазом легко обнаруживается за струей мертвое, наполненное поворотами пространство  $\delta - \delta$ .

Подтопленная снизу струя может проявляться в трех формах.

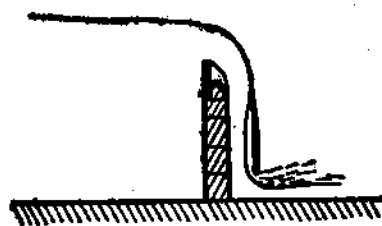
а) Фиг. 165 соответствует „подтопленной струе с отогнанным прыжком“ (nappe puyée avec ressaut éloigné). Глубина воды  $t_1$  непосредственно ниже водослива, меньше глубины  $t_2$  нижнего бьефа вообще. Струя сопрягается с последним прыжком л.



Фиг. 166.



Фиг. 167.



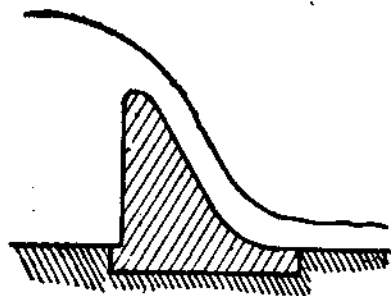
Фиг. 168

<sup>1)</sup> Проф. Рабок назвал такую струю „заполненную“ (Wassergefülltes Strahl).

Если, однако, не изменяя расхода воды, повышать искусственно уровень нижнего бьефа, то по мере увеличения глубины  $t_2$  прыжок  $\lambda$  надвигается на ниспадающую струю и, наконец, целиком ее покрывает.

б) Тем самым подтопленная струя превращается в „покрытую“ (парре поуée, recouverte par le reflux d'aval) (фиг. 166). Как показывает чертеж, в этом случае поверхность ниспадающей струи и поверхность нижнего бьефа пересекаются по ясно выраженной линии раздела  $D$ .

г) Если еще увеличивать глубину  $t_2$ , то струя может превратиться в волнистую (фиг. 167). Здесь уже нет точной линии раздела  $D$ . Верхний и нижний уровни сопрягаются непрерывной волнообразной поверхностью.



Фиг. 169.

4. Прилипшая струя (парре адхэrente). При некоторых определенных соотношениях (см. ниже) мертвое водоворотное под струей пространство совершенно исчезает; струя совершенно отжимается к стенке водослива, превращаясь в „прилипшую“ (фиг. 168).

При этом, если стенка очень тонка, то прилипшую форму получить очень трудно, и струя вообще очень неустойчива. Малейшее сотрясение, плывущий предмет ее разрушают, переводя в отжатую или подтопленную. Струя эта имеет практическое значение лишь для водосливов практических форм, подобных фиг. 169. К сожалению, физическая сторона явления истечения через подобные водосливы еще почти не затронута.

### § 39. Опыты Рэбока и опыты Базена.

1. Крайне интересные наблюдения над формами струй произведены проф. Рэбоком (Rehbock) в гидротехнической лаборатории в Карлсруэ<sup>1)</sup>. Водослив был установлен в лотке со стеклянными стенками. Оказалось, что простым наблюдением в проходящем свете можно достаточно точно

<sup>1)</sup> Stauwerke, изд. 1912 г.

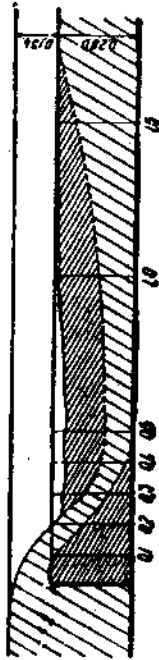
Всплывающая струя в отстойнике приликом.



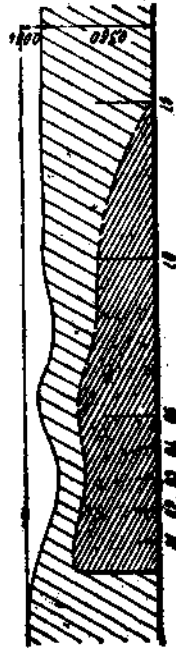
Струя поднимается снизу с отстойником приликом.



Струя поднимается снизу подрытом.



Всплывающая струя.



Приликом струя с отстойником приликом.



Тылы струй при истечении через водослив в вертикальной тонкой отстойке  
по опытам Reubach'a. Band d. Ing Wiss Statistk 1912.

разграничить живую струю от смежных, заполненных водоворотами мертвых пространств. На прилагаемом листе чертежей приведены некоторые из изображений, зарисованных Рэбоком (фиг. 170). Изображения эти в высшей степени поучительны. Особенно интересен факт, что во всех типах струй, кроме волнистой, ниспадающая живая струя прижимается к полу и на некотором расстоянии течет, прикасаясь к полу, притом почти не расширяясь. Опыты Рэбока, кроме того, поясняют причину появления в подтопленной покрытой струе линии раздела  $D$  (фиг. 166) и т. д.

2. Чтобы несколько более конкретизировать вопрос, проследим вместе с Базеном последовательную смену форм струй для конкретного случая, а именно водослива Базена высотой  $p = 0,75$  м, устроенного согласно фиг. 171<sup>1)</sup>.

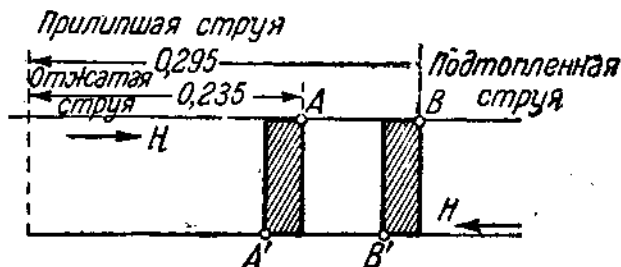
Изменяя последовательно расход (путем водовпускных в голове канала отверстий Б. Б.), наблюдаем следующие формы струй: до тех пор, пока напор  $H$  не превосходит  $0,235$  м, струя получается отжатой; она содержит известный объем воздуха. По мере увеличения расхода, вода под струей подымается все выше и выше, заменяя воздух, который оказывается совершенно вытесненным при напоре  $H = 0,235$  м. В этот момент струя внезапно обращается в „прилипшую“. Ее основание (pied)

двигается к стенке, поверхность ее стремится сделаться вертикальной и, в то же время, без того, чтобы расход изменился, напор внезапно падает с  $0,235$  до  $0,210$  м\*. (Это уменьшение напора при неизменившемся расходе происходит от увеличения коэффициента расхода  $m$  Б. Б.). „Если продолжать и далее увеличивать расход, то прилипшая форма сохраняется до тех пор, пока напор не достигнет  $0,295$  м; с приближением к этой величине форма струи начинает делаться неустойчивой, появляется форма струи, подтопленной снизу, и, опять-таки без изменения величины расхода,

<sup>1)</sup> Никсеследующее изложение представляет почти дословный перевод из Базена, I а. с., стр. 7.

уровень воды перед плотиной сразу подымается, увеличивая напор с 0,295 до 0,310 м (соответственно уменьшению коэффициента расхода. Б. Б.). „Форма, подтопленная снизу, сохраняется в дальнейшем до того момента, когда достаточным повышением уровня нижнего бьефа она не будет заменена формой „волнистой“.

Базен далее указывает, что при производстве опыта в обратном направлении, т. е. при постепенном уменьшении расхода, формы струй также постепенно сменяются, но критические точки, точки смены форм, при этом несколько смещаются; смещение это иллюстрируется диаграммой (фиг. 172), в которой по оси абсцисс откладываются



Фиг. 172.

напоры; стрелкой показано направление хода опыта, точками  $A, B$  и  $A', B'$  отмечены „критические“ точки. Заштрихованные части — области, в которых струя может принимать две формы, являются, вообще говоря, областями неустойчивых состояний.

Чтобы судить о том, насколько меняется коэффициент расхода в зависимости от типа струй, приведем небольшую табличку (стр. 242), в которой собраны коэффициенты расхода, полученные Базеном на водосливе высотой  $p = 0,75$  м при одном и том же напоре 0,20 м<sup>1</sup>).

Базен во всем своем исследовании всюду сопоставляет полученный им коэффициент расхода для того или иного типа водослива с коэффициентом  $m_0$ , который имел бы место для одинакового с испытуемым по величине  $p$  и  $H$  водо-

<sup>1</sup>) В последней графе этой таблицы приведены отношения соответствующих коэффициентов расхода к коэффициенту расхода  $m_0$  водослива со свободной струей.

| Форма струи             | $m'$  | $\frac{m'}{m_0}$ |
|-------------------------|-------|------------------|
| Струя свободная . . . . | 0,433 | 1,00             |
| „ отжатая . . . .       | 0,460 | 1,06             |
| „ подтопленная . .      | 0,497 | 1,15             |
| „ прилипшая . . .       | 0,554 | 1,28             |

слива с вертикальной стенкой, без бокового сжатия и с свободной струей (полным подводом воздуха снизу). Коэффициент  $m_0$  мы в дальнейшем будем называть „нормальным“.

#### § 40. Устойчивость форм водосливной струи.

Не все формы струй одинаково устойчивы. Наибольшей устойчивостью обладает „свободная“ струя. Устойчивой в достаточной мере как в смысле формы, так и значения коэффициента расхода, является и подтопленная струя. Эти две формы струй имеют наибольшее практическое значение и только они две и подвергнутся подробному рассмотрению в дальнейшем. Струя отжатая меняет по преимуществу форму и коэффициент расхода в зависимости от той или иной свободы доступа воздуха под струю<sup>1)</sup>.

Наибольшей неустойчивостью обладает струя прилипшая. Она даже не всегда может быть получена. Для ее образования необходимо, вообще говоря, чтобы стенка имела некоторую толщину (на фиг. 171 — 100 мм).

Как мы выше видели, различным типам струй соответствуют, при соответствующих прочих условиях, совершенно различные коэффициенты расхода, а, следовательно, и расход жидкости. Совершенно ясно, что последний тем больше, чем меньше сжатие струи (в частности, чем меньше подъем струи  $h$ ) и чем меньше давление под струей в полости  $D$ . На самом деле, уменьшение сжатия увеличивает живое

<sup>1)</sup> Крайне интересный случай образования отжатой струи и постоянной, периодически повторяющейся, смены этой формы со свободной на одной из плотин реки Mürgtal описывает Рэбок (Stauwerke, стр. 65). При напоре около 0,6 м смена форм повторяется примерно через 10 сек., причем прорыв воздуха под струю сопровождается значительным (на подобие раскатов грома) шумом.

сечение струи, уменьшение давления (возрастание вакуума) под струей увеличивает скорости в струе <sup>1)</sup>.

Ясно поэтому, что расходы, при одном и том же напоре  $H$ , возрастают по мере перехода от свободной струи к отжатой, далее к подтопленной и, наконец, к прилипшей.

Мы увидим далее, что Базену опытным путем удалось установить закономерную связь между величиною коэффициента расхода и величинами сжатия снизу  $\frac{f}{H}$  и давления под струей. Теперь же обратимся к подробному рассмотрению отдельных случаев движения.

#### § 41. Учет скорости подхода по Базену.

Прежде, однако, приведем прием Базена для учета скорости подхода. Формулу (10) перепишем в виде

$$Q = m \cdot b \cdot \sqrt{2g} \left( H + \alpha \frac{v_0^2}{2g} \right)^{3/2},$$

где  $\alpha$  — некоторый, пока неизвестный, коэффициент  $> 1$ , учитывающий влияние скорости подхода. Вынося  $H$  за скобку, разлагая в строку Ньютона и ограничиваясь за малостью величины  $\frac{v_0^2}{2gH}$  первыми двумя членами ряда, имеем

$$\begin{aligned} Q &= m \cdot b \cdot \sqrt{2g} H^{3/2} \left( 1 + \alpha \frac{v_0^2}{2gH} \right)^{3/2} = \\ &= m \left( 1 + \frac{3}{2} \alpha \frac{v_0^2}{2gH} \right) b \sqrt{2g} H^{3/2}. \end{aligned}$$

Величина  $m \left( 1 + \frac{3}{2} \alpha \frac{v_0^2}{2gH} \right)^{3/2} = m'$  будет уже коэффициентом расхода нормального вида формулы водослива

$$Q = m' b \sqrt{2g} H^{3/2} \dots \dots \dots (12)$$

уже с учетом скорости подхода.

<sup>1)</sup> Скорости в какой-нибудь точке  $T$  на нижней поверхности струи (на фиг. 163 и 164) относятся, очевидно, как  $\frac{\sqrt{2gz}}{\sqrt{2g(z+h_p)}}$ , где  $h_p$  — вакуум под струей в точке  $T$ .

Для прямоугольного канала с водосливом без бокового сжатия (фиг. 159-а) имеем

$$v_0 = \frac{Q}{bt_1} = \frac{m' b \sqrt{2gH^{3/2}}}{bt_1},$$

откуда

$$\begin{aligned} m' &= m \left( 1 + \frac{3}{2} \alpha \frac{m'^2 2gH^2}{2gH \cdot t_1^2} \right) = m \left( 1 + k \frac{H^2}{t_1^2} \right) = \\ &= m \left[ 1 + k \left( \frac{H}{H+p} \right)^2 \right]^1, \dots \dots \dots (13) \end{aligned}$$

где  $k = \frac{3}{2} m'^2 \alpha$  — величина, подлежащая определению опытом.

## § 42. Прямоугольный водослив в тонкой стенке со свободной струей.

Для такого водослива Базен, на основании весьма многочисленных опытов <sup>2)</sup>, определил величину  $k$  в формуле (13) равной 0,55, величину  $m'$  равной (для метрового раз-  
мера)

$$m = 0,405 + \frac{0,003}{H} \dots \dots \dots (13')$$

Таким образом, для истечения свободной струей через прямоугольный водослив с вертикальной тонкой стенкой формула Базена приобретает вид

$$Q = m_0 b \sqrt{2gH^{3/2}},$$

где

$$m_0 = \left( 0,405 + \frac{0,003}{H} \right) \left( 1 + 0,55 \frac{H^2}{(H+p)^2} \right) \dots \dots \dots (14)$$

В нижеследующей таблице (см. стр. 246, табл. 11), заимствованной у Фламан <sup>3)</sup>, приводим значения коэффициента  $m_0$  для различных значений  $H$  и  $t$ .

<sup>1)</sup> Величину  $m'$  мы будем отмечать коэффициент расхода, поправленный на подтоковую скорость.

<sup>2)</sup> Опыты распространялись на водосливы шириною в 0,5; 1 и 2 м, высотой  $p$  от 0,24 до 0,75 м, при напорах  $H$  от 0,05 до 0,60 м.

<sup>3)</sup> А. Flaman, *Hydraulique*, p. 101, изд. 1900 г

Как видим, коэффициент сперва уменьшается с напором. Затем, перейдя через минимум, возрастает. Минимум этот наступает тем скорее и коэффициент растет тем быстрее, чем меньше высота стенки  $p$ , т. е. чем больше влияние скорости подхода. В случае очень высокой стенки (последняя графа) коэффициент  $m$  все время убывает.

Прямоугольный водослив без бокового сжатия имеет весьма широкое применение. Им пользуются, как одним из лучших измерителей, т. е. как прибором для определения расходов воды. Действительно, благодаря огромному числу весьма точно выполненных опытов, коэффициент для такого водослива известен с значительной точностью. Ошибка в определении расхода при надлежащих условиях не превысит 1%.

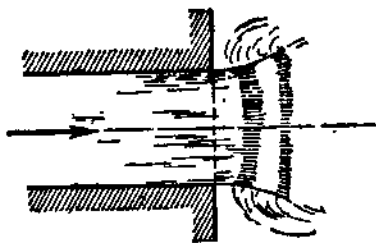
При практическом употреблении подобного водослива надлежит, однако, иметь в виду следующее:

1. Боковое сжатие должно быть действительно уничтожено, т. е. канал должен иметь одинаковую с водосливом ширину на достаточном расстоянии выше водослива.

2. Должен быть в самой полной мере обеспечен свободный доступ воздуха под струю. Для этого лучше всего непосредственно за водосливом устраивать в канале расширение (фиг. 163) ( $b_2 > b_1$ ), так чтобы воздух свободно подходил под струю сбоку.

Иногда практикуется способ подведения воздуха под струю посредством особой трубы. К этому приему надо относиться с большой осторожностью, так как труба может оказаться недостаточной для подвода воздуха в количестве, необходимом для замены уносимого ниспадающей струей, и под струей может легко оказаться частичный вакуум, что поведет за собою возрастание коэффициента расхода <sup>1)</sup>.

3. Вместе с тем нельзя струе давать свободно расширяться (фиг. 173) непосредственно по истечении через



Фиг. 173.

<sup>1)</sup> Недостаточно обеспеченный доступ воздуха под струю есть наиболее частая причина ошибок при определении расходов.

ТАБЛИЦА 11.  
Коэффициенты расхода  $m_0$ .

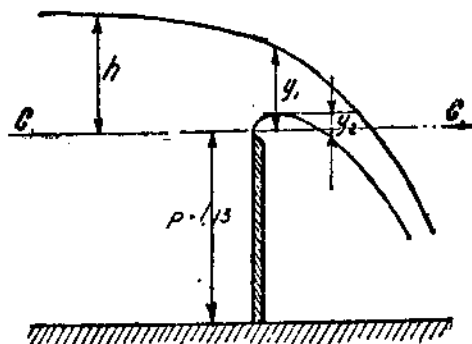
| Напор<br>$H$ | Высота стенки водослива $p$ |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|--------------|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|              | 0,20                        | 0,30  | 0,40  | 0,50  | 0,60  | 0,80  | 1,00  | 1,50  | 2,00  | ~     |
| 0,05         | 0,458                       | 0,453 | 0,451 | 0,450 | 0,449 | 0,449 | 0,449 | 0,448 | 0,448 | 0,448 |
| 06           | 456                         | 450   | 447   | 445   | 445   | 444   | 443   | 443   | 443   | 443   |
| 08           | 455                         | 447   | 443   | 441   | 440   | 438   | 438   | 437   | 437   | 436   |
| 10           | 459                         | 447   | 442   | 439   | 437   | 435   | 434   | 433   | 433   | 432   |
| 12           | 462                         | 448   | 442   | 438   | 436   | 433   | 432   | 430   | 430   | 429   |
| 0,14         | 0,466                       | 0,450 | 0,443 | 0,438 | 0,435 | 0,432 | 0,430 | 0,428 | 0,428 | 0,427 |
| 16           | 471                         | 453   | 444   | 438   | 435   | 431   | 429   | 427   | 426   | 425   |
| 18           | 475                         | 456   | 445   | 439   | 435   | 431   | 428   | 426   | 425   | 423   |
| 20           | 480                         | 459   | 447   | 440   | 436   | 431   | 428   | 425   | 423   | 421   |
| 22           | 484                         | 462   | 449   | 442   | 437   | 431   | 428   | 424   | 423   | 420   |
| 0,24         | 0,488                       | 0,465 | 0,452 | 0,444 | 0,438 | 0,432 | 0,428 | 0,424 | 0,422 | 0,419 |
| 26           | 492                         | 468   | 455   | 446   | 440   | 432   | 429   | 424   | 422   | 419   |
| 28           | 496                         | 472   | 457   | 448   | 441   | 433   | 429   | 424   | 422   | 418   |
| 30           | 500                         | 475   | 460   | 450   | 443   | 434   | 430   | 424   | 421   | 417   |
| 35           | —                           | 482   | 465   | 455   | 447   | 437   | 431   | 424   | 421   | 416   |
| 0,40         | —                           | 0,489 | 0,472 | 0,459 | 0,451 | 0,440 | 0,433 | 0,424 | 0,421 | 0,414 |
| 45           | —                           | 495   | 477   | 464   | 455   | 442   | 435   | 425   | 421   | 413   |
| 50           | —                           | —     | 482   | 468   | 459   | 445   | 437   | 426   | 421   | 412   |
| 60           | —                           | —     | 490   | 476   | 466   | 451   | 441   | 427   | 421   | 409   |
| 70           | —                           | —     | 498   | 484   | 473   | 456   | 446   | 430   | 423   | 408   |

порог, так как в этом случае формула (14) уже не дает точных результатов. Для того, чтобы избежать такого расширения струи, можно приделать к водосливу направляющие щеки  $\psi$  (фиг. 163).

4. Наконец, важно еще правильно измерить напор  $H$ . Для правильного его определения необходимо произвести измерение в точке, достаточно удаленной от ребра, где бы не сказывалось еще сколько-нибудь заметное понижение свободной поверхности переливающейся струи.

Для того, чтобы судить, какое расстояние  $l$  надлежит для этого считать достаточным, приводим в нижеследующей таблице результаты опытов Базена, над формами свободной поверхности струи для водослива вышиною  $p = 1,13$  м (фиг. 174) <sup>1)</sup>.

Как видим из таблицы, уже на расстоянии  $l$ , равном тройному напору, падение свободной поверхности состав-



Фиг. 174.

ТАБЛИЦА 12.

| $\frac{l}{h}$   | —3,00 | —1,00 | 0     | 0,1   | 0,2   | 0,3   | 0,4   | 0,5   | 0,6   | 0,7   |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\frac{y_1}{h}$ | 0,997 | 0,963 | 0,851 | 0,826 | 0,795 | 0,762 | 0,724 | 0,680 | 0,627 | 0,569 |
| $\frac{y_2}{h}$ | —     | —     | 0     | 0,085 | 0,109 | 0,111 | 0,097 | 0,071 | 0,035 | 0,009 |

ляет всего 0,3% полного напора, измеренного в частности Базеном на расстоянии  $l = 6$  м от ребра.

<sup>1)</sup> Опыты показали, что форма струи мало меняется в зависимости от напора и высоты стенки водослива. Только при очень малом  $p$ , благодаря уменьшению сжатия, несколько понижается лишь нижняя поверхность. Поэтому фиг. 174 и табл. 12 можно рассматривать, как „нормальный“ тип свободной струи.

5. Наконец, при измерениях не следует делать слишком узких водосливов и работать с слишком малым  $h$ . Хотя опыты Базена и не обнаружили влияния ширины  $b$  на величину коэффициента расхода, но это потому только, что ширина  $b$  была не мала. Практически не рекомендуется делать  $b < 0,2$  м и понижать  $h < 0,1$  м.

#### § 43. Другие формулы для водослива в тонкой стенке без бокового сжатия.

Указанное выше широкое применение рассматриваемого типа водослива в практике для точных измерений расходов было причиной того, что точному определению коэффициентов для этого водослива посвящено весьма много исследований. Приведем результаты некоторых из них.

1. Опыты Рэбока (Карлсруэ)<sup>1)</sup> над водосливами малых размеров привели его к следующему выражению (в метровой мере) для  $m_0$ :

$$m_0 = 0,402 + \frac{1}{1575 H - 4,5} + 0,053 \frac{h_0}{p} \quad \dots (14')$$

Формула Рэбока дает значения  $m_0$  несколько меньшие, чем формула Базена.

2. Приведем еще формулу Ганзена (Hansen)<sup>2)</sup>

$$m = \frac{0,4114}{1 - 0,358 \sqrt{h^3}}, \quad \dots (14'')$$

полученную этим известным турбинным заводчиком из опытов над водосливом высотой  $p = 0,514$  м, шириною  $b = 1,08$  м при  $H$  от 0,082 до 0,291 м. Как видим, формула Ганзена может иметь совершенно ограниченное применение, лишь для водосливов совершенно определенных размеров ( $p = 0,50 - 0,55$ ). Мы ее привели лишь потому, что она очень популярна у германских турбинных фабрикантов.

В нижеследующей таблице (см. стр. 249, табл. 13) сопоставлены<sup>3)</sup> значения коэффициентов, получаемых по различным формулам для водосливов различных размеров.

<sup>1)</sup> См. Handbuch der Ingen. III ч., т. II, Stauwerke, изд. 1912 г., стр. 85.

<sup>2)</sup> Z. d. V. d. I. 1892.

<sup>3)</sup> Weugauch, Hydraulisches Rechnen.

