

656(035)

Т 38

ТЕХНИЧЕСКИЙ СПРАВОЧНИК

656(08) ТРАНСПОРТНИКА

Т 38

ДЛЯ ТЕХНИКОВ И ИНЖЕНЕРОВ

Д Е П

В ШЕСТИ ТОМАХ

Под общей редакцией
инж. П. И. Антонова,
проф. А. М. Богданова-Черрина
и проф. С. П. Сыромятникова

ТОМ ПЕРВЫЙ

1939, 5, 108
РЕСПУБЛИКАНСКАЯ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА БССР

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТРАНСПОРТНОЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ОГИЗ РСФСР

МОСКВА ★ 1932 ★ ЛЕНИНГРАД

ОТ РЕДАКЦИИ.

СССР победоносно осуществляет строительство социализма. Ленинская политика коммунистической партии обеспечила создание твердой базы для завершения социалистической реконструкции всего народного хозяйства. Транспорт (железнодорожный, водный, автодорожный, авио), как составная часть социалистического хозяйства, также находится в стадии огромного роста — проводит социалистическую реконструкцию существующей технической базы, настойчиво осуществляет механизацию и рационализацию процессов транспортного строительства.

Рост техники требует от работающих в области организации транспортного производства углубленных знаний всех сторон технико-производственных процессов.

Именно теперь, когда перестраивается вся техническая база транспорта на основе электрификации и новых социалистических форм труда — соревнования и ударничества, когда практически осуществляется величайший план создания новых путей сообщения, когда складываются новые организационные формы транспортного хозяйства и вместе с тем растут новые пролетарские кадры технических руководителей и организаторов советского транспорта — выпуск специальной справочной литературы является особо необходимым.

В технической литературе на русском языке, не считая «Транспортного Hütte», значительно устаревшего, нет такого справочного издания, в котором были бы собраны и систематизированы современные данные по технике всех видов транспорта, несмотря на то, что успехи транспортной техники вообще и масштабы его строительства за последние годы являются совершенно исключительными. Поэтому Гострансиздат, поддерживая инициативу студенческих общественных организаций и профессорско-преподавательского состава бывшего Московского института инженеров транспорта им. Ф. Э. Дзержинского (МИИТ'а), выпускает настоящий Технический Справочник Транспортника.

Редакционная коллегия и Гострансиздат, понимая всю важность создания справочника, стремились к тому, чтобы каждый инженер и техник мог получить в нем ответ на разнообразные технико-производственные вопросы, возникающие в процессе работы всех видов транспорта. В частности, Редакционная коллегия и Гострансиздат стремились возможно полн-

нее представить особенности работы нашего советского транспорта, осветить опыт применения новых строительных материалов, новых механизмов и переход к новым методам ведения работы в отдельных отраслях, а также учесть начатую и частично проделанную за последнее время работу в области технико-экономического нормирования и стандартизации.

Однако новизна дела, частые изменения норм, а также сложность подбора огромного авторского коллектива и т. д. — все это значительно затруднило работу и несколько задержало выпуск справочника в свет.

По своему характеру и теоретическому уровню материал, помещаемый в справочнике, вполне позволяет пользоваться им при эскизном проектировании, а в некоторых отдельных частях и при детальной проектировке, причем материал сгруппирован по признаку специализации.

Редакционная коллегия и Гострансиздат надеются, что данное издание принесет большую пользу не только технику и инженеру-производителю, занятым непосредственно на производстве, но даст также полезный материал проектировщикам и студентам при составлении эскизов.

В виду указанных выше трудностей создания настоящего справочника возможны ошибки как теоретического, так и технического порядка. Поэтому редколлегия и Гострансиздат просят читателей присылать свои замечания и указания по адресу: Москва, Центр, Новая пл., 14, Гострансиздат, которые будут учтены при выпуске последующих томов и возможных переизданий.

Редакционная коллегия.

Председатель: проф. С. П. Сыромятников; члены:
инж. П. И. Антонов и проф. А. М. Богданов-Черрин.
Зав. редакцией: К. В. Карабанов.

Редакторы разделов.

Анисимов Н. И., проф.; Антонов П. И., инж.; Безухов Н. И., проф.;
Белиловский В. К., инж.; Бизюкин Д. Д., проф.; Богданов-Черрин А. М.,
проф.; Горинов А. В., проф.; Иванов Н. Н., проф.; Евграфов Г. К.,
проф.; Калинин Г. А., проф.; Кубышкин И. И., проф.; Комаров, Н. С.,
проф.; Сильверстов В. В., инж.; Снитко Н. К., доцент; Сороко-Новиц-
кий В. И., проф.; Сыромятников С. П., проф.; Тауэр Л. М., инж.; Ястржемб-
ский А. С., проф.

Авторы.

Авраменко А. Э., инж.; Алексеев Г. С., инж.; Андреев Г. Н., инж.;
Анисимов Н. И., проф.; Анохин А. И., инж.; Антипин А. А., инж.;
Баскин Я. М., инж.; Безмолитвинов И. В., инж.; Безухов Н. И., проф.;
Беленький Н. П., инж.; Белиловский В. К., инж.; Бергман М. М., доцент;
Бизюкин Д. Д., проф.; Богданов-Черрин А. М., проф.; Божич П. К., инж.;
Болдаков Е. В., инж.; Бродовский А. Л., инж.; Бриллинг Е. Р., проф.;
Бродянский М. С., инж.; Бронников Д. В., инж.; Брун Р. З., инж.; Бу-
гаев И. Е., инж.; Важевский В. А., инж.; Ващенко Г. Е., инж.; Воробьев И. А.,
инж.; Воротников А. И., доцент; Высоцкий В. Н., проф.; Гишман Е. А.,
инж.; Грачев И. С., инж.; Гребенкин Ф. С., инж.; Горинов А. В., проф.;
Дорофеев Н. Н., инж.; Егерев К. Е., инж.; Ерченко А. П., инж.; За-
валин С. И., инж.; Земский Б. М., проф.; Зурабов Г. Г., инж.; Иванов И. С.,
инж.; Иванов Н. Н., проф.; Иванов Н. Ф., доцент; Иванов И. И., доцент;
Какурин С. Н., инж.; Качурин В. К., инж.; Кехли А. Я., инж.; Книгер В. А.,
инж.; Кнопф В. М., инж.; Комаров Н. С., проф.; Комаровский А. Н.,
инж.; Краевич К. Д., инж.; Коппин С. Н., инж.; Короткевич М. А., инж.;
Костин К. В., инж.; Крачковский В. П., инж.; Крыльцов Е. И., инж.; Ку-
бышкин И. И., проф.; Кудрявцев М. Н., инж.; Ларионов В. С., инж.; Лев-
кин М. М., инж.; Ленин И. М., инж.; Литвин Г. А., инж.; Лонткевич Е. Е.,
инж.; Лоренц В. Ф., доцент; Лютер К. А., инж.; Лялин Н. Б., инж.;
Ляхницкий В. Е., проф.; Малявинский А. М., инж.; Мацнев Н. И., инж.;
Микони В. В., инж.; Молодцов А. Г., инж.; Морозов П. П., инж.; Нау-
мов Д. Д., инж.; Некрасов В. К., инж.; Нетыкса В. М., инж.; Новицкий А. А.,
инж.; Овчинников М. В., проф.; Олисов Б. А., инж.; Орлов В. В., инж.;
Панкин А. В., проф.; Пассек А. Н., проф.; Паталеев А., инж.; Парамонов Н. Г.,
инж.; Перчихин И. Г., инж.; Петров М. А., проф.; Печковский Н. С., инж.;
Писарев Г. М., инж.; Писарев С. Г., инж.; Плетнев И. Я., инж.; Протодьяко-

нов М. М., инж.; Равич А. С., инж.; Радванский В. Д., инж.; Радин О. И., инж.; Ратнер И. В., инж.; Родер К. Э., проф.; Руженцев С. К., проф.; Рудский К. А., инж.; Рыбкин Ю. Е., инж.; Салтыков Н. И., инж.; Семенцов-Огиевский А. А., проф.; Симаков Ф. Ф., инж.; Сильверстов В. В., инж.; Снитко И. К., инж.; Снитко Н. К., доцент; Сибаров В. Д., инж.; Соколов Н. М., инж.; Софронов К. М., инж.; Сорокин Н. В., инж.; Стрельцов М. М., инж.; Струве Н. Н., инж.; Сыромятников С. П., проф.; Тауэр Л. М., инж.; Тер-Степанов Г. И., инж.; Тимонов В. Е., проф.; Тимонов В. П., инж.; Трубецкий В. А., инж.; Ульянов С. Г., инж.; Урбан И. В., инж.; Флиг С. И., инж.; Флоринский М. М., проф.; Халезов И. В., инж.; Хлебников Н. В., инж.; Холодков Н. А., инж.; Черномордик Г. И., инж.; Шамаев И. Н., инж.; Шилин А. П., инж.; Щелкунов М. А., инж.; Шукин С. М., инж.; Эпштейн А. Л., инж.; Яковлев В. И., инж.; Ястржембский А. С., проф.

Сокращения и символические обозначения.

Международные символы.

а) Единицы.

A—ампер.
 Ah—ампер-час.
 W—ватт.
 Wh—ватт-час.
 kW—киловатт.
 kWh—киловатт-час.
 V—вольт.
 mV—милливольт.
 VA—вольт-ампер.
 kVA—киловольт-ампер.
 mA—миллиампер.
 Ω—ом.
 MQ—мегаом.
 μΩ—микроом.
 C—кулон.
 VC—вольт-кулон.
 H—генри.
 J—джоуль.
 F—фарада.
 μF—микрофарада.
 Å—ангстрем.
 D—дина.
 Cal—калория большая.
 cal—» малая.
 HP—лошадиная сила.
 lm—люмен.
 lx—люкс.
 m—миург.

б) Величины.

t° — температура обыкновенная.
 T° — » абсолютная.
 t°_{кип.} — » кипения.
 t°_{пл.} — » плавления.
 t°_{заст.} — » застывания.
 t°_{отв.} — » отвердевания.
 t°_{крит.} — » критическая.
 atm.—атмосфера техническая.
 Atm—» барометрическая.
 Нвг—твердость по Бринелю.

Ж.-д. сокращения.

Т—тяга.
 П—путь.
 Э—эксплоатация.
 Д—движение.
 Ш—связь.
 М—материально-хоз. отдел.
 Тр-т—транспорт.
 Ж. д.—железная дорога.
 Ж.-д.—железнодорожный.
 Ваг.—вагон, вагоны.
 Ваг.-км—вагоно-километры.
 Ваг.-ч.—вагоно-часы.
 П/в—паровоз.
 П/в-ч.—паровозо-часы.
 П/в-км—паровозо-километр.
 Пасс.-км—пассажира-километры.
 П/х—пароход.
 Р-зд—разъезд.
 Ст.—станция.
 Пп.—пункты.

Основные сокращения.

км.—килоцикл.
 ц.—цикл.
 св.—свеча.
 об./м.—обороты в минуту.
 чв.-д.—человеко-дни.
 чв.-ч.—человеко-часы.
 долл.—доллары.
 мар.—марки.
 фн. ст., £—фунты стерлингов.
 фр.—франки.
 шилл.—шиллинги.
 млн.—миллионы.
 млрд.—миллиарды.
 ч.—часы.
 м., мин.—минуты.
 сек.—секунды.
 °Вé—градусы Боуэ.
 °Э.—градусы Энглера.

Градусы температурных шкал:

- °К.—Кельвина.
- °С.—Цельсия (100°-й).
- °Р.—Реомира.
- °Ф.—Фаренгейта.

абс. ед.—абсолютная единица.

ат. в.—атомный вес.

вкл.—включительно.

выс.—высота.

вып.—выпуск.

гл. обр.—главным образом.

гг.—годы, города.

д.—деревня, долгота.

д. б.—должно быть.

з.-европ.—западноевропейский.

з-д.—завод.

изд.—издание.

ин-т.—институт.

кпд.—коэффициент полезного действия.

коэф-т.—коэффициент.

к-рый—который.

к-та—кислота.

м.—мета (хим.).

м. б.—может быть.

м. г.—минувшего года.

мн-к.—многоугольник.

мол. в.—молекулярный вес.

м. пр.—между прочим.

нек-рый — некоторый.

о—орто (хим.).

об-во—общество.

о-в—остров.

л—пара (хим.).

пром-сть—промышленность.

проф.—профессор.

след. обр.—следующим образом.

С., Ю., В., З.—север, юг, восток, запад.

с.-з., ю.-в.—северо-западный, юго-восточный.

стр.—страницы.

т. к.—так как.

т. о.—таким образом.

тв.—твердость.

т-во—товарищество.

тем-ра—температура.

т. н.—так называемый.

тр-к—треугольник.

ту—технические условия.

тум—технические условия проектирования и сооруж. магистралей.

уд.—удельный.

уд. в.—удельный вес.

ур-ие—уравнение.

УП—Урочное положение.

ф-ия—функция.

ф-ка—фабрика.

ф-ла—формула.

хим. сост.—химический состав.

ц. т.—центр тяжести.

ш.—широта (географич.).

эдс—электродвижущая сила.

эфф.—эффективный.

эл-во—электричество.

эл.—электрический.

эл.—электро- (эл.-мотор—электро-мотор)

Содержание.

Таблицы мер и веса	1
Математика	
Таблицы	13
Элементарная математика	58
Арифметика	58
1. Степени и действия над ними	58
2. Корни и действия над ними	59
3. Логарифмы	59
4. Соединения	60
5. Определители	60
6. Прогрессии	62
7. Простые и сложные проценты	62
8. Числа действительные, мнимые и комплексные	62
Алгебра	65
1. Тождества	65
2. Пропорция и их решение	66
3. Аналитические и графические методы решения уравнений	66
Тригонометрия	78
1. Измерение углов и дуг	78
2. Тригонометрические ф-ии	78
3. Пределы изменения тригонометрических ф-ий при изменении угла от 0 до 360°	79
4. Периодичность тригонометрических ф-ий	79
5. Соотношения между ф-ми положительного и отрицательного углов	79
6. Приведения тригонометрических ф-ий любого угла к ф-иям острого угла	79
7. Значения тригонометрических ф-ий наиболее важных углов	80
8. Зависимость между ф-ми одного и того же аргумента	80
9. Ф-ии суммы и разности аргументов	80
10. Ф-ии кратных и половинных аргументов	80
11. Формулы приведения ф-ий к логарифмическому виду	81
12. Тригонометрические уравнения	81
13. Обратно-круговые ф-ии	82
Геометрические формы и их элементы	83
1. Треугольники	83
2. Четырехугольники	84
3. Правильные многоугольники	85
4. Круг и его элементы	86
5. Площади фигур произвольного вида	86
6. Поверхности и объемы	86
Сферическая тригонометрия	89
1. Прямоугольный треугольник	89
2. Косоугольный треугольник	89
Функции, их непрерывность и разрывы	90
1. Непрерывность ф-ий	90
2. Теорема Роля	90
3. Теорема о конечном приращении Лагранжа	90
4. Разрыв непрерывности	91
5. Прерывность и непрерывность элементарных ф-ий	91
Maxima et minima	91
1. Maxima et minima ф-ий одного переменного	91
2. Maxima et minima ф-ий двух переменных	92

Неопределенные формы	92
§ 1. Виды неопределенностей	92
§ 2. Неопределенности вида: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ и $0 \cdot \infty$	93
§ 3. Неопределенность вида $\infty - \infty$	93
§ 4. Неопределенность вида 0^0 , 1^{∞} , ∞^0	93
Гиперболические функции	94
1. Определения	94
2. Соотношения между гиперболическими ф-ми	95
3. Обратные ф-ии	95
4. Соотношения между круговыми и гиперболическими ф-ми	95
Дифференциальное исчисление	95
Производные и дифференциалы	95
1. Производные и дифференциалы ф-ии одного переменного	95
2. Производные и дифференциалы высших порядков	96
3. Частные производные и частные дифференциалы	96
4. Полная производная и полный дифференциал	97
5. Производные неявной ф-ии $F(x, y) = 0$	97
6. Дифференцирование ф-ии от ф-ии	97
7. Дифференцирование обратных ф-ий	97
8. Основные формулы дифференцирования	98
9. Дифференцирование гиперболических функций	98
10. Дифференцирование обратных гиперболических функций	98
Ряды	99
1. Ряды конечные и бесконечные	99
2. Конечные ряды	99
3. Бесконечные ряды	99
4. Ряды Тейлора и Маклорена для ф-ий одного переменного	100
5. Ряды Тейлора и Маклорена для ф-ий двух переменных	101
6. Разложение в ряд элементарных ф-ий	101
7. Ряды Фурье	102
Интегральное исчисление	103
Неопределенный интеграл	103
1. Понятие о неопределенном интеграле	103
2. Основные свойства неопределенного интеграла	103
3. Методы интегрирования	103
4. Формулы интегрирования	108
Определенный интеграл	114
1. Определенный интеграл и его геометрический смысл	114
2. Основные свойства и теоремы	115
3. Интегралы с бесконечными пределами	116
4. Интегралы ф-ий, обращающихся в бесконечность	116
5. Дифференцирование определенного интеграла по параметру	117
6. Приближенное вычисление определенного интеграла	117
7. Графическое интегрирование	118
Кратные интегралы	120
1. Двукратный интеграл	120
2. Трехкратный интеграл	121
Дифференциальные уравнения	121
1. Определения	121
2. Уравнения первого порядка и первой степени	122
3. Уравнения первого порядка высших степеней	124
4. Графическое интегрирование уравнений первого порядка	125
5. Особые решения дифференциальных уравнений	125
6. Уравнения второго порядка	126
7. Графическое интегрирование уравнений второго порядка	128
8. Линейные однородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами	128
9. Неоднородные линейные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами	129
10. Совокупные уравнения	130
11. Графическое интегрирование системы уравнений первого порядка с двумя известными функциями	132
12. Уравнения в частных производных	133