ТАБЛИЦА 13

| Напор $H$ в $m$ |        | В ы с о т а р в $m$ |       |       |       |
|-----------------|--------|---------------------|-------|-------|-------|
|                 |        | 0,25                | 0,50  | 0,80  | 1,00  |
| 0,10            | Базен  | 0,452               | 0,439 | 0,435 | 0,434 |
|                 | Рэбок  | 0,434               | 0,423 | 0,419 | 0,418 |
|                 | Ганзен | —                   | 0,416 | —     | —     |
| 0,20            | Базен  | 0,468               | 0,440 | 0,431 | 0,428 |
|                 | Рэбок  | 0,454               | 0,431 | 0,422 | 0,420 |
|                 | Ганзен | —                   | 0,425 | —     | —     |
| 0,30            | Базен  | 0,486               | 0,450 | 0,434 | 0,430 |
|                 | Рэбок  | 0,480               | 0,442 | 0,429 | 0,424 |
|                 | Ганзен | —                   | 0,437 | —     | —     |
| 0,40            | Базен  | —                   | 0,459 | 0,440 | 0,433 |
|                 | Рэбок  | —                   | 0,453 | 0,435 | 0,429 |
| 0,50            | Базен  | —                   | 0,468 | 0,445 | 0,437 |
|                 | Рэбок  | —                   | 0,467 | 0,442 | 0,435 |
| 0,60            | Базен  | —                   | 0,476 | 0,451 | 0,441 |
|                 | Рэбок  | —                   | —     | 0,450 | 0,441 |

Как видим, результаты Рэбока отличаются от коэффициентов Базена лишь при малых напорах. При напорах больше 20 *см* разница между ними очень мала. Наоборот, коэффициенты Ганзена значительно ниже. Очевидно, что расходы, вычисленные по Ганзену, меньше. Это и служит причиной популярности формулы Ганзена у турбинных заводчиков, так как при вычислении расходов по ней расходуемые двигателем количества воды получаются меньше, отдача же машины оказывается большей. Что касается нашего личного взгляда, то, признавая, в виду некоторой несходимости коэффициентов, необходимость новых опытов, еще более точных и обширных, чем опыты Базена, мы считаем, тем не менее, что опыты Базена как по обшир-

ности, так и по общей постановке являются наилучшими из всех донныне произведенных, и что поэтому в настоящее время наиболее правильные и близкие к истине значения расходов можно получить, применяя его формулу.

3. Формула Фрэнсиса. В Америке и Англии в огромном ходу формула, данная еще в 50-х годах Фрэнсисом<sup>1)</sup>. Фрэнсис принимает скорость подхода по (10) и пишет соединяя в один коэффициент  $M$ , произведение  $m\sqrt{2g}$  для футовой меры

$$Q = 3,33b \left( H + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{3/2} \dots \dots \dots (14'')$$

Таким образом, согласно уравнению (13)

$$m = \frac{3,33}{\sqrt{2g}} = 0,418.$$

Как видим, Фрэнсис считает  $m$  постоянным. Полученная им величина весьма близка к величинам  $m_0$ , получающимся из формулы Базена для средних напоров при большом  $d$  (см. табл. 11).

Формулы типа Фрэнсиса, благодаря своей простоте, необыкновенно удобны для приближенных расчетов. Наряду с  $M = 3,33$  для футового размера, получаем

- а) для метрового размера  $M = 0,418 \sqrt{19,62} = \sim 1,85,$
- б) для саженой  $M = 0,418 \sqrt{9,22} = \sim 1,27.$

#### § 44. Влияние наклона стенки.

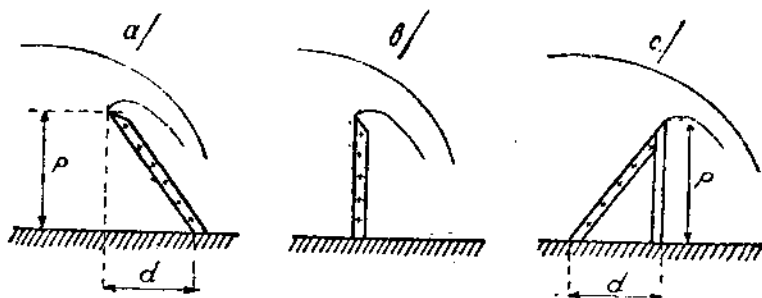
Если стенка не вертикальна, то коэффициент расхода изменяется. Изменение коэффициента, очевидно, обуславливается преимущественно изменением сжатия струи снизу. Коэффициент расхода меньше нормального (фиг. 175, случай *b*) для стенки, наклоненной назад (случай *a*), и больше для стенки, наклоненной вперед (случай *c*). В нижеследующей таблице приведены отношения  $\frac{m'}{m_0}$  для различных уклонов стенок.

<sup>1)</sup> J. B. Francis. Lowell hydraulic experiments. Boston, 1855.

Для водослива с обратным горизонтальным ребром (фиг. 176) отношение  $\frac{m'}{m_0}$  падало даже до 0,90.

ТАБЛИЦА 14.

| Отношение $\frac{d}{p}$              | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{2}{1}$ | $\frac{4}{1}$ |
|--------------------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| Стенка, наклоненная назад . . . . .  | 0,96          | 0,94          | 0,93          | —             | —             |
| Стенка, наклоненная вперед . . . . . | 1,04          | 1,07          | 1,10          | 1,12          | 1,09          |

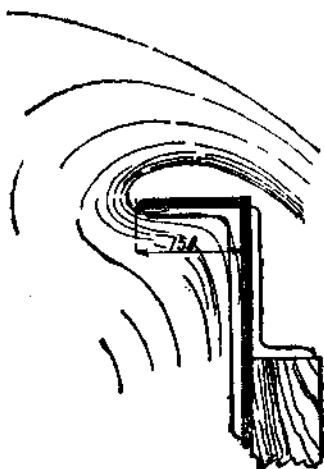


Фиг. 175.

#### § 45. Прямоугольный водослив с вертикальной тонкой стенкой без бокового сжатия. Струя, подтопленная снизу.

Как мы выше указывали, струя, подтопленная снизу, обладает значительной устойчивостью, это и служит причиной того, что Базену для этой формы также удалось установить совершенно определенные соотношения между коэффициентом  $m'$  и другими элементами явления.

Очевидно, прежде всего, надлежит установить, при каких условиях форма эта, вообще говоря, осуществляется. Как показывали опыты Базена, все зависит



Фиг. 176.



При более низких стояниях уровня  $B$  ( $h_2 > H$ ), под струей будет находиться воздух; струя будет иметь вид фиг. 177.

Посмотрим теперь, в каких случаях будет иметь место отогнанный прыжок, в каких — струя явится „покрытой“ (фиг. 178). Согласно опытам Базена, отогнанный прыжок будет иметь место всякий раз, когда полный перепад  $z > 0,75p$ ; если  $z < 0,75p$ , то нижний уровень будет надвигаться на струю, и последняя окажется „покрытой“. Если имеется отогнанный прыжок, то высота нижнего уровня ( $t_2$ ) уже не влияет на истечение; в зависимости от глубины  $t_2$  меняется лишь местоположение прыжка.

Так как

$$\frac{z}{p} = \frac{p + H - t_2}{p} = 1 + \frac{H}{p} - \frac{t_2}{p},$$

то получаем в результате следующее:

1. Если  $H \geq 0,4p$ , то струя будет всегда подтопленная; при этом

а) для всех  $t_2 \leq 0,25p + H$  ( $h_2 \geq 0,75p - H$ ) будет иметь место отогнанный прыжок,

б) для всех  $t_2 > 0,25p + H$  ( $h_2 < 0,75p - H$ ) струя будет покрытая.

2. Если  $H < 0,4p$ ,

а) для всех  $t_2 > p - H$  струя будет подтопленная покрытая,

б) для всех  $t_2 \leq p - H$  струя уже будет отжатой.

## § 46. Коэффициент расхода.

а) Подтопленная струя с отогнанным прыжком. В этом случае, как было выше указано, нижний уровень на истечение не влияет. Таким образом, коэффициент может зависеть лишь от  $p$  и  $h$ . Снова пользуясь указанным выше приемом, снова сопоставляя коэффициент расхода в интересующем нас случае с „нормальным“, т. е. с коэффициентом  $m_0$  для случая свободной струи при одинаковых  $H$  и  $p$ , Базен нашел, что в этом случае искомая зависимость с достаточной точностью может быть выражена соотношением

$$\frac{m'}{m_0} = 0,878 + 0,128 \frac{p}{H} \dots \dots \dots (15)$$

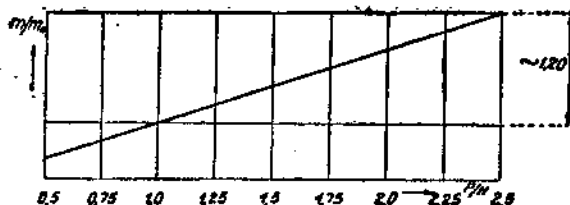
Зависимость эта изображена на фиг. 179, причем ясно, что наибольшим значением  $\frac{p}{H}$  является  $\frac{p}{H} = 2,5$  соответственно  $\frac{H}{p} = 0,4$ .

При этом получается наибольший коэффициент расхода

$$m' = \sim 1,20 m_0,$$

$m'$  уменьшается с напором. Для очень больших напоров ( $H > p$ ) коэффициент  $m'$  меньше  $m_0$ .

б) Покрытая струя. В этом случае явление много сложнее, нижний уровень уже влияет на истечение; расход



Фиг. 179.

зависит от  $H$ ,  $p$  и  $t_2$ . В этом случае, обозначая через  $y$  величину

$$y = \left( \frac{h_2}{p} - 0,05 \right) \frac{p}{H},$$

зависимость  $\frac{m'}{m_0}$  от элементов явления можно выразить следующим образом:

$$\frac{m'}{m_0} = 1,06 + 0,16 y - 0,02 y^2.$$

С достаточной степенью точности (до 2%) для не слишком малых значений  $H$  и  $h_2$  формула эта может быть заменена более простой

$$\frac{m'}{m_0} = 1,05 + 0,15 \frac{h_2}{H} \dots \dots \dots (16)$$

Таким образом, если  $h_2 = 0$ , т. е. уровень нижнего бьефа находится на уровне ребра водослива, то  $\frac{m'}{m_0} = 1,05$ ; с понижением уровня (увеличением  $h_2$ )  $\frac{m'}{m_0}$  возрастает.

Предположим  $H = 0,4 p$ , наименьшую величину, при которой может образоваться отогнанный прыжок. Последний образуется когда примерно  $z = 0,75 p$ . В этом случае  $\frac{m'}{m_0} = \sim 1,20$ , т. е. наибольшей величине из соотношения (16).

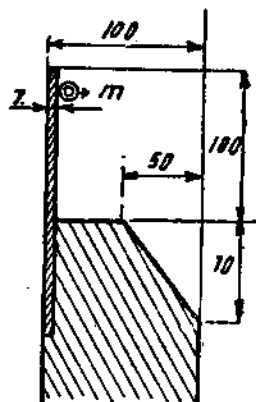
### § 47. Давление под струей.

Воспользуемся рассматриваемой формой струи (подтопленной снизу), чтобы коснуться крайне интересной области опытов Базена, а именно: исследований последнего над связью коэффициентов расхода с давлением под струей. Как показал опыт, связь между коэффициентом расхода и этим давлением получается не только закономерной и в высшей степени устойчивой, но также настолько простой, что Базен считал возможным при пользовании для измерений расходов водосливом с несвободной струей производить определение расхода в зависимости от этого давления.

Особенно просто все получается в случае подтопленной струи с отогнанным прыжком, каковым случаем мы здесь и ограничимся.

Отметим, что в опытах Базена для измерения давления служила свинцовая с рядом отверстий диаметра 5 мм трубка  $m$ , укрепленная на 10 мм ниже ребра водослива (фиг. 180). Трубка эта соединялась с U-образным манометром. Последний, таким образом, непосредственно измерял манометрическое давление или вакуум под струей в пьезометрической шкале.

Обозначая величину этого давления или вакуума через  $h_p$ , получаем для подтопленной струи с отогнанным прыжком,



Фиг. 180.

согласно опытам Базена, связь между  $\frac{m'}{m_0}$  и  $h_p$  в следующем виде:

$$\frac{m'}{m_0} = 1,01 - 0,22 \frac{h_p}{H} \dots \dots \dots (a)$$

Как видим,  $m' > m_0$ , если  $h_p < 0$ , т. е. если под струей вакуум, и обратно.

Что касается связи давления с напором и высотой стенки, то и здесь Базен пришел к высшей степени простому соотношению, а именно:

$$\frac{h_p}{H} = 0,6 - 0,58 \frac{p}{H} \dots \dots \dots (b)$$

Таким образом, как оказывается, граница между вакуумом и избыточным давлением под струей получается примерно при  $H \sim p$ .

Связь между различными элементами настолько уловлена, что уравнение (15) может быть получено из (a); на самом деле, подставляя в (a)  $\frac{h_p}{H}$  из (b), имеем

$$\frac{m'}{m_0} = 1,01 - 0,22 (0,6 - 0,58) \frac{p}{H} = 0,878 + 0,128 \frac{p}{H},$$

т. е. уравнение (15).

Мы ограничиваемся приведенным выше, отсылая интересующихся за дальнейшими подробностями непосредственно к первоисточнику. Укажем лишь снова, что оказывается

возможным получить устойчивые соотношения между  $\frac{m'}{m_0}$

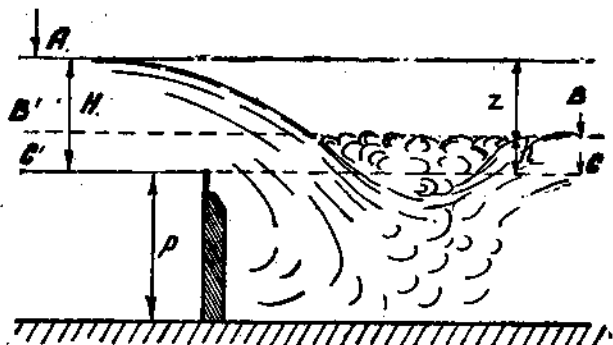
и  $\frac{h_p}{H}$  даже для отжатых и прилипших струй, чего не

удается достичь, если искать связи непосредственно между геометрическими элементами явления. Исследования Базена над истечением через водослив являются до настоящего времени лучшим примером глубокого, направленного на всестороннее физическое изучение явления, гидравлического эксперимента. Они вместе с тем указывают истинный путь, по которому надлежит следовать опытной гидравлике в своих очередных задачах.

## § 48. Затопленный водослив.

Как было выше указано, „затопленным водосливом“ мы будем называть случай, изображенный на фиг. 181, в котором уровень  $B$  нижнего бьефа выше уровня ребра  $c$ ; величину  $h_1$  будем называть величиною (или глубиною) подтопа; величину  $z$  — перепадом; величину  $H$  — попрежнему напором.

1. Первую расчетную формулу для выражения расхода через затопленный водослив дал еще в конце XVIII сто-



Фиг. 181.

летия Дюбуа. Последний при этом исходил из следующих соображений.

По мнению Дюбуа, все явление можно рассматривать, как состоящее из двух частей: 1) в верхней части, выше линии раздела  $BB'$ , как истечение через свободный водослив под напором  $z$ ; 2) в нижней части, между плоскостями  $BB'$  и  $CC'$ , как истечение через затопленное отверстие, высоту  $h_1$ , опять-таки под напором  $z$ .

Называя расход в соответственных частях через  $Q_1$   $Q_2$ , на основании формул (10') и (10) для прямоугольного водослива шириною  $b$ , имеем

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \frac{2}{3} \mu_1 b \sqrt{2g} \left( z + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{3/2} \\ Q_2 &= \mu_2 b h_1 \sqrt{2g} \left( z + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{1/2} \end{aligned} \right\} \dots (17')$$

или, соединяя,

$$Q = Q_1 + Q_2 = b\sqrt{2g}\sqrt{z + \frac{v_0^2}{2g}} \left[ \frac{2}{3} \mu_1 \left( z + \frac{v_0^2}{2g} \right) + \mu_2 h_1 \right]. \quad (17)$$

Эта формула, которую мы будем называть формулой Дюбуа, получила огромное распространение. До настоящего времени она обычно единственно фигурирует в курсах и учебниках, служа вместе с тем преимущественно основанием для расчета отверстий разборчатых плотин.

Между тем, совершенно ясно, что формула эта далеко не удовлетворительна. Положенная в ее основание модель более чем груба, и если для некоторых частных случаев неправильна, по соображениям равномерности (см. выше стр. 232), то для других случаев является явно неверной и неприменимой; особенно неправильно, как мы увидим ниже, применение формулы для расчета затопленного водослива с широкой стенкой и, в частности, расчета отверстия водоспусков в разборчатых плотинах, т. е. как раз случая, когда эта формула всего более применяется<sup>1)</sup>.

Мы в дальнейшем совершенно откажемся от употребления формулы Дюбуа, тем более, что, по крайней мере, для водослива с вертикальной тонкой стенкой без бокового сжатия, вопрос достаточно полно исследован Базеном. Перейдем поэтому непосредственно к изложению результатов опытов последнего.

2. Прежде всего оказывается, что на затопленном водосливе могут иметь место все три разновидности подтопленных струй: струя с отогнутым прыжком, покрытая и

<sup>1)</sup> Интересно, с исторической точки зрения, отметить, что формула Дюбуа ни разу не подвергалась сколько-нибудь широкой экспериментальной проверке, что никто тем более не проверял приложимости ее к расчету таких сооружений, как водоспуски плотин и пр. Нам не удалось установить, на основании какого опытного материала выведены величины тех „практических коэффициентов“  $\mu_1$  и  $\mu_2$  для разного рода водосливов, которые приводятся обычно по преимуществу в немецких или составленных по немецким учебникам и переходят из одного руководства в другое, ссылаясь на „авторитет“ предшественников.

Насколько нам известно, единственные сколько-нибудь надежные и систематические опыты были произведены в Америке Фрэнсисом и особенно Фтли и Стирсом (Fteley and Stearns) опыты эти касались затопленного водослива с острой стенкой; в формуле (17) коэффициенты  $\mu_1$  и  $\mu_2$  принимались одинаковыми, благодаря чему формула получила следующий вид:

$$Q = b \cdot \mu \cdot \sqrt{2g \left( z + \frac{v_0^2}{2g} \right)} \left[ \frac{2}{3} \left( z + \frac{v_0^2}{2g} \right) + h_1 \right] \quad (\text{см. примечание стр. 259}).$$

волнистая. Наличие той или иной формы струи зависит от относительной величины перепада  $\frac{z}{p}$ .

Если  $\frac{z}{p} > 0,7$ , то получается, при всяком  $h_1$ , струя с отогнанным прыжком. Если  $\frac{z}{p} < 0,7$ , то струя становится покрытой. При этом, если перепад упадет до величины  $\frac{z}{p} = 0,15 - 0,20$ , струя делается волнистой. Волнистая поверхность может сохраняться и при более значительных перепадах (до  $\frac{z}{p} = 0,3$ ), если, исходя из малых перепадов, постепенно повышать напор; но форма становится здесь неустойчивой и легко от небольшого возмущения принимает тип покрытой струи (фиг. 166).

Что касается выражения расхода через затопленный водослив, то Базен здесь сохраняет формулу (12), т. е. и здесь применяет соотношение

$$Q = m' \cdot \sqrt{2g} \cdot b H'^{3/2},$$

учитывая влияние затопления непосредственно коэффициентом  $m'$ .

Американские исследователи стремились найти зависимость  $\mu$  от

$$\frac{h_1}{H + \frac{v_0^2}{2g}}.$$

Краткую сводку результатов Фтили и Стириса приводим в следующей таблице:

| $\frac{h_1}{H + \frac{v_0^2}{2g}}$ | 0,1   | 0,3   | 0,5   | 0,7   | 0,9   |
|------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\mu$                              | 0,630 | 0,605 | 0,590 | 0,585 | 0,585 |

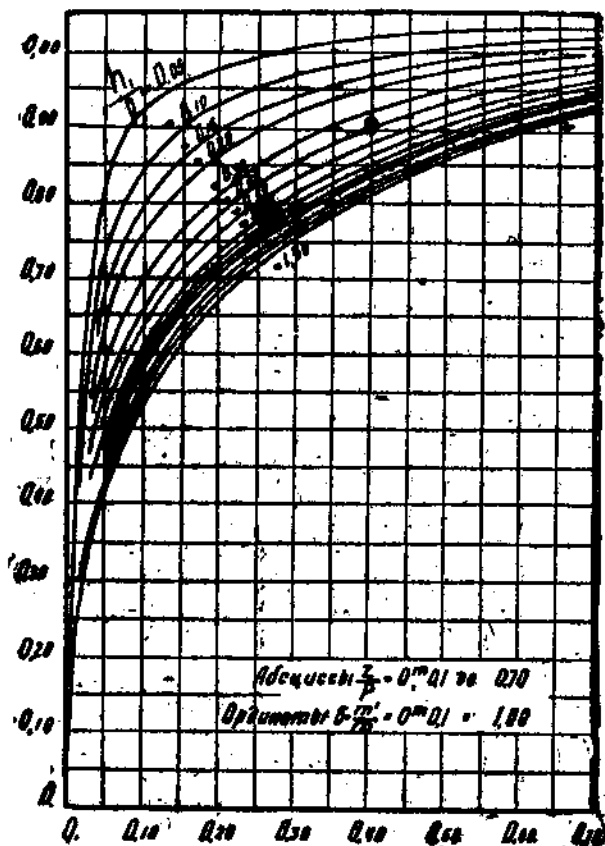
Характерно также, что формула Дюбуа с многочисленными, выведенными из чисто умозрительных соображений весьма „усложняющими“ дело поправками преимущественно распространена в немецкой литературе. Во Франции ею пользуются много меньше, понимая всю ее условность и неудовлетворительность, что впрочем было совершенно ясно самому ее гениальному автору.