Прямая и кривая на плоскости	135
Метод координат на плоскости	135
1. Прямоугольная и полярная системы координат	135
2. Преобразование координат	136
Прямая на плоскости	136
1. Длина отрезка по данным координатам его концов	136
2. Деление отрезка прямой в данном отношении	136
3. Виды уравнений прямой	136
4. Угол между двумя прямыми	139
5. Условия параллельности и перпендикулярности прямых	139
6. Точка пересечения прямых	139
7. Расстояние от данной точки до данной прямой	139
8. Условия расположения трех точек на одной прямой	139
Общие методы изучения кривой	139
1. Критические точки кривой	139
2. Точка перегиба	139
3. Вогнутость кривой	139
4. Особые точки кривой	139
5. Асимптоты	140
6. Соприкосновение кривых	141
7. Дифференциал дуги	141
8. Радиус кривизны, Кривизна. Центр круга кривизны	141
9. Вычерчивание кривой	142
Касательная и нормаль	142
1. Уравнение касательной к кривой	142
2. Уравнение нормали к кривой	142
3. Длины касательной, подкасательной, нормали и поднормали в Декартовых и полярных координатах	143
Семейство кривых. Огибающие. Эволюты	144
1. Пучки прямых	144
2. Семейства кривых	144
3. Огибающая семейства кривых	144
4. Эволюта и эвольвента	144
Кривые второго порядка	145
1. Кривые второго порядка, заданные уравнением общего вида	145
2. Окружность	146
3. Эллипс	146
4. Гипербола	149
5. Парабола	153
Кривые, имеющие уравнение вида $y = c \cdot x^a$	155
1. Параболические кривые	155
2. Гиперболические кривые	156
3. Поллитропические кривые	157
Циклоидальные кривые	158
1. Циклоида	158
2. Эпикиклоида	159
3. Кардиоида	159
4. Гипоциклоида	160
5. Астроида	160
Синусоидальные кривые	160
1. Синусоидальные кривые	160
2. Влияние параметров a , k и b на характер кривой	160
3. Построение синусоиды $y = a \cdot \sin kx$	161
4. Построение синусоиды $y = a \cdot \sin (kx + b)$	161
5. Сложение синусоидальных величин	161
Спираль	162
1. Архимедова спираль	162
2. Гиперболическая спираль	162
3. Логарифмическая спираль	162
4. Параболическая спираль	163
Цепная линия	163
Прямая и кривая в пространстве	164
Метод координат в пространстве	164
1. Определение положения точки в пространстве	164
2. Формулы перехода от одной системы координат к другой	164
3. Преобразование координат	165

Прямая в пространстве	166
1. Длина d отрезка по данным координатам его концов	166
2. Деление отрезка прямой в данном отношении	166
3. Направляющие косинусы прямой	166
4. Виды уравнений прямой	166
5. Угол между двумя прямыми	168
6. Условия параллельности и перпендикулярности прямых	168
7. Условия пересечения двух прямых	168
8. Угол между прямой и плоскостью	168
9. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости	169
10. Условия совпадения прямой с плоскостью	169
Кривая в пространстве	169
1. Уравнения кривой в пространстве	169
2. Дифференциал дуги кривой	169
3. Уравнение касательной к кривой	169
4. Направляющие косинусы касательной	170
5. Уравнение нормальной плоскости	170
6. Уравнение соприкасающейся плоскости	170
7. Уравнение бинормали	170
8. Направляющие косинусы бинормали	170
9. Уравнения главной нормали	171
10. Направляющие косинусы главной нормали	171
11. Кривизна кривой	171
12. Кручение, или вторая кривизна	171
13. Формулы Серре-Френэ	172
14. Винтовая линия	172
Плоскости и поверхности	172
Плоскости	172
1. Виды уравнений плоскости и связи плоскостей	172
2. Угол между двумя плоскостями	173
3. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей	173
4. Расстояние от данной точки до данной плоскости	174
Поверхности	174
1. Уравнения поверхности	174
2. Уравнения касательной плоскости	174
3. Уравнения нормали	174
4. Направляющие косинусы нормали	174
5. Кривизна линий на поверхности	175
6. Кривизна поверхности	175
7. Канонические уравнения поверхностей второго порядка	176
8. Цилиндрические поверхности	177
9. Конические поверхности	177
10. Коникальные поверхности	177
11. Поверхности вращений	177
12. Развертывающиеся поверхности	178
Вычисление длин дуг, площадей и объемов	178
Вычисление длин дуг	178
1. Прямоугольные координаты	178
2. Полярные координаты	179
Вычисление площадей плоских фигур	179
1. Прямоугольные координаты (однократное интегрирование)	179
2. Прямоугольные координаты (двукратное интегрирование)	181
3. Полярные координаты (однократное интегрирование)	181
4. Полярные координаты (двукратное интегрирование)	182
Вычисление площадей и поверхностей	182
1. Вычисление площади поверхности тела вращения	182
2. Общий метод вычисления площади поверхности	183
Вычисления объемов	184
1. Объем тела вращения	184
2. Объем тела, площади поперечных сечений которого известны	184
3. Вычисление объема тела с помощью двукратного интегрирования	185
4. Вычисление объема с помощью трехкратного интегрирования	185
Преобразование переменного под знаком кратного интеграла	185
§ 1. Преобразования двукратного интеграла при переходе от прямоугольных координат к полярным	185

§ 2. Преобразование трехкратного интеграла при переходе от прямоугольных координат к полярным.	186
§ 3. Преобразование трехкратного интеграла при переходе от прямоугольных координат к цилиндрическим.	188

Теоретическая механика.

Статика	189
1. Силы, сходящиеся в одной точке в плоскости.	189
2. Силы, сходящиеся в одной точке в пространстве.	191
3. Момент силы.	192
4. Пара сил.	193
5. Силы, расположенные как угодно в плоскости.	194
6. Силы, расположенные как угодно в пространстве.	195
7. Параллельные силы.	198
8. Центр тяжести.	198
9. Центры тяжести однородных линий.	200
10. Центры тяжести площадей и поверхностей.	200
11. Центры тяжести объемов.	204
12. Моменты инерции и центробежные моменты масс.	205
13. Моменты инерции и центробежные моменты плоских фигур.	207
14. Моменты инерции линий, поверхностей и тел. А. Моменты инерции линий. Б. Моменты инерции площадей. В. Моменты инерции тел.	209
§ 15. Основы графостатики А. Графическое определение момента силы. Б. Графическое нахождение центров тяжести плоских фигур и определение статических моментов. В. Графическое определение моментов инерции. Г. Графическое определение усилий в стержнях статически определимых плоских ферм для неподвижной нагрузки.	215

Кинематика и динамика	221
16. Прямолинейное движение.	221
17. Криволинейное движение.	232
18. Поступательное движение.	240
19. Элементарная работа силы.	244
20. Мощность.	247
21. Вращение тела около неподвижной оси.	247
22. Определение реакций в подшипниках тела, вращающегося около неподвижной оси.	254
23. Живая сила твердого тела при вращении около неподвижной оси.	258
24. Физический маятник.	260
25. Плоскопараллельное движение твердого тела.	260
26. Вращения твердого тела около неподвижной точки.	267
27. Уравнения проекций количества движения.	268
28. Уравнения моментов количества движения.	270
29. Силовая функция.	271
30. Сложение движений, скоростей и ускорений.	274
31. Начало возможных перемещений (начало Лагранжа).	277
32. Силы инерции. Начало Д'Аламбера.	279
33. Динамический прием исследования относительного движения (теорема Корнолиса).	280
34. Уравнения Лагранжа 2-го рода.	281
35. Удар.	282
36. Гироскопический эффект.	285
37. Трение.	288

Гидро-аэродинамика.

Кинематика жидкого тела	293
Динамика жидкого тела	303
Вихревое движение	310
Сопротивление тел в потенциальном потоке.	316
Гидродинамика вязкой жидкости.	319

Гидравлика.

Физические свойства реальных жидкостей	323

Гидростатика	323

1. Свойства гидростатического давления.	324
2. Гидростатическое давление в данной точке для жидкости, находящейся в равновесии.	325

3. Гидростатический напор	326
4. Равновесие тяжелой жидкости в сообщающихся сосудах	326
5. Равновесие жидкости во вращающихся сосудах	326
6. Поверхность уровня в движущейся поступательно жидкости	327
7. Давление на плоскую стенку	327
8. Давление на криволинейную поверхность	330
9. Полное давление на криволинейную стенку	330
10. Закон Архимеда	332
11. Равновесие плавающих тел	332
Гидродинамика	333
1. Уравнения Л. Эйлера движения жидкости	333
2. Уравнения линий тока	334
Гидравлика	335
1. Уравнение Бернулли для элементарной струйки реальной жидкости	335
2. Одномерное неустановившееся движение	336
3. Применение уравнения Бернулли для целого потока жидкости	336
4. Движение равномерное и неравномерное	337
5. Основное уравнение равномерного движения	337
6. Ламинарное и турбулентное движение	338
7. Напорные трубопроводы	339
8. Простой водопровод	354
9. Параллельное соединение трубопроводов	356
10. Разветвленная система	356
11. Гидравлический удар в трубопроводах	358
Равномерное движение в открытых руслах и безнапорных трубопроводах	359
1. Каналы	359
2. Гидравлические элементы канала	363
3. Определение сечения трапециoidalного канала по данным Q и i	364
4. Метод проф. Бахметьева расчета канала	364
5. Составные профили	368
6. Расчет закрытых каналов	367
7. Аналитический расчет канализационных труб	367
Истечение жидкостей через отверстия	369
1. Отверстие в тонкой стенке с острыми кромками	369
2. Неполное сжатие струи	370
3. Несовершенное сжатие	371
4. Большие отверстия	371
5. Расчетные формулы	372
Истечение жидкости через насадки	372
1. Выводы	372
2. Вытекание через затопленные насадки	372
3. Истечение из отверстий с насадкой при переменном напоре	375
4. Наполнение и опорожнение шлюзовых камер	375
Водосливы	376
1. Классификация водосливов по типу стенок	376
2. Водослив в тонкой стенке	377
3. Затопленный водослив с тонкой стенкой	379
4. Водосливы практических профилей по классификации проф. Н. Н. Павловского	379
5. Построение профиля водосливных плотин	382
6. Приближенн. способ очертаия струи для предварительн. проектов	383
7. Водослив с широким порогом	383
8. Затопленный водослив с широким порогом	384
9. Порядок расчета водосливных плотин	385
Неравномерное движение	386
1. Уравнение неравномерного движения в конечном виде	387
2. Дифференциальное уравнение неравномерного движения	387
3. Форма свободной поверхности потоков при прямом уклоне дна	389
4. Показательный закон для модуля расхода проф. Бахметьева	389
5. Уравнение неравномерного движения для потока с прямым уклоном дна	390
Прыжок воды	392
Подпор в мостах	394
Теплота и термодинамика	
Теплота	403
1. Общие тепловые свойства тел	403
2. Расширение тел от нагревания	404

3. Удельная теплота	406
4. Изменение агрегатного состояния тела от теплоты	407
5. Растворение газов	409
Термодинамика	410
Общие свойства и основные законы	410
1. Определение состояния газа	410
2. Уравнение состояния газа. Характеристическое уравнение	411
3. Графический метод исследования процессов. Система координат $P-V$	411
4. Газовые смеси	411
5. Теплоемкость газов	413
6. Первый закон термодинамики	416
7. Второй закон термодинамики	417
8. Уравнение тепла	417
9. Энтропия. Тепловые, или энтропийные, диаграммы	418
10. Экономический вид силовой установки	419
Основные термодинамические процессы	419
11. Процесс при постоянном объеме	419
12. Процесс при постоянном давлении	420
13. Процесс при постоянной температуре	421
14. Адиабатический процесс	422
15. Политропический процесс	423
Круговые процессы, или циклы	425
16. Основные определения	425
17. Теоретические циклы двигателей внутреннего сгорания	426
18. Цикл Отто	426
19. Цикл Дизеля	428
20. Цикл Сабата	428
21. Компрессор	429
Водяные пары	433
22. Сухой насыщенный пар	433
23. Насыщенный влажный пар	434
24. Перегретый пар	435
25. Предельные кривые и диаграмма $T-S$ водяного пара	447
Основные термодинамические процессы пара	449
26. Процесс постоянного объема	449
27. Процесс при постоянном давлении	449
28. Процесс изотермический	450
29. Адиабатический процесс	450
30. Диаграмма $i-s$	451
Идеальный цикл паровой машины	452
31. Цикл Ранкина	453
32. Цикл Мейера	453
33. Трансформирование в паровой машине тепловой энергии в механическую	453
34. Мятие пара	454
35. Истечение газов и паров	455
36. Расширяющееся сопло Лаваля	457
37. Потеря давления пара в паропроводах	458
Основы электротехники	
1. Условные обозначения, единицы измерения	459
2. Основные законы постоянного тока	459
3. Электрическое сопротивление и законы соединения сопротивлений	460
4. Материалы, чаще всего употребляемые в качестве проводников электрического тока	462
5. Материалы, чаще всего употребляемые в качестве изоляторов тока	465
6. Источники электрической энергии	468
7. Схема соединения источников тока	475
8. Магнетизм и электромагнетизм	476
9. Электромагнитная индукция	478
10. Переменный ток	478
11. Потери на гистерезис и вихревые токи Фуко	488
12. Генераторы постоянного тока	489
13. Генераторы постоянного тока специального назначения	492
14. Моторы постоянного тока	496
15. Генераторы трехфазного переменного тока	509
16. Асинхронные двигатели (моторы) трехфазного переменного тока	511

17. Преобразование переменного тока в постоянный	525
18. Коллекторные моторы переменного тока	528
19. Трансформаторы	530
Геодезия.	
Сведение из теории ошибок измерения	533
1. Формулы средних квадратических ошибок	533
Измерение линий	535
2. Измерение линий мерной лентой	538
3. Точность измерения стальной лентой	538
Построение прямых углов на местности	539
4. Проверка простого зенита	539
4а. Проверка оптического зенита	540
Ориентирование линий	540
5. Зависимость между азимутами: геодезическим, астрономическим, магнитным и дирекционным углом	540
6. Вычисления дирекционных углов (азимутов)	541
7. Определение азимуты угла по дирекционным углам (азимутам) его сторон	541
8. Связь между азимутом α и румбом ρ линии	541
9. Геодезический способ определения истинного азимута	542
10. Проверки буссоли с компасами	544
11. Астрономический способ определения азимута	545
12. Определение азимута по зенитным расстояниям солнца	545
Горизонтальная съемка	556
13. Полевые проверки повторительного теодолита	556
14. Полная проверка и установка повторительного теодолита	557
15. Особенности проверок упрощенных систем теодолитов	561
16. Правила измерения горизонтальных углов повторительным теодолитом	562
17. Приведение угла к его вершине	564
18. Обработка результатов угломерной съемки одиночного полигона	564
19. Вычисление площади полигона по координатам его вершин	569
20. Планиметр	570
21. Точность определения площадей планиметром	572
22. Привязка к пунктам триангуметрической сети	573
23. Разбивка закруглений	576
Геометрическое нивелирование	583
24. Общий осмотр и исследование нивелира	584
25. Полевые проверки нивелиров	587
26. Формулы допустимых погрешностей в нивелирных ходах	594
27. Журнал нивелирования	596
Тахеометрия	598
28. Проверка простого тахеометра	598
29. Дальномерные рейки	599
30. Тахеометр-автомат Гаймера-Феннеля	600
31. Обработка тахеометрического журнала	602
32. Тахеометрические формулы	605
33. Способы вычислений по тахеометрическим формулам	606
34. Определение уклонов и углов наклона прямых линий, концы которых лежат на горизонталях	608
Мануальная съемка	609
35. Проверки манулы	610
36. Проверки кипрегеля	610
Барометрическое нивелирование	613
37. Определение давлений атмосферы по показаниям ртутного барометра	615
38. Перевод показаний анероида А на показания ртутного барометра В	616
39. Зависимость между температурой кипения воды и атмосферным давлением	616
40. Обработка журналов барометрического нивелирования	617
41. Определение абсолютных высот с помощью барометрического нивелирования	622
Приложение. Диаграмма теплосодержания и энтропии для водяного пара.	

ТАБЛИЦЫ МЕР И ВЕСА

Таблица мер и веса различных стран.

Государство	Меры длины	Меры поверхности	Меры объемов	Меры веса
Великобритания (метрические меры длины и веса допускаются)	1 дюйм. (Inch) — 2,539964 см 1 фут — 12 дюйм. — 0,30479449 м 1 ярд — 3 фут. — 0,9143835 м 1 Fathom по 2 ярда, по 3 футам, по 12 дюйм. — 1,828767 м 1 Chain по 100 Links, по 1,92 Inches — 20,12 м 1 statute mile по 8 Furlongs, по 40 Ruten, по 2,76 Fathoms, по 2 ярда — 1,609344 км 1 (statute) mile — 1760 ярд. — англ. миля — 5000 фут. — 1,523986 км 1 Nautical mile (клубовый) по 6080 фут. — 1,85316 км 8 torseals: 12 ярд. — 11 м	1 кв. дюйм — 6,45160 см² 1 кв. фут — 0,0929030 м² 1 кв. ярд — 0,8361 м² 1 акр — 160 кв. фут. — 4 940 кв. ярд — 40,4671 а 1 Yard of Land — 30 Acres 1 Hide of Land — 100 Acres — 40,467 а 1 Mile of Land — 640 Acres — 2,59 км²	1 куб. дюйм — 16,38716 см³ 1 куб. фут — 0,02831685 м³ 1 куб. ярд — 0,7645 м³ Reg-Ton — 100 куб. фут. — 2,832 м³ 1 Imperial Gallon — 277,2738 англ. куб. дюйм (— 10 lbs воды) — 4,5435 л 1 старая (Winchester) галлон в 231 англ. куб. дюйм — 1/4 Imp. Gall. — 3,785 203 л 1 Last по 10 Quarters, по 8 Bushels (бушелей), по 4 Peks, по 2 Gallons — 29,078924 а. 1 Barrel, по 2 Kilderkin, по 2 Firkin — 1,633 а	1 фунт avoir dupoids (lbs) по 16 Ounces (унц.) по 16 Drams — 0,45359265 кг — 7000 Troygrains 1 Troyfund по 12 Ounces, по 20 Pennyweights (дв) — 5,780 Grains — 0,37324195 кг 1 Ton (long ton) — 20 Hundred (cent-) weight, по 4 Quarters по 28 фунт. (— 2 240 lbs) — 1016,0475 кг 1 судовая тонна (short ton, Канада, Соед. Шт.) — 2000 фунт. (lbs) — 907,1853 кг
Германия	1 метр (m) — 1,00000301 Метр des Archives — 443,29727 париж. линий по 100 сантиметрам (см), по 10 миллиметрам (мм) 1 километр (km) — 1000 м 1 град. экват. — 111,3064 км 1 град. мерид. — 111,111 км 1 нем. миля — 7,5 км 1 географ. миля — 7,4204385 км (16 — 1 град. экватора) 1 нем. (и фран.) морская миля — 1,852 км (60 — 1 град. меридиана)	1 кв. метр (м²) по 10 000 квадр. сантим. (см²), по 100 кв. миллиметров (мм²) 1 гектар (га) по 100 ар (а), по 100 м² 1 квадрат. километр (км²) — 100 га	1 куб. метр (м³) по 1000 литров, по 1000 кубич. сантим. (см³), по 1000 кубич. миллим. (мм³) 1 гектолитр (га) — 100 л 1 шеддель — 0,5 а 1 Oxbott — 2,20 а 1 Stuz klass — 12 а 1 Тонне (морская мера) — 2,12 м³	1 килограмм (кг) (= 0,99999842 килограмм прототипа) по 1000 грамм. (г), по 1000 миллиграмм. (мг) 1 тонна (т) прежده по 20 центнеров — 1000 кг 1 двойной центнер (дз) — 100 кг Schiffelast по 2 тонны — 1 — 2 000 кг

Государство	Меры длины	Меры поверхности	Меры объемов	Меры веса
Дания, Норвегия	1 Rute по 1 Alen, по 2 фут. = 3,138535 м. 1 миля по 2 000 Ruten прус. = 7,532484 км В Норвегии 1 миля по 6 000 Faden = 11,295 км	Датские: 1 квадрат. Rute по 100 кв. фут. = 9,86 м² 1 Tonne Land по 560 кв. Ruten = 0,55163 га	1 Oxhoft по 16 Ohm, по 2 Eimer, по 2 Anker, по 30 Quart, по 64 куб. дюйма = 2,06105 га 1 Scheffel по 16 Metzen, по 3 Quart = 0,54961 га	Датские: 1 Kommt-Last по 5 200 фунтов = 2 600 кг Норвежские: 1 центнер = 49,81 кг
Соединенные Штаты Сев. Ам.	Английские, а также: 1 statute mile = 1,60932 км 1 naut. m. = 1,85496 км 1 league = 3 naut. m. или = 3 statute m.	Английские: 1 кв. миля (Sektion) = 2,5899 км² 1 Township по 36 Sektion = 93,236 км²	Староанглийские: 1 (вин.) Gallon = 3,7852 л 1 сух. Gallon (для сыпучих тел) 268,803 куб. дюйм. = 4,4046 л 1 Bushel = 8 сух. Gallon 1 насыпн. Gallon = 1,25 сух. Gallon 1 Barrel мерсина по 42 Gallon = 1,5898 га 1 Barrel вина по 31 Gallon = 1,173 га	Английские: 1 Hundred-weight = 45,30 кг 1 Ton (short ton) по 2 000 lbs = 907,1853 кг 1 Long ton по 2 240 lbs = 1 016,0475 кг
Уругвай	Метрические, раньше: 1 Vara = 0,809 м 1 Legua = 5,154 км	Метрические, раньше: 1 кв. Legua = 26,6 км²	Метрические, раньше: 1 Pipa = 4,55424 га 1 Fanega = 1,37272 га 1 Gallon = 3,805 л	Метрические, раньше: 1 Quintal по 4 Arrobas, по 25 Libras = 45,94 кг 1 Tonnelada = 918,8 кг
Франция	Метрические, раньше: 1 париж. фут = 0,324839 м 1 м = 443,286 пар. лин.	Метрические	Метрические. 1 Setre = 1 000 л	Метрические

Таблица мер и веса различных стран (продолжение).

Государство	Меры длины	Меры поверхности	Меры объема	Меры веса
Швеция	Метрические, раньше: 1 Fatt, по 3 Aler, по 2 фута, по 10 дюйм. = 1,7814 м 1 миля = 10,6686 км	Метрические, раньше: 1 Tunmland по 2 Spanland, по 16 Karpland, по 3 1/2 Karpland = 56 000 кв. фут. = 0,493641 га	Метрические, раньше: 1 Ahn по 6 куб. фут., по 10 Kannen = 1,570313 л 1 Tonne = 1,6489 га	Метрические, раньше: 1 Centner по 100 Skarund, по 100 Ort = 42,50758 кг 1 суд. фут. = 170,028 кг 1 суд. ласт. = 5760 фунт. = 2 450 кг
Швейцария	Метрические, раньше: 1 Route по 10 фут., по 10 дюйм. = 3,000 м	Метрические, раньше: 1 кв. клафтер = 3,24 м² 1 Tschart = 0,36 га	Метрические, раньше: 1 Saum по 4 Eimer, по 25 Masg = 1,5 га	Метрические, раньше: 1 Centner = 100 фунт. = 50 кг
Южная Амер.*	Метрич., старокастильские: 1 Vara = 3 Paks = Pal-тов = 0,8359 м 1 Legua по 3 Millas = 5,572 км	Метрич. и старокастильские: В Венецуэле: 1 Fanegada = 0,6987 га	Метрич. и старокастильские: 1 Cahiz по 12 Fanegas, по 12 Celemenes = 6,66 га 1 Cantara по 8 Acumbres, по 4 Cuartillas = 16,328 л 1 Moyu = 2,5826 га 1 Pipa = 4,3570 га 1 Bota = 4,8411 га	Метрич. и старокастильские: 1 Quintal по 4 Arrobas, по 25 Libras, по 2 Marco, по 8 Oncas = 46,0093 кг 1 Tonnelada = 20 Quintal = 920 кг
Китай	1 Yin по 10 Tsch (Covid, фут.), по 10 Tsin (Pant), по 16 Fan = 3,73 м 1 Yin по договору с Англичей = 3,581 м 1 Li (миля) по 180 сажен., по 10 землемер. Covid = 0,5765 км	1 Mau = 631 м² 1 King = 0,2453 га Шелковая материя — по весу	1 Tsch по 10 Sching = 1,031 га 1 Sai по 2 Hwo, по 10 Sching = 1,2243 га (сыпучие и жидкие тела большую частью по весу)	1 Pikul по 100 Katties, по 16 таелей (Liang) = 60,453 кг 1 Таель по 10 Mhas или Tsin по 10 Condrin, или Fan по 10 Käsich (Sabeck) = 37,783 г (для серебра = 37,573 г)
Япония	Метрические и англ.: 1 Shaku Kane по 10 Sun, по 10 Bu = 0,303 м 1 Ri по 36 Tschd, по 60 Ken, по 6 Shaku = 3,927 км	Метрические и англ.: 1 кв. Tschd = 0,99174 га	Метрические и английские: 1 Sho по 10 Oo, по 10 Sai, по 10 Satsu = 1,803907 л 1 Koku по 10 To, по 10 Sho = 1,803907 га	Метрические и английские: 1 Kin по 160 Monme, по 10 Fun, по 10 Rin = 0,600 кг 1 Kwan по 1 000 Monme = 3,7565 кг

* Данные эти относятся к Боливии, Чили, Колумбии, Коста-Рике, Эквадору, Гватемале, Гондурасу, Никарагуа, Перу, С.-Сальвадору и Венецуэле.

Абсолютная система механических единиц (МТС).

Общесоюзный стандарт (ОСТ 189). Утвержден Советом труда и обороны 28 дек. г. как рекомендуемый.

Основные единицы: метр, тонна-масса, секунда.

Единицы силы. Стен—сила, сообщающая телу с массой в 1 т ускорение в 1 м/сек².

1 стен (сн) = 100 млн. дин ≈ 102 кг (сила);

1 килостен (кcn) = 1000 сн; 1 гектостен (гcn) = 100 сн; 1 декастен (дcn) = 10 сн;

1 децистен (дсн) = 0,1 сн; 1 сантистен (ссн) = 0,01 сн; 1 миллистен (мсн) = 0,001 сн.

Единицы работы и энергии. Килоджоуль—работа, производимая силой в 1 стен перемещением точки приложения этой силы на 1 метр по ее направлению.

1 килоджоуль (кдж) = 1 киловатт-сек ≈ 102 ккал;

1 мегаджоуль (мдж) = 1000 кдж; 1 джоуль (дж) = 0,001 кдж $\approx 0,102$ ккал.

Единицы мощности. Киловатт—мощность двигателя, производящего равномерно течение 1 ск работу, равную 1 килоджоулю.

1 киловатт (квт) = 1,36 лш. с. ≈ 102 ккал/сек; 1 мегаватт (мвт) = 1000 квт;

1 ватт (вт) = 0,001 квт.

Единицы напряжения или давления. Пьеза—давление, которое, будучи равномерно распределено по площади в 1 м², производит полное усилие в 1 стен.

1 пьеза (пз) = 10 000 дин/см² $\approx 0,0102$ кг/см²;

1 гектопьеза (гпз) = 100 пз $\approx 1,02$ кг/см²;

1 сантипьеза (спз) = 0,01 пз $\approx 0,000102$ кг/см².

Обратные соотношения (с точностью до 0,1%):

1 кг (сила) $\approx 0,0098$ стена $\approx 0,98$ сантистена;

1 кг/сек²/м (масса) $\approx 0,0098$ т = 9,8 кг (масса);

1 ккал (работа) $\approx 0,0098$ килодж. = 9,8 джоуля;

1 ккал-сек (мощность) $\approx 0,0098$ киловатта = 9,8 ватта;

1 лш. с. (мощность) $\approx 0,736$ киловатта = 736 ваттам;

1 кг/см² (напряж.) ≈ 98 пьезам = 0,98 гектопьезы.

Точные соотношения между техническими и абсолютными механическими единицами:

1 кг (сила) = 0,00980665 стена; 1 ккал = 0,00980665 килоджоуля;

1 ккал-сек = 0,00980665 киловатта;

1 кг/см² = 98,0665 пьезы.

Сравнительная таблица соотношений объемов и веса воды

(в наиболее употребительных мерах емкости).

	Литры и кг	Галл. амер.	Галл. англ.	Ярды	Барель
1 литр	1	0,264	0,220	0,0013	0,0063
1 ведро	12,2994	3,249	2,705	0,0161	0,078
1 фунт	28,3168	7,479	6,224	0,037	0,178
1 галлон амер.	3,785	1	0,833	0,0049	0,0238
1 " англ.	4,546	1,2	1	0,0059	0,0285
1 ярд	764,5	201,96	168,15	1	4,808
1 барель	158,98	42	35	0,2079	1
1 пд. воды	16,380	4,332	3,607	0,0215	0,1031
1 саж.	9 712,68	2 559,7	2 130,5	12,70	60,94

Таблицы перевода мер.

А. Меры длины.

1. Таблица перевода 1/64 доли дюйма до 1 дюйма в мм.

Дюймы	мм	Дюймы	мм	Дюймы	мм	Дюймы	мм
1/64	0,40	17/64	6,75	63/64	13,10	49/64	19,45
1/32	0,79	9/32	7,14	17/32	13,49	25/32	19,84
3/64	1,19	10/64	7,54	22/64	13,89	31/64	20,24
1/16	1,59	5/16	7,94	9/16	14,29	28/16	20,64
3/64	1,98	11/64	8,33	37/64	14,68	34/64	21,03
4/64	2,38	12/64	8,73	19/64	15,08	37/64	21,43
5/64	2,78	13/64	9,13	20/64	15,48	38/64	21,83
1/8	3,18	14/64	9,53	21/64	15,88	39/64	22,23
3/16	3,57	15/64	9,92	22/64	16,27	40/64	22,62
5/16	3,97	16/64	10,32	23/64	16,67	41/64	23,02
11/64	4,37	17/64	10,72	24/64	17,07	42/64	23,42
3/8	4,76	18/64	11,11	25/64	17,46	43/64	23,81
13/64	5,16	19/64	11,51	26/64	17,86	44/64	24,21
7/16	5,56	20/64	11,91	27/64	18,26	45/64	24,61
15/64	5,95	21/64	12,30	28/64	18,65	46/64	25,00
1/4	6,35	22/64	12,70	29/64	19,05	47/64	25,40

2. Таблица перевода мер

Дюймы	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$
0	0,000	1,588	3,175	4,763	6,350	7,938	9,525	11,111
1	25,400	26,988	28,575	30,163	31,750	33,338	34,925	36,511
2	50,800	53,988	57,175	60,363	63,550	66,738	70,025	73,211
3	76,200	77,788	79,375	80,963	82,550	84,138	85,725	87,311
4	101,600	103,188	104,775	106,363	107,950	109,538	111,125	112,711
5	127,000	128,588	130,175	131,763	133,350	134,938	136,525	138,111
6	152,400	153,988	155,575	157,163	158,750	160,338	161,925	163,511
7	177,800	179,388	180,975	182,563	184,150	185,738	187,325	188,911
8	203,200	204,788	206,375	207,963	209,550	211,138	212,725	214,311
9	228,600	230,188	231,775	233,363	234,950	236,538	238,125	239,711
10	254,000	255,588	257,175	258,763	260,350	261,938	263,525	265,111
11	279,400	280,988	282,575	284,163	285,750	287,338	288,925	290,511
12	304,800	306,388	307,975	309,563	311,150	312,738	314,325	315,911
13	330,200	331,788	333,375	334,963	336,550	338,138	339,725	341,311
14	355,600	357,188	358,775	360,363	361,950	363,538	365,125	366,711
15	381,000	382,588	384,175	385,763	387,350	388,938	390,525	392,111
16	406,400	407,988	409,575	411,163	412,750	414,338	415,925	417,511
17	431,800	433,388	434,975	436,563	438,150	439,738	441,325	442,911
18	457,200	458,788	460,375	461,963	463,550	465,138	466,725	468,311
19	482,600	484,188	485,775	487,363	488,950	490,538	492,125	493,711
20	508,000	509,588	511,175	512,763	514,350	515,938	517,525	519,111
21	533,400	534,988	536,575	538,163	539,750	541,338	542,925	544,511
22	558,800	560,388	561,975	563,563	565,150	566,738	568,325	569,911
23	584,200	585,788	587,375	588,963	590,550	592,138	593,725	595,311
24	609,600	611,188	612,775	614,363	615,950	617,538	619,125	620,711
25	635,000	636,588	638,175	639,763	641,350	642,938	644,525	646,111
26	660,400	661,988	663,575	665,163	666,750	668,338	669,925	671,511
27	685,800	687,388	688,975	690,563	692,150	693,738	695,325	696,911
28	711,200	712,788	714,375	715,963	717,550	719,138	720,725	722,311
29	736,600	738,188	739,775	741,363	742,950	744,538	746,125	747,711
30	762,000	763,588	765,175	766,763	768,350	769,938	771,525	773,111
31	787,400	788,988	790,575	792,163	793,750	795,338	796,925	798,511
32	812,800	814,388	815,975	817,563	819,150	820,738	822,325	823,911
33	838,200	839,788	841,375	842,963	844,550	846,138	847,725	849,311
34	863,600	865,188	866,775	868,363	869,950	871,538	873,125	874,711
35	889,000	890,588	892,175	893,763	895,350	896,938	898,525	900,111
36	914,400	915,988	917,575	919,163	920,750	922,338	923,925	925,511
37	939,800	941,388	942,975	944,563	946,150	947,738	949,325	950,911
38	965,200	966,788	968,375	969,963	971,550	973,138	974,725	976,311
39	990,600	992,188	993,775	995,363	996,950	998,538	1000,125	1001,711
40	1016,000	1017,588	1019,175	1020,763	1022,350	1023,938	1025,525	1027,111
41	1041,400	1042,988	1044,575	1046,163	1047,750	1049,338	1050,925	1052,511
42	1066,800	1068,388	1069,975	1071,563	1073,150	1074,738	1076,325	1077,911
43	1092,200	1093,788	1095,375	1096,963	1098,550	1100,138	1101,725	1103,311
44	1117,600	1119,188	1120,775	1122,363	1123,950	1125,538	1127,125	1128,711
45	1143,000	1144,588	1146,175	1147,763	1149,350	1150,938	1152,525	1154,111
46	1168,400	1169,988	1171,575	1173,163	1174,750	1176,338	1177,925	1179,511
47	1193,800	1195,388	1196,975	1198,563	1200,150	1201,738	1203,325	1204,911
48	1219,200	1220,788	1222,375	1223,963	1225,550	1227,138	1228,725	1230,311
49	1244,600	1246,188	1247,775	1249,363	1250,950	1252,538	1254,125	1255,711
50	1270,000	1271,588	1273,175	1274,763	1276,350	1277,938	1279,525	1281,111

ДЮЙМОВ В МИЛЛИМЕТРЫ.