ТАБЛИЦА 15.

| $\frac{h_1}{p}$<br>$\frac{x}{p}$ | 0,00 | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 | 0,30 | 0,40 | 0,50 | 0,60 | 0,70 | 0,80 | 0,90 | 1,00 | 1,10 | 1,20 | 1,30 | 1,40 | 1,50 |
|----------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 0,05                             | 1,05 | 0,84 | 0,74 | 0,68 | 0,64 | 0,58 | 0,54 | 0,52 | 0,50 | 0,48 | 0,47 | 0,46 | 0,45 | 0,45 | 0,44 | 0,44 | 0,44 | 0,43 |
| 0,10                             | 1,05 | 0,93 | 0,85 | 0,80 | 0,76 | 0,70 | 0,66 | 0,64 | 0,61 | 0,60 | 0,58 | 0,57 | 0,57 | 0,56 | 0,55 | 0,55 | 0,54 | 0,54 |
| 0,15                             | 1,05 | 0,96 | 0,90 | 0,86 | 0,82 | 0,77 | 0,74 | 0,71 | 0,69 | 0,67 | 0,66 | 0,65 | 0,64 | 0,63 | 0,63 | 0,62 | 0,62 | 0,61 |
| 0,20                             | 1,05 | 0,98 | 0,94 | 0,90 | 0,87 | 0,82 | 0,79 | 0,76 | 0,74 | 0,72 | 0,71 | 0,70 | 0,69 | 0,69 | 0,68 | 0,68 | 0,67 | 0,67 |
| 0,25                             | 1,05 | 1,00 | 0,96 | 0,92 | 0,90 | 0,86 | 0,82 | 0,80 | 0,78 | 0,77 | 0,75 | 0,75 | 0,74 | 0,73 | 0,72 | 0,72 | 0,72 | 0,71 |
| 0,30                             | 1,05 | 1,01 | 0,97 | 0,94 | 0,92 | 0,88 | 0,85 | 0,83 | 0,81 | 0,80 | 0,79 | 0,78 | 0,77 | 0,77 | 0,76 | 0,76 | 0,75 | 0,75 |
| 0,35                             | 1,05 | 1,01 | 0,98 | 0,96 | 0,94 | 0,90 | 0,88 | 0,86 | 0,84 | 0,83 | 0,82 | 0,81 | 0,80 | 0,80 | 0,79 | 0,79 | 0,79 | 0,78 |
| 0,40                             | 1,05 | 1,02 | 0,99 | 0,97 | 0,95 | 0,92 | 0,90 | 0,88 | 0,87 | 0,85 | 0,84 | 0,84 | 0,83 | 0,82 | 0,82 | 0,82 | 0,81 | 0,81 |
| 0,45                             | 1,05 | 1,02 | 1,00 | 0,98 | 0,96 | 0,94 | 0,92 | 0,90 | 0,89 | 0,87 | 0,87 | 0,86 | 0,85 | 0,85 | 0,84 | 0,84 | 0,84 | 0,84 |
| 0,50                             | 1,05 | 1,03 | 1,01 | 0,99 | 0,98 | 0,95 | 0,93 | 0,92 | 0,90 | 0,89 | 0,89 | 0,88 | 0,87 | 0,87 | 0,87 | 0,86 | 0,86 | 0,86 |
| 0,55                             | 1,05 | 1,03 | 1,01 | 1,00 | 0,98 | 0,96 | 0,94 | 0,93 | 0,92 | 0,91 | 0,90 | 0,90 | 0,89 | 0,89 | 0,88 | 0,88 | 0,88 | 0,88 |
| 0,60                             | 1,05 | 1,03 | 1,02 | 1,00 | 0,99 | 0,98 | 0,96 | 0,94 | 0,93 | 0,92 | 0,92 | 0,91 | 0,91 | 0,90 | 0,90 | 0,90 | 0,90 | 0,89 |
| 0,65                             | 1,05 | 1,04 | 1,02 | 1,01 | 1,00 | 0,98 | 0,97 | 0,96 | 0,95 | 0,94 | 0,93 | 0,93 | 0,92 | 0,92 | 0,92 | 0,92 | 0,91 | 0,91 |
| 0,70                             | 1,05 | 1,04 | 1,02 | 1,01 | 1,00 | 0,99 | 0,98 | 0,96 | 0,96 | 0,95 | 0,94 | 0,94 | 0,94 | 0,93 | 0,93 | 0,93 | 0,93 | 0,92 |

При струе с отогнанным прыжком, нижний уровень, очевидно, влияния на расход не оказывает. Коэффициент расхода одинаков с получающимся по (15)

$$\frac{m'}{m_0} = 0,878 + 0,128 \frac{p}{H}$$



Фиг. 182.

Таким образом, в случае, если перепад достаточен для того, чтобы отогнать прыжок [ $z > (0,7 - 0,75) p$ ], никакой разницы между затопленным и незатопленным водосливом

не имеется. Затопление начинает оказывать влияние лишь в случае, если  $z < 0,7 p$ , и струя получается покрытая или волнистая.

Опыт показывает, что влияние подтопа с достаточной точностью может в обоих случаях выражаться соотношением:

$$\begin{aligned} \frac{m'}{m_0} &= 1,05 \left( 1 + 0,2 \frac{h'}{p} \right) \sqrt[3]{\frac{z}{H}} = \\ &= 1,05 \left( 1 + 0,2 \frac{h_1}{p} \right) \sqrt[3]{\frac{z/p}{h_1/p + z/p}} \dots (18) \end{aligned}$$

При  $h_1 = 0$ , т. е. когда уровень нижнего бьефа стоит на уровне водослива, выражение (18) дает  $m = 1,05 m_0$ , как раз то, что получается из формулы (16) при  $h_2 = 0$ .

Отношение  $\frac{m'}{m_0} = \sigma$ , очевидно, выражает влияние затопления; мы поэтому в дальнейшем будем его называть коэффициентом затопления.

В таблице 15<sup>1)</sup> (стр. 260) приведены значения  $\sigma$  для различных величин  $\frac{z}{p}$  и  $\frac{h_1}{p}$ .

Таблица естественно доведена лишь до  $\frac{z}{p} = 0,7$ , так как для значения  $\frac{z}{p} > 0,7$  получается отогнанный прыжок.

Влияние отдельных элементов на коэффициент расхода всего лучше иллюстрируется графиком (фиг. 182).

#### § 49. Водослив с толстой стенкой.

Коснемся здесь вкратце еще вопроса об истечении через водослив, стенка которого образована, например, из положенных друг на друга брусьев (шандорные затворы, деревянный щит и пр.). Как показали опыты Базена, при напорах  $H$ , превосходящих двойную толщину стенки ( $H > 2c$ ), вся струя отделяется от верхней поверхности бруса (фиг. 183), и истечение ничем не отличается от рассмотренного выше случая истечения через водослив с тонкой стенкой. Таким,

<sup>1)</sup> Basin. *Expériences nouvelles sur l'écoulement en déversoir*, 1898 г. стр. 104.

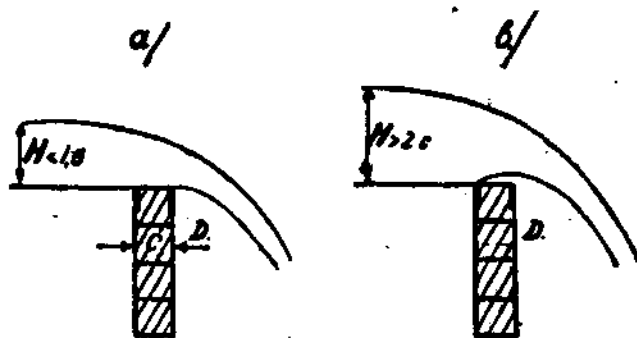
образом, если только  $H > 2c$ , можно полностью применять формулы предыдущих параграфов.

При малых напорах, однако ( $H < 1,5c$ ), все явление протекает совершенно иначе. Струя как бы прижимается к поверхности бруса (фиг. 183-а), и коэффициент расхода сильно разнится от нормального.

Для случая свободной струи (с обеспеченным доступом воздуха под струю  $D$ ) Базен нашел соотношение коэффициентов

$$\frac{m'}{m_0} = 0,70 + 0,185 \frac{H}{c} \dots \dots \dots (19)$$

Для промежуточных напоров ( $1,5c < H < 2c$ ) могут получаться обе формы струй. Если, исходя из малых напоров,



Фиг. 183.

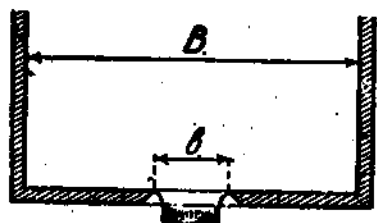
постепенно подымать напор, то получается струя формы (а), но форма эта неустойчива и под влиянием небольших сотрясений, отрываясь от бруса, переходит в устойчивую форму (б).

## § 50. Водослив с боковым сжатием.

*Водослив с боковым сжатием* не менее пригоден для точных измерений, чем водослив без бокового сжатия. Движение здесь также струйчатое, форма струй и коэффициент расхода не менее устойчивы и т. д. Беда лишь в том, что явление достаточно сложно и мы не обладаем пока достаточным количеством опытного материала, чтобы с жела-

тельной точностью выразить зависимость  $m$  от  $\frac{b}{B}$ ,  $\frac{h}{B}$  и пр.

Поэтому там, где приходится пользоваться водосливом с боковым сжатием (для измерения малых расходов), необходимо либо предварительно протарировать водослив, либо уже построить водослив по размерам, точно совпадающим с размерами водослива, для которого имеются данные опыта.



Фиг. 184.

Приведем, в частности, таблицу значений  $m$ , полученных Лебро<sup>1)</sup> для так называемого водослива Понселе шириною  $b = 20$  см с совершенным сжатием с боков и снизу (фиг. 180).

В Швейцарии некоторую популярность пользуется формула, данная<sup>2)</sup> московским профессором Брашманом.

ТАБЛИЦА 16.

| $H$  | $m$   | $H$  | $m$   |
|------|-------|------|-------|
| 0,02 | 0,417 | 0,14 | 0,393 |
| 0,04 | 0,407 | 0,18 | 0,392 |
| 0,06 | 0,401 | 0,20 | 0,390 |
| 0,08 | 0,397 | 0,25 | 0,379 |
| 0,10 | 0,395 | 0,30 | 0,371 |

Последний, исходя из „принципа наименьшего действия“ и опираясь на опыты Лебро, Кастелля и др., придал коэффициенту  $m$  для водослива с боковым сжатием следующий вид:

$$m = 0,384 + 0,038 \cdot \frac{b}{B} + 0,00053 \frac{1}{H} \dots (20)$$

В немецких учебниках обычно приводится еще формула, Фрэзе (Freese)<sup>3)</sup>. Мы не приводим ее в виду излишней, не оправдываемой сутью дела, сложности.

<sup>1)</sup> *Experiences hydrauliques*, 1834.

<sup>2)</sup> *Civilingenieur*, 1863.

<sup>3)</sup> *Z. d. V. d. I.* 1890. См. также Weyrauch, *Hydraulische Rechnen*, Hütte и пр.

В Англии и Америке для случая водослива с совершенным боковым сжатием применяется всего чаще формула Фрэнсиса

$$Q = M(b - 0,2H)H^{3/2}, \dots \dots \dots (21)$$

где  $M$  — коэффициент формулы (14").

Как видим, для учета бокового сжатия Фрэнсис просто напросто как бы уменьшает (с каждой стороны на  $0,1H$ ) „полезную“ длину водослива. Судя по данным опыта, для не слишком коротких водосливов  $\left(\frac{b}{H} > 3 - 4\right)$  эта простая формула дает недурные результаты.

Союз Швейцарских Инженеров Архитекторов<sup>1)</sup> при определении расхода через водослив в тонкой стенке с боковым сжатием рекомендует пользоваться следующей формулой для коэффициента расхода  $m$ , основанной на многочисленных собственных опытах при самых разнообразных соотношениях:  $\frac{b}{B}$

$$m = \frac{2}{3} \left\{ 0,578 + 0,037 \left( \frac{b}{B} \right)^2 + \frac{3,615 - 3 \left( \frac{b}{B} \right)^2}{H + 1,6} \right\} \cdot \left\{ 1 + 0,5 \left( \frac{b}{B} \right)^4 \cdot \left( \frac{H}{H + p} \right)^2 \right\}$$

Все размеры в этой формуле выражены в миллиметрах. Формула применима при выполнении условий

$$p \geq 300 \text{ мм}; \quad \left( \frac{b}{B} \right) \leq H \leq 800 \text{ мм},$$

$$\frac{H}{p} \leq 1 \text{ и } \frac{b}{B} \geq 0,3$$

и обнаруживает в этих пределах удовлетворительное согласие с произведенными измерениями.

В нижеследующей таблице приведены значения коэффициента расхода  $m$ , вычисленные по формуле Союза Швейцарских Инженеров и Архитекторов для водослива с высотой стенки  $p = 1000 \text{ мм}$  (Р е д.).

<sup>1)</sup> Normen für Wassermessungen bei Durchführung Abnahmeversuchen an. Wasserkraftmaschinen, Schweiz. Ingenieur und Architekt-Verein, 1924.

| $H$<br>м.м | $\frac{b}{B} = 1,0$ | 0,9   | 0,8   | 0,7   | 0,6   | 0,5   | 0,4   | 0,3   |
|------------|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 25         | 0,456               | —     | —     | —     | —     | —     | —     | —     |
| 50         | 0,418               | 0,421 | 0,423 | 0,425 | 0,427 | 0,429 | —     | —     |
| 75         | 0,416               | 0,416 | 0,416 | 0,416 | 0,416 | 0,417 | 0,417 | —     |
| 100        | 0,416               | 0,414 | 0,413 | 0,411 | 0,411 | 0,410 | 0,410 | 0,410 |
| 150        | 0,416               | 0,413 | 0,410 | 0,407 | 0,406 | 0,404 | 0,403 | 0,402 |
| 200        | 0,418               | 0,413 | 0,409 | 0,405 | 0,403 | 0,401 | 0,400 | 0,399 |
| 250        | 0,420               | 0,414 | 0,409 | 0,404 | 0,402 | 0,400 | 0,398 | 0,397 |
| 300        | 0,422               | 0,415 | 0,409 | 0,404 | 0,401 | 0,399 | 0,396 | 0,395 |
| 350        | 0,422               | 0,417 | 0,410 | 0,404 | 0,401 | 0,398 | 0,396 | 0,394 |
| 400        | 0,428               | 0,418 | 0,411 | 0,404 | 0,401 | 0,397 | 0,395 | 0,398 |
| 450        | 0,431               | 0,420 | 0,412 | 0,405 | 0,400 | 0,397 | 0,394 | 0,398 |
| 500        | 0,433               | 0,422 | 0,413 | 0,405 | 0,400 | 0,397 | 0,394 | 0,392 |
| 550        | 0,437               | 0,423 | 0,414 | 0,405 | 0,400 | 0,397 | 0,394 | 0,392 |
| 600        | 0,439               | 0,425 | 0,415 | 0,406 | 0,401 | 0,397 | 0,394 | 0,392 |
| 650        | 0,442               | 0,427 | 0,416 | 0,406 | 0,401 | 0,396 | 0,393 | 0,391 |
| 700        | 0,445               | 0,429 | 0,417 | 0,407 | 0,401 | 0,396 | 0,393 | 0,391 |
| 750        | 0,448               | 0,431 | 0,418 | 0,407 | 0,401 | 0,396 | 0,393 | 0,391 |
| 800        | 0,451               | 0,433 | 0,419 | 0,408 | 0,401 | 0,396 | 0,393 | 0,391 |

### § 51. Треугольный водослив.



Фиг. 185.

Крайне интересную попытку построить водослив с постоянным коэффициентом расхода сделал проф. Джемс-Томсон (James Thomson)<sup>1)</sup>, предложив для этой цели так называемый „треугольный“ водослив, т. е. вырез в стенке в виде треугольника (фиг. 185).

На самом деле, если размеры стенки достаточно велики, форма струи, при всяком  $h$ , остается подобной, и формула расхода получается непосредственно из соображений подо-

<sup>1)</sup> Brit. Assoc. Report, 1861.

бия; расход, вообще говоря, пропорционален площади, умноженной на скорость. В двух подобных струях (с напорами  $h_1$  и  $h_2$ ) площади относятся, как квадраты, скорости — как корни квадратные из линейных размеров; очевидно,

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{h_1^2 \sqrt{h_1}}{h_2^2 \sqrt{h_2}} = \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^{5/2}$$

и вообще

$$q = c \cdot h^{5/2}, \dots \dots \dots (22)$$

где  $c$  — постоянный для данного водослива коэффициент. Для водослива с углом  $\alpha = 90^\circ$  Томсон нашел для футового размера

$$Q_{\text{ф/сек.}} = 2,536 h^{5/2},$$

что дает для метрового размера

$$Q_{\text{м}^3/\text{сек.}} = 1,4 h^{5/2}.$$

По опытам Кинга <sup>1)</sup> в Мичиганском Университете (С. А. С. Ш.) с треугольным водосливом при угле выреза в  $90^\circ$  для напоров в водосливе

$$0,06 \text{ м} < H < 0,55 \text{ м}$$

величина расхода (в метровой мере)

$$Q = 1,34 H^{3,47}.$$

По опытам Барра <sup>2)</sup> для треугольного водослива с углом выреза в  $90^\circ$  расход определяется выражением (в метровой мере)

$$Q = 1,36 H^{3,48}.$$

В опытах в Мичиганском Университете водосливная стенка с острым ребром выреза была изготовлена из промышленного железного листа, и, следовательно, ее напорная грань не представляла собою полированной поверхности. В опытах Барра вырез водослива был сделан в полированной латушной пластине. Барр нашел что расход через водослив может возрасти примерно на 2%, если напорную грань водосливной стенки сделать шероховатой (путем лакировки ее с нанесением на лак наждачного порошка).

Вышеприведенные формулы применимы при условии совершенного сжатия струи, для чего необходимо, чтобы глубина воды перед водосливом.

$$(H + p) \geq 3H,$$

а ширина водосливной струи поверху

$$B \geq 5H.$$

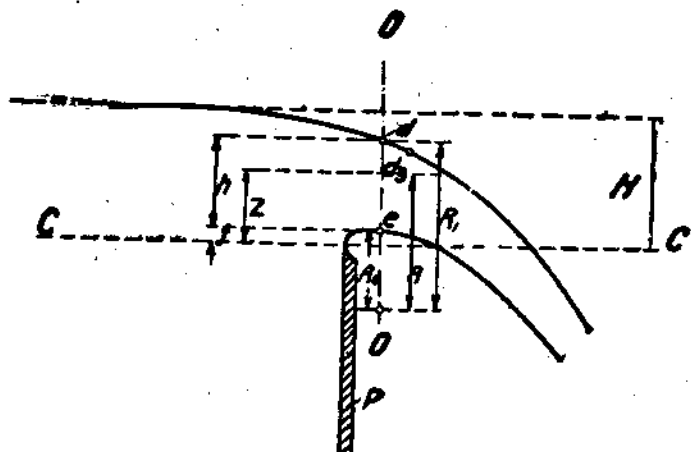
(Ред.).

<sup>1)</sup> H. King, Univ. Mich. Technic, October 1916, p. 190; H. King. Handbook of Hydraulic, 1924, p. 93.

<sup>2)</sup> J. Barr. Experiments upon the Flow of Water over Triangular Notches, Engineering, Apr. 8, 15, 1910.

## § 52. Теория водослива по Буссинеску.

Как мы указали выше, расход через водослив изменяется вместе с величиною сжатия струи снизу и с давлением под струей. Сжатие струи, в свою очередь, помимо формы стенки и ее наклона, зависит также от давления под струей. Таким образом, расход через водослив обуславливается целым комплексом зависящих друг от друга элементов движения. Задачей рациональной теории явления, очевидно, является установление зависимости, с одной



Фиг. 186.

стороны, между расходом и всеми указанными выше элементами движения, с другой стороны—зависимости элементов между собою.

Задачу эту поставил Буссинеск; решению ее, в отношении водослива с тонкой стенкой без бокового сжатия, посвящен целый ряд его работ, начиная с отдельной главы в «*Théorie des eaux courantes*» (1877) и кончая блестящим мемуаром 1907 г. <sup>1)</sup>, в котором исследование ведется для самого общего случая для водослива с наклонной стенкой и разными типами струй.

Мы здесь рассмотрим лишь наиболее простой случай, а именно: случай истечения свободной струей, отсылая

<sup>1)</sup> Мém. Ac, t. L.

интересующихся за дальнейшими подробностями непосредственно к первоисточнику.

Будем предполагать (фиг. 186), что стенка водослива  $p$  настолько высока, что скорость подхода близка к нулю. Проведем сечение  $O-O$  через точку  $e$  наивысшего подъема струи снизу. Обозначая через  $z$  координату элемента сечения  $O-O$  над плоскостью  $c-c$  и через  $u$  переменную скорость по сечению, получаем расход

$$Q = b \int_0^{f+h} u dz$$

или на единицу длины водослива

$$q = \frac{Q}{b} \int_0^{f+h} u dz \dots \dots \dots (23)$$

Очевидно, для определения расхода необходимо лишь:

- 1) знать распределение скоростей по сечению, т. е. знать  $u = f(z)$ ,
- 2) установить пределы интегрирования, т. е. знать величины  $f$  и  $h$ .

Что касается первого вопроса, то Буссинеск решает его следующим путем. Делается предположение, что все линии тока (струи) вблизи сечения  $O-O$  могут быть с достаточной точностью изображены окружностями круга, очерченными из общего центра  $O$ . Само собой понятно, что это есть приближение, но при пологой форме струй предположение это не слишком далеко от действительности. Зато удобство этого предположения заключается в том, что удастся сразу установить вид функции скорости  $u = f(z)$ .

На самом деле, так как движение здесь „струйчатое“ (совершенно так же, как при истечении через отверстие в тонкой стенке, см. стр. 189), и притом лишь очень мало отличающееся от „потенциального“, то к рассматриваемому случаю можно непосредственно приложить соотношение между скоростью и радиусами (выведенное на стр. 91 первой части) для случая потенциального движения жидкости, вращающейся вокруг оси, т. е. соотношение

$$u \cdot R = \text{const.}$$

Значение постоянной определяется из того условия, что на нижней и верхней поверхностях давление атмосферное и скорости известны, а именно:

$$\left. \begin{array}{l} \text{внизу, в точке } e: u_0 = \sqrt{2g(H-f)} \\ \text{наверху, в точке } d: u_1 = \sqrt{2g(H-f-h)} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (a)$$

Называя радиус кривизны в точке  $e$  через  $R_0$ , имеем вообще

$$u = u_0 \frac{R_0}{R} = \frac{R_0 \sqrt{2g(H-f)}}{R_0 + z - f} \dots \dots \dots (b)$$

Подставляя в (23), имеем

$$\begin{aligned} q &= R_0 \sqrt{2g(H-f)} \int_f^{f+h} \frac{dz}{R_0 - f - z} = \\ &= R_0 \sqrt{2g(H-f)} \log \frac{R_0 + h}{R_0} \dots \dots \dots (23') \end{aligned}$$

Нам остается еще определить величины  $R_0$  и  $h$  (величину  $f$  Буссинеск берет непосредственно из опыта). Для этой цели всего удобнее ввести новое обозначение

$$k = \frac{u_1}{u_0},$$

отношение скоростей на верхней и нижней поверхностях струи.

Величины  $R_0$  и  $h$  легко выражаются через  $k$ . На самом деле, в силу (b)

$$\frac{u_1}{u_0} = k = \frac{R_0}{R_0 + h}; \quad R_0 = \frac{kh}{1-k} \dots \dots \dots (c)$$

С другой стороны, в силу (a)

$$\begin{aligned} \frac{u_1}{u_0} = k &= \frac{\sqrt{2g(H-f-h)}}{\sqrt{2g(H-f)}}; \quad k^2(H-f) = (H-f) - h; \\ h &= (H-f)(1-k^2) \dots \dots \dots (d) \end{aligned}$$

Подставляя в (c), имеем

$$R_0 = (H-f)k(1+k).$$

Вставляя в (23'), получаем выражение расхода:

$$q = \sqrt{2g}(H-f)^{3/2}(k+k^2) \log \frac{1}{k},$$

$$q = \sqrt{2g} H^{3/2} \left(1 - \frac{f}{H}\right)^{3/2} (k+k^2) \log \frac{1}{k} \dots \dots (24)$$

Очевидно, коэффициент расхода  $m$  формулы (10) равен

$$m = \left(1 - \frac{f}{H}\right)^{3/2} (k+k^2) \log \frac{1}{k} \dots \dots \dots (e)$$

Для определения  $k$  Буссинеск пользуется так называемым „принципом наибольшего расхода“. Принцип этот, впервые примененный в 40-х годах Беланже к рассмотрению вопроса об истечении через водослив с широкой стенкой, заключается в предположении, что явление истечения через водослив само собою устанавливается в такой форме, при которой расход является из всех возможных расходов наибольшим. В аналитическом рассмотрении дело сводится к тому, чтобы найти общее выражение расхода через тот или иной параметр и затем определить значение этого параметра из условия, чтобы расход получил наибольшее значение.

В данном частном случае (24) таким параметром является величина  $k$ . Искомое ее значение определяем, приравнявая нулю производную от  $m$  по  $k$ . Получаем

$$\frac{\partial m}{\partial k} = (1+2k) \log \frac{1}{k} - \frac{(k+k^2)k}{k^2} = 0.$$

Определяя  $k$  из этого уравнения, получаем  $k = 0,4685$ . Подставляя в (d) и (e), имеем

$$\begin{aligned} h &= 0,78 (H-f), \\ m &= 0,5216 \left(1 - \frac{f}{H}\right)^{3/2} \dots \dots \dots (f) \end{aligned}$$

Как видим, мы получили теоретическую величину коэффициента в функции расхода от  $\frac{f}{H}$ . Как показывают опыты

Базена, величина  $\frac{f}{H}$  меняется в довольно широких пределах

(от 0 до  $\sim 0,19$ ) в зависимости от  $\frac{H}{p}$  наклона стенки и, наконец, типа струи.