$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$	Дюймы
12,700	14,288	15,875	17,463	19,050	20,638	22,225	23,813	0
38,100	39,688	41,275	42,863	44,450	46,038	47,625	49,213	1
63,500	65,088	66,675	68,263	69,850	71,438	73,025	74,613	2
88,900	90,488	92,075	93,663	95,250	96,838	98,425	100,013	3
114,300	115,888	117,475	119,063	120,650	122,238	123,825	125,413	4
139,700	141,288	142,875	144,463	146,050	147,638	149,225	150,813	5
165,100	166,688	168,275	169,863	171,450	173,038	174,625	176,213	6
190,500	192,088	193,675	195,263	196,850	198,438	200,025	201,613	7
215,900	217,488	219,075	220,663	222,250	223,838	225,425	227,013	8
241,300	242,888	244,475	246,063	247,650	249,238	250,825	252,413	9
266,700	268,288	269,875	271,463	273,050	274,638	276,225	277,813	10
292,100	293,688	295,275	296,863	298,450	300,038	301,625	303,213	11
317,500	319,088	320,675	322,263	323,850	325,438	327,025	328,613	12
342,900	344,488	346,075	347,663	349,250	350,838	352,425	354,013	13
368,300	369,888	371,475	373,063	374,650	376,238	377,825	379,413	14
393,700	395,288	396,875	398,463	400,050	401,638	403,225	404,813	15
419,100	420,688	422,275	423,863	425,450	427,038	428,625	430,213	16
444,500	446,088	447,675	449,263	450,850	452,438	454,025	455,613	17
469,900	471,488	473,075	474,663	476,250	477,838	479,425	481,013	18
495,300	496,888	498,475	500,063	501,650	503,238	504,825	506,413	19
520,700	522,288	523,875	525,463	527,050	528,638	530,225	531,813	20
546,100	547,688	549,275	550,863	552,450	554,038	555,625	557,213	21
571,500	573,088	574,675	576,263	577,850	579,438	581,025	582,613	22
596,900	598,488	600,075	601,663	603,250	604,838	606,425	608,013	23
622,300	623,888	625,475	627,063	628,650	630,238	631,825	633,413	24
647,700	649,288	650,875	652,463	654,050	655,638	657,225	658,813	25
673,100	674,688	676,275	677,863	679,450	681,038	682,625	684,213	26
698,500	700,088	701,675	703,263	704,850	706,438	708,025	709,613	27
723,900	725,488	727,075	728,663	730,250	731,838	733,425	735,013	28
749,300	750,888	752,475	754,063	755,650	757,238	758,825	760,413	29
774,700	776,288	777,875	779,463	781,050	782,638	784,225	785,813	30
800,100	801,688	803,275	804,863	806,450	808,038	809,625	811,213	31
825,500	827,088	828,675	830,263	831,850	833,438	835,025	836,613	32
850,900	852,488	854,075	855,663	857,250	858,838	860,425	862,013	33
876,300	877,888	879,475	881,063	882,650	884,238	885,825	887,413	34
901,700	903,288	904,875	906,463	908,050	909,638	911,225	912,813	35
927,100	928,688	930,275	931,863	933,450	935,038	936,625	938,213	36
952,500	954,088	955,675	957,263	958,850	960,438	962,025	963,613	37
977,900	979,488	981,075	982,663	984,250	985,838	987,425	989,013	38
1003,300	1004,888	1006,475	1008,063	1009,650	1011,238	1012,825	1014,413	39
1028,700	1030,288	1031,875	1033,463	1035,050	1036,638	1038,225	1039,813	40
1054,100	1055,688	1057,275	1058,863	1060,450	1062,038	1063,625	1065,213	41
1079,500	1081,088	1082,675	1084,263	1085,850	1087,438	1089,025	1090,613	42
1104,900	1106,488	1108,075	1109,663	1111,250	1112,838	1114,425	1116,013	43
1130,300	1131,888	1133,475	1135,063	1136,650	1138,238	1139,825	1141,413	44
1155,700	1157,288	1158,875	1160,463	1162,050	1163,638	1165,225	1166,813	45
1181,100	1182,688	1184,275	1185,863	1187,450	1189,038	1190,625	1192,213	46
1206,500	1208,088	1209,675	1211,263	1212,850	1214,438	1216,025	1217,613	47
1231,900	1233,488	1235,075	1236,663	1238,250	1239,838	1241,425	1243,013	48
1257,300	1258,888	1260,475	1262,063	1263,650	1265,238	1266,825	1268,413	49
1282,700	1284,288	1285,875	1287,463	1289,050	1290,638	1292,225	1293,813	50

3. Таблица перевода англ. футов и дюймов в миллиметры.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300	301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380	381	382	383	384	385	386	387	388	389	390	391	392	393	394	395	396	397	398	399	400	401	402	403	404	405	406	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416	417	418	419	420	421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436	437	438	439	440	441	442	443	444	445	446	447	448	449	450	451	452	453	454	455	456	457	458	459	460	461	462	463	464	465	466	467	468	469	470	471	472	473	474	475	476	477	478	479	480	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500	501	502	503	504	505	506	507	508	509	510	511	512	513	514	515	516	517	518	519	520	521	522	523	524	525	526	527	528	529	530	531	532	533	534	535	536	537	538	539	540	541	542	543	544	545	546	547	548	549	550	551	552	553	554	555	556	557	558	559	560	561	562	563	564	565	566	567	568	569	570	571	572	573	574	575	576	577	578	579	580	581	582	583	584	585	586	587	588	589	590	591	592	593	594	595	596	597	598	599	600	601	602	603	604	605	606	607	608	609	610	611	612	613	614	615	616	617	618	619	620	621	622	623	624	625	626	627	628	629	630	631	632	633	634	635	636	637	638	639	640	641	642	643	644	645	646	647	648	649	650	651	652	653	654	655	656	657	658	659	660	661	662	663	664	665	666	667	668	669	670	671	672	673	674	675	676	677	678	679	680	681	682	683	684	685	686	687	688	689	690	691	692	693	694	695	696	697	698	699	700	701	702	703	704	705	706	707	708	709	710	711	712	713	714	715	716	717	718	719	720	721	722	723	724	725	726	727	728	729	730	731	732	733	734	735	736	737	738	739	740	741	742	743	744	745	746	747	748	749	750	751	752	753	754	755	756	757	758	759	760	761	762	763	764	765	766	767	768	769	770	771	772	773	774	775	776	777	778	779	780	781	782	783	784	785	786	787	788	789	790	791	792	793	794	795	796	797	798	799	800	801	802	803	804	805	806	807	808	809	810	811	812	813	814	815	816	817	818	819	820	821	822	823	824	825	826	827	828	829	830	831	832	833	834	835	836	837	838	839	840	841	842	843	844	845	846	847	848	849	850	851	852	853	854	855	856	857	858	859	860	861	862	863	864	865	866	867	868	869	870	871	872	873	874	875	876	877	878	879	880	881	882	883	884	885	886	887	888	889	890	891	892	893	894	895	896	897	898	899	900	901	902	903	904	905	906	907	908	909	910	911	912	913	914	915	916	917	918	919	920	921	922	923	924	925	926	927	928	929	930	931	932	933	934	935	936	937	938	939	940	941	942	943	944	945	946	947	948	949	950	951	952	953	954	955	956	957	958	959	960	961	962	963	964	965	966	967	968	969	970	971	972	973	974	975	976	977	978	979	980	981	982	983	984	985	986	987	988	989	990	991	992	993	994	995	996	997	998	999	1000

4. Таблица перевода морских узлов (N) в км/ч и км/ч (N) в узлы.

1 мор. узел — 1,852 км/ч.

$$1 \text{ км/ч} = 0.5399 \text{ мор. вата.}$$

N	км/час	Узлы	N	км/час	Узлы	N	км/час	Узлы	N	км/час	Узлы
1	1,852	0,5399	26	48,152	14,037	51	94,452	27,535	76	140,752	41,032
2	3,704	1,0798	27	50,004	14,577	52	96,304	28,075	77	142,604	41,572
3	5,556	1,6197	28	51,856	15,117	53	98,156	28,615	78	144,456	42,112
4	7,408	2,1596	29	53,708	15,657	54	100,008	29,155	79	146,308	42,652
5	9,260	2,6996	30	55,560	16,197	55	101,860	29,695	80	148,160	43,192
6	11,112	3,2394	31	57,412	16,737	56	103,712	30,234	81	150,012	43,731
7	12,964	3,7793	32	59,264	17,277	57	105,564	30,774	82	151,864	44,272
8	14,816	4,3192	33	61,116	17,817	58	107,416	31,314	83	152,716	44,812
9	16,668	4,8591	34	62,968	18,356	59	109,268	31,854	84	155,568	46,352
10	18,520	5,3990	35	64,820	18,896	60	111,120	32,394	85	157,420	46,892
11	20,372	5,939	36	66,672	19,436	61	112,972	32,934	86	159,272	46,431
12	22,224	6,479	37	68,524	19,976	62	114,824	33,474	87	161,124	46,971
13	24,076	7,019	38	70,376	20,516	63	116,676	34,014	88	162,976	47,511
14	25,928	7,559	39	72,228	21,056	64	118,528	34,554	89	164,828	48,051
15	27,780	8,099	40	74,080	21,596	65	120,380	35,093	90	166,680	48,591
16	29,632	8,638	41	75,932	22,136	66	122,232	35,633	91	168,532	49,131
17	31,484	9,178	42	77,784	22,676	67	124,084	36,173	92	170,384	49,671
18	33,336	9,718	43	79,636	23,216	68	125,936	36,713	93	172,236	50,211
19	35,188	10,258	44	81,488	23,756	69	127,788	37,253	94	174,088	50,751
20	37,040	10,798	45	83,340	24,296	70	129,640	37,793	95	176,940	51,290
21	38,892	11,338	46	85,192	24,835	71	131,492	38,333	96	177,792	51,830
22	40,744	11,878	47	87,044	25,375	72	133,344	38,872	97	179,644	52,370
23	42,596	12,418	48	88,896	25,915	73	135,196	39,412	98	181,496	52,910
24	44,448	12,958	49	90,748	26,455	74	137,048	39,953	99	183,348	53,450
25	46,300	13,497	50	92,600	26,995	75	138,900	40,492	100	185,200	53,990

Б. Меры квадратные.

Кв. дюймы (N) в кв. миллиметры и кв. сантиметры (N) в кв. дюймы.

1 кв. дм. = 645,160 мм².

1 см² = 0,1550003 кв. дм.

N	Кв. дм.	мм ²	N	Кв. дм.	мм ²	N	Кв. дм.	мм ²	N	Кв. дм.	мм ²
1	0,15500	645,16	26	4,03001	16774,16	51	7,90502	32903,16	76	11,78002	49032,16
2	0,31000	1290,32	27	4,18501	17419,32	52	8,06002	33548,32	77	11,93502	49677,32
3	0,46500	1935,48	28	4,34001	18064,48	53	8,21502	34193,48	78	12,09002	50322,48
4	0,62000	2580,64	29	4,49501	18709,64	54	8,37002	34838,64	79	12,24502	50967,64
5	0,77500	3225,80	30	4,65001	19354,80	55	8,52502	35483,80	80	12,40005	51612,80
6	0,93000	3870,96	31	4,80501	19999,96	56	8,68002	36128,96	81	12,55502	52257,96
7	1,08500	4516,12	32	4,96001	20645,12	57	8,83502	36774,12	82	12,71002	52903,12
8	1,24000	5161,28	33	5,11501	21290,28	58	8,99002	37419,28	83	12,86502	53548,28
9	1,39500	5806,44	34	5,27001	21935,44	59	9,14502	38064,44	84	13,02003	54193,44
10	1,55000	6451,60	35	5,42501	22580,60	60	9,30002	38709,60	85	13,17503	54838,60
11	1,70500	7096,76	36	5,58001	23225,76	61	9,45502	39354,76	86	13,33003	55483,76
12	1,86000	7741,92	37	5,73501	23870,92	62	9,61002	39999,92	87	13,48503	56128,92
13	2,01500	8387,08	38	5,89001	24516,08	63	9,76502	40645,08	88	13,64003	56774,08
14	2,17000	9032,24	39	6,04501	25161,24	64	9,92002	41290,24	89	13,79503	57419,24
15	2,32500	9577,40	40	6,20001	25806,40	65	10,07502	41935,40	90	13,95003	58064,40
16	2,48000	10322,56	41	6,35501	26451,56	66	10,23072	42580,56	91	14,10503	58709,56
17	2,64501	10967,72	42	6,51001	27096,72	67	10,38502	43225,72	92	14,26003	59354,72
18	2,79001	11612,88	43	6,66501	27741,88	68	10,54002	43870,88	93	14,41503	59999,88
19	2,94501	12258,04	44	6,82001	28387,04	69	10,69502	44516,04	94	14,57003	60645,04
20	3,10001	12903,20	45	6,97501	29032,20	70	10,85002	45161,20	95	14,72503	61290,20
21	3,25501	13548,36	46	7,13001	29677,36	71	11,00502	45806,36	96	14,88003	61935,36
22	3,41001	14193,52	47	7,28501	30332,52	72	11,16002	46451,52	97	15,03503	62580,52
23	3,56501	14838,68	48	7,44001	30967,68	73	11,31502	47096,68	98	15,19003	63225,68
24	3,72001	15483,84	49	7,59501	31612,84	74	11,47002	47741,84	99	15,34503	63870,84
25	3,87501	16129,00	50	7,75002	32258,00	75	11,62502	48387,00	100	15,50003	64516,00

В. Меры кубические.

Куб. дюймы (N) в куб. сантиметры и куб. сантиметры (N) в куб. дюймы.

1 куб. дм. = 1000 куб. см.

1 см³ = 0,001 куб. дм.

N	куб. дм.	куб. см.	N	куб. дм.	куб. см.	N	куб. дм.	куб. см.	N	куб. дм.	куб. см.
1	0,001	1	26	0,01500	15	51	0,00013	13	76	0,00008	8
2	0,002	2	27	0,01600	16	52	0,00014	14	77	0,00009	9
3	0,003	3	28	0,01700	17	53	0,00015	15	78	0,00010	10
4	0,004	4	29	0,01800	18	54	0,00016	16	79	0,00011	11
5	0,005	5	30	0,01900	19	55	0,00017	17	80	0,00012	12
6	0,006	6	31	0,02000	20	56	0,00018	18	81	0,00013	13
7	0,007	7	32	0,02100	21	57	0,00019	19	82	0,00014	14
8	0,008	8	33	0,02200	22	58	0,00020	20	83	0,00015	15
9	0,009	9	34	0,02300	23	59	0,00021	21	84	0,00016	16
10	0,010	10	35	0,02400	24	60	0,00022	22	85	0,00017	17
11	0,011	11	36	0,02500	25	61	0,00023	23	86	0,00018	18
12	0,012	12	37	0,02600	26	62	0,00024	24	87	0,00019	19
13	0,013	13	38	0,02700	27	63	0,00025	25	88	0,00020	20
14	0,014	14	39	0,02800	28	64	0,00026	26	89	0,00021	21
15	0,015	15	40	0,02900	29	65	0,00027	27	90	0,00022	22
16	0,016	16	41	0,03000	30	66	0,00028	28	91	0,00023	23
17	0,017	17	42	0,03100	31	67	0,00029	29	92	0,00024	24
18	0,018	18	43	0,03200	32	68	0,00030	30	93	0,00025	25
19	0,019	19	44	0,03300	33	69	0,00031	31	94	0,00026	26
20	0,020	20	45	0,03400	34	70	0,00032	32	95	0,00027	27
21	0,021	21	46	0,03500	35	71	0,00033	33	96	0,00028	28
22	0,022	22	47	0,03600	36	72	0,00034	34	97	0,00029	29
23	0,023	23	48	0,03700	37	73	0,00035	35	98	0,00030	30
24	0,024	24	49	0,03800	38	74	0,00036	36	99	0,00031	31
25	0,025	25	50	0,03900	39	75	0,00037	37	100	0,00032	32

Переводы веса.

1. Таблица перевода килограммов.