Для вертикальной тонкой стенки и свободной струи наибольшее значение (для  $p=1,13 \text{ м}$ )  $\frac{f}{H}$ , полученное Базеном, оказалось равным 0,112 (для  $\frac{l}{H}=0,25 \text{ см}$ )<sup>1)</sup>.

Подставляя в выражение (f), имеем

$$m = 0,5216 (1 - 0,112)^{1/2} = 0,436.$$

Коэффициент этот весьма близок к значениям, приведенным в последней графе таблицы 11. Не забудем, что в предшествующем рассмотрении мы вовсе пренебрегали сопротивлениями. Ясно, что практически величины  $m$  получатся несколько ниже теоретических.

Теоретическая величина толщины струи

$$\frac{h}{H} = 0,78 (1 - 0,112) = 0,69$$

также очень близка к получающейся из опыта.

Полученные результаты блестяще оправдали принятый Буссинеском метод; отметим, что такое же вполне удовлетворительное совпадение опыта и теории получается и в других, значительно более сложных случаях.

---

<sup>1)</sup>  $\frac{f}{H}$  растет с  $p$ ; для случая стенки значительной высоты по всей вероятности  $\frac{f}{H}$  было бы несколько больше.

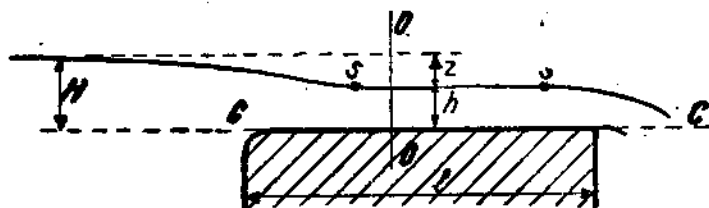
## ГЛАВА ШЕСТАЯ.

### ИСТЕЧЕНИЕ ЧЕРЕЗ ВОДОСЛИВ С ШИРОКИМ ПОРОГОМ.

#### § 53. Коэффициент расхода через водослив с широким порогом. Постулат Беланже.

1. Один из частных случаев истечения через водослив, для которого давно уже было получено теоретическое решение, является водослив с широким горизонтальным порогом (широкой стенкой).

Решение вопроса здесь облегчается по той причине, что при достаточной ширине стенки на некотором протя-



Фиг. 187.

жении  $z-z$  (фиг. 187) свободную поверхность переливающейся через порог струи можно считать параллельной порогу; струи параллельны между собой, благодаря чему в любом сечении  $O-O$  распределение давлений можно считать по гидростатическому закону и скорости одинаковыми. Величина скорости

$$v = \varphi \sqrt{2g \left( z + \frac{v_0^2}{2g} \right)} = \varphi \sqrt{2g \left( H + \frac{v^2}{2g} - h \right)},$$

где  $\varphi$  — коэффициент скорости.

Для прямоугольного водослива, единственного, который мы здесь будем рассматривать, расход, очевидно, равен

$$Q = b \cdot h \cdot v = \varphi \cdot b \cdot h \sqrt{2g \left( H + \frac{v_0^2}{2g} - h \right)} \dots (25)$$

или на единицу ширины водослива:

$$q = \frac{Q}{b} = \varphi \cdot h \sqrt{2g \left( H + \frac{v_0^2}{2g} - h \right)} \dots (25^{bis})$$

Называя через  $k$  отношение

$$k = \frac{h}{H + \frac{v_0^2}{2g}},$$

формулу (25<sup>bis</sup>) получаем в виде

$$q = \varphi k \sqrt{1-k} \cdot \sqrt{2g \left( H + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{3/2}} \dots (25')$$

Сопоставляя с основной формулой (10), видим, что коэффициент расхода  $m$  равен в этом случае

$$m = \varphi k \sqrt{1-k} \dots (26)$$

Как видим, величина  $m$  зависит от величины  $k$ , т. е. от устанавливающейся на пороге глубины струи  $h$ .

Таким образом, решение вопроса сводится к определению величины  $h$ , или, что то же самое, к определению  $k$ .

На фиг. 188 изображена зависимость величины  $k \sqrt{1-k}$  от  $k$ . Как видим, для  $k=0$  и  $k=1$  величина  $k \sqrt{1-k}$  равна нулю. Значение  $k \sqrt{1-k}$  переходит через максимум при  $k = \frac{2}{3}$ , при этом оно равно 0,385. Приводим также значение

величины  $k \sqrt{1-k}$  для ряда значений  $k$  в пределах от 0,5 до 0,9, а также отношение соответственных величин к наи-

большему значению  $k \sqrt{1-k}$ , равному 0,385 при  $k = \frac{2}{3}$  (табл. 17).

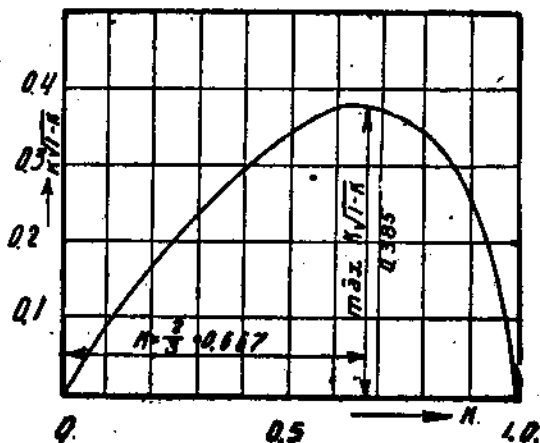
ТАБЛИЦА 17.

| $k$   | $k\sqrt{1-k}$ | $\frac{k\sqrt{1-k}}{(k\sqrt{1-k_{\max}})}$ | $k$   | $k\sqrt{1-k}$ | $\frac{k\sqrt{1-k}}{(k\sqrt{1-k_{\max}})}$ |
|-------|---------------|--------------------------------------------|-------|---------------|--------------------------------------------|
| 0,500 | 0,354         | 0,920                                      | 0,700 | 0,384         | 0,997                                      |
| 0,600 | 0,380         | 0,989                                      | 0,800 | 0,358         | 0,930                                      |
| 0,650 | 0,384         | 0,997                                      | 0,900 | 0,285         | 0,760                                      |
| 0,667 | 0,385         | 1,000                                      |       |               |                                            |

1. Еще в сороковых годах прошлого столетия Беланже предложил решать вопрос, исходя из так называемого „принципа наибольшего расхода“, т. е. в предположении (см. выше, стр. 271), что все явление само собою устанавливается так, чтобы при данном напоре расход был наибольший, или, что то же самое, чтобы при данном расходе напор был наименьший. Принцип этот Беланже принял в виде постулата без доказательства.

При данном напоре переменной величиной является лишь глубина на пороге  $h$ , или, что то же самое, отношение  $k$ . Очевидно, глубина  $h$  должна установиться так, чтобы  $k$  было равно  $2/3$ , так как при этом получается максимум значения  $m = \varphi k\sqrt{1-k}$ , а вместе с тем и расхода  $Q$ .

При этом, так как  $\varphi$  входит в выражение (25') в виде постоянного коэффициента, то  $k$  должно бы было устанавливаться равным  $2/3$  во всех случаях, независимо от значения  $\varphi$ ; что же касается последнего, то коэффициент этот, учитывающий потери при истечении через широкий



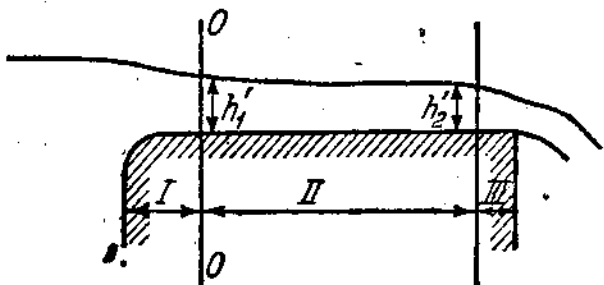
Фиг. 188.

водослив, зависит преимущественно от устройства входного ребра. Если последнее закруглено, то потери сравнительно не велики, и  $\varphi$  достигает величины 0,90—0,95, при остром ребре, благодаря возрастанию потерь,  $\varphi$  значительно понижается (см. ниже).

Опытное подтверждение теории Беланже обосновал опытом Лебро, который получил  $m$  около 0,35 ( $\varphi \approx 0,91$ ).

Такое совпадение опыта с теорией как бы вполне подтвердило теорию Беланже, и приведенный выше вывод до сих пор фигурирует во всех курсах гидравлики.

Потери при истечении через водослив с широким порогом можно разбить на два рода: 1) потери при входе, зависящие от устройства входного ребра, и 2) потери на трение, вызываемые трением струй между собою и о стенку.



Фиг. 189.

Плоскостью  $O-O$  (фиг. 189) можно разделить все течение на две зоны, в первой из которых преобладают потери первого рода, во второй — второго. В частности, благодаря потерям на трение, глубина на стенке не остается совершенно одинаковой, как это было бы, если бы потерь на трение вовсе не существовало. Наоборот, для преодоления сил трения необходим некоторый поверхностный уклон, благодаря чему глубина  $h'$ , в конце стенки несколько меньше, чем в начале  $h'$ . Ясно, что это понижение тем более заметно, чем значительнее силы трения, т. е. чем больше отношение  $\frac{1}{H}$ .

Трение зависит впрочем также и от абсолютных размеров потока, уменьшаясь с возрастанием последних, т. е. с напором  $H$ ; это вполне подтверждается опытом, согласно которому  $\varphi$  растет с  $\frac{H}{l}$  и с  $H$ .

В выражении (25') величина  $\varphi$  учитывает все потери полностью. Очевидно поэтому, что в выражении (25) за величину  $h$  надлежало бы принимать глубину  $h'$ , в конце порога непосредственно перед оной III, где началось уже резкое понижение свободной поверхности сливающегося потока (водопала). Таким образом, по буквальному смыслу рассмотрения Беланже, условию  $k=2/3$ , должны бы были удовлетворять именно эти глубины  $h'$ , в конце „параллельно-струйного“ потока.

Главным недостатком рассмотрения Беланже является, очевидно, теоретическая необоснованность постулата, что и побуждало теоретиков, в частности Буссинеска, искать более строгого доказательства его применимости. Во всех этих исследованиях, однако, не обращали внимания на то обстоятельство, что „принцип наибольшего расхода“, как было выше показано, требует соотношения

$$h = \frac{2}{3} \left( H + \frac{v_0^2}{2g} \right)$$

независимо от величины  $\varphi$ , т. е. независимо от устройства входного ребра и вообще от потерь. Между тем, согласно опыту,  $h$  довольно значительно отклоняется от  $\frac{2}{3}$  напора, причем  $h$  получаются большей частью меньше  $\frac{2}{3}$ , уменьшаясь, вообще говоря, с увеличением потерь и в исключительных случаях доходя до 0,50<sup>1)</sup>. Ясно, что такие отклонения  $h$  от теоретической величины во всяком случае внушают серьезное недоверие к „принципу наибольшего расхода“ и заставляют искать других путей для решения интересующего нас вопроса.

#### § 54. Энергетическое рассмотрение вопроса.

1. Нам, в частности, представляется более правильным подходить к решению вопроса со стороны энергетической, применяя введенное нами при рассмотрении вопросов неравномерного движения жидкости в открытом русле<sup>2)</sup>, понятие об „удельной энергии сечения“.

Удельной энергией сечения мы называем отношение к плоскости  $O-O$  (фиг. 190), проведенной через точку дна  $d$ , количество энергии, заключающееся в среднем в единице веса протекающей через сечение жидкости.



Фиг. 190.

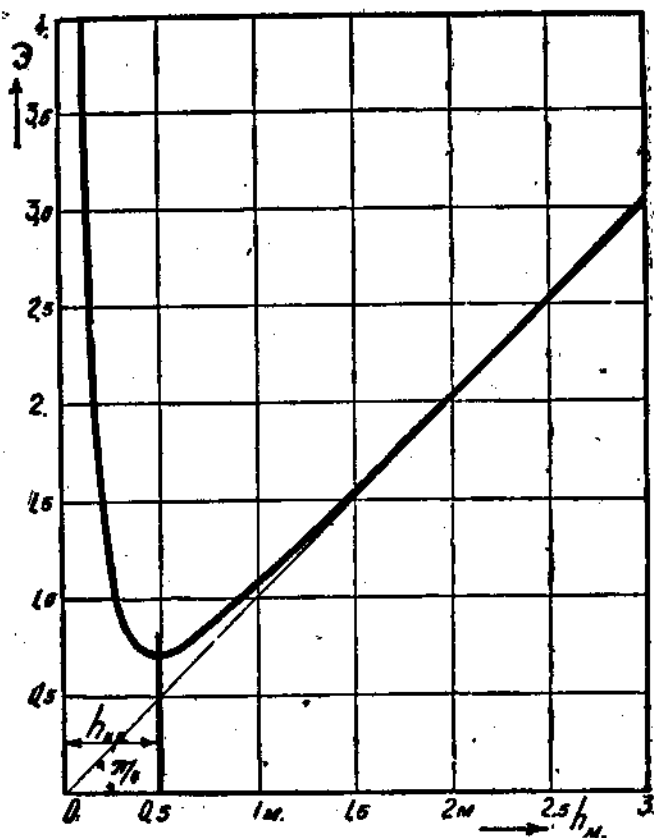
<sup>1)</sup> Опыты United States Deep. Waterway Commission в гидравлической лаборатории Cornell University. Полная сводка этих и других в высшей степени ценных опытов над водосливами американских гидравликов сделана Хортоном (Horton, Weir. experiments etc. Washington 1907). См. также Rafter Trans. Am. Soc. Civ. Eng., vol. 44.

<sup>2)</sup> См. Б. А. Бахметев, „О неравномерном движении жидкости в открытом русле“, стр. 35 — 38, КУБУЧ, Ленинград, 1928.

Для движения, медленно изменяющегося (см. I ч., стр. 72—75), удельная энергия сечения непосредственно равна

$$\mathcal{E} = h + \frac{av^2}{2g} = h + \frac{\alpha Q^2}{2g h^3}, \dots (27)$$

где  $h$  — глубина потока. Как легко убедиться, удельная энергия сечения изменяется в зависимости от глубины водо-



Фиг. 191.

тока, другими словами, один и тот же расход, протекая через одно и то же русло с различной глубиной, содержит в единице веса различное количество энергии.

2. Если для какого-либо русла и расхода определить  $\mathcal{E}$  в функции от наполнения  $h$ , то получится кривая, подобная изображенной на фиг. 191<sup>1)</sup>. Как видим, удельная энергия сечения проходит через минимум при некотором наполнении  $h = h_{кр}$ . Глубина эта называется критической.

Для русла прямоугольной формы, для которого

$$\mathcal{E} = h + \frac{\alpha Q^2}{2gb^2h^2} = h + \frac{\alpha q^2}{2gh^2}, \dots (27^{bis})$$

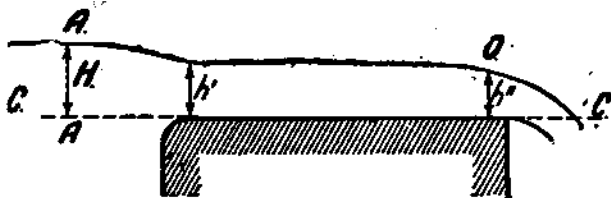
и величина критической глубины находится в высшей степени просто. На самом деле, приравнявая нулю производную  $\frac{d\mathcal{E}}{dh}$ , получаем

$$\frac{d\mathcal{E}}{dh} = 1 - \frac{\alpha q^2}{gh^3} = 0,$$

что дает следующие соотношения для определения критической глубины при расходе на единицу ширины русла  $q$ :

$$\frac{\alpha q^2}{g} = h_{кр}^3; \quad \frac{\alpha v^2}{g} = h_{кр} \quad \text{или} \quad \frac{\alpha q^2}{gh_{кр}^3} = 1 \dots (28)$$

3. Если теперь с энергетической точки зрения подойти к рассмотрению движения потока через широкий порог,



Фиг. 192.

то получим следующее. По отношению к поверхности  $O-O$  (фиг. 192), удельная энергия в сечении  $AA$  равна

$$H + \frac{v_0^2}{2g}.$$

<sup>1)</sup> Кривая  $E$  построена для широкого прямоугольного русла, при расходе на один метр ширины канала  $q = 1 \text{ м}^3/\text{сек.}$

Очевидно, что, вступая на порог с этим количеством энергии, поток может либо сохранить энергию неизменной (в случае, если бы потерь не было), либо рассеять ту или иную часть ее на покрытие сопротивлений. Во всяком случае, удельная энергия вдоль порога может либо оставаться неизменной, либо убывать, но во всяком случае не увеличиваться (т. е.  $\frac{d\mathcal{E}}{ds} \leq 0$ ), так как для этого надо было бы

подвести энергию извне. Тем самым естественному стремлению уровня воды на пороге понизиться насколько возможно кладется предел тем обстоятельством, что за известным пределом понижения (см. фиг. 191) уменьшению глубины соответствует приращение удельной энергии сечения.

Отсюда ясно, что наименьшая глубина, до которой может упасть уровень на пороге, есть глубина, соответствующая минимуму удельной энергии, т. е. глубина критическая.

Если потерь нет ( $\zeta = 0$ ;  $\varphi = 1$ ), то критическая глубина сразу устанавливается в начале порога и потом сохраняется на всем протяжении порога (в этом случае, кстати,

$h_{кр} = \frac{2}{3} h$  и результаты, получаемые из энергетического

рассмотрения и принципа Бёланже, тождественны).

Вообще же критическая глубина устанавливается в конце параллельно-струйной зоны потока, в сечении  $O-O$  (непосредственно перед „водопадом“)<sup>1)</sup>, в начале же глубина  $h'$  несколько больше  $h''$ . Разность между величинами удельной энергии, соответствующим глубинам  $h''$  и  $h'$ , равна удельной работе сопротивлений на протяжении порога.

Тем самым расход через водослив и глубина  $h''$  в конце порога должны удовлетворять соотношению (28); подставляя в него  $q$  из (25') и замечая, что благодаря предположению об одинаковости скоростей по сечению  $\alpha = 1$ , получаем соотношение

$$\frac{q^3}{gh^3} = \frac{\varphi^2 k^2 (1-k) 2g \left( H + \frac{v_0^2}{2g} \right)^3}{gh^3} = \frac{2\varphi^2 (1-k)}{k} = 1,$$

<sup>1)</sup> За сечением  $O-O$  в сфере водопада, благодаря кривизне струй, движение уже не удовлетворяет условиям медленной изменяемости, и выражение (27), а вместе с ним и (27<sup>bis</sup>) не смогут служить для учета средней удельной энергии сечения и нахождения глубины, отвечающей минимальному ее содержанию.

откуда имеем

$$k = \frac{2\varphi^2}{1 + 2\varphi^2},$$

$$\varphi = \sqrt{\frac{k}{2(1-k)}}, \dots \dots \dots (29)$$

а также, подставляя в (26),

$$m = \sqrt{\frac{k^3}{2}}; \quad k = \sqrt[3]{\frac{2m^2}{2m^2}} \dots \dots \dots (30)$$

Как видим, теперь все величины  $k$ ,  $\varphi$  и  $m$  находятся в совершенно определенной зависимости друг от друга, которая ясна из следующей 18 таблицы, в которой приведены значения  $k$ ,  $m$ ,  $M = \pi \sqrt{2g}$  и  $\frac{1}{\varphi^2}$ , а также коэффициента сопротивления  $\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1$  в зависимости от различных значений  $\varphi$ .

ТАБЛИЦА 18.

| $\varphi$ | $k$           | $m$   | $M$  | $\frac{1}{\varphi^2}$ | $\zeta$ |
|-----------|---------------|-------|------|-----------------------|---------|
| 1,00      | $\frac{2}{3}$ | 0,385 | 1,70 | 1,00                  | 0,00    |
| 0,95      | 0,65          | 0,365 | 1,62 | 1,11                  | 0,11    |
| 0,92      | 0,63          | 0,353 | 1,56 | 1,18                  | 0,18    |
| 0,89      | 0,615         | 0,340 | 1,51 | 1,26                  | 0,26    |
| 0,85      | 0,59          | 0,321 | 1,42 | 1,38                  | 0,38    |
| 0,80      | 0,56          | 0,297 | 1,31 | 1,56                  | 0,56    |

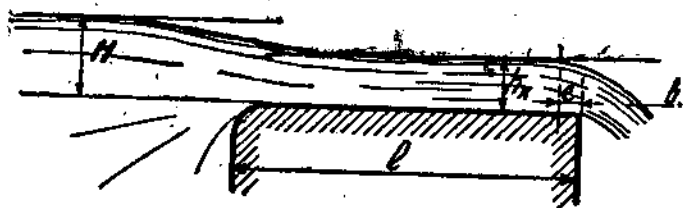
Из таблицы видно, что  $k$  уменьшается вместе с  $\varphi$ , т. е. с увеличением сопротивлений, что и подтверждается опытом. Лишь в том случае, если потерь совершенно нет, результаты ( $k$  и  $m$ ), получаемые из принципа наибольшего расхода и из энергетических соображений, одинаковы. В остальных случаях результаты получаются совершенно различные.

1) Напомним, что  $\zeta$  учитывает и потери на всем протяжении порога.

## § 55. Опыты над истечением через водослив с широким порогом.

Опытный материал по вопросу об истечении через водослив с широкой стенкой, вообще говоря, до чрезвычайности скуден. При этом, как опыты Базена над водосливами шириною в 2 м, так и опыты американских инженеров над порогами шириною до 5 м по преимуществу были направлены лишь на определение коэффициентов расхода, а не на общее исследование явлений.

С целью проверки приведенных выше рассуждений, весной 1913 г. был произведен ряд опытов над небольшою моделью широкого водослива в Гидравлической Лаборатории Ленинградского Политехнического Института <sup>1)</sup>, напра-



Фиг. 193.

вленных по преимуществу на выяснение общего характера явления. Опыты эти в общем подтвердили приведенную выше энергетическую теорию водослива с широким порогом:

а) Если входной край у стенки закругленный, то явление происходит следующим образом:

Поверхность переливающейся струи получается волнистая, причем волнистость эта тем больше выражена, чем больше относительная длина водослива, т. е. отношение  $\frac{1}{H}$ . Критическая глубина получается, как и надо было ожидать, в конце порога приблизительно на расстоянии  $e \approx (2 - 2,5) h_{кр}$ ; за критической точкой поверхность резко понижается, образуя сливной „водопад“  $b$  (фиг. 193).

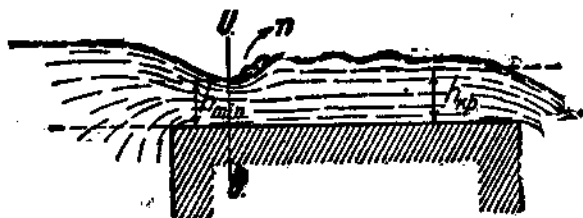
По мере увеличения напора или укорочения водослива, амплитуда волн уменьшается, поверхность струи выравни-

<sup>1)</sup> Опыты были по нашим указаниям произведены инж. И. И. Москвитниковым.

вается, и на всем протяжении порога глубина все более и более приближается к критической.

Что касается связи между элементами движения, то результаты (величины  $m$  и  $k = \frac{h_{кр}}{H + \frac{v_0^2}{2g}}$ ) опытов, в общем

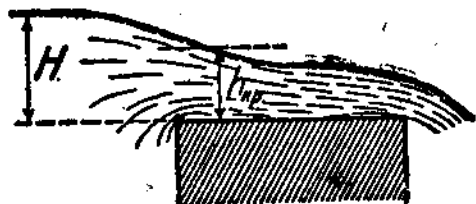
имевших лишь качественный характер) достаточно хорошо согласовались с соотношением (30) и, следовательно, и с таблицей 18.



Фиг. 194.

б) В случае стенки с „острым“ (прямоугольным входным) краем явление получалось в следующем виде:

Поверхность при входе на пороге резко понижается, достигая в некотором сечении  $O-O$  (фиг. 194) минимума, причем глубина здесь  $h_{min} < h_{кр}$ . Затем прыжком поверхность снова переходит через критическую глубину и затем в дальнейшем приобретает вид, ничем не отличающийся от вида поверхности при ребре с закругленным краем.



Фиг. 195.

Таким образом, явления истечения в водосливе с „острым“ и закругленным краем отличаются по форме лишь в первой части порога; в дальнейшем они тождественны. Всего замечательнее то, что и в этом случае соотношение

$m = \sqrt{\frac{k^3}{2}}$  оправдывается опытом.

Если порог короткий (или напор излишне велик) (фиг. 195)\* все явление ограничивается лишь первой частью; прыжок „сгоняется“ с порога.

Для подробного количественного изучения явления необходимы несомненно весьма широкие опыты. Мы пока ограничиваемся лишь констатированием основной картины явления.

## § 56. Расчетные формулы.

Все вышеуказанное приводит нас к заключению, что до более подробного изучения явления мы с достаточной достоверностью можем пользоваться основной расчетной формулой

$$Q = mb \sqrt{2g} \left( H + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{3/2} = Mb \left( H + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{3/2},$$

причем считать, что коэффициент расхода связан с коэффициентом скорости и с величиной  $k$ , отношением к напору глубины  $k_h$  в конце водослива<sup>1)</sup> соотношениями (29) и (30).

Наибольшее практическое значение имеет величина коэффициента расхода  $m$ . Как было указано выше, коэффициент этот возрастает с увеличением напора и уменьшением длины порога  $\left( \frac{l}{H} \right)$ . Для не слишком малых напоров

он, однако, остается почти постоянным, причем:

а) для порога с острым верхним краем шириною от 1,8 до 5 м держится в пределах от 0,32 — 0,33;

б) для порога с закругленным краем (более скудные опыты) колеблется между 0,35 — 0,37.

Принимая для расчетных формул низший из приведенных пределов, получаем средние расчетные коэффициенты:

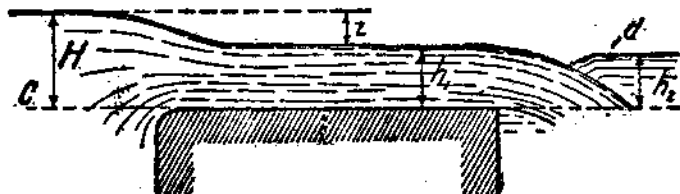
|                                      | $m M = m \sqrt{2g^3}$ |      |      | $k$  |
|--------------------------------------|-----------------------|------|------|------|
| Порог с острым краем .               | 0,32                  | 1,40 | 0,85 | 0,59 |
| Порог с закругленным краем . . . . . | 0,35                  | 1,55 | 0,92 | 0,63 |

<sup>1)</sup> Мы увидим дальше, что эта глубина нам будет необходима для решения целого ряда вопросов.

<sup>2)</sup> Метровый размер.

## § 57. Случай затопленного водослива.

Расход жидкости через затопленный водослив (фиг. 196), очевидно, определяется также по формуле (10); вопрос снова лишь в том, какая глубина  $h_1$  установится на пороге



Фиг. 196.

в зависимости от той или иной величины подтопа  $h_2$ , или, что все равно, как влияет величина

$$\frac{h_2}{H + \frac{v_0^2}{2g}}$$

на величину

$$k = \frac{h_1}{H + \frac{v_0^2}{2g}}.$$

Пусть А—С (фиг. 197)—струя в случае свободного водослива, т. е. в случае, если нижний уровень В' ниже



Фиг. 197.

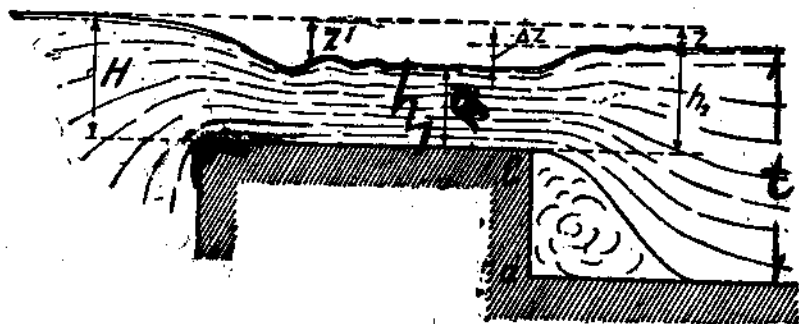
уровня порога С—С. Как было выше указано, струя сама собой принимает в этом случае такую форму А—С1, при

которой вблизи конца порога глубина переходит через критическую ( $h_1 = h_{кр}$ ).

Если теперь мы будем, не меняя расхода, постепенно повышать нижний уровень  $B$ , то очевидно, что до тех пор, пока уровень этот будет ниже свободного уровня на пороге, т. е. пока  $h_2 < h_1 = h_{кр}$ , подтопление никакого влияния на расход оказывать не будет. Таким образом, пока

$$\frac{h_2}{H + \frac{v_0^2}{2g}} < k,$$

определяемого в зависимости от  $\varphi$  по формулам (29)<sup>1)</sup>, истечение будет происходить, как через водослив свободный,



Фиг. 198.

и для определения расхода возможно непосредственно применять формулу (10).

Затопление начинает влиять лишь тогда, когда уровень  $B$  поднимется выше свободного уровня на пороге, т. е. когда

$$h_2 > k \left( H + \frac{v_0^2}{2g} \right).$$

При переходе жидкости с порога в нижний бьеф может произойти частичное восстановление живой силы; восстановление это выразится в том, что уровень ниже порога будет несколько выше уровня на пороге (на величину  $\Delta z = h_2 - h_1$ ) (фиг. 198).

<sup>1)</sup> См. стр. 281 таблица 18 и средние значения коэффициентов, стр. 284.

Для учета повышения уровня Буссинеск прилагает закон изменения количества движения наподобие того, как это было сделано при выводе теоремы Борда (ч. I, стр. 131). Главное затруднение и в этом случае является преимущественно в учете давлений на плоскости стенки<sup>1)</sup>.

Опыт показывает, однако, что это восстановление живой силы, если и имеется, то в очень незначительной мере, настолько большею частью малой, что его почти невозможно учесть.

Поэтому для практических расчетов можно этим восстановлением вовсе пренебрегать (в расчетных записках) и просто считать, что нижний уровень полностью „надвигается“ на порог, т. е. что в конце порога просто устанавливается глубина  $h_1 = h_2$  ( $h_2 > h_{кр \text{ своб. вод.}}$ ).

Для определения расхода в этом случае в формулу (25), вместо  $h$ , надо подставить  $h_2$ , в результате чего для расчета затопленного водослива получится соотношение:

$$Q = \varphi b h_2 \sqrt{2g \left( z + \frac{v_0^2}{2g} \right)}, \dots \dots (31)$$

где  $z$  — полный перепад  $H - h_2$ .

Заметим, что выражение (31) есть не что иное, как расход во второй (нижней) зоне в формуле Дюбуа для затопленного водослива (17'). Каким путем к этому расходу может в этом случае еще дополнительно добавиться расход через верхнюю зону, представляется совершенно непонятным. Ни в каком другом случае несообразие формулы Дюбуа не является более выпуклым и очевидным.

Формуле можно также придать вид (25') и написать ее в виде

$$Q = mb \sqrt{2g} \left( H + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{3/2}, \dots \dots (31')$$

где

$$m = \varphi k_2 \sqrt{1 - k_2^2}$$

<sup>1)</sup> Изложение вышеуказанной теории Буссинеска и ее приложения к расчету отверстий мостиков и труб см. ниж. Вислоцкий, Жури. М. П. С. 1901.

<sup>2)</sup> Коэффициент  $m$  для свободного истечения

$$m_0 = \varphi k \sqrt{1 - k}, \text{ (см. прим. стр. 238).}$$

и  $k_2$  будет уже отношение

$$k_2 = \frac{h_2}{H + \frac{v_0^2}{2g}}$$

Как мы выше видели, величина  $k \sqrt{1-k}$  в пределах  $k=0,6-0,7$  изменяется весьма мало; поэтому в этих пределах разница, получаемая при вычислении расходов по формуле затопленного водослива (31), считая  $k_2 = \frac{h_2}{H}$ , и по формуле свободного водослива, считая по формуле (10), получится весьма незначительной (меньше  $1-1,5\%$ ). Принимая это во внимание, в качестве расчетных правил можно принять следующие положения:

1. Во всех случаях, когда величина подтопа

$$h_2 < 0,7 \left( H + \frac{v_0^2}{2g} \right) \quad \text{или} \quad \sim h_2 < 0,7 H,$$

где  $m$  и  $k$  соответствуют критической глубине и определяются на основании соотношений (30) или таблицы 18 (стр. 220).

Коэффициент  $m$  (31') можно выразить так:

$$m = m_0 \frac{m}{m_0} = m_0 \frac{k_2 \sqrt{1-k_2}}{k \sqrt{1-k}} = \sigma m_0,$$

или, принимая во внимание, что в пределах практически встречающихся значений  $k \sqrt{1-k}$  мало отличается от наибольшей возможной величины

$$m = m_0 \frac{k_2 \sqrt{1-k_2}}{(k \sqrt{2-k})_{\max}} = m_0 \frac{k_2 \sqrt{1-k_2}}{0,385},$$

величина  $\sigma = \frac{k_2 \sqrt{1-k_2}}{0,385}$  играет роль такого же коэффициента подтопа, как выражение (16) в затопленном водосливе с тонкой стенкой. Значения этого коэффициента дано в таблице 15 (стр. 260).

Формуле расхода через затопленный широкий порог можно придать еще следующий вид: так как  $\frac{Q}{bh_2} = v$ , средней скорости на пороге, то с достаточной точностью имеем

$$z = \frac{1}{\varphi_2} \left( \frac{v^2 - v_0^2}{2g} \right).$$

Формула эта служит для непосредственного определения перепада в зависимости от скорости на пороге и до него.

расход определяется по формуле для свободного водослива с широким порогом:

$$Q = m\sqrt{2g} b \left( H + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{3/2} = Mb \cdot \left( H + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{3/2}.$$

2. Если  $h_2 > 0,7H$ , то расход высчитывается по формуле

$$Q = \varphi b h_2 \sqrt{2g \left( z + \frac{v_0^2}{2g} \right)}.$$

При этом величины  $m$ ,  $M$  и  $\varphi$  надлежит брать из сводки, приведенной на стр. 284. Что касается глубины  $h_1$ , устанавливающейся в конце порога, то во всех случаях, когда

$$h_2 < k \left( H + \frac{v_0^2}{2g} \right),$$

глубина эта устанавливается, независимо от  $h_2$ , равной

$$k \left( H + \frac{v_0^2}{2g} \right);$$

для случаев же, когда

$$h_2 > k \left( H + \frac{v_0^2}{2g} \right),$$

она равна  $h_2$ .

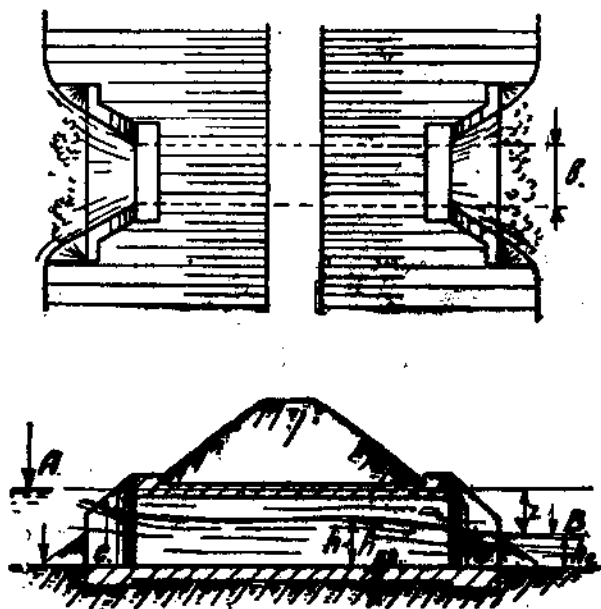
Опыты, произведенные в Гидравлической Лаборатории Ленинградского Политехнического Института, в общем также подтвердили правильность этих представлений об общем ходе явления и тем самым оправдали данные приемы расчета.

Что касается величины коэффициентов скорости  $\varphi$ , то, судя по всему,  $\varphi$  мало изменяется с увеличением подтопа  $h_2$  до тех пор, пока сливающаяся струя имеет форму, подтопленную снизу (линия раздела  $d$ , фиг. 196). Лишь при очень значительных подтопах, когда сливающаяся струя примет форму волнистую, коэффициент  $\varphi$  несколько возрастает. Однако, при этих условиях перепад  $z$  вообще делается очень малым; измерять его весьма затруднительно; в практических расчетах мы рекомендовали бы этого увеличения  $\varphi$  не учитывать.

## § 58. Расчет отверстий, открытых мостиков и труб <sup>1)</sup>.

Одним из крайне важных применений истечения через водослив с широкой стенкой является применение выведенных выше формул к расчету отверстий открытых мостиков и труб, служащих для пропуска весенних или ливневых вод через насыпи железных или шоссейных дорог, каналов и пр.

На фиг. 199 изображена схематически подобная труба (сделанная из камня или бетона). Уровень  $B$  ниже трубы



Фиг. 199.

соответствует бытовым условиям при некотором определенном расходе  $Q$ ; уровню этому соответствует бытовая глубина  $h_2$ , т. е. глубина воды в тальвеге в естественном состоянии над отметкою лотка трубы. Основание трубы

<sup>1)</sup> Применение к рассмотрению движения через водоспуски и пр., см. ниже, в главе VIII.

предположим горизонтальным. Очевидно, истечение через подобную трубу одинаково с истечением через водослив с широким порогом, разница лишь в том, что в случае водослива стеснение русла достигнуто возвышающимся над дном канала порогом, тогда как в рассматриваемом случае русло стеснено в плане насыпью, и расход с известной площади сосредоточивается у данного искусственного сооружения. Благодаря этому за насыпью создается подпор, необходимый для придания воде надлежащей для прохода через отверстие скорости.

Как и в водосливе с широким порогом, при свободном истечении в конце трубы устанавливается глубина  $h$ , равная критической. Если величина отверстия равна  $b$  и общий расход  $Q$ , то, считая отверстие прямоугольным, получаем глубину в конце трубы ( $h = h_{кр}$ ) на основании (28) равной

$$h = \sqrt{\frac{Q^2}{g}} = \sqrt{\frac{Q^2}{gb^3}} = \frac{v^2}{g}, \quad \dots \quad (32)$$

где  $v$  — средняя скорость.

Обыкновенно при расчете труб исходят из той или иной допустимой наибольшей средней скорости в трубе, — скорости, определяемой устройством для лотка трубы.

Из (32) непосредственно получаем

$$b = \frac{Q}{v^2} g \quad \dots \quad (32')$$

формулу, служащую для определения отверстия сооружения при заданном расходе  $Q$  и допустимой скорости  $v$ .

Не надо забывать, однако, что формула эта соответствует случаю свободного истечения; истечение же будет свободным, если бытовая глубина  $h_2$  меньше свободной глубины в трубе, т. е. если

$$h_2 < h; \quad h_2 \leq \frac{v^2}{g}; \quad h_2 \leq \sqrt{\frac{Q^2}{gb^3}}.$$

Истечение через сооружение будет тогда совершаться с двумя перепадами (фиг. 200): одним при входе  $z_1$ , вторым при выходе  $z_2$ <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Опыт вполне подтверждает изображенную картину движения с двумя перепадами. Внутри сооружения получается лишь более или менее волнистая поверхность.

Что касается глубины до трубы или напора  $H$ , то, пренебрегая скоростью подхода, получаем из (10)

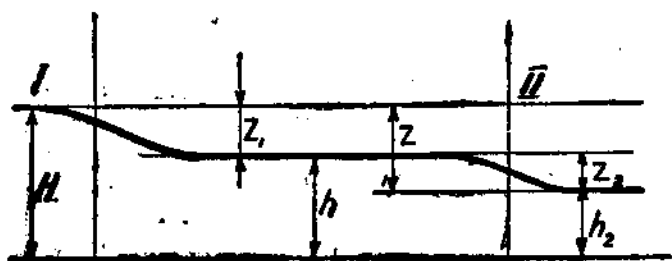
$$H^3 = \frac{Q^2}{m^2 2g b^2}$$

или

$$H = \frac{Q^2 \cdot k^2}{m^2 2g b^2 k^2 H^2} = \frac{k^2 \cdot v^2}{m^2 2g}$$

или в силу (30)

$$H = \frac{2}{k} \cdot \frac{v^2}{2g} = \frac{2}{\sqrt{2m}} \cdot \frac{v^2}{2g}$$



Фиг. 200.

Если принять для запаса значения  $m$  и  $k$ , равные соответственно 0,32 и 0,59, то получаем

$$H = 3,4 \frac{v^2}{2g}$$

Так как в свою очередь  $h = \frac{v^2}{g}$ , то

$$H = 1,7h; \quad z = 0,7h.$$

Если бытовая глубина  $h_2$  больше свободной глубины в трубе, т. е. если

$$h_2 > \frac{v^2}{g}; \quad h_2 > \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g b^2}},$$

то подтоп начинает влиять на истечение. В этом случае надлежит применять формулу затопленного водослива в предположении, что глубина внутри трубы установится равной бытовой  $h_2$  (фиг. 201); скорость в трубе в этом случае равна

$$v = \varphi \sqrt{2gz} = \varphi \sqrt{2g(H - h_2)}; \quad z = \frac{v^2}{2g\varphi^2}.$$

При

$$\varphi = 0,85; \quad z = 1,4 \frac{v^2}{2g}.$$

Расход

$$Q = bh_2 v = 0,85 bh_2 \sqrt{2gz}.$$

На основании предыдущего получаем следующие правила для расчета отверстий сооружений в различных случаях.



Фиг. 201.

I. Задан расход  $Q$ , предельная скорость  $v$ , бытовая глубина  $h_2$ . Определить отверстие сооружения  $b$ ?

Прежде всего определяем, будет ли истечение свободное или нет. Это будет зависеть от того, будет ли

$$h_2 < \text{или} > \frac{v^2}{g}.$$

а) Если  $h_2 \leq \frac{v^2}{g}$ , то истечение свободное с двумя перепадами.

Требуемое отверстие

$$b = \frac{Q}{v^2 g}.$$

Глубина воды в трубе

$$h = \frac{v^2}{g}.$$

Напор  $H = 1,7 h$ ; полный перепад:  $z = z_1 + z_2 = 1,7 h - h_2$ .  
Формулы (32') и (32), округляя  $g$  для метрового размера до  $g \sim 10$ , для футового  $g = 32$ , приобретают вид для метров

$$b = \frac{10Q}{v^3}; \quad h = \frac{v^2}{10};$$

для футов

$$b = \frac{32Q}{v^3}; \quad h = \frac{v^2}{32}.$$

б) Если  $h_2 > \frac{v^2}{2g}$ , то подпор влияет на истечение; устанавливается один перепад.

Глубина воды в трубе

$$h = h_2;$$

необходимое отверстие

$$b = \frac{Q}{h_2 v};$$

подпор

$$z = 1,4 \frac{v^2}{2g};$$

напор

$$H = z + h_2.$$

Отметим, что возможное сжатие при входе в трубу учитывается при приведенном выше методе расчета само собою в общем коэффициенте скорости  $\phi$ . Задачей соответствующих опытов будет установление величины  $\phi$  в зависимости от различных очертаний и устройств входных сооружений.

II. Задан расход  $Q$ ; дано отверстие  $b$  и бытовая глубина  $h_2$ . Определить условия протекания.

Снова определяем глубину  $h$  свободного истечения по формуле

$$h = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^3}}.$$

а) если  $h > h_2$ , то истечение свободное; глубина в трубе  $h$ ;  $H = 1,7 h$ ;

б) если  $h_2 > h$ , истечение несвободное; глубина в трубе  $h = h_2$ ; подпор  $z = 1,7 \frac{Q^2}{2gb^2}$ .

III. Задан расход  $Q$ ; напор  $H$  и бытовая глубина  $h_2$ .  
Определить отверстие и скорость в трубе.

Определяем свободную глубину  $h$  в трубе:

$$h = 0,59 H = \sim 0,6 H^1).$$

а) Если  $h_2 < 0,6 H$ , истечение свободное; глубина в трубе

$$h = 0,6 H;$$

скорость

$$v = \sqrt{gh};$$

отверстие

$$b = \frac{Q}{m\sqrt{2g} H^{3/2}} = \frac{Q}{0,32\sqrt{2g} H^{3/2}}.$$

б) Если  $h_2 > 0,6 H$ , истечение несвободное; глубина воды в сооружении  $h_2$   
скорость

$$v = 0,85 \sqrt{2g(H - h_2)},$$

отверстие

$$b = \frac{Q}{0,85 h_2 \sqrt{2g(H - h_2)}}.$$

Все вышесказанное относилось к сооружению с горизонтальным лотком; если лоток сделан с уклоном, то здесь надлежит различать два случая:

1) Уклон малый (менее критического)<sup>2)</sup>. Формулы для определения отверстия и глубины  $h$  (32) в конце лотка

<sup>1)</sup> В этом случае, как и в предыдущих, мы приняли, что подпор выйдет, как только  $h_2$  достигнет величины  $h_2 = h = 0,6 H$ . Выше (стр. 288) мы рекомендовали считать расход по формулам свободного водослива до тех пор, пока  $h_2 < 0,7 H$ . Это лишь вопрос удобства. В рассматриваемом случае удобнее переходить к формуле затопленного широкого водослива, лишь только  $h_2$  сравняется со свободной глубиной  $h$ .

<sup>2)</sup> См. В. А. Бахметев — «О неравномерном движении жидкости в открытом русле», глава V, КУБУЧ, Ленинград, 1928.

остаются полностью применимыми. Уклон может повлиять лишь на увеличение  $\varphi$ . В практических расчетах этим увеличением  $\varphi$  можно пренебрегать.

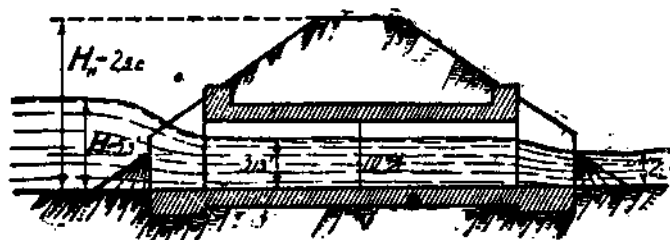
2) Уклон велик (более критического). Формулы неприменимы; расчет труб сводится к рассмотрению истечения через „короткий лоток“ крутого уклона.

### § 59. Численные примеры.

1. Высота насыпи  $H_{\text{нас}} = 17,5$  фут. (фиг. 202). Определить отверстие каменной трубы для пропуска 200 куб. фут./сек. при предельной скорости 10'/сек., бытовая глубина = 2'.

Свободная глубина

$$h = \frac{v^2}{32} = \frac{100}{32} = 3,13 > 2'.$$



Фиг. 202.

Истечение свободное, величина отверстия

$$b = \frac{32 \times 200}{10^2} = 6,4'.$$

Напор

$$H = 1,7 \times 3,13 = 5,3'.$$

2. Отверстие открытого мостика = 14 фут.; расход 280 куб. фут./сек., бытовая глубина 4'. Определить подпор (фиг. 203).

Свободная глубина

$$h = \sqrt{\left(\frac{280}{14}\right)^2 \times \frac{1}{32}} = \sqrt{\frac{400}{32}} = 2,32' < 4'.$$

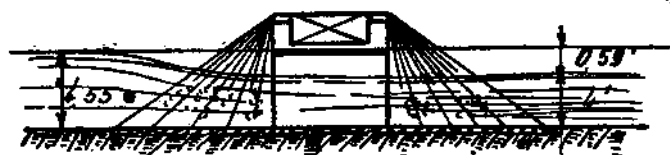
Глубина под мостиком  $h = h_2 = 4'$ .