Килограммы	Англ. фунты lbs	Центнеры английск. cwt	Центнеры американ. cwt	Килограммы	Англ. фунты lbs	Центнеры английск. cwt	Центнеры американ. cwt
1	2,204	0,019685	0,02204	51	112,404	1,004	1,124
2	4,408	0,039370	0,04409	52	114,608	1,023	1,146
3	6,612	0,059055	0,06614	53	116,812	1,043	1,168
4	8,816	0,078740	0,08818	54	119,016	1,062	1,190
5	11,020	0,098425	0,11023	55	121,220	1,082	1,212
6	13,224	0,118110	0,13228	56	123,424	1,102	1,234
7	15,428	0,137795	0,15432	57	125,628	1,121	1,256
8	17,632	0,157480	0,17437	58	127,832	1,141	1,278
9	19,836	0,177165	0,19841	59	130,036	1,160	1,300
10	22,040	0,19685	0,2204	60	132,240	1,180	1,322
11	24,244	0,216	0,242	61	134,444	1,200	1,345
12	26,448	0,236	0,264	62	136,648	1,219	1,367
13	28,652	0,256	0,286	63	138,852	1,239	1,389
14	30,856	0,276	0,308	64	141,056	1,258	1,411
15	33,060	0,295	0,330	65	143,260	1,278	1,433
16	35,264	0,314	0,353	66	145,464	1,298	1,456
17	37,468	0,334	0,375	67	147,668	1,317	1,477
18	39,672	0,354	0,397	68	149,872	1,337	1,499
19	41,876	0,374	0,419	69	152,076	1,358	1,521
20	44,080	0,393	0,441	70	154,280	1,377	1,543
21	46,284	0,412	0,463	71	156,484	1,398	1,565
22	48,488	0,432	0,485	72	158,688	1,418	1,587
23	50,692	0,451	0,507	73	160,892	1,438	1,609
24	52,896	0,472	0,529	74	163,096	1,458	1,631
25	55,100	0,492	0,551	75	165,300	1,478	1,653
26	57,304	0,512	0,573	76	167,504	1,498	1,675
27	59,508	0,531	0,595	77	169,708	1,518	1,697
28	61,712	0,550	0,617	78	171,912	1,538	1,719
29	63,916	0,570	0,639	79	174,116	1,558	1,741
30	66,120	0,590	0,661	80	176,320	1,578	1,763
31	68,324	0,609	0,683	81	178,524	1,598	1,785
32	70,528	0,629	0,705	82	180,728	1,618	1,808
33	72,732	0,649	0,727	83	182,932	1,638	1,830
34	74,936	0,668	0,749	84	185,136	1,658	1,852
35	77,140	0,689	0,771	85	187,340	1,678	1,874
36	79,344	0,709	0,793	86	189,544	1,698	1,896
37	81,548	0,728	0,815	87	191,748	1,718	1,918
38	83,752	0,748	0,838	88	193,952	1,738	1,940
39	85,956	0,767	0,860	89	196,156	1,758	1,962
40	88,160	0,787	0,882	90	198,360	1,778	1,984
41	90,364	0,807	0,904	91	200,564	1,799	2,006
42	92,568	0,826	0,926	92	202,768	1,819	2,028
43	94,772	0,846	0,948	93	204,972	1,839	2,050
44	96,976	0,866	0,970	94	207,176	1,859	2,072
45	99,180	0,886	0,992	95	209,380	1,879	2,094
46	101,384	0,906	1,014	96	211,584	1,899	2,116
47	103,588	0,924	1,036	97	213,788	1,909	2,138
48	105,792	0,944	1,058	98	215,992	1,928	2,160
49	107,996	0,963	1,080	99	218,196	1,948	2,182
50	110,200	0,984	1,102	100	220,400	1,968	2,204

2. Таблица перевода английских фунтов Гв.

Англ. фунты	Килограммы	Центнеры англ. свт.	Центнеры амер. свт.	Англ. фунты	Килограммы	Центнеры англ. свт.	Центнеры амер. свт.	Англ. фунты	Килограммы	Центнеры англ. свт.	Центнеры амер. свт.	Англ. фунты	Килограммы	Центнеры англ. свт.	Центнеры амер. свт.
1	0,453	0,008928	0,01	26	11,78	0,2321	0,26	51	23,10	0,4553	0,51	76	34,43	0,6784	0,76
2	0,906	0,017856	0,02	27	12,23	0,2411	0,27	52	23,55	0,4642	0,52	77	34,88	0,6875	0,77
3	1,359	0,026784	0,03	28	12,68	0,2500	0,28	53	24,01	0,4732	0,53	78	35,34	0,6966	0,78
4	1,812	0,035712	0,04	29	13,14	0,2589	0,29	54	24,46	0,4821	0,54	79	35,79	0,7057	0,79
5	2,265	0,044640	0,05	30	13,59	0,2678	0,30	55	24,91	0,4910	0,55	80	36,24	0,7142	0,80
6	2,718	0,053568	0,06	31	14,04	0,2767	0,31	56	25,37	0,4999	0,56	81	36,69	0,7231	0,81
7	3,171	0,062496	0,07	32	14,50	0,2856	0,32	57	25,82	0,5089	0,57	82	37,15	0,7320	0,82
8	3,624	0,071424	0,08	33	14,95	0,2945	0,33	58	26,28	0,5178	0,58	83	37,60	0,7410	0,83
9	4,077	0,080352	0,09	34	15,40	0,3035	0,34	59	26,73	0,5267	0,59	84	38,05	0,7499	0,84
10	4,53	0,0893	0,10	35	15,85	0,3124	0,35	60	27,18	0,5356	0,60	85	38,50	0,7588	0,85
11	4,98	0,0982	0,11	36	16,31	0,3213	0,36	61	27,63	0,5445	0,61	86	38,95	0,7678	0,86
12	5,43	0,1071	0,12	37	16,76	0,3302	0,37	62	28,09	0,5535	0,62	87	39,41	0,7767	0,87
13	5,88	0,1161	0,13	38	17,21	0,3392	0,38	63	28,53	0,5624	0,63	88	39,86	0,7856	0,88
14	6,34	0,1250	0,14	39	17,67	0,3481	0,39	64	28,99	0,5713	0,64	89	40,32	0,7946	0,89
15	6,79	0,1339	0,15	40	18,12	0,3571	0,40	65	29,45	0,5802	0,65	90	40,77	0,8035	0,90
16	7,25	0,1428	0,16	41	18,57	0,3660	0,41	66	29,90	0,5892	0,66	91	41,22	0,8124	0,91
17	7,70	0,1518	0,17	42	19,03	0,3749	0,42	67	30,35	0,5981	0,67	92	41,68	0,8213	0,92
18	8,15	0,1607	0,18	43	19,48	0,3839	0,43	68	30,81	0,6071	0,68	93	42,13	0,8303	0,93
19	8,60	0,1696	0,19	44	19,93	0,3928	0,44	69	31,26	0,6159	0,69	94	42,58	0,8392	0,94
20	9,06	0,1786	0,20	45	20,38	0,4017	0,45	70	31,71	0,6249	0,70	95	43,03	0,8481	0,95
21	9,51	0,1875	0,21	46	20,83	0,4106	0,46	71	32,17	0,6338	0,71	96	43,49	0,8570	0,96
22	9,97	0,1964	0,22	47	21,28	0,4196	0,47	72	32,62	0,6428	0,72	97	43,94	0,8660	0,97
23	10,42	0,2054	0,23	48	21,74	0,4285	0,48	73	33,07	0,6516	0,73	98	44,39	0,8749	0,98
24	10,87	0,2143	0,24	49	22,20	0,4374	0,49	74	33,52	0,6606	0,74	99	44,85	0,8839	0,99
25	11,32	0,2232	0,25	50	22,65	0,4464	0,50	75	33,98	0,6696	0,75	100	45,30	0,8928	1,00

3. Таблица перевода килогр. на кв. сантиметр, в англ. тоннах на кв. дюйм и обратно.

Кг/см²	т/дм.²	Кг/см²	т/дм.²	Кг/см²	т/дм.²	т/дм.²	Кг/см²	т/дм.²	Кг/см²
100	0,635	2 300	14,6	4 600	29,2	1	157,5	26	4 095
200	1,27	2 400	15,2	4 700	29,8	2	315,0	27	4 252
300	1,90	2 500	15,9	4 800	30,5	3	472,5	28	4 410
400	2,54	2 600	16,5	4 900	31,1	4	630,0	29	4 567
500	3,175	2 700	17,1	5 000	31,75	5	787,5	30	4 725
600	3,81	2 800	17,8			6	945,0	31	4 882
700	4,44	2 900	18,4	5 100	32,4	7	1 102,5	32	5 040
750	4,75	3 000	19,0	5 200	33,0	8	1 260,0	33	5 197
800	5,08			5 300	33,7	9	1 417,5	34	5 355
900	5,71	3 100	19,7	5 400	34,3	10	1 575,0	35	5 512
1 000	6,35	3 200	20,3	5 500	34,9	11	1 732,5	36	5 670
		3 300	21,0	5 600	35,6	12	1 890	37	5 827
1 100	6,98	3 400	21,6	5 700	36,2	13	2 047	38	5 985
1 200	7,62	3 500	22,2	5 800	36,8	14	2 205	39	6 142
1 300	8,25	3 600	22,9	5 900	37,5	15	2 362	40	6 300
1 400	8,88	3 700	23,5	6 000	38,1	16	2 520	41	6 457
1 500	9,52	3 800	24,1	6 100	38,8	17	2 677	42	6 615
1 600	10,16	3 900	24,8	7 000	41,3	18	2 835	43	6 772
1 700	10,79	4 000	25,4	7 500	44,4	19	2 992	44	6 930
1 800	11,4			8 000	47,6	20	3 150	45	7 087
1 900	12,1	4 100	26,0	8 500	50,8	21	3 307	46	7 245
2 000	12,7	4 200	26,7	9 000	54,0	22	3 465	47	7 402
		4 300	27,3		57,1	23	3 622	48	7 560
2 100	13,3	4 400	27,9	9 500	60,4	24	3 780	49	7 717
2 200	14,0	4 500	28,6	10 000	63,6	25	3 937	50	7 875

Мера работы.

Лошадиные силы (N) в киловаттах и киловатты (N) в лошадиных силах.

N	квт	ЛС	N	квт	ЛС	N	квт	ЛС	N	квт	ЛС
1	0,74	1,36	26	19,14	35,33	51	37,54	69,29	76	55,94	103,26
2	1,47	2,72	27	19,87	36,68	52	38,27	70,65	77	56,67	104,62
3	2,21	4,08	28	20,61	38,04	53	39,01	72,01	78	57,41	105,98
4	2,94	5,43	29	21,34	39,40	54	39,74	73,37	79	58,14	107,34
5	3,68	6,79	30	22,08	40,76	55	40,48	74,73	80	58,88	108,70
6	4,42	8,15	31	22,82	42,12	56	41,22	76,09	81	59,62	110,05
7	5,15	9,51	32	23,56	43,48	57	41,95	77,45	82	60,35	111,41
8	5,89	10,87	33	24,29	44,84	58	42,69	78,80	83	61,09	112,77
9	6,62	12,23	34	25,02	46,20	59	43,42	80,16	84	61,82	114,13
10	7,36	13,59	35	25,76	47,55	60	44,16	81,52	85	62,56	115,49
11	8,10	14,95	36	26,50	48,91	61	44,90	82,88	86	63,30	116,85
12	8,83	16,30	37	27,23	50,27	62	45,63	84,24	87	64,03	118,21
13	9,57	17,66	38	27,97	51,63	63	46,37	85,60	88	64,77	119,57
14	10,30	19,02	39	28,70	52,99	64	47,10	86,96	89	65,50	120,92
15	11,04	20,38	40	29,44	54,35	65	47,84	88,32	90	66,24	122,28
16	11,78	21,74	41	30,18	55,71	66	48,58	89,67	91	66,98	123,64
17	12,51	23,10	42	30,91	57,07	67	49,31	91,03	92	67,71	125,00
18	13,25	24,46	43	31,65	58,42	68	50,05	92,39	93	68,45	126,36
19	13,98	25,82	44	32,38	59,78	69	50,78	93,75	94	69,18	127,72
20	14,72	27,17	45	33,12	61,14	70	51,52	95,11	95	69,92	129,08
21	15,47	28,53	46	33,86	62,50	71	52,26	96,47	96	70,66	130,44
22	16,19	29,89	47	34,59	63,86	72	52,99	97,83	97	71,39	131,79
23	16,93	31,25	48	35,33	65,22	73	53,73	99,19	98	72,13	133,15
24	17,66	32,61	49	36,06	66,58	74	54,46	100,54	99	72,86	134,51
25	18,40	33,97	50	36,80	67,94	75	55,20	101,90	100	73,60	135,87

Таблицы.

1. К таблицам на стр. 14—33. 1. Величины квадратов и кубов чисел даны в таблице так, что для квадратов цифры поставлены парами, а для кубов разбиты на группы по три цифры. Напр.: $511^2 = 26\ 11\ 21$; $511^3 = 133\ 432\ 831$.

Такое расположение цифр позволяет находить также квадраты и кубы как целых чисел с десятичной дробью, так и десятичных дробей. Одной цифре десятичной дроби, после запятой соответствует для квадрата и куба этой дроби одна группа в две и соответственно три цифры. Напр.: $51,1^2 = 2\ 611,21$; $5,11^3 = 133\ 432\ 831$.

2. Чтобы получить квадраты и кубы чисел, в таблице не помещенных, делим эти числа на наименьшего делителя, для которого частное имеется в таблице; затем находим квадрат или куб частного в таблице и умножаем его соответственно на квадрат или куб делителя. Напр.: найти 1954^2 и 1954^3 . Наименьшим соответствующим делителем будет 2, а частное 977 (в таблице имеется). Находим квадрат и куб частного: $977^2 = 954\ 529$, $977^3 = 932\ 574\ 833$, умножаем соответственно на квадрат и куб делителя, т. е. на $2^2 = 4$ и $2^3 = 8$. Искомое будет: $1954^2 = 954\ 529 \cdot 4 = 3\ 818\ 116$; $1954^3 = 932\ 574\ 833 \cdot 8 = 7\ 460\ 598\ 664$.

3. Для определения длины окружности или площади круга диаметром больше 1000 делим этот диаметр на такого наименьшего делителя, чтобы частное имелось в таблице, полученное частное принимаем за новый диаметр и находим для него в таблице длину окружности или площадь круга. Найденную длину окружности надо умножить на делителя, а площадь круга на квадрат делителя.

Напр., найти длину окружности и площадь круга для $d = 1784$. Наименьшим соответствующим делителем будет 2, а частное 892.

Приняв 892 за диаметр, находим по таблице длину окружности, равную 2 802,3, и площадь круга, равную 624 913.

Искомая длина окружности $2\ 802,3 \cdot 2 = 5\ 604,6$, а площадь круга $624\ 913 \cdot 2^2 = 2\ 499\ 652$.

2. К таблицам на стр. 14—48. 1. Значение логарифмических и тригонометрических функций для величин, не указанных в таблицах, а заключающихся между табличными числами, находят, полагая, что функциям изменяются пропорционально наименьшим соответствующим им числам. Напр.: 1. Найти $\lg 246,5$. По таблице (стр. 18) находим мантиссу к $\lg$ числа 246, равную 39 094. Для числа 247 мантисса будет 39 270. Разность мантисс 176 соответствует увеличению числа на 1,0; для 0,5 приращение мантиссы будет: $176 \cdot 0,5 = 88$; мантисса к $\lg$ числа 246,5 равна: $39\ 094 + 88 = 39\ 182$, а $\lg 246,5 = 2,39182$.

2. Найти число, $\lg$ которого $= 1,78967$. Мантисса искомого числа 78 967. Для первых трех цифр мантиссы 7, 8 и 9 находим в таблице (стр. 26) число 616, мантисса которого 78 958, т. е. меньше данной на 78 967 — 78 958 = 9. Для следующего по таблице числа 617 мантисса составляет 79 029. Табличная разность мантисс $79\ 029 - 78\ 958 = 71$ соответствует приращению числа на 1,0; след., приращению мантиссы на 9 соответствует приращение числа на $9 : 71 = 0,1$, а искомое число будет 61,61.

3. Найти $\tg 42^{\circ}44'$. $\tg 42^{\circ}40' = 0,921\ 696$; $\tg 42^{\circ}45' = 0,924\ 391$. Разность $0,002\ 695$ соответствует увеличению угла на $5'$. Так как $4'$ составляет 0,8 от $5'$, то для $4'$ приращение $\tg$ будет: $0,002\ 695 \cdot 0,8 = 0,002\ 156$. Откуда $\tg 42^{\circ}44' = 0,923\ 852$.

4. Найти угол, $\sin$ которого $= 0,4\ 806\ 682$. Ближайшее меньшее табличное значение синуса есть $\sin 28^{\circ}40' = 0,4\ 797\ 131$. Оно меньше данного на $0,0009\ 551$. Следующее значение $\sin 28^{\circ}45' = 0,4\ 809\ 688$. Разность $0,0012\ 757$ соответствует изменению угла на $5'$; след. разнице $0,0009\ 551$ соответствует уменьшение угла на $0,0009\ 551 : 0,0012\ 757 \cdot 5 = 3,75'$. Искомый угол $28^{\circ}43'45''$.