Скорость

$$v = \frac{280}{14 \times 4} = 5' \text{ сек.}$$

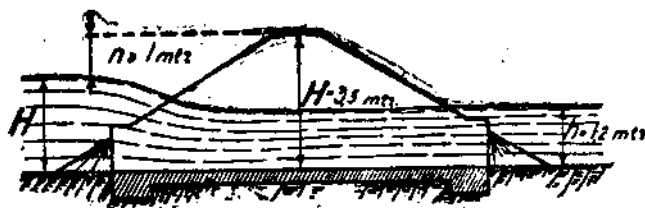
Подпор

$$z = 1,4 \frac{5^2}{64} = 0,55'$$



Фиг. 203.

3. Расход  $20 \text{ м}^3/\text{сек}$ ; высота насыпи  $3,5 \text{ м}$ ; наибольшая допустимая скорость  $5 \text{ м}/\text{сек}$ ; уровень воды за насыпью должен быть ниже бровки насыпи на  $n > 1 \text{ м}$  (фиг. 204).



Фиг. 204.

а) По скорости  $v = 5 \text{ м}/\text{сек}$  определяем свободную глубину

$$h = \frac{v^2}{10} = \frac{25}{10} = 2,5; \quad H = 1,7 \times 2,5 = 4,25,$$

что невозможно.

б) По высоте насыпи определяем

$$H_{\max} = 3,5 - 1 = 2,5.$$

Свободная глубина

$$h = 0,6 H = 1,5 \text{ м} > 1,2.$$

Истечение свободное.

Скорость

$$v = \sqrt{10 h} = \sqrt{15} = 3,9 \text{ м/сек.}$$

$$b = \frac{20}{0,32 \sqrt{2g} \cdot 2,5 \sqrt{2,5}} = \sim 3,6 \text{ м.}$$

## ГЛАВА СЕДЬМАЯ.

### ИСТЕЧЕНИЕ ЧЕРЕЗ ВОДОСЛИВЫ ПРАКТИЧЕСКИХ ФОРМ.

#### § 60. Незатопленный водослив практической формы.

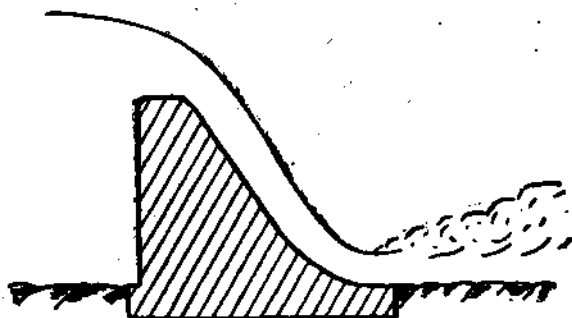
1. Водосливы практических профилей являются промежуточной формой между водосливами с тонкой стенкой и водосливами с широким порогом. Естественно, что как весь характер явления, так и коэффициенты расхода принимают вид и значения, приближающиеся к тому или иному типу в зависимости от типа профиля, устройства входного ребра, наконец, типа струи. В частности, что касается последнего обстоятельства, то в практических устройствах общее расположение плотины (значительная длина, направляющие стенки) обычно таково, что доступа воздуха под струю либо вовсе не имеется, либо он крайне затруднен. Благодаря этому обычно получается тип струи, приближающийся к отжатому, затопленному или прилипшему. Пишем, — приближающийся к данному типу, так как естественно, что раз имеется уже не тонкая стенка, а массив того или иного вида, тело, обладающее достаточными размерами в плоскости течения, то общие условия истечения уже настолько отличаются от водослива с тонкой стенкой, что струи вообще принимают другую форму и вид, а вместе с тем и терминология, установленная для струй в водосливе с тонкой стенкой, уже строго не применима.

В частности, например, на профилях, подобных изображенному на фиг. 205, представляющему типичный профиль каменной или бетонной глухой плотины, широко применяемой в Америке, а в последнее время в Европе и СССР, при достаточном округлении верхнего ребра (головы) струи часто вовсе не отделяются от поверхности плотины и на всем протяжении текут, прикасаясь к ней.

Струя получается типа прилипшей; струя при этом уже вполне устойчива как по форме, так и по коэффициентам.

2. Под ниспадающей струей часто образуется вакуум. Американские гидротехники давно уже на практике убедились в этом.

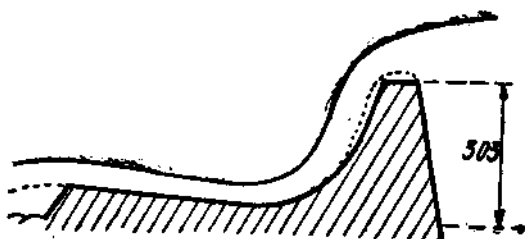
Вакуум этот, уменьшая давление с низовой стороны, тем самым увеличивает разность давлений воды с обеих



Фиг. 205.

сторон на тело плотины и увеличивает тем самым статические усилия, стремящиеся опрокинуть или сдвинуть плотину.

Если закругление головной части недостаточно, то струя может оторваться от поверхности плотины (фиг. 206), и под струей могут образоваться вихревые мешки.



Фиг. 206.

Явление это наблюдал Рэбок, из опытов которого и заимствована фиг. 206. Фиг. 207 относится к опыту над моделью известной плотины на р. Драс, около Avignonnet (Stauwerke; стр. 52). Все эти явления Рэбок наблюдал в лотке со стеклянными стенками.

Обращаем еще внимание на крайне интересные опыты Рэбока над движением струи у подножия плотины в водобойной части. Особенно интересно движение струи в случае устройства водобойной части в виде

обратного свода. Мы не делаем выводов из этих опытов, так как они относятся более к правилам очертания плотин, т. е. к области гидротехники, а не гидравлики.

Совершенно ясно, что образование таких мешков, в которых большею частью имеется вакуум, в связи с вибрациями тела плотины, вызываемыми постоянным изменением форм мешков и давлений в них, крайне вредно отражаются на прочности сооружения. В частности, мы лично видим в этом одну из главных причин разрушения облицовки (вырывания отдельных камней и пр.) каменных плотин.

В общем же, нужно сказать, что физическая сторона явления истечения через профили практических форм почти совершенно не изучена, и здесь имеется еще обширное и более чем благодарное поле работы для экспериментальной гидравлики.

3. Большая часть произведенных опытов так же, как в водосливе с широкой стенкой, имела лишь целью установить коэффициенты расхода для различных практических профилей.

Весьма большое число подобного рода опытов произвел Базен; к сожалению, в его опытах размеры водосливов и напоров были сравнительно не велики

$$(p \leq 0,75 \text{ м}; H_{\text{max}} \text{ до } 0,4 \text{ м}).$$

С значительно большими напорами (до 1,5 м) и более высокими стенками (до 2,5 м) при ширине  $b$  до 5 м работали американские инженеры<sup>1)</sup>. К тому же последние работали над профилями, более близкими к действительно употребляющимся на практике.

Как показывают опыты, коэффициент расхода, сперва при малых напорах колеблющийся из-за изменения типа струй в довольно значительных пределах, с переходом напора за некоторую определенную, зависящую от формы профиля

<sup>1)</sup> Опыты U. S. Deep Waterway Board 1899 (инж. Rafter и Freeman); U. S. Geological Survey 1903. Инж. Horton в лаборатории Cornell University. Лит. см. выше.



Фиг. 207.

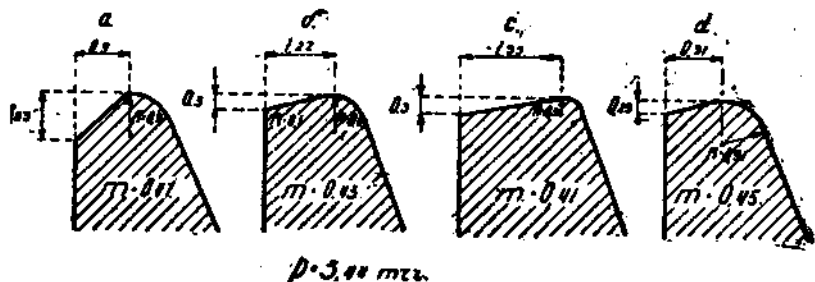
величину приобретает почти постоянное значение, лишь очень мало изменяясь с напором.

В опытах американских инженеров область этих постоянных значений коэффициентов была почти всюду достигнута (обычно при напорах  $> 0,5 + 0,6$  м). Наоборот, у Базена большей частью опыты не выходили (благодаря малым значениям напоров) из пределов изменяющихся значений  $m$ .

Ниже (фиг. 209) и на фиг. 208 мы приводим ряд профилей, исследованных американскими инженерами, с соответственными значениями коэффициентов  $m$  формулы

$$Q = mb\sqrt{2g} \left( H + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{3/2}.$$

Значение коэффициентов соответствует указанным выше средним постоянным значениям. Из опытов Базена приве-



Фиг. 208.

дены лишь результаты опытов с треугольной формой и наклонной передней стенкой, для которых и коэффициенты его опытов получались постоянными.

В частности, обращаем внимание, что для типов, изображенных на фиг. 208, соответствующих американским глухим плотинам, при соответственном закруглении головы коэффициенты получаются около 0,45. Вставка прямой (как на типе c) значительно уменьшает коэффициент расхода. Ясно, насколько выгодно придавать головам плотин закругленные мягкие очертания. Для подобных профилей, как среднее значение коэффициента  $m$ , мы считали бы возможным принять

$$m = 0,45^1),$$

<sup>1)</sup> Цифра эта принята на основании целого ряда данных (кроме указанных выше), преимущественно американских. Принята цифра в общем

чему соответствует для метрового размера

$$M = m \sqrt{2g} = 2,$$

для футового размера

$$M = \sim 3,50,$$

для саженого размера

$$M = 1,35.$$

Опыты Рэбока <sup>1)</sup>, которые дали значения  $m$  особенно высокими, были произведены над профилями, очерченными целиком по дуге круга, т.е. совершенно не применяемыми на практике <sup>2)</sup>.

Наоборот, для типов, приближающихся по формам к профилям обычных деревянных или ряжевых водосливных плотин (как-то: типы 1, d, e, фиг. 209), мы считали бы возможным установить средний расчетный коэффициент

$$m = 0,4,$$

что соответствует

|                       |                 |
|-----------------------|-----------------|
| для метрового размера | $M = \sim 1,8,$ |
| „ футового            | „ $M = 3,2,$    |
| „ саженого            | „ $M = 1,2.$    |

Само собою ясно, что приведенные выше цифры составляют лишь средние расчетные коэффициенты, применимые лишь для приближенных расчетов. В действительности, надлежало бы, помимо более подробного и всестороннего общего исследования истечения через плотины практи-

несколько ниже обычно получающегося значения для хорошо спроектированного очертания. Мы считаем, однако, опасным поднимать в среднем расчетное значение  $m$ .

<sup>1)</sup> Опыты Рэбока и некоторые американские опыты показали возрастание  $m$  с напором. Оказывается, что расход удается связать в этом случае с напором путем показательной формулы

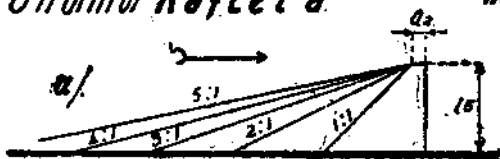
$$Q = b \cdot c \sqrt{2g} \left( H + \frac{v_0^2}{2g} \right)^n,$$

где  $n > \frac{1}{2}$ , а  $c$  — постоянная.

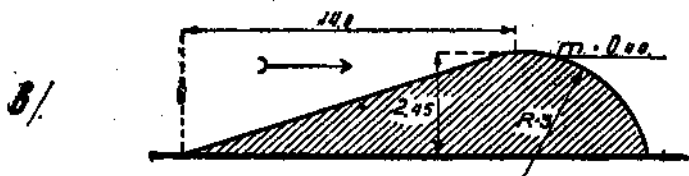
<sup>2)</sup> Мы не приводим результатов опытов, так как полагаем, что практические значения коэффициентов расхода они вряд ли могут дать, ибо масштаб их слишком уж мал.

# Onbimbi Rafter'a

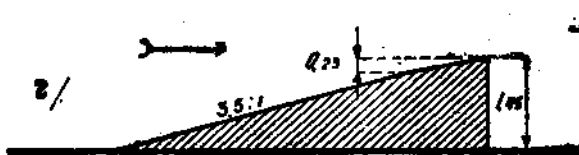
| Наклон передней<br>стенки | м.    |
|---------------------------|-------|
| 1:1                       | 0,882 |
| 2:1                       | 0,465 |
| 3:1                       | 0,447 |
| 4:1                       | 0,435 |
| 6:1                       | 0,423 |



м. 0,442



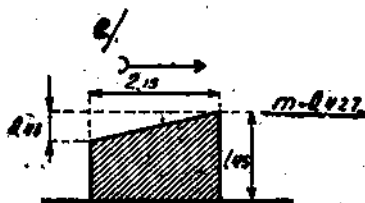
м. 0,440



м. 0,421



м. 0,440



м. 0,422



| Наклон откоса | коэф. м |
|---------------|---------|
| 1:1           | 0,480   |
| 2:1           | 0,436   |
| 6:1           | 0,390   |
| 10:1          | 0,386   |

Таблица II.

практических форм, при назначении отверстий и размером гидротехнических сооружений в ответственных случаях просто на просто устраивать модели проектируемых сооружений и исследовать их в гидравлических лабораториях. Если модель не слишком мала и лаборатория располагает достаточным расходом, чтобы получать достаточные напоры, то результаты, полученные на модели, можно непосредственно применять к действительным сооружениям. Примером подобной лаборатории служит упомянутая выше лаборатория Cornell University в САСШ, где основной опытный канал имеет длину 400 м при ширине в 15 м; расход, получаемый из пруда, образованного плотиной, перегораживающей реку, может достигать 11,33 м<sup>3</sup>/сек.

Интересно отметить, что до 1915 г. лишь одна американская гидротехника пользовалась наблюдениями над моделями для определения коэффициентов расхода действительных сооружений. В Америке также производились попытки определения коэффициентов на существующих сооружениях. В Европе таких попыток (по крайней мере опубликованных), за весьма малыми исключениями, до 1915 г. почти не производилось. Организация подобных гидравлических лабораторий в СССР является в настоящее время широкого развития гидротехнических работ неотложной необходимостью.

## § 61. Затопленный водослив.

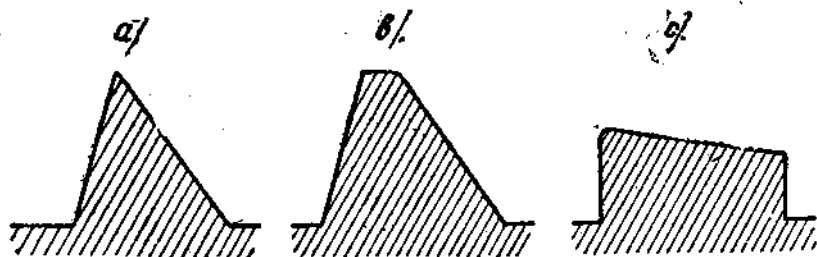
1. В предыдущем мы рассмотрели явление истечения через затопленный водослив для водослива с тонкой стенкой и с широким порогом. В первом случае влияние затопления начинает сказываться, лишь только уровень нижнего бьефа превысит уровень ребра, наоборот, в водосливе с широким порогом нижний уровень начинает влиять на величину расхода лишь тогда, когда глубина подтопа делается больше 0,6—0,66 напора (практически 0,7 H). Таким образом, в водосливе с широким порогом влияние затопления сказывается значительно меньше.

Профили практических форм лежат между этими двумя пределами. Затопление оказывает в них, вообще говоря, меньшее влияние, чем в водосливе с тонкой стенкой, но в то же время и больше, чем в водосливе с широким порогом.

При этом чем шире профиль, т. е. чем больше его протяженность в направлении оси потока (чем профиль

более приближается к широкому порогу), тем влияние затопления сказывается меньше. На фиг. 210 приведены три последовательно уширяющихся профиля; влияние затопления в профиле *b* меньше, чем в *a*, в *c* меньше, чем в *b*.

Вышеизложенное общее заключение есть непосредственный вывод, к которому опытом пришел Базен. Учесть, однако, количественное влияние затопления, в том или ином профиле, при том материале, которым мы в настоящее время располагаем, нельзя. Все, что мы можем сделать для количественного учета коэффициента расхода при затопленном водосливе, это указать пределы, наивысший



Фиг. 210.

и наименьший, возможного уменьшения коэффициента расхода из-за затопления.

Наивысший предел соответствует истечению через водослив с тонкой стенкой. В этом случае коэффициент подтопа равен

$$\frac{m}{m_0} = 1,05 \left( 1 + 0,2 \frac{h_1}{p} \right) \sqrt[3]{\frac{z}{H}}$$

Как мы выше видели, выражение это для  $h_1 = 0$  дает

$$\frac{m}{m_0} = 1,05.$$

Величина 1,05 учитывает возрастание коэффициента расхода, благодаря переходу струи от формы свободной к форме подтопленной снизу.

Таким образом, собственно влияние затопления выражается лишь членом

$$\sigma = \left( 1 + 0,2 \frac{h_1}{p} \right) \sqrt[3]{\frac{z}{H}} \dots \dots \dots (33)$$

Следовательно, чтобы получить коэффициент расхода для затопленного водослива, надо коэффициент расхода для водослива незатопленного умножить на величину  $\sigma$ .

2. Пример. Определить расход воды через водослив типа фиг. 211, принимая, что подтоп  $h_1 = 0,8$  м. Считая, что для незатопленного водослива  $m = 0,45$  мы получили бы, как предельное наибольшее значение коэффициента подтопа  $\sigma$ ,

$$\sigma = \left(1 + 0,2 \frac{0,8}{H}\right) \sqrt{\frac{1,2}{2}} = 0,88$$

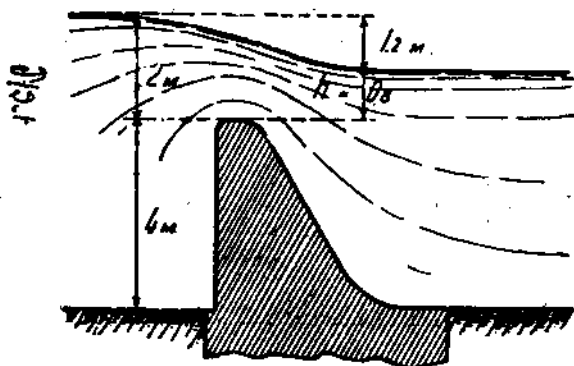
и соответственно в формуле

$$Q = bm \sqrt{2g} \left(H + \frac{v_0^2}{2g}\right)^{3/2},$$

$$m = 0,88 \times 0,45 = 0,396,$$

$$M = 2 \times 0,88 = 1,76.$$

Полученное таким путем значение  $m$  — наименьшее из возможных значений; оно само собой несколько ниже действительного, но мы тем не менее рекомендовали бы



Фиг. 211.

в расчетах, касающихся истечения через профили, подобные фиг. 210, учитывать влияние затопления именно указанным выше образом. Получающийся благодаря такому приему

расчета некоторый запас в величинах отверстий идет в пользу надежности сооружения <sup>1)</sup>).

Совершенно в других условиях явилось бы истечение при профиле, изображенном на фиг. 213; профиль соответствует, скажем, какой-либо ряжевой плотине.

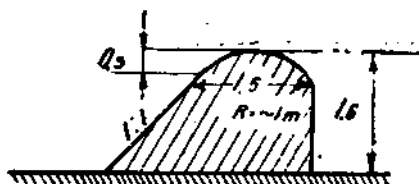
Здесь истечение явно приближается к случаю широкого водослива. При глубине подтопа  $h_1 < 0,7H$  ( $h_1 < 1,4$  м) подпор влияния на истечение оказывать почти не будет. Считая коэффициент свободного истечения  $m = 0,4$ , мы могли бы его сохранить в формуле истечения (10) до тех пор, пока  $h_1$  не превзошло указанной выше величины.

Приведем еще расчет для случая  $h_1 = 1,8$  ( $h_1 > 0,7H$ ).

<sup>1)</sup> Приведем крайне интересный опыт U. S. Deert'a Waterway Board над истечением через затопленную модель, изображенную на фиг. 212. Коэффициент  $m$  при свободном истечении получился равным  $m = 0,462$ .

В нижеследующей таблице в зависимости от  $\frac{h}{H}$  приведены

значения коэффициентов подтопа, полученные из опыта и вычисленные по Базену по формуле (18) для тонкой стенки.



Фиг. 212.

| $\frac{h_1}{H}$    | 0,2   | 0,5   | 0,7   | 0,9   |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|
| $\sigma$ из опыта  | 0,983 | 0,937 | 0,856 | 0,621 |
| $\sigma$ по Базену | 0,976 | 0,896 | 0,787 | 0,570 |
| $\sigma$ опыт      | 1,01  | 1,04  | 1,09  | 1,09  |
| $\sigma$ Базен     |       |       |       |       |

В нижней графе приведены отношения значений  $\sigma$  из опыта к полученным по формуле Базена.

Коэффициент подтопа для тонкой стенки был бы

$$\sigma = \left(1 + 0,2 \frac{1,8}{4}\right)^3 \sqrt{\frac{0,2}{2}} = 1,09 \times 0,465 = 0,505 = \sim 0,5.$$

Для широкого водослива (согласно прим. стр. 288), при  $k_2 = 0,9$

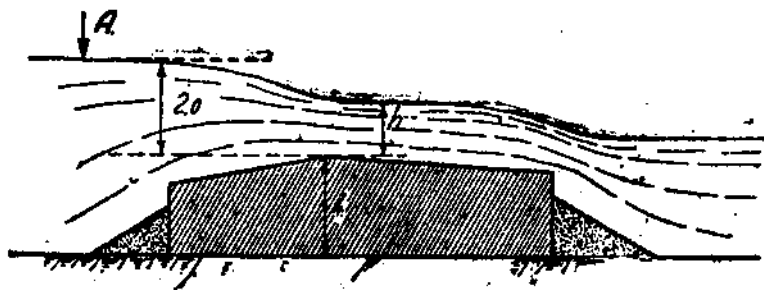
$$\sigma = \frac{k_2 \sqrt{1 - k_2}}{(k \sqrt{1 - k})_{\max}} = 0,76.$$

Как видим, разница между коэффициентами получается довольно значительная, а именно:

$$\begin{aligned} m_1 &= 0,5 \times 0,4 = 0,2, \\ m_2 &= 0,76 \times 0,4 = 0,3, \end{aligned}$$

причем на самом деле действительный коэффициент ближе ко второй из полученных величин.

Мы ограничиваемся здесь лишь приведенным выше общим указанием; очевидно, в тех или иных практических



Фиг. 213.

условиях задачи, в зависимости от всей совокупности заданных условий, приходится каждый раз выбирать наиболее удобный и отвечающий цели прием.

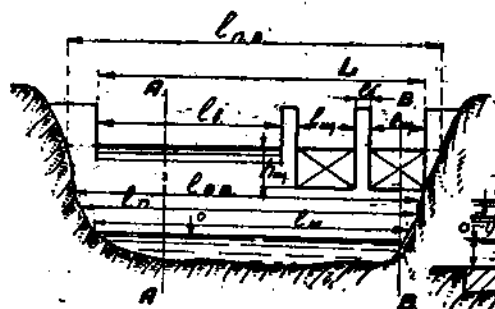
Некоторое указание на конкретное решение тех или иных вопросов содержится в следующей главе, посвященной расчету отверстий плотин. Вообще же говоря, подробное изучение затопленного водослива при практических профилях является одною из основных задач экспериментальной гидравлики.

## ГЛАВА ВОСЬМАЯ.

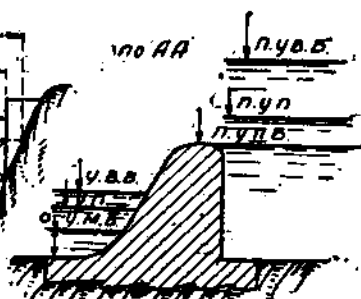
### РАСЧЕТ ОТВЕРСТИЙ ПЛОТИН.