А. Таблицы степеней, корней, обратных величин, окружностей и площадей круга. 1—50

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
1	1	1	1,0000	1,0000	0,00000	1,000,000	3,142	0,7854	1
2	4	8	1,4142	1,2599	0,30103	500,000	6,283	3,1416	2
3	9	27	1,7321	1,4422	0,47712	333,333	9,425	7,0686	3
4	16	64	2,0000	1,5874	0,60206	250,000	12,566	12,5664	4
5	25	125	2,2361	1,7100	0,69897	200,000	15,708	19,6350	5
6	36	216	2,4495	1,8171	0,77815	166,667	18,850	28,2743	6
7	49	343	2,6458	1,9129	0,84510	142,857	21,991	38,4845	7
8	64	512	2,8284	2,0000	0,90309	125,000	25,133	50,2655	8
9	81	729	3,0000	2,0801	0,95424	111,111	28,274	63,6173	9
10	100	1000	3,1623	2,1544	1,00000	100,000	31,416	78,5398	10
11	121	1331	3,3166	2,2240	1,04139	90,9091	34,558	95,0332	11
12	144	1728	3,4641	2,2894	1,07918	83,3333	37,699	113,097	12
13	169	2197	3,6056	2,3513	1,11394	76,9231	40,841	132,732	13
14	196	2744	3,7417	2,4101	1,14613	71,4286	43,982	153,938	14
15	225	3375	3,8730	2,4662	1,17609	66,6667	47,124	176,715	15
16	256	4096	4,0000	2,5198	1,20412	62,5000	50,265	201,062	16
17	289	4913	4,1231	2,5713	1,23045	58,8235	53,407	226,980	17
18	324	5832	4,2426	2,6207	1,25527	55,5556	56,549	254,469	18
19	361	6859	4,3589	2,6684	1,27875	52,6316	59,690	283,629	19
20	400	8000	4,4721	2,7144	1,30103	50,0000	62,832	314,159	20
21	441	9261	4,5826	2,7589	1,32222	47,6190	65,973	346,361	21
22	484	10648	4,6904	2,8020	1,34242	45,4545	69,115	380,133	22
23	529	12167	4,7958	2,8439	1,36173	43,4783	72,257	415,476	23
24	576	13824	4,8990	2,8845	1,38021	41,6667	75,398	452,389	24
25	625	15625	5,0000	2,9240	1,39794	40,0000	78,540	490,874	25
26	676	17716	5,0990	2,9625	1,41497	38,4615	81,681	530,929	26
27	729	19683	5,1962	3,0000	1,43138	37,0370	84,823	572,555	27
28	784	21952	5,2915	3,0366	1,44716	35,7143	87,965	615,752	28
29	841	24389	5,3852	3,0723	1,46240	34,4828	91,108	660,520	29
30	900	27000	5,4772	3,1072	1,47712	33,3333	94,248	706,858	30
31	961	29791	5,5678	3,1414	1,49136	32,2581	97,389	754,768	31
32	1024	32768	5,6569	3,1748	1,50515	31,2500	100,531	804,248	32
33	1089	35937	5,7446	3,2075	1,51851	30,3030	103,673	855,299	33
34	1156	39304	5,8310	3,2396	1,53148	29,4118	106,814	907,920	34
35	1225	42875	5,9161	3,2711	1,54407	28,5714	109,956	962,113	35
36	1296	46656	6,0000	3,3019	1,55630	27,7778	113,097	1017,88	36
37	1369	50653	6,0828	3,3322	1,56820	27,0270	116,239	1075,21	37
38	1444	54872	6,1644	3,3620	1,57978	26,3158	119,381	1134,11	38
39	1521	59319	6,2450	3,3912	1,59106	25,6410	122,522	1194,59	39
40	1600	64000	6,3246	3,4200	1,60206	25,0000	125,66	1256,64	40
41	1681	68921	6,4031	3,4482	1,61278	24,3902	128,81	1320,25	41
42	1764	74088	6,4807	3,4760	1,62325	23,8095	131,95	1385,44	42
43	1849	79507	6,5574	3,5034	1,63347	23,2558	135,09	1452,20	43
44	1936	85184	6,6332	3,5303	1,64345	22,7273	138,23	1520,53	44
45	2025	91125	6,7082	3,5569	1,65321	22,2222	141,37	1590,43	45
46	2116	97336	6,7823	3,5830	1,66276	21,7391	144,51	1661,90	46
47	2209	103823	6,8557	3,6088	1,67210	21,2766	147,65	1734,94	47
48	2304	110592	6,9282	3,6342	1,68124	20,8333	150,80	1809,66	48
49	2401	117649	7,0000	3,6593	1,69028	20,4082	153,94	1885,74	49
50	2500	125000	7,0711	3,6840	1,69927	20,0000	157,08	1963,50	50

50—100

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
50	25 00	125 000	7,0711	3,6840	1,69897	20,0000	157,08	19 63, 50	50
51	26 01	132 651	7,1414	3,7084	1,70757	19,6078	160,22	20 42, 82	51
52	27 04	140 608	7,2111	3,7325	1,71600	19,2308	163,36	21 23, 72	52
53	28 09	148 877	7,2801	3,7563	1,72428	18,8679	166,50	22 06, 18	53
54	29 16	157 464	7,3485	3,7798	1,73239	18,5185	169,65	22 90, 22	54
55	30 25	166 375	7,4162	3,8030	1,74036	18,1818	172,79	23 75, 83	55
56	31 36	175 616	7,4833	3,8259	1,74819	17,8571	175,93	24 63, 01	56
57	32 49	185 193	7,5498	3,8485	1,75587	17,5439	179,07	25 51, 76	57
58	33 64	195 112	7,6158	3,8709	1,76343	17,2414	182,21	26 42, 08	58
59	34 81	205 379	7,6811	3,8930	1,77085	16,9492	185,35	27 33, 97	59
60	36 00	216 000	7,7460	3,9149	1,77817	16,6667	188,50	28 27, 43	60
61	37 21	226 981	7,8102	3,9368	1,78533	16,3934	191,64	29 22, 47	61
62	38 44	238 328	7,8740	3,9579	1,79239	16,1290	194,78	30 19, 07	62
63	39 69	250 047	7,9373	3,9791	1,79934	15,8730	197,92	31 17, 25	63
64	40 96	262 144	8,0000	4,0000	1,80618	15,6250	201,06	32 16, 99	64
65	42 25	274 625	8,0623	4,0207	1,81291	15,3846	204,20	33 18, 31	65
66	43 56	287 496	8,1240	4,0412	1,81954	15,1515	207,35	34 21, 10	66
67	44 89	300 763	8,1854	4,0615	1,82607	14,9254	210,49	35 25, 65	67
68	46 24	314 432	8,2462	4,0817	1,83251	14,7059	213,63	36 31, 68	68
69	47 61	328 509	8,3066	4,1016	1,83888	14,4928	216,77	37 39, 28	69
70	49 00	343 000	8,3666	4,1213	1,84510	14,2857	219,91	38 48, 45	70
71	50 41	357 911	8,4261	4,1408	1,85126	14,0845	223,05	39 59, 19	71
72	51 84	373 248	8,4853	4,1602	1,85733	13,8889	226,19	40 71, 50	72
73	53 29	389 017	8,5440	4,1793	1,86332	13,6986	229,34	41 85, 39	73
74	54 76	405 224	8,6023	4,1983	1,86923	13,5135	232,48	43 00, 84	74
75	56 25	421 875	8,6603	4,2172	1,87506	13,3333	235,62	44 17, 86	75
76	57 76	438 976	8,7178	4,2358	1,88081	13,1579	238,76	45 36, 46	76
77	59 29	456 533	8,7750	4,2543	1,88649	12,9870	241,90	46 55, 63	77
78	60 84	474 552	8,8318	4,2727	1,89209	12,8205	245,04	47 78, 36	78
79	62 41	493 039	8,8882	4,2908	1,89763	12,6582	248,19	49 01, 67	79
80	64 00	512 000	8,9443	4,3089	1,90309	12,5000	251,33	50 26, 55	80
81	65 61	531 441	9,0000	4,3267	1,90849	12,3457	254,47	51 53, 00	81
82	67 24	551 368	9,0554	4,3445	1,91381	12,1951	257,61	52 81, 02	82
83	68 89	571 787	9,1104	4,3621	1,91908	12,0482	260,75	54 10, 61	83
84	70 56	592 704	9,1652	4,3795	1,92428	11,9048	263,89	55 41, 77	84
85	72 25	614 125	9,2195	4,3968	1,92942	11,7647	267,04	56 74, 50	85
86	73 96	636 056	9,2736	4,4140	1,93450	11,6279	270,18	58 08, 80	86
87	75 69	658 503	9,3274	4,4310	1,93952	11,4943	273,32	59 44, 68	87
88	77 44	681 472	9,3808	4,4480	1,94448	11,3635	276,46	60 82, 12	88
89	79 21	704 969	9,4340	4,4647	1,94939	11,2360	279,60	62 21, 14	89
90	81 00	729 000	9,4868	4,4814	1,95424	11,1111	282,74	62 61, 73	90
91	82 81	753 571	9,5394	4,4979	1,95904	10,9890	285,88	65 03, 88	91
92	84 64	778 688	9,5917	4,5144	1,96379	10,8696	289,03	66 47, 61	92
93	86 49	804 357	9,6437	4,5307	1,96848	10,7527	292,17	67 92, 91	93
94	88 36	830 584	9,6954	4,5468	1,97313	10,6383	295,31	69 39, 78	94
95	90 25	857 375	9,7468	4,5629	1,97772	10,5263	298,45	70 88, 22	95
96	92 16	884 736	9,7980	4,5789	1,98227	10,4167	301,59	72 38, 23	96
97	94 09	912 673	9,8489	4,5947	1,98677	10,3093	304,73	73 89, 81	97
98	96 04	941 192	9,8995	4,6104	1,99123	10,2041	307,88	75 42, 96	98
99	98 01	970 299	9,9499	4,6261	1,99564	10,1010	311,02	76 97, 69	99
100	1 00 00	1 000 000	10,0000	4,6416	2,00000	10,0000	314,16	78 53, 98	100

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
100	1 00 00	1 000 000	10,0000	4,6416	2,00000	10,0000	314,16	78 53, 98	100
101	1 02 01	1 030 301	10,0499	4,6570	2,00432	9,90099	317,30	80 11, 88	101
102	1 04 04	1 061 208	10,0995	4,6723	2,00860	9,80392	320,44	81 71, 28	102
103	1 06 09	1 092 727	10,1489	4,6875	2,01284	9,70874	323,58	83 32, 29	103
104	1 08 16	1 124 864	10,1980	4,7027	2,01703	9,61538	326,73	84 94, 87	104
105	1 10 25	1 157 625	10,2470	4,7177	2,02119	9,52381	329,87	86 59, 01	105
106	1 12 36	1 191 016	10,2956	4,7326	2,02531	9,43396	333,01	88 24, 73	106
107	1 14 49	1 225 043	10,3441	4,7475	2,02938	9,34579	336,15	89 92, 02	107
108	1 16 64	1 259 712	10,3923	4,7622	2,03342	9,25926	339,29	91 60, 88	108
109	1 18 81	1 295 029	10,4403	4,7769	2,03743	9,17431	342,43	93 31, 32	109
110	1 21 00	1 331 000	10,4881	4,7914	2,04139	9,09091	345,58	95 03, 32	110
111	1 23 21	1 367 631	10,5357	4,8059	2,04532	9,00901	348,72	96 76, 89	111
112	1 25 44	1 404 928	10,5830	4,8203	2,04922	8,92857	351,86	98 52, 03	112
113	1 27 69	1 442 897	10,6301	4,8346	2,05308	8,84956	355,00	1 00 28, 7	113
114	1 29 96	1 481 544	10,6771	4,8488	2,05690	8,77193	358,14	1 02 07, 0	114
115	1 32 25	1 520 875	10,7238	4,8629	2,06070	8,69565	361,28	1 03 86, 9	115
116	1 34 56	1 560 896	10,7703	4,8770	2,06446	8,62069	364,42	1 05 68, 3	116
117	1 36 89	1 601 613	10,8167	4,8910	2,06819	8,54701	367,57	1 07 51, 3	117
118	1 39 24	1 643 032	10,8628	4,9049	2,07188	8,47458	370,71	1 09 35, 9	118
119	1 41 61	1 685 159	10,9087	4,9187	2,07555	8,40336	373,85	1 11 22, 0	119
120	1 44 00	1 728 000	10,9545	4,9324	2,07918	8,33333	376,99	1 13 09, 7	120
121	1 46 41	1 771 561	11,0000	4,9461	2,08279	8,26446	380,13	1 14 99, 0	121
122	1 48 84	1 815 848	11,0454	4,9597	2,08636	8,19672	383,27	1 16 89, 9	122
123	1 51 29	1 860 867	11,0905	4,9732	2,08991	8,13008	386,42	1 18 82, 3	123
124	1 53 76	1 906 624	11,1355	4,9866	2,09342	8,06452	389,56	1 20 76, 3	124
125	1 56 25	1 953 125	11,1803	5,0000	2,09691	8,00000	392,70	1 22 71, 8	125
126	1 58 76	2 000 376	11,2250	5,0133	2,10037	7,93451	395,84	1 24 69, 0	126
127	1 61 29	2 048 383	11,2694	5,0265	2,10380	7,87402	398,98	1 26 67, 7	127
128	1 63 84	2 097 152	11,3137	5,0397	2,10721	7,81250	402,12	1 28 68, 0	128
129	1 66 41	2 146 689	11,3578	5,0528	2,11059	7,75194	405,27	1 30 69, 8	129
130	1 69 00	2 197 000	11,4018	5,0658	2,11394	7,69231	408,41	1 32 73, 2	130
131	1 71 61	2 248 091	11,4455	5,0788	2,11727	7,63369	411,55	1 34 78, 2	131
132	1 74 24	2 299 968	11,4891	5,0916	2,12057	7,57576	414,69	1 36 84, 8	132
133	1 76 89	2 352 637	11,5326	5,1045	2,12385	7,51880	417,83	1 38 92, 9	133
134	1 79 56	2 406 104	11,5758	5,1172	2,12710	7,46289	420,97	1 41 02, 6	134
135	1 82 25	2 460 375	11,6190	5,1299	2,13033	7,40741	424,12	1 43 13, 9	135
136	1 84 96	2 515 456	11,6619	5,1426	2,13354	7,35294	427,26	1 45 26, 7	136
137	1 87 69	2 571 353	11,7047	5,1551	2,13672	7,29927	430,40	1 47 41, 1	137
138	1 90 44	2 628 072	11,7473	5,1676	2,13988	7,24638	433,54	1 49 57, 1	138
139	1 93 21	2 685 619	11,7898	5,1801	2,14301	7,19424	436,68	1 51 74, 7	139
140	1 96 00	2 744 000	11,8322	5,1925	2,14613	7,14286	439,82	1 53 93, 8	140
141	1 98 81	2 803 221	11,8743	5,2048	2,14922	7,09220	442,96	1 56 14, 5	141
142	2 01 64	2 863 288	11,9164	5,2171	2,15229	7,04225	446,11	1 58 36, 8	142
143	2 04 49	2 924 207	11,9583	5,2293	2,15534	7,99301	449,25	1 60 60, 6	143
144	2 07 36	2 985 984	12,0000	5,2415	2,15836	6,94444	452,39	1 62 86, 0	144
145	2 10 25	3 048 625	12,0416	5,2536	2,16137	6,89655	455,53	1 65 13, 0	145
146	2 13 16	3 112 136	12,0830	5,2656	2,16435	6,84932	458,67	1 67 41, 5	146
147	2 16 09	3 176 523	12,1244	5,2776	2,16732	6,80272	461,81	1 69 71, 7	147
148	2 19 04	3 241 792	12,1655	5,2896	2,17026	6,75676	464,96	1 72 03, 4	148
149	2 22 01	3 307 949	12,2066	5,3016	2,17319	6,71141	468,10	1 74 36, 6	149
150	2 25 00	3 375 000	12,2474	5,3133	2,17609	6,66667	471,24	1 76 71, 5	150

СТЕПЕНИ, КОРНИ, ОБРАТНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

150-200

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1000}{n}$	π	e	$\ln$
150	2 25 00	3 375 000	12,2474	5,3133	2,17609	6,66667	471,24	1 78 71,5	150
151	2 28 01	3 442 951	12,2882	5,3251	2,17898	6,62252	474,38	1 79 07,9	151
152	2 31 04	3 511 808	12,3288	5,3368	2,18184	6,57895	477,52	1 81 45,8	152
153	2 34 09	3 581 577	12,3693	5,3485	2,18409	6,53595	480,66	1 83 85,4	153
154	2 37 16	3 652 264	12,4097	5,3601	2,18752	6,49351	483,81	1 86 26,5	154
155	2 40 25	3 723 875	12,4499	5,3717	2,19033	6,45161	486,95	1 88 69,2	155
156	2 43 36	3 796 416	12,4900	5,3832	2,19312	6,41026	490,09	1 91 13,4	156
157	2 46 49	3 869 893	12,5300	5,3947	2,19590	6,36943	493,23	1 93 59,3	157
158	2 49 54	3 944 312	12,5698	5,4061	2,19866	6,32911	496,37	1 96 06,7	158
159	2 52 81	4 019 679	12,6095	5,4175	2,20140	6,28931	499,51	1 98 55,7	159
160	2 56 00	4 096 000	12,6491	5,4288	2,20412	6,25000	502,65	2 01 06,2	160
161	2 59 21	4 173 281	12,6886	5,4401	2,20683	6,21118	505,80	2 03 58,3	161
162	2 62 44	4 251 528	12,7279	5,4514	2,20952	6,17284	508,94	2 06 12,0	162
163	2 65 69	4 330 747	12,7671	5,4626	2,21219	6,13497	512,08	2 08 67,2	163
164	2 68 96	4 410 944	12,8062	5,4737	2,21484	6,09756	515,22	2 11 24,1	164
165	2 72 25	4 492 125	12,8452	5,4848	2,21748	6,06061	518,36	2 13 82,5	165
166	2 75 56	4 574 296	12,8841	5,4959	2,22011	6,02410	521,50	2 16 42,4	166
167	2 78 89	4 657 463	12,9228	5,5069	2,22272	5,98802	524,65	2 19 04,0	167
168	2 82 24	4 741 632	12,9615	5,5178	2,22531	5,95298	527,79	2 21 67,1	168
169	2 85 61	4 826 809	13,0000	5,5288	2,22789	5,91716	530,93	2 24 31,8	169
170	2 89 00	4 913 000	13,0384	5,5397	2,23045	5,88235	534,07	2 26 98,0	170
171	2 92 41	5 000 211	13,0767	5,5505	2,23300	5,84795	537,21	2 29 65,8	171
172	2 95 84	5 088 448	13,1149	5,5613	2,23553	5,81395	540,35	2 32 35,2	172
173	2 99 29	5 177 717	13,1529	5,5721	2,23805	5,78035	543,50	2 35 06,2	173
174	3 02 76	5 268 024	13,1909	5,5828	2,24055	5,74713	546,64	2 37 78,7	174
175	3 06 25	5 359 375	13,2288	5,5934	2,24304	5,71429	549,78	2 40 52,8	175
176	3 09 76	5 451 776	13,2666	5,6041	2,24551	5,68182	552,92	2 43 28,5	176
177	3 13 29	5 545 233	13,3041	5,6147	2,24797	5,64972	556,06	2 46 05,7	177
178	3 16 84	5 639 752	13,3417	5,6252	2,25042	5,61798	559,20	2 48 84,6	178
179	3 20 41	5 735 339	13,3791	5,6357	2,25285	5,58659	562,35	2 51 64,9	179
180	3 24 00	5 832 000	13,4164	5,6462	2,25527	5,55556	565,49	2 54 46,9	180
181	3 27 61	5 929 741	13,4536	5,6567	2,25768	5,52485	568,63	2 57 30,4	181
182	3 31 24	6 028 568	13,4907	5,6671	2,26007	5,49461	571,77	2 60 15,5	182
183	3 34 89	6 128 487	13,5277	5,6774	2,26245	5,46448	574,91	2 63 02,2	183
184	3 38 56	6 229 504	13,5647	5,6877	2,26482	5,43478	578,05	2 65 50,4	184
185	3 42 25	6 331 625	13,6015	5,6980	2,26717	5,40541	581,19	2 68 40,3	185
186	3 45 96	6 434 856	13,6382	5,7083	2,26951	5,37634	584,34	2 71 31,5	186
187	3 49 69	6 539 203	13,6748	5,7185	2,27184	5,34759	587,48	2 74 24,6	187
188	3 53 44	6 644 672	13,7113	5,7287	2,27416	5,31915	590,62	2 77 19,1	188
189	3 57 21	6 751 269	13,7477	5,7388	2,27646	5,29101	593,76	2 80 15,2	189
190	3 61 00	6 859 000	13,7840	5,7489	2,27875	5,26316	596,90	2 83 12,9	190
191	3 64 81	6 967 871	13,8203	5,7590	2,28103	5,23560	600,04	2 86 12,1	191
192	3 68 64	7 077 888	13,8564	5,7690	2,28330	5,20833	603,19	2 89 12,9	192
193	3 72 49	7 189 057	13,8924	5,7790	2,28556	5,18135	606,33	2 92 15,3	193
194	3 76 36	7 301 384	13,9284	5,7890	2,28780	5,15464	609,47	2 95 19,2	194
195	3 80 25	7 414 875	13,9642	5,7989	2,29003	5,12821	612,61	2 98 24,8	195
196	3 84 16	7 529 536	14,0000	5,8088	2,29226	5,10204	615,75	3 01 31,9	196
197	3 88 09	7 645 373	14,0357	5,8186	2,29447	5,07614	618,89	3 04 40,5	197
198	3 92 04	7 762 392	14,0712	5,8285	2,29667	5,05051	622,04	3 07 50,7	198
199	3 96 01	7 880 599	14,1067	5,8383	2,29885	5,02513	625,18	3 11 02,6	199
200	4 00 00	8 000 000	14,1421	5,8480	2,30103	5,00000	628,32	3 14 16,9	200

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ

БИБЛИОТЕКА БССР

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	π
200	4 00 00	8 000 000	14,1421	5,8480	2,30103	5,00000	628,32	3 14 15,9	200
201	4 04 01	8 120 601	14,1774	5,8587	2,30320	4,97512	631,46	3 17 30,9	201
202	4 08 04	8 242 408	14,2127	5,8675	2,30535	4,95050	634,60	3 20 47,4	202
203	4 12 09	8 365 427	14,2478	5,8771	2,30750	4,92611	637,74	3 23 65,5	203
204	4 16 16	8 489 664	14,2829	5,8868	2,30963	4,90196	640,88	3 26 85,1	204
205	4 20 25	8 615 125	14,3178	5,8964	2,31175	4,87805	644,03	3 30 06,4	205
206	4 24 36	8 741 816	14,3527	5,9059	2,31387	4,85437	647,17	3 33 29,2	206
207	4 28 49	8 869 743	14,3875	5,9155	2,31597	4,83092	650,31	3 36 53,5	207
208	4 32 64	8 998 912	14,4222	5,9250	2,31806	4,80769	653,45	3 39 79,5	208
209	4 36 81	9 129 329	14,4568	5,9345	2,32015	4,78469	656,59	3 43 07,0	209
210	4 41 00	9 261 000	14,4914	5,9439	2,32222	4,76190	659,73	3 46 36,1	210
211	4 45 21	9 393 931	14,5258	5,9533	2,32428	4,73934	662,88	3 49 66,7	211
212	4 49 44	9 528 128	14,5602	5,9627	2,32634	4,71698	666,02	3 52 98,9	212
213	4 53 69	9 663 597	14,5945	5,9721	2,32838	4,69484	669,16	3 56 32,7	213
214	4 57 96	9 800 344	14,6287	5,9814	2,33041	4,67290	672,30	3 59 68,1	214
215	4 62 25	9 938 375	14,6629	5,9907	2,33244	4,65116	675,44	3 63 05,0	215
216	4 66 56	10 077 696	14,6969	6,0000	2,33445	4,62963	678,58	3 66 43,5	216
217	4 70 89	10 218 313	14,7309	6,0092	2,33646	4,60829	681,73	3 69 83,5	217
218	4 75 24	10 360 232	14,7648	6,0185	2,33846	4,58716	684,87	3 73 25,3	218
219	4 79 61	10 503 459	14,7986	6,0277	2,34044	4,56621	688,01	3 76 68,5	219
220	4 84 00	10 648 000	14,8324	6,0368	2,34242	4,54545	691,15	3 80 13,3	220
221	4 88 41	10 793 861	14,8661	6,0459	2,34439	4,52489	694,29	3 83 59,6	221
222	4 92 84	10 941 048	14,8997	6,0550	2,34635	4,50450	697,43	3 87 07,6	222
223	4 97 29	11 089 567	14,9332	6,0641	2,34830	4,48430	700,58	3 90 57,1	223
224	5 01 76	11 239 424	14,9666	6,0732	2,35025	4,46429	703,72	3 94 08,1	224
225	5 06 25	11 390 625	15,0000	6,0822	2,35218	4,44444	706,86	3 97 60,8	225
226	5 10 76	11 543 176	15,0333	6,0912	2,35411	4,42478	710,90	4 01 15,0	226
227	5 15 29	11 697 083	15,0665	6,1002	2,35603	4,40529	713,14	4 04 70,8	227
228	5 19 84	11 852 352	15,0997	6,1091	2,35793	4,38596	716,28	4 08 28,1	228
229	5 24 41	12 008 989	15,1327	6,1180	2,35984	4,36681	719,42	4 11 87,1	229
230	5 29 00	12 167 000	15,1658	6,1269	2,36173	4,34783	722,57	4 15 47,6	230
231	5 33 61	12 326 391	15,1987	6,1358	2,36361	4,32900	725,71	4 19 09,6	231
232	5 38 24	12 487 168	15,2315	6,1446	2,36549	4,31034	728,85	4 22 73,3	232
233	5 42 89	12 649 337	15,2643	6,1534	2,36736	4,29183	731,99	4 26 38,5	233
234	5 47 56	12 812 904	15,2971	6,1622	2,36922	4,27359	735,13	4 30 05,3	234
235	5 52 25	12 977 875	15,3297	6,1710	2,37107	4,25532	738,27	4 33 73,6	235
236	5 56 96	13 144 256	15,3623	6,1797	2,37291	4,23729	741,42	4 37 43,5	236
237	5 61 69	13 312 053	15,3948	6,1885	2,37475	4,21941	744,56	4 41 15,0	237
238	5 66 44	13 481 272	15,4272	6,1972	2,37658	4,20168	747,70	4 44 88,1	238
239	5 71 21	13 651 919	15,4596	6,2058	2,37840	4,18410	750,84	4 48 62,7	239
240	5 76 00	13 824 000	15,4919	6,2145	2,38021	4,16667	753,98	4 52 38,9	240
241	5 80 81	13 997 521	15,5242	6,2231	2,38202	4,14938	757,12	4 56 16,7	241
242	5 85 64	14 172 488	15,5563	6,2317	2,38382	4,13223	760,27	4 59 96,1	242
243	5 90 49	14 348 907	15,5885	6,2403	2,38561	4,11523	763,41	4 63 77,0	243
244	5 95 36	14 526 784	15,6205	6,2488	2,38739	4,09836	766,55	4 67 59,5	244
245	6 00 25	14 706 125	15,6525	6,2573	2,38917	4,08163	769,69	4 71 43,5	245
246	6 05 16	14 886 936	15,6844	6,2658	2,39094	4,06504	772,83	4 75 29,2	246
247	6 10 09	15 069 223	15,7162	6,2643	2,39270	4,04858	775,97	4 79 16,4	247
248	6 15 04	15 252 992	15,7480	6,2828	2,39445	4,03226	779,11	4 83 05,1	248
249	6 20 01	15 438 249	15,7797	6,2912	2,39620	4,01606	782,26	4 86 95,5	249
250	6 25 00	15 625 000	15,8114	6,2995	2,39794	4,00000	785,40	4 90 87,4	250

250—300

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
250	6 25 00	15 625 000	15 8114	6,2996	2,39794	4,00000	785,40	4 90 87,4	250
251	6 30 01	15 813 251	15,8430	6,3020	2,39967	3,98406	788,54	4 94 80,9	251
252	6 35 04	16 003 008	15,8745	6,3164	2,40140	3,96825	791,68	4 98 75,9	252
253	6 40 09	16 194 277	15,9060	6,3247	2,40312	3,95257	794,82	5 02 72,6	253
254	6 45 16	16 387 064	15,9374	6,3330	2,40483	3,93701	797,96	5 06 70,7	254
255	6 50 25	16 581 375	15,9687	6,3413	2,40654	3,92157	801,11	5 10 70,5	255
256	6 55 36	16 777 216	16,0000	6,3496	2,40824	3,90625	804,25	5 14 71,9	256
257	6 60 49	16 974 593	16,0312	6,3579	2,40993	3,89105	807,39	5 18 74,8	257
258	6 65 64	17 173 512	16,0624	6,3661	2,41162	3,87597	810,53	5 22 79,2	258
259	6 70 81	17 373 979	16,0935	6,3743	2,41330	3,86100	813,67	5 26 85,3	259
260	6 76 00	17 576 000	16,1245	6,3825	2,41497	3,84615	816,81	5 30 92,9	260
261	6 81 21	17 779 581	16,1555	6,3907	2,41664	3,83142	819,96	5 35 02,1	261
262	6 86 44	17 984 728	16,1864	6,3988	2,41830	3,81679	823,10	5 39 12,0	262
263	6 91 69	18 191 447	16,2173	6,4070	2,41996	3,80228	826,24	5 43 25,2	263
264	6 96 96	18 399 744	16,2481	6,4151	2,42160	3,78788	829,38	5 47 39,1	264
265	7 02 25	18 609 625	16,2789	6,4232	2,42325	3,77358	832,52	5 51 54,6	265
266	7 07 56	18 821 096	16,3095	6,4312	2,42488	3,75940	835,66	5 55 71,6	266
267	7 12 89	19 034 163	16,3401	6,4393	2,42651	3,74532	838,81	5 59 90,2	267
268	7 18 24	19 248 832	16,3707	6,4473	2,42813	3,73134	841,95	6 04 10,4	268
269	7 23 61	19 465 109	16,4012	6,4553	2,42975	3,71747	845,09	6 08 32,2	269
270	7 29 00	19 683 000	16,4317	6,4633	2,43136	3,70370	848,23	6 12 55,5	270
271	7 34 41	19 902 511	16,4621	6,4713	2,43297	3,69004	851,37	6 16 80,4	271
272	7 39 84	20 123 648	16,4924	6,4792	2,43457	3,67647	854,51	6 21 06,9	272
273	7 45 29	20 346 417	16,5227	6,4872	2,43616	3,66300	857,66	6 25 34,9	273
274	7 50 76	20 570 824	16,5529	6,4951	2,43775	3,64964	860,80	6 29 54,6	274
275	7 56 25	20 796 875	16,5831	6,5030	2,43933	3,63636	863,94	6 33 95,7	275
276	7 61 76	21 024 576	16,6132	6,5108	2,44091	3,62319	867,08	6 38 28,5	276
277	7 67 29	21 253 933	16,6433	6,5187	2,44248	3,61011	870,22	6 42 52,8	277
278	7 72 84	21 484 952	16,6733	6,5265	2,44404	3,59712	873,36	6 46 98,7	278
279	7 78 41	21 717 639	16,7033	6,5343	2,44560	3,58423	876,50	6 51 36,2	279
280	7 84 00	21 952 000	16,7332	6,5421	2,44716	3,57143	879,65	6 55 75,2	280
281	7 89 61	22 188 041	16,7631	6,5499	2,44871	3,55872	882,79	6 60 15,8	281
282	7 95 24	22 425 768	16,7929	6,5577	2,45025	3,54610	885,93	6 64 58,0	282
283	8 00 89	22 665 187	16,8226	6,5654	2,45179	3,53357	889,07	6 69 01,8	283
284	8 06 66	22 906 304	16,8523	6,5731	2,45332	3,52113	892,21	6 73 47,1	284
285	8 12 45	23 149 125	16,8819	6,5808	2,45484	3,50877	895,35	6 77 40,0	285
286	8 17 96	23 393 656	16,9115	6,5885	2,45637	3,49650	898,50	6 82 42,4	286
287	8 23 69	23 639 903	16,9411	6,5962	2,45788	3,48432	901,64	6 86 92,5	287
288	8 29 44	23 887 872	16,9706	6,6039	2,45939	3,47222	904,78	6 91 44,1	288
289	8 35 21	24 137 569	17,0000	6,6115	2,46090	3,46021	907,92	6 95 97,2	289
290	8 41 00	24 389 000	17,0294	6,6191	2,46240	3,44828	911,06	6 60 52,0	290
291	8 46 81	24 642 171	17,0587	6,6267	2,46389	3,43643	914,20	6 65 08,3	291
292	8 52 64	24 897 088	17,0880	6,6343	2,46538	3,42466	917,35	6 69 26,2	292
293	8 58 49	25 153 757	17,1172	6,6419	2,46687	3,41297	920,49	6 74 25,6	293
294	8 64 36	25 412 184	17,1464	6,6494	2,46835	3,40136	923,63	6 78 86,7	294
295	8 70 25	25 672 375	17,1755	6,6569	2,46982	3,38983	926,77	6 83 49,3	295
296	8 76 16	25 934 336	17,2047	6,6644	2,47129	3,37838	929,91	6 88 13,4	296
297	8 82 09	26 198 073	17,2337	6,6719	2,47276	3,36700	933,05	6 92 79,2	297
298	8 88 04	26 463 592	17,2627	6,6794	2,47422	3,35570	936,19	6 97 46,5	298
299	8 94 01	26 730 899	17,2916	6,6869	2,47567	3,34448	939,34	7 02 15,4	299
300	9 00 00	27 000 000	17,3205	6,6943	2,47712	3,33333	942,48	7 06 85,8	300