#### § 62. Пример I.

Из практических приложений отдела об истечении жидкости через водосливы наиболее важными являются расчеты, связанные с назначением отверстий всякого рода плотин и определением гидравлических элементов прохода воды через водопропускные сооружения. Как общий характер вопросов и задач, встречающихся при подобных



Фиг. 214.



Фиг. 215.

расчетах, так и применяемые приемы подсчетов всего лучше выясняются разбором ряда конкретных примеров.

Пример I. Ущелье перегорожено каменной водосливной плотиной, состоящей из глухой водосливной части  $A-A$  и щитового водоспуска  $B-B$  (фиг. 214). На фиг. 215 отмечены три основных уровня вод в естественном состоянии (до постройки сооружения):

1) уровень меженных вод ( $У.М.В.$ ), отметка которого принята в дальнейшем за нуль;

2) уровень паводка (У.П.) = +0,8 м<sup>1)</sup>;

3) уровень высоких вод (У.В.В.) = +2,3 м

Обычно при расчете последние два уровня принимаются наибольшими из всех соответственных возможных уровней. Принятым выше трем характеристическим уровням соответствуют расходы воды:

1)  $Q_m$  (меженный расход) = 40 м<sup>3</sup>/сек.,

2)  $Q_n$  (расход паводка) = 150 м<sup>3</sup>/сек.,

3)  $Q$  (расход высоких вод) = 400 м<sup>3</sup>/сек.

Уровням этим соответствуют ширины русла:

$$l_m = 50 \text{ м}; \quad l_n = 70 \text{ м}; \quad l = 100 \text{ м}.$$

Кроме того, дана средняя глубина в межень  $z = 0,04$  м, получаемая делением живого сечения потока в межень на ширину

$$\left( z = \frac{\omega_m}{l_m} \right).$$

Что касается подпертых горизонтов, то они задаются в следующем виде:

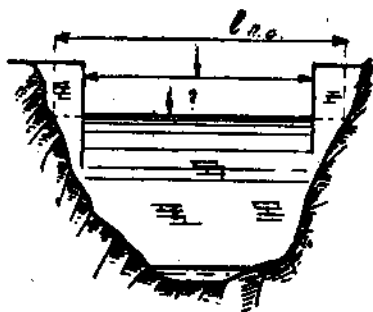
1. Прежде всего намечается определяемый назначением плотины и сообразованный с местными условиями нормальный уровень подпертых вод (Н.У.П.В.), нормально под-

держивать который в течение большей части года и является назначением сооружения. Разность отметок этого нормального подпертого горизонта и межени определяет нормальный подпор, создаваемый плотиною.

В паводок и высокую воду обычно подпертый уровень можно несколько повышать. Тем самым, опять-таки по местным условиям, намечаются горизонты:

2. Подпертый уровень паводка (П.У.П.)

3. Подпертый уровень высоких вод (П.У.В.В.), как наивысшие горизонты, которые возможно допустить при соответственных обстоятельствах.



Фиг. 216.

<sup>1)</sup> Для краткости сразу приводим принятые в примере численные значения элементов задания.

В нашем конкретном случае назначаем

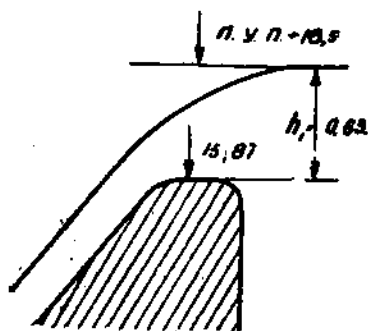
$$\begin{aligned} \text{Н. У. П. В.} &= +16 \text{ м,} \\ \text{П. У. П.} &= +16,5 \text{ м,} \\ \text{П. У. В. В.} &= +17,5 \text{ м.} \end{aligned}$$

Расчет ведется различно в зависимости от постановки вопроса и в зависимости от общего устройства и типа сооружения. Разберем несколько случаев:

1. Предположим, что всю плотину предположено делать глухой водосливной, совершенно без щитового водоспуска (фиг. 217). При этом длина так называемой рабочей части плотины (на которой возможно устраивать слив воды) составляет  $L = 120 \text{ м}$  из полной ширины русла на нормальном уровне подпертых вод  $I_{\text{нв}} = 150 \text{ м}$ . Требуется

определить, на каком уровне возможно установить гребень плотины.

Само собою ясно, что всего желательнее устроить гребень водослива непосредственно на нормальном уровне подпертых вод, но при чисто водосливной плотине это не всегда возможно; действительно, кроме нормального уровня подпертых вод, нам необходимо учитывать то обстоятельство, что паводок и высокие воды должны пройти через



Фиг. 217.

плотину, не превзойдя назначенных им горизонтов. Между тем может оказаться, что при принятой отметке ребра водослива это окажется невозможным. Таким образом ясно, что в данной частной постановке задачи необходимо исходить именно из подпертых уровней паводка и высоких вод и назначать уровень ребра водослива в зависимости от них.

а) Для пропуска паводка необходим напор  $h_1$ , определяемый из соотношения (коэффициент  $m$  принят равным 0,45;  $M = 2$ ):

$$h_1^{1/4} = \frac{Q_{\text{п}}}{M \cdot L} = \frac{120}{2 \times 120} = 0,5^1),$$

<sup>1)</sup> Благодаря значительной высоте плотины, мы подходной скоростью пренебрегаем.

откуда получаем

$$h_1 = 0,63$$

и соответственную наивысшую возможную отметку ребра плотины;  $16,5 - 0,63 = 15,87$  м над уровнем межени (фиг. 217).

б) Для пропуска высоких вод необходим напор (фиг. 218).

$$h_2^{2/3} = \frac{400}{2 \times 120} = 1,67; \quad h_2 = 1,4 \text{ м.}$$

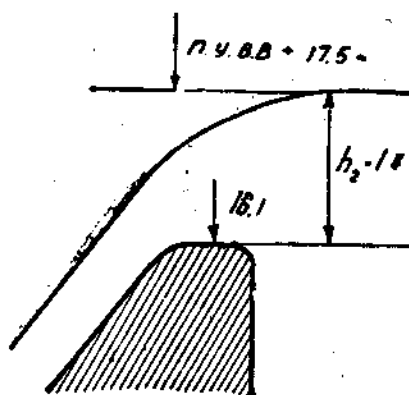
Отметка ребра водослива (фиг. 218)

$$17,5 - 1,4 = 16,1 \text{ м.}$$

Как видим, в данном случае отметка ребра, а следовательно, и уровень нормального подпертого горизонта определяется целиком из условий пропуска паводка.

Окончательно назначаем ребро водослива, и тем самым

$$\text{Н. У. П. В.} = +15,87.$$



Фиг. 218.

Соответственно этому получаем

$$\text{П. У. П.} = +16,5;$$

$$\text{П. У. В. В.} = +17,27.$$

2. Посмотрим теперь, какого рода щитовой водоспуск (какой длины  $l_{\text{щ}}$  и ширины  $l_{\text{б}}$ ) необходимо поставить на плотине, чтобы можно было ребро водослива поднять до наивысшего требуемого уровня (т. е. до  $+16$ ).

Очевидно, тут приходится подбирать размеры щитов так, чтобы паводок прошел с уровнем 16,5. В данном нашем случае предположим, что щитовой затвор состоит из двух пролетов по 8 м каждый, разделенных каменными быками толщиной по 2 м каждый. Определим лишь необходимую глубину щитового прореза (ниже уровня водослива  $h_{\text{щ}}$ , фиг. 219).

Длина водосливной части

$$l_{\text{б}} = 120 - 20 = 100 \text{ м.}$$

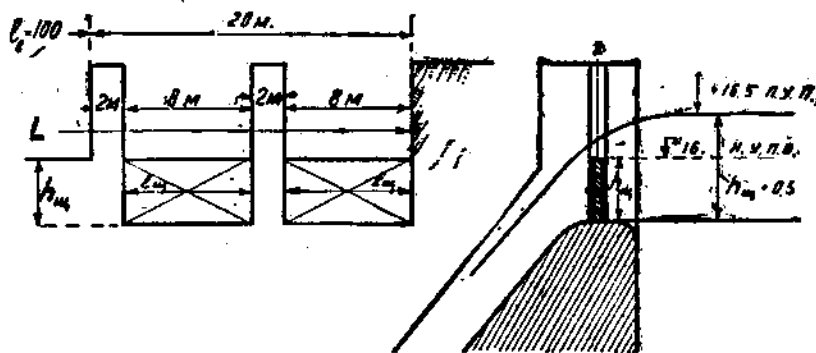
Расход через водосливную часть

$$Q = 100 \times 2 \times 0,5^{3/2} = \sim 71 \text{ м}^3/\text{сек.}$$

Через щиты остается пропустить:

$$150 - 71 = 79 \text{ м}^3/\text{сек.},$$

при вынутом щите вода изливается в прорез, как через водослив под напором  $h_{\text{ш}} + 0,5$ .



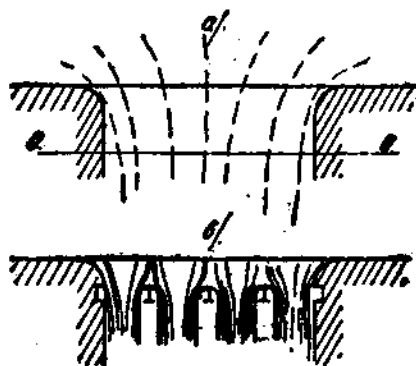
Фиг. 219.

Очевидно, имеем

$$(h_{\text{ш}} + 0,5)^{3/2} = \frac{79}{2 \times 16} = 2,47 \text{ м}^{3/2};$$

$$h_{\text{ш}} + 0,5 = 1,82 \text{ м};$$

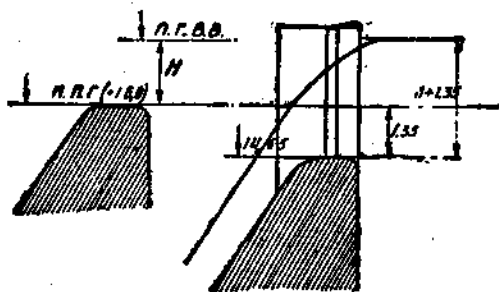
$$h_{\text{ш}} = 1,32 \approx \sim 1,35 \text{ м.}$$



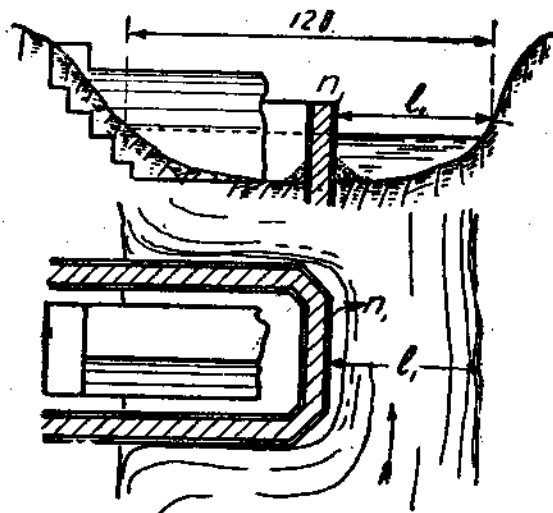
Фиг. 220.

Замечание. В вышеизложенном расчете сделано предположение, что входные ребра быков очерчены так, что вода при втекании в прорезы не испытывает сжатия и в расчетном сечении О—О (фиг. 220) течет полным сечением. На самом деле может случиться, что благодаря недостаточному округлению входных ребер быка или наличности стоек в пролете (б) жидкость у краев и возле

стоек испытывает сжатие, благодаря чему получаются мертвые пространства, не участвующие в работе отверстия, полезная длина которого тем самым уменьшается. Для точного учета подобных явлений необходим опытный материал, которым мы пока не располагаем. В учебниках гидротехники подобное уменьшение полезной длины пролета отверстия учитывают введением некоего „коэффициента сжатия“, умножая на который действительный пролет, получают полезную величину отверстия.



Фиг. 221.



Фиг. 222.

Таким образом, в указанные выше расчеты, вместо величины  $l_{\text{д}}$ , надо было бы вставить:  $l_{\text{д}} = \epsilon l_{\text{д}}$  и т. д. Величину  $\epsilon$  оценивают различно в зависимости от устройства входных

частей (наличности стоек и пр.). Обычно принимают между 0,95—0,85.

3. Посмотрим теперь, при каком горизонте пройдут высокие воды?

В этом случае напор на водосливе  $H$  определяется из уравнения:

$$Q = M [l_1 \cdot H^{3/2} + l_2 (H + h_m)^{3/2}],$$

что дает

$$400 = 2 \cdot 100 \cdot H^{3/2} + 2 \cdot 16 (H + 1,35)^{3/2}.$$

Решая это уравнение подбором, получаем

$$H = 1,26,$$

т. е. уровень высоких вод = 17,26 (фиг. 221).

4. В связи с рассматриваемым примером рассмотрим еще несколько подсчетов, касающихся пропуска вод во время постройки плотины.

Постройка плотины ведется следующим образом: в первую строительную кампанию половина реки отгораживается перемычкой  $n$  (фиг. 222), внутри которой с водоотливом и воздвигается первая половина плотины; в этот период вся вода пропускается другою половиною русла, длиною  $l_1 \sim 50$  м.

Определим подпор  $z$ , получающийся при этом в межень и в высокую воду.

При этом, так как в суженной части движение близко к параллельно струйности, можно при расчетах применить приемы, рассмотренные в отделе, посвященном водосливу с широким порогом.

а) Межень <sup>1)</sup>. Предполагая подпор незначительным, определяем его по приемам для затопленного водослива, по формуле

$$q = l_1 \cdot u_1 = l_1 \cdot \varphi \sqrt{2g \left( z + \frac{v_1^2}{2g} \right)}$$

или, с достаточной точностью

$$z = \frac{1}{\varphi^2} \left( \frac{v_1^2 - v_0^2}{2g} \right) = \frac{1}{\varphi^2} \cdot \frac{Q^2}{2g} \left( \frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_0^2} \right).$$

<sup>1)</sup> Межень — горизонт воды в реке после спада весенних вод (Р. д.).

где  $\omega_1$  и  $v_1$  относятся к суженному сечению,  $\omega_0$  и  $v_0$  — к сечению, подпертому перемычкой (фиг. 223).

Принимая, что средняя глубина в стесненном сечении одинакова со средней глубиной всего сечения  $z = 0,4$ , имеем

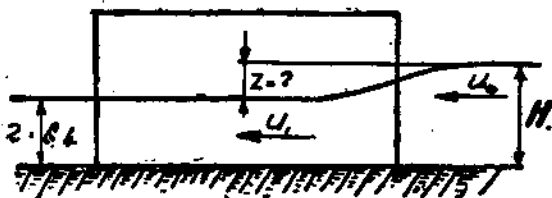
$$v_1 = \frac{10}{50 \cdot 0,4} = 0,5 \text{ м/сек.}$$

$v_0$  (в первом приближении, не учитывая подпор):

$$v_0 = \frac{10}{120 \cdot 0,4} = 0,21 \text{ м/сек.}$$

Считая  $k = \frac{1}{\varphi^2}$  для запаса равным 1,5, имеем

$$z = 1,5 \frac{(0,5^2 - 0,21^2)}{2g} = 1,5(0,13 - 0,002) = \sim 0,017 = \sim 0,02 \text{ м}$$



Фиг. 223.

Во втором приближении надо было бы принять  $v_0$  соответственно глубине 0,42 м и повторить расчет. Мы этого, однако, не делаем, так как подобная точность не соответствует характеру задачи.

## 6) Высокие воды

$$v_1 = \frac{400}{50 \times 2,7} = 2,96.$$

В первом приближении

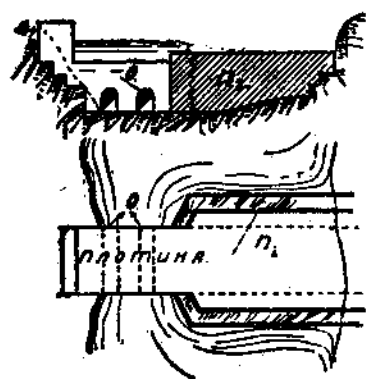
$$v'_0 = \frac{400}{120 \times 2,7} = 1,23,$$

$$z' = 1,5 \frac{(2,96^2 - 1,23^2)}{19,6} = \sim 1,5(0,45 - 0,08) = 0,56.$$

Во втором приближении

$$v_0'' = \frac{400}{120 \times (2,7 + 0,56)} = \frac{400}{120 \times 3,26} = 1,02,$$

$$z'' = 1,5 \frac{(2,96^2 - 1,02^2)}{19,6} = \sim 1,5 (0,45 - 0,5) = \sim 0,60 \text{ м.}$$



Фиг. 224.

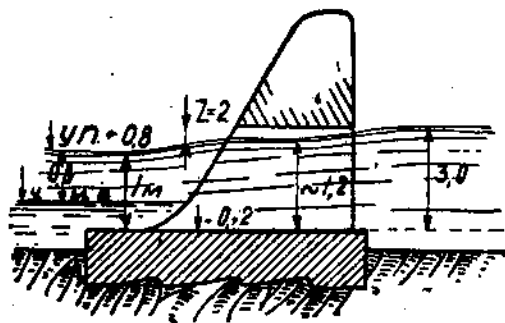
5. Рассмотрим теперь еще вопрос о пропуске воды во второй строительный период. В это время для постройки второй половины плотины по проходе высоких вод забирается в перемычку  $п_2$  (фиг. 224) остававшая дотоле свободной половина реки. Расход же меженний и паводки пропускаются через особые отверстия  $О—О$ , оставленные в теле выстроенной в первый строительный сезон части плотины.

а) Поставим себе задачей назначить размеры этих отвер-

стий с тем, чтобы паводок проходил с подпором не более 2 м.

Предполагая, что дно временных (прямоугольных) отверстий заложено на глубине 0,2 м ниже межи, получаем (фиг. 225) картину прохода паводочных вод через отверстия. Картина движения ничем не отличается от движения через каменную трубу или открытый мостик.

Так как  $h_2$  (в этом случае  $h_2 = 1,0 \text{ м}$ )  $< 0,7H$  ( $H = h_2 + z = 3 \text{ м}$ ), то движение есть свободное истечение (см. стр. 289) с двумя перепадами.



Фиг. 225.

Живое сечение выше плотины берем примерно  $200 \text{ м}^2$ .  
Подходная скорость

$$v_0 = \frac{150}{200} = 0,75 \text{ м/сек}; \quad \frac{v_0^2}{2g} = \sim 0,03.$$

Учитывая возможность плохого округления входных ребер, принимаем  $M = 1,4$  и имеем расход на единицу ширины:

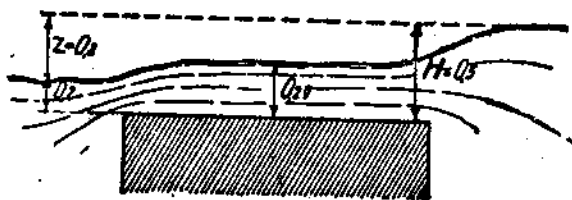
$$q = 1,4 \times 3,03^{3/2} = \sim 7,5 \text{ м}^3/\text{сек}.$$

Общая ширина отверстий

$$b = \frac{150}{7,5} = 20 \text{ м}.$$

Оставляем 4 отверстия по 5 м<sup>1</sup>).

б) Определим еще подпор, вызываемый проходом воды через отверстия в межень.



Фиг. 226.

Расход на единицу ширины отверстия

$$q = \frac{10}{20} = 0,5 \text{ м}^3/\text{сек}.$$

Глубина свободного истечения (см. стр. 291):

$$h_k = \sqrt{\frac{q^2}{g}} = \sqrt{\frac{0,5^2}{g}} = \sim 0,29 \text{ м} > h_2.$$

<sup>1</sup>) Если бы мы желали учесть указанным выше образом (см. стр. 315) влияние возможного бокового сжатия, то надо было бы для получения строительной величины отверстий увеличить полученную расчетом на  $\frac{1}{\epsilon}$ ; считая  $\epsilon = 0,85$ , имеем

$$l = \frac{20}{0,85} = \sim 23,5 \text{ м}.$$

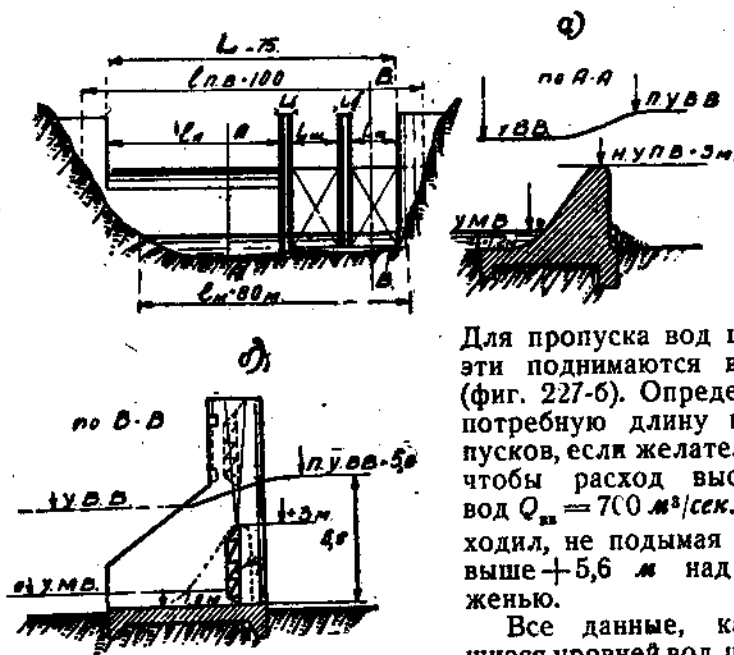
Применяем формулы свободного истечения

$$H - 1,7h = 1,7 \times 0,29 = \sim 0,5 \text{ м.}$$

Полный перепад  $z = 0,5 - 0,2 = 0,3 \text{ м}$  (фиг. 226).

### § 63. Пример II.

Река перепружена каменной водосливной плотиной типа А, подпирающей воду на 3 м против межи. Для пропуска высоких вод и паводков устраиваются идущие до дна прорезы В (донные спуски), закрываемые щитами щ.



Фиг. 227.

Для пропуска вод щиты эти поднимаются вверх (фиг. 227-б). Определить потребную длину водопусков, если желательно, чтобы расход высоких вод  $Q_{\text{н}} = 700 \text{ м}^3/\text{сек.}$  проходил, не подымая воды выше +5,6 м над меженью.

Все данные, касающиеся уровней вод, ширины русла и его глубины, приведены на фиг. 227.

При этом пролеты отдельных щитовых отверстий желательно делать около  $l_{\text{щ}} = 5 - 7 \text{ м}$  с промежуточными быками, толщиной  $l_{\text{б}} = 2 - 2,5 \text{ м}$ .

Как видим, по постановке вопроса, отверстие плотины определяется на пропуск высоких вод.

1. Решение начнем с того, что при заданных уровнях определим количества воды  $q_A$  и  $q_B$ , пропускаемые в высокую воду одним пргонным метром водосливной и водоспускной частями.

а) Водослив (фиг. 228). Как видим, здесь имеется случай затопленного водослива, при этом, так как перепад  $z$  меньше 0,7 высоты стенки  $p$  (см. стр. 262 и 306), то переливающаяся струя имеет тип „подтопленной снизу“.

Определяем коэффициент подтопа  $\sigma$  по (33).

$$\sigma = \frac{m'}{m_0} = \left(1 + 0,2 \frac{h_1}{p}\right) \sqrt{\frac{z}{H}} = \left(1 + 0,2 \frac{1,5}{4,2}\right) \sqrt{\frac{1,1}{2,6}} \approx 0,8,$$

$$m' = 0,45 \times 0,8 = 0,36,$$

$$M = 2 \times 0,8 = 1,6.$$

Скорость подхода

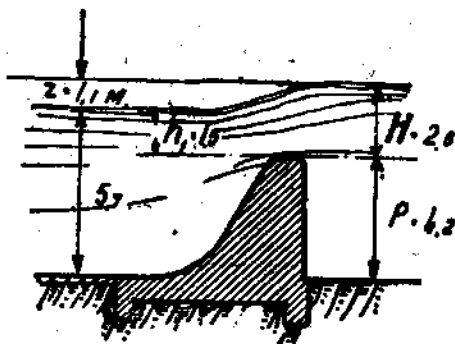
$$v_0 \approx \frac{700}{6,8 \times 100} \approx 1,03,$$

$$\frac{v_0^2}{2g} \approx 0,05.$$

$$q_A = M \left(H + \frac{v_0^2}{2g}\right)^{3/2} =$$

$$= 1,6 \times 2,65^{3/2} =$$

$$= 6,9 \text{ м}^3/\text{сек.}$$



Фиг. 228.

б) Донный спуск. Донный спуск рассматриваем, как водослив с широким порогом. Так как глубина  $h_2 > 0,7 H$ , то истечение совершается, как через затопленный водослив.

Считая, что входные края достаточно закруглены (фиг. 229) (принимая  $\varphi = 0,9$ ), согласно (31) имеем

$$q_B = h_2 \varphi \sqrt{2g \left(z + \frac{v_0^2}{2g}\right)} = 0,9 \times 5,5 \sqrt{2g(1,15)} = 23,5 \text{ м}^3/\text{сек.}$$

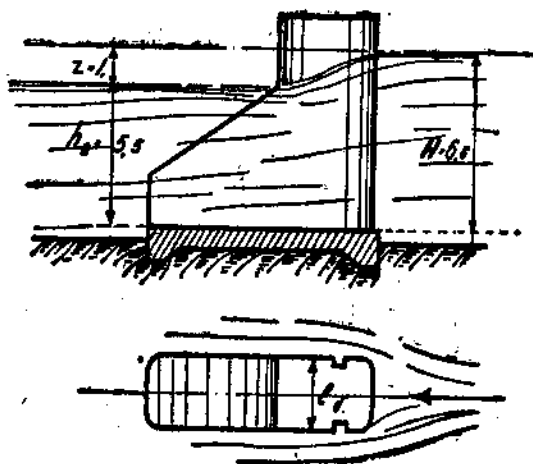
Теперь, имея единичные расходы  $q_A$  и  $q_B$ , решение задачи ведем следующим образом. Называя  $l_A$  и  $l_B$  полную длину водосливной и щитовой части, а  $\Sigma l_0$  — общую

толщину быков, очевидно уменьшающую длину водоспускной части плотины, имеем следующие уравнения:

$$1) l_A q_A + l_B q_B \geq Q = 700 \text{ м}^3/\text{сек};$$

$$2) l_A + l_B + \Sigma l_0 = L = 75 \text{ м.}$$

Первое из этих уравнений есть условие определенной водопропускной способности сооружения. Второе—лишь геометрическое условие, указывающее, что определенные конструктивные элементы должны уместиться на заданной



Фиг. 229.

длине (рабочей части плотины). Задачу всего проще решать подбором. В первом приближении предполагаем, что быков совсем нет; тогда

$$\Sigma l_0 = 0$$

и уравнения (подставляя числа) превращаются в

$$1) l_A \times 6,9 + l_B \times 23,5 \geq 700 \text{ м}^3/\text{сек.}$$

$$2) l_A + l_B = 75.$$

Решение этих уравнений:

$$l_B = 10,8 \text{ м}; \quad l_A = 64,2 \text{ м.}$$

Придется поставить два щита; если считать два быка по 2,5 м (фиг. 230), то длина водослива уменьшается на 5 м, чему соответствует расход в

$$5 \times 6,9 = 34,5 \text{ м}^3/\text{сек.}$$

для пропуска этого расхода необходимо увеличить отверстие водоспусков; замена 1 м водослива щитовым водоспуском дает увеличение расхода на

$$23,5 - 6,9 = 16,6.$$

Таким образом, надлежит увеличить водоспуск на

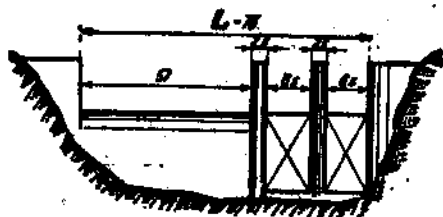
$$\frac{34,5}{16,6} = 2,08 \text{ м.}$$

Принимаем окончательно следующие размеры (фиг. 230):

$$l_A = 57 \text{ м.}$$

$$l_B = 2 \times 6,5 = 13 \text{ м.}$$

$$\Sigma l_0 = 2 \times 2,5 = 5 \text{ м.}$$



Фиг. 230.

$$\Sigma l = 75 \text{ м.}$$

Проверяем пропускную способность; последняя представляется:

$$1) Q_A = l q_A = 57 \times 6,9 = 394 \text{ м}^3/\text{сек.}$$

$$2) Q_B = l_B q_B = 13 \times 23,5 = 306 \text{ м}^3/\text{сек.}$$

$$Q = 700 \text{ м}^3/\text{сек.}$$

2. Определим теперь, при каких уровнях плотина сможет пропустить при открытом водоспуске: а) паводок  $Q_n = 140 \text{ м}^3/\text{сек.}$  (У. П. = +1,3); б) паводок  $Q_n = 250 \text{ м}^3/\text{сек.}$  (У. П. = +2,1).

$$а) Q_n = 140 \text{ м}^3/\text{сек. У. П.} = 1,3.$$

Посмотрим прежде всего, будет ли при этом часть воды переливаться через водослив или весь паводок можно будет пропустить щитами.

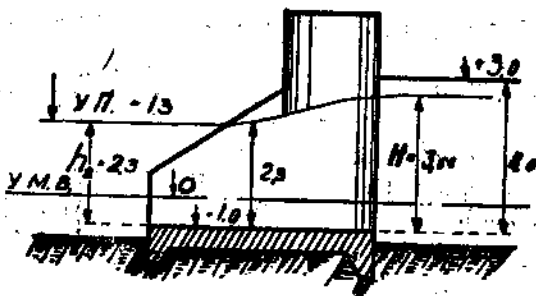
До этого посмотрим, сколько воды сможет пройти через водоспуск, если подпертый уровень окажется на уровне

ребра водослива. При этом глубину ниже плотины  $h$  будем считать соответственно У. П.

В этом случае, пренебрегая скоростью подхода, имеем (так как  $h_2 < 0,7 H$ ):

$$Q_{1B} = 1,55 \times 13 \times 4^{3/2} = 162 \text{ м}^3/\text{сек} > Q_n.$$

Так как эта величина больше принятого расхода паводка ( $Q = 140 \text{ м}^3/\text{сек.}$ , то ясно, что паводок пройдет одним донным спуском (фиг. 231).



Фиг. 231.

Подпор  $H$  определим из уравнения:

$$\left( H + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{3/2} = \frac{Q_B}{M \cdot b} = \frac{140}{1,55 \times 13} = 6,95.$$

$$\left( H + \frac{v_0^2}{2g} \right) = 3,64 \quad (h_2 < 0,7 \times 3,64).$$

Глубине этой соответствует скорость подхода:

$$v_0 = \sim \frac{140}{100 \times (3,64 + 0,2)} = 0,36; \quad \frac{v_0^2}{2g} = 0,007 \text{ м.}$$

Величина эта настолько мала, что мы ею пренебрегаем и считаем  $H = 3,64$ ; отметка верхнего уровня:

$$3,64 - 1 = +2,64.$$

Глубина воды на пороге

$$h = kH = 0,63 H = \sim 2,3 = \sim h_2.$$

6)  $Q = 250 \text{ м}^3/\text{сек}$ ;  $У. П. = 2,1$ . В этом случае уже вся вода не сможет пройти одним донным спуском; вода частью будет переливаться через плотину; расчет значительно усложняется. Называя  $y$  (фиг. 232) искомый напор на водосливе, имеем

$$Q_A = l_A q_{A_1} = 57 \times 2 \left( y + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{3/2}.$$

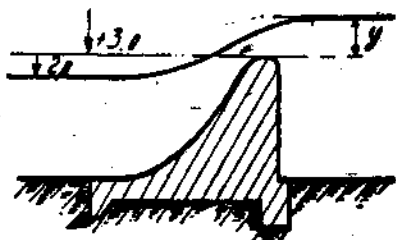
Расход через донный спуск

$$Q_B = l_B \cdot q_B$$

будет определяться различно, в зависимости от того

$$H = 4 + y \begin{cases} > \frac{h_2}{0,7} = \frac{3,1}{0,7} = 4,45, \\ < \frac{h_2}{0,7} = \frac{3,1}{0,7} = 4,45, \end{cases}$$

т. е.  $y \begin{cases} > \sim 0,45. \\ < \sim 0,45. \end{cases}$



Фиг. 232.

В первом случае ( $y > 0,45$ ) надлежит применять формулу свободного истечения (10), во втором случае — формулу затопленного водослива.

Вообще же, решение задачи сводится к тому, что необходимо подобрать (фиг. 233) такое  $y$ , при котором удовлетворялось бы соотношение:

$$Q_B + Q_A = 250 \text{ м}^3/\text{сек}.$$

Прежде всего посмотрим, будет ли

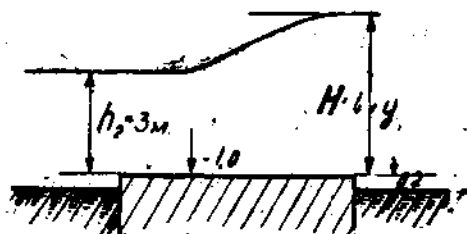
$$y > 0,45.$$

Принимая  $y = 0,45$  и определяя подходящую скорость:

$$v_0 = \frac{250}{100 \times 4,7} = 0,53 \text{ и } \frac{v_0^2}{2g} = \sim 0,015$$

имеем при  $y = 0,45$ :

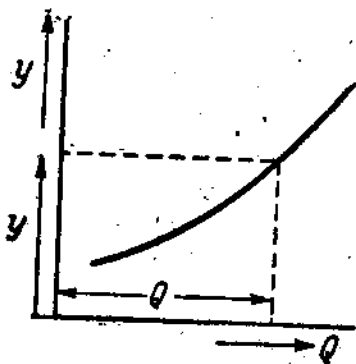
$$Q = 57 \times 2 \times 0,46^{3/2} + 13 \times 1,55 \times 4,46^{3/2} = 36 + 190 = 226 < 250.$$



Фиг. 233.

Очевидно,  $y > 0,45$ ; таким образом, водослив работает, как свободный водослив с широким порогом. Тем самым, для определения  $y$  имеем уравнение:

$$250 = 2 \times 57 \left( y + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{3/2} + 1,55 \times 13 \left( 4 + y + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{3/2}.$$



Фиг. 234.

Уравнение это можно решать подбором или графически (фиг. 234), строя зависимость  $Q$  от  $y$  и из кривой по требуемому расходу, находя соответствующее значение  $y$ .

В данном случае, подбором определяем

$$\left( y + \frac{v_0^2}{2g} \right) = 0,6.$$

Скорость подхода мала

$\left( \frac{v_0^2}{2g} \approx 0,01 \right)$ ; ею можно вполне пренебрегать.

Таким образом, паводок проходит при уровне

$$3 + 0,6 = 3,6 \text{ м}$$

выше межи.

### § 64. Пример III.

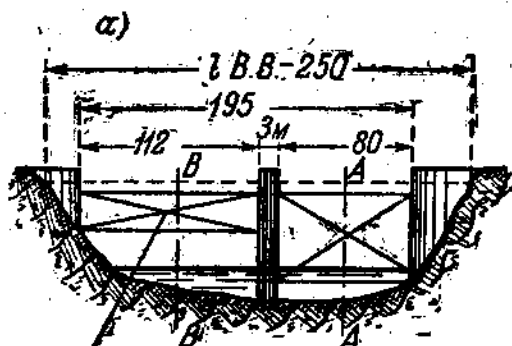
В качестве третьей задачи приведем расчеты, относящиеся к судоходной разборчатой плотине. В этой плотине (фиг. 235), общая длина рабочей части которой равна 195 м., имеется прежде всего судовой проход общим пролетом в 80 м. Пролет этот перекрывается фермами Поаре, в высокую воду складываемыми на дно флютбета. Разрез этой части изображен схематически на фиг. 235-с. Остальная часть плотины состоит из водоспуска В, с нижней глухой частью и пролетами по 12,5 м. В этой части устроен снцевой затвор.

Основное требование к подобным сооружениям, определяемое судоходными условиями, заключается в том,

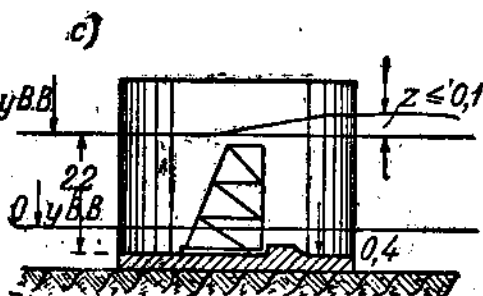
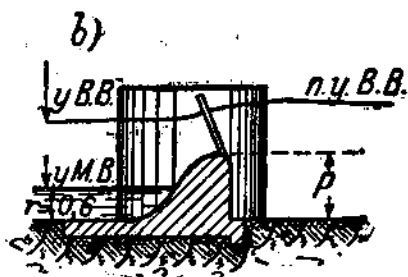
чтобы в высокую воду при наибольшем расчетном расходе  $Q_n$  (в нашем случае  $Q_{\max} = 338$  кубических м/сек.) при открытой плотине (опущенных фермах и вынутых спицах)—перепад на плотине, а также средняя скорость в судовом проходе не должны превосходить некоторых заданных пределов (в нашем случае наибольший допускаемый перепад  $z = 0,1$  м и скорость  $u_{\max}$  в судовом проходе  $2,5$  м/сек).

Так как размер судового хода и пролеты водоспусков заданы, то остается определить лишь отметку ребра массивов (В) водоспускной части (или его высоту  $p$ ). При этом дано, что ширина реки при У. В.  $B = +1,8$  м равна  $250$  м, а площадь живого сечения  $\sim 410$  кв. м.

а) Расчет начинаем с судового хода; при этом рассматриваем его, как водослив с широким порогом; коэффициент, ввиду устройства порога и находящихся на нем ферм и пр., берем  $\varphi = 0,85$ .



В прол. под 125 мтр = 100  
12 м. - б/ку.



Фиг. 225.

При предельном подпоре  $z = 0,1$  м скорость в судовом ходе из формулы (стр. 213) получится

$$v = 0,85 \sqrt{2g \left( z + \frac{v_0^2}{2g} \right)}.$$

Так как

$$v_0 = \frac{225}{410 + 250 \times 0,1} = \frac{225}{435} = 0,52 \text{ м/сек.}, \quad \frac{v_0^2}{2g} = 0,03,$$

то

$$v = 0,85 \sqrt{2g \times 0,13} = 1,41 \text{ м/сек.} < v_{\max}^1).$$

Таким образом, расход через судовой ход:

$$Q = 80 \times 2,2 \times 1,41 = 248 \text{ м}^3/\text{сек.}$$

б) Через водоспуск остается пропустить:

$$338 - 248 = 90 \text{ куб. м/сек.}$$

или на погонный метр водоспуска:

$$q_B = \frac{90}{100} = 0,90 \text{ куб. м/сек.}$$

Задача сводится теперь к тому, чтобы определить такую высоту глухой части водоспуска, при которой при заданном уровне проходит на единицу длины расход 0,90 куб. м/сек. Водослив затопленный; для расчета имеем формулу

$$q_A = M_0 \left( H + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{3/2} = M_0 \left( 1 + 0,2 \frac{h_1}{p} \right) \sqrt[3]{\frac{z}{H} \left( H + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{3/2}};$$

если считать

$$M_0 = 0,45 \sqrt{2g},$$

$$0,90 = 2,0 \left( 1 + 0,2 \frac{2,4 - p}{p} \right) \sqrt[3]{\frac{0,1}{2,5 - p} (2,5 - p + 0,03)^{3/2}}.$$

<sup>1)</sup> Если бы скорость вышла больше  $v_{\max}$ , то пришлось бы  $z$  принять ниже допустимого, а именно: определить его по величине  $v_{\max}$  из соотношения:

$$z = \frac{1}{\varphi^2} \left( \frac{v_{\max}^2 - v_0^2}{2g} \right)$$

при этом, чтобы не получить на самом деле излишне большой скорости,  $\varphi$  в этом случае надо было бы взять побольше, соответственно мягкому закругленному входу и малым потерям.

Задачу (фиг. 236) всего лучше решать подбором; задаемся  $p$  и в зависимости от него определяем остальные элементы, а также расход  $q$ .

Составляя таблицу и просчитывая элементы для  $p=1$  и  $p=1,5$ , видим, что  $\sigma$  и  $M$  почти не меняются; в виду этого, задаваясь  $M=0,71$ , определяем  $H$  из уравнения <sup>1)</sup>:

| $p$ | $h_1$ | $H$ | $\sigma$ | $M$  | $q$  |
|-----|-------|-----|----------|------|------|
| 1,0 | 1,4   | 1,5 | 0,51     | 0,69 | 1,30 |
| 1,5 | 0,9   | 1,0 | 0,52     | 0,70 | 0,73 |

$$(H+0,03)^{3/2} = \frac{0,61}{0,71} 0,86; H+0,03 = \sim 0,90;$$

$$H=0,87 \text{ м, } p=1,63.$$

Этому соответствует

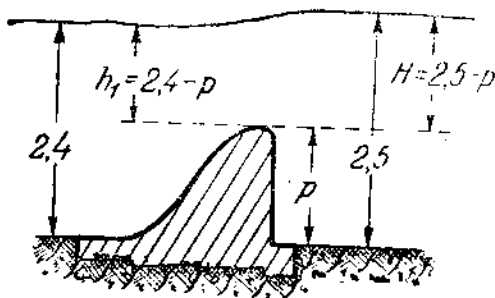
$$\sigma = \left[ 1,02 + 0,2 \frac{0,77}{1,63} \right] \sqrt[3]{\frac{0,10}{0,87}} = 0,53; M=0,715,$$

т. е. достаточно близко к принятому выше округлению.

Мы ограничиваемся приведенными примерами, так как в них мы постарались затронуть по возможности все вопросы, встречающиеся при расчете отверстий водопропускных сооружений. Как видим, весь

ма многие методы подсчета основаны на тех или иных аналогиях и, что всего хуже, нам приходится пользоваться (например, в донных спусках и т. д.) коэффициентами,

<sup>1)</sup> Само собою, задачу можно решать графически, строя зависимость  $q = \psi(p)$ .



Фиг. 236.

определенными для „подобного“ явления в иной обстановке. В настоящее время, однако, мы не видим других, более надежных, приемов расчета; рекомендуемые нами приемы обла- дают, по крайней мере, двумя достоинствами: а) простотой и б) наглядностью; последнюю мы понимаем в том смысле, что всюду совершенно ясен тип и физический характер явления, положенного в основу того или иного приема, подсчета, и тем самым без труда определяются как пред- посылка метода расчета, так и границы его применения.

Дальнейшего усовершенствования этой крайне важной области приложений гидравлики можно ждать преимуще- ственно от гидравлического эксперимента. Это дело, с од- ной стороны, соответствующих поставленных и оборудован- ных гидравлических лабораторий; с другой стороны — на- учно-технических наблюдений над существующими испол- ненными гидротехническими сооружениями, сопоставления действительного прохода через них воды с элементами предварительного расчета.

---

Отв. редактор А. А. Сабанеев

Техн. редактор М. Ф. Клименко

---

Корректор В. П. Мартыненко

Сдано в набор 9/II — 34 г.

Подписано к печати 17/VI — 34 г.

20 лст. листов.

Бумага Красногородской бум. ф-ки, 82 × 10 1/2 см.

Кол-во знаков в печ. листе 40 000.

Литератур. № 00057.

Тираж 10 200.

Заказ № 960.

Кубук № 32.

# СПИСОК

книг по строительному отделу, имеющих на ленинградском базисном складе издательства КУБУЧ.

| №№ по порядку    | Автор и название книги                                                                                                                                                                                            | Год издания | Цена |      |
|------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|------|------|
|                  |                                                                                                                                                                                                                   |             | Руб. | Коп. |
| Издания КУБУЧ'a. |                                                                                                                                                                                                                   |             |      |      |
| 1                | Булах, Г. Д. Статика сооружений. Вып. II, 180 стр. Расчет рам. . . . .                                                                                                                                            | 1934 г.     | 2    | 20   |
| 1-а              | Дома Коммуны. Материалы конкурсов—Всесоюзного межвузовского конкурса на студенческий дом коммуны; конкурса Ленинградсовета на дома коммуны для рабочих. . . . .                                                   | 1931 г.     | 3    | 50   |
| 2                | Гофман, В. П. Фабрично-заводская архитектура, ч. II, изд. 2-е. Санитарно-бытовые устройства. Транспорт, освещение, вентиляция и отопление, меры пожарной безопасности, крепление проводов и трансмиссий, 472 стр. | 1932 г.     | 7    | —    |
| 3                | Керстен, К. Железо-бетонные сооружения, т. III. Примеры расчета железобетон. конструкций, 243 стр. .                                                                                                              | 1933 г.     | 4    | 50   |
| 4                | Кушелев, Н. Ю. Досчато-гвоздевые пролетные строения, 68 стр. . .                                                                                                                                                  | 1933 г.     | 2    | 25   |
| 5                | Сборник. Студенческие работы выпуска 1929 г. Ленинградский Институт Комму. стр., 66 стр. . . . .                                                                                                                  | 1931 г.     | 7    | —    |
| Чужие издания.   |                                                                                                                                                                                                                   |             |      |      |
| 6                | Астафьев, А. Ф. проф. Строительный справочник по бетону и железобетону, 990 стр. . . . .                                                                                                                          | 1933 г.     | 15   | —    |

| №№ по<br>порядку | Автор и название книги                                                                                                    | Год<br>издания | Ц е н а |      |
|------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|---------|------|
|                  |                                                                                                                           |                | Руб.    | Коп. |
| 7                | Безухов, Н. И. Статически-неопределимые сплошные системы, примеры и упражнения по теории сооружений, 215 стр. . . . .     | 1932 г.        | 3       | 45   |
| 8                | Гениев, Н. Н. Опыты с центробежными железо-бетонными трубами. С предисл. инж. Королева. 59 стр. .                         | 1932 г.        | 2       | 25   |
| 9                | Деревянные трубы. Дерево вместо металла, вып. I, под ред. Крестовича, 75 стр. . . . .                                     | 1932 г.        | 6       | —    |
| 10               | То же, вып. II, 54 стр. . . . .                                                                                           | —              | 6       | —    |
| 11               | Кедров, В. С. Методы изображения, ч. I. Ортогональное проектирование, 138 стр. . . . .                                    | 1933 г.        | 5       | 75   |
| 12               | Нормы расхода времени на проектирование и исследование смет в промышленности и гражданском строительстве, 77 стр. . . . . | 1932 г.        | 1       | —    |
| 13               | Рывин, М. А. Строительные машины и их применение, 54 стр. . . .                                                           | 1933 г.        | —       | 75   |
| 14               | Сурин, А. А. Водоснабжение, ч. II. Определение расхода воды и насос. станции, 803 стр. . . . .                            | 1932 г.        | 15      | —    |
| 15               | Хазакский, И. Л. Расчет железобетонной дымовой трубы, 79 стр. . .                                                         | 1932 г.        | —       | —    |
| 16               | Черников, Я. Конструкция архитектурных и машинных форм, 40 стр.                                                           | 1931 г.        | 15      | —    |

Заказы и задатки направлять по адресу: Ленинград, внутри Гостинного Двора, помещение 52 — 54, Учебно-Техническому Издательству КУБУЧ  
Расчетный счет № 603 в Ленинградском Областном Коммунальном банке.