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1000}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{\pi n^2}{4}$	π
300	9 00 00	27 000 000	17,3205	6,6943	2,47712	3,33333	942,48	7 06 85,8	300
301	9 06 01	27 270 901	17,3494	6,7018	2,47857	3,32226	945,62	7 11 57,9	301
302	9 12 04	27 543 608	17,3781	6,7092	2,48001	3,31126	948,78	7 16 31,5	302
303	9 18 09	27 818 127	17,4069	6,7166	2,48144	3,30033	951,90	7 21 06,6	303
304	9 24 16	28 094 464	17,4358	6,7240	2,48287	3,28947	955,04	7 25 83,4	304
305	9 30 25	28 372 625	17,4642	6,7313	2,48430	3,27869	958,19	7 30 61,7	305
306	9 36 36	28 652 616	17,4929	6,7387	2,48572	3,26797	961,33	7 35 41,5	306
307	9 42 49	28 934 443	17,5214	6,7460	2,48714	3,25733	964,47	7 40 23,0	307
308	9 48 54	29 218 112	17,5499	6,7533	2,48855	3,24675	967,61	7 45 06,0	308
309	9 54 51	29 503 629	17,5784	6,7606	2,48996	3,23625	970,75	7 49 50,6	309
310	9 61 00	29 791 000	17,6068	6,7679	2,49136	3,22581	973,89	7 54 36,8	310
311	9 67 21	30 080 231	17,6352	6,7752	2,49276	3,21543	977,04	7 59 24,5	311
312	9 73 44	30 371 328	17,6635	6,7824	2,49415	3,20513	980,18	8 04 13,8	312
313	9 79 69	30 664 297	17,6918	6,7897	2,49554	3,19489	983,32	8 09 04,7	313
314	9 85 96	30 959 144	17,7200	6,7969	2,49693	3,18471	986,46	8 13 57,1	314
315	9 92 25	31 225 875	17,7482	6,8041	2,49831	3,17460	989,60	8 18 51,1	315
316	9 98 56	31 554 496	17,7764	6,8113	2,49969	3,16456	992,74	8 23 46,7	316
317	10 04 89	31 855 013	17,8045	6,8185	2,50106	3,15457	995,88	8 28 43,9	317
318	10 11 24	32 157 432	17,8326	6,8256	2,50243	3,14465	999,03	8 33 42,6	318
319	10 17 51	32 461 759	17,8606	6,8328	2,50379	3,13480	1002,2	8 38 42,9	319
320	10 24 00	32 768 000	17,8885	6,8399	2,50515	3,12500	1005,3	8 43 44,8	320
321	10 30 41	33 076 161	17,9165	6,8470	2,50651	3,11526	1008,5	8 48 48,2	321
322	10 36 84	33 386 248	17,9444	6,8541	2,50786	3,10559	1011,6	8 53 53,4	322
323	10 43 29	33 698 267	17,9722	6,8612	2,50920	3,09598	1014,7	8 58 59,8	323
324	10 49 75	34 012 224	18,0000	6,8683	2,51055	3,08642	1017,9	9 03 67,8	324
325	10 56 25	34 328 125	18,0278	6,8753	2,51188	3,07692	1021,0	9 08 77,7	325
326	10 62 76	34 645 976	18,0555	6,8824	2,51322	3,06748	1024,2	9 13 89,0	326
327	10 69 29	34 965 783	18,0831	6,8894	2,51455	3,05810	1027,3	9 18 01,8	327
328	10 75 84	35 287 552	18,1108	6,8964	2,51587	3,04878	1030,4	9 23 16,3	328
329	10 82 41	35 611 289	18,1384	6,9034	2,51720	3,03951	1033,6	9 28 32,3	329
330	10 89 00	35 937 000	18,1659	6,9104	2,51851	3,03030	1036,7	9 33 49,9	330
331	10 95 51	36 264 691	18,1934	6,9174	2,51983	3,02115	1039,9	9 38 69,0	331
332	11 02 24	36 594 368	18,2209	6,9244	2,52114	3,01205	1043,0	9 43 89,7	332
333	11 08 59	36 926 037	18,2483	6,9313	2,52244	3,00300	1046,2	9 49 11,9	333
334	11 15 56	37 259 704	18,2757	6,9382	2,52375	2,99401	1049,3	9 54 36,8	334
335	11 22 25	37 595 375	18,3030	6,9451	2,52504	2,98507	1052,4	9 59 53,1	335
336	11 28 56	37 933 056	18,3303	6,9521	2,52634	2,97619	1055,6	10 05 11,8	336
337	11 35 59	38 272 753	18,3576	6,9589	2,52763	2,96738	1058,7	10 10 32,9	337
338	11 42 44	38 614 472	18,3848	6,9658	2,52892	2,95858	1061,9	10 15 58,7	338
339	11 49 21	38 958 219	18,4120	6,9727	2,53020	2,94985	1065,0	10 21 29,7	339
340	11 56 00	39 304 000	18,4391	6,9795	2,53148	2,94118	1068,1	10 26 56,0	340
341	11 62 51	39 651 821	18,4662	6,9864	2,53275	2,93255	1071,3	10 32 22,9	341
342	11 69 54	40 001 688	18,4932	6,9932	2,53403	2,92398	1074,4	10 37 50,3	342
343	11 76 49	40 353 607	18,5203	7,0000	2,53529	2,91545	1077,6	10 43 18,3	343
344	11 83 36	40 707 584	18,5472	7,0068	2,53656	2,90698	1080,7	10 48 46,9	344
345	11 90 25	41 063 625	18,5742	7,0136	2,53782	2,89855	1083,8	10 54 16,9	345
346	11 97 16	41 421 736	18,6011	7,0203	2,53908	2,89017	1087,0	10 59 48,4	346
347	12 04 09	41 781 923	18,6279	7,0271	2,54033	2,88184	1090,1	11 05 20,5	347
348	12 11 04	42 144 192	18,6548	7,0338	2,54158	2,87356	1093,3	11 10 53,1	348
349	12 18 01	42 508 549	18,6815	7,0406	2,54283	2,86533	1096,4	11 16 26,3	349
350	12 25 00	42 875 000	18,7083	7,0473	2,54407	2,85714	1099,6	11 22 00,0	350

350—400

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
350	12 25 00	42 875 000	18,7083	7,0473	2,54407	2,85714	1 099,6	9 62 11,3	350
351	12 32 01	43 243 551	18,7350	7,0540	2,54531	2,84900	1 102,7	9 67 61,8	351
352	12 39 04	43 614 208	18,7617	7,0607	2,54654	2,84091	1 105,8	9 73 14,0	352
353	12 46 09	43 986 977	18,7883	7,0674	2,54777	2,83286	1 109,0	9 78 67,7	353
354	12 53 16	44 361 864	18,8149	7,0740	2,54900	2,82486	1 112,1	9 84 23,0	354
355	12 60 25	44 748 875	18,8414	7,0807	2,55023	2,81690	1 115,3	9 89 79,8	355
356	12 67 36	45 118 016	18,8680	7,0873	2,55145	2,80899	1 118,4	9 95 38,2	356
357	12 74 49	45 499 293	18,8944	7,0940	2,55267	2,80112	1 121,5	10 00 98	357
358	12 81 64	45 882 712	18,9209	7,1006	2,55388	2,79330	1 124,7	10 06 60	358
359	12 88 81	46 268 279	18,9473	7,1072	2,55509	2,78552	1 127,8	10 12 23	359
360	12 96 00	46 656 000	18,9737	7,1138	2,55630	2,77778	1 131,0	10 17 88	360
361	13 03 21	47 045 881	19,0000	7,1204	2,55751	2,77008	1 134,4	10 23 54	361
362	13 10 44	47 437 928	19,0263	7,1269	2,55871	2,76243	1 137,3	10 29 22	362
363	13 17 19	47 832 147	19,0526	7,1335	2,55991	2,75482	1 140,4	10 34 91	363
364	13 24 36	48 228 544	19,0788	7,1400	2,56110	2,74725	1 143,5	10 40 62	364
365	13 32 25	48 627 125	19,1050	7,1466	2,56229	2,73973	1 146,7	10 46 35	365
366	13 39 56	49 027 896	19,1311	7,1531	2,56348	2,73224	1 149,8	10 52 09	366
367	13 46 89	49 430 863	19,1572	7,1596	2,56467	2,72480	1 153,0	10 57 85	367
368	13 54 24	49 836 032	19,1833	7,1661	2,56585	2,71739	1 156,1	10 63 62	368
369	13 61 61	50 243 409	19,2094	7,1726	2,56703	2,71003	1 159,2	10 69 41	369
370	13 69 00	50 653 000	19,2354	7,1791	2,56820	2,70270	1 162,4	10 75 21	370
371	13 76 41	51 064 811	19,2614	7,1855	2,56937	2,69542	1 165,5	10 81 03	371
372	13 83 84	51 478 848	19,2873	7,1920	2,57054	2,68817	1 168,7	10 86 87	372
373	13 91 29	51 895 117	19,3132	7,1984	2,57171	2,68097	1 171,8	10 92 72	373
374	13 98 76	52 313 624	19,3391	7,2048	2,57287	2,67380	1 175,0	10 98 58	374
375	14 06 25	52 734 375	19,3649	7,2112	2,57403	2,66667	1 178,1	11 04 47	375
376	14 13 76	53 157 376	19,3907	7,2177	2,57519	2,65957	1 181,2	11 10 36	376
377	14 21 29	53 582 633	19,4165	7,2240	2,57634	2,65252	1 184,4	11 16 28	377
378	14 28 81	54 010 152	19,4422	7,2304	2,57749	2,64550	1 187,5	11 22 21	378
379	14 36 41	54 439 939	19,4679	7,2368	2,57864	2,63852	1 190,7	11 28 15	379
380	14 44 00	54 872 000	19,4936	7,2432	2,57978	2,63158	1 193,8	11 34 11	380
381	14 51 61	55 306 341	19,5192	7,2495	2,58092	2,62467	1 196,9	11 40 09	381
382	14 59 24	55 742 968	19,5448	7,2558	2,58206	2,61780	1 200,1	11 46 08	382
383	14 66 89	56 181 887	19,5704	7,2622	2,58320	2,61097	1 203,2	11 52 09	383
384	14 74 56	56 623 104	19,5959	7,2685	2,58433	2,60417	1 206,4	11 58 12	384
385	14 82 25	57 066 625	19,6214	7,2748	2,58546	2,59740	1 209,5	11 64 16	385
386	14 89 56	57 512 456	19,6469	7,2811	2,58659	2,59067	1 212,7	11 70 21	386
387	14 97 69	57 960 603	19,6723	7,2874	2,58771	2,58398	1 215,8	11 76 28	387
388	15 05 44	58 411 072	19,6977	7,2936	2,58883	2,57732	1 218,9	11 82 37	388
389	15 13 21	58 863 869	19,7231	7,2999	2,58995	2,57069	1 222,1	11 88 47	389
390	15 21 00	59 319 000	19,7484	7,3061	2,59108	2,56410	1 225,2	11 94 59	390
391	15 28 81	59 776 471	19,7737	7,3124	2,59218	2,55754	1 228,4	12 00 72	391
392	15 36 64	60 236 288	19,7990	7,3186	2,59329	2,55102	1 231,5	12 06 87	392
393	15 44 49	60 698 457	19,8242	7,3248	2,59439	2,54453	1 234,6	12 13 04	393
394	15 52 36	61 162 984	19,8494	7,3310	2,59550	2,53807	1 237,8	12 19 22	394
395	15 60 25	61 629 875	19,8746	7,3372	2,59660	2,53165	1 240,9	12 25 42	395
396	15 68 16	62 099 136	19,8997	7,3434	2,59770	2,52525	1 244,1	12 31 63	396
397	15 76 09	62 570 773	19,9249	7,3496	2,59879	2,51889	1 247,2	12 37 86	397
398	15 84 04	63 044 792	19,9499	7,3558	2,59988	2,51256	1 250,4	12 44 10	398
399	15 92 01	63 521 199	19,9750	7,3619	2,60097	2,50627	1 253,5	12 50 36	399
400	16 00 00	64 000 000	20,0000	7,3681	2,60206	2,50000	1 256,6	12 56 64	400

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
400	16 00 00	64 000 000	20,0000	7,3681	2,60208	2,50000	1256,6	12 56 84	400
401	16 08 01	64 481 201	20,0250	7,3742	2,60314	2,49377	1259,8	12 62 93	401
402	16 16 04	64 964 808	20,0499	7,3803	2,60423	2,48756	1262,9	12 69 23	402
403	16 24 09	65 450 827	20,0749	7,3864	2,60531	2,48139	1266,1	12 75 56	403
404	16 32 16	65 939 264	20,0998	7,3925	2,60638	2,47525	1269,2	12 81 90	404
405	16 40 25	66 430 125	20,1246	7,3986	2,60746	2,46914	1272,3	12 88 28	405
406	16 48 36	66 923 416	20,1494	7,4047	2,60853	2,46305	1275,5	12 94 62	406
407	16 56 49	67 419 143	20,1742	7,4108	2,60959	2,45700	1278,6	13 01 00	407
408	16 64 64	67 917 312	20,1990	7,4169	2,61066	2,45098	1281,8	13 07 41	408
409	16 72 81	68 417 929	20,2237	7,4229	2,61172	2,44499	1284,9	13 13 82	409
410	16 81 00	68 921 000	20,2485	7,4290	2,61278	2,43902	1288,1	13 20 25	410
411	16 89 21	69 426 531	20,2731	7,4350	2,61384	2,43309	1291,2	13 26 70	411
412	16 97 44	69 934 528	20,2978	7,4410	2,61490	2,42718	1294,3	13 33 17	412
413	17 05 69	70 444 997	20,3224	7,4470	2,61595	2,42131	1297,5	13 39 55	413
414	17 13 96	70 957 934	20,3470	7,4530	2,61700	2,41546	1300,6	13 46 14	414
415	17 22 25	71 473 375	20,3715	7,4590	2,61805	2,40964	1303,8	13 52 65	415
416	17 30 56	71 991 296	20,3961	7,4650	2,61909	2,40385	1306,9	13 59 18	416
417	17 38 89	72 511 713	20,4206	7,4710	2,62014	2,39808	1310,0	13 65 72	417
418	17 47 24	73 034 632	20,4450	7,4770	2,62118	2,39234	1313,2	13 72 28	418
419	17 55 61	73 560 059	20,4695	7,4829	2,62221	2,38663	1316,3	13 78 85	419
420	17 64 00	74 088 000	20,4939	7,4889	2,62325	2,38095	1319,5	13 85 44	420
421	17 72 41	74 618 461	20,5183	7,4948	2,62428	2,37530	1322,6	13 92 05	421
422	17 80 84	75 151 448	20,5426	7,5007	2,62531	2,36967	1325,8	13 98 67	422
423	17 89 29	75 686 967	20,5670	7,5067	2,62634	2,36407	1328,9	14 05 31	423
424	17 97 76	76 225 024	20,5913	7,5126	2,62737	2,35849	1332,0	14 11 96	424
425	18 06 25	76 765 625	20,6155	7,5185	2,62839	2,35294	1335,2	14 18 63	425
426	18 14 76	77 308 776	20,6398	7,5244	2,62941	2,34742	1338,3	14 25 31	426
427	18 23 29	77 854 483	20,6640	7,5302	2,63043	2,34192	1341,5	14 32 01	427
428	18 31 84	78 402 752	20,6882	7,5361	2,63144	2,33645	1344,6	14 38 72	428
429	18 40 41	78 953 589	20,7123	7,5420	2,63246	2,33100	1347,7	14 45 45	429
430	18 49 00	79 507 000	20,7364	7,5478	2,63347	2,32558	1350,9	14 52 20	430
431	18 57 61	80 062 991	20,7605	7,5537	2,63448	2,32019	1354,0	14 58 96	431
432	18 66 24	80 621 568	20,7846	7,5595	2,63548	2,31481	1357,2	14 65 74	432
433	18 74 89	81 182 737	20,8087	7,5654	2,63649	2,30947	1360,3	14 72 54	433
434	18 83 56	81 746 504	20,8327	7,5712	2,63749	2,30415	1363,5	14 79 34	434
435	18 92 25	82 312 875	20,8567	7,5770	2,63849	2,29885	1366,6	14 86 17	435
436	19 00 96	82 881 856	20,8806	7,5828	2,63949	2,29358	1369,7	14 93 01	436
437	19 09 69	83 453 453	20,9045	7,5886	2,64048	2,28833	1372,9	14 99 87	437
438	19 18 44	84 027 672	20,9284	7,5944	2,64147	2,28311	1376,0	15 06 74	438
439	19 27 21	84 604 619	20,9523	7,6001	2,64246	2,27790	1379,2	15 13 63	439
440	19 36 00	85 184 000	20,9762	7,6059	2,64345	2,27273	1382,3	15 20 53	440
441	19 44 81	85 766 121	21,0000	7,6117	2,64444	2,26757	1385,4	15 27 45	441
442	19 53 64	86 350 888	21,0238	7,6174	2,64542	2,26244	1388,6	15 34 39	442
443	19 62 49	86 938 307	21,0476	7,6232	2,64640	2,25734	1391,7	15 41 34	443
444	19 71 36	87 528 384	21,0713	7,6290	2,64738	2,25225	1394,9	15 48 30	444
445	19 80 25	88 121 125	21,0950	7,6346	2,64836	2,24719	1398,0	15 55 28	445
446	19 89 16	88 716 536	21,1187	7,6403	2,64933	2,24215	1401,2	15 62 28	446
447	19 98 09	89 314 623	21,1424	7,6460	2,65031	2,23714	1404,3	15 69 30	447
448	20 07 04	89 915 592	21,1660	7,6517	2,65128	2,23214	1407,4	15 76 33	448
449	20 16 01	90 518 849	21,1896	7,6574	2,65225	2,22717	1410,6	15 83 37	449
450	20 25 00	91 125 000	21,2132	7,6631	2,65321	2,22222	1413,7	15 90 43	450

450—500

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	π
450	20 25 00	91 125 000	21,2132	7,6631	2,65321	2,22222	1413,7	15 90 43	450
451	20 34 01	91 733 851	21,2368	7,6688	2,65418	2,21729	1416,9	15 97 51	451
452	20 43 04	92 345 408	21,2603	7,6744	2,65514	2,21239	1420,0	16 04 60	452
453	20 52 09	92 959 677	21,2838	7,6801	2,65610	2,20751	1423,1	16 11 71	453
454	20 61 16	93 576 664	21,3073	7,6857	2,65706	2,20264	1426,3	16 18 83	454
455	20 70 25	94 196 375	21,3307	7,6914	2,65801	2,19788	1429,4	16 25 97	455
456	20 79 36	94 818 816	21,3542	7,6970	2,65896	2,19298	1432,6	16 33 13	456
457	20 88 49	95 443 993	21,3776	7,7026	2,65992	2,18818	1435,7	16 40 30	457
458	20 97 64	96 071 912	21,4009	7,7082	2,66087	2,18341	1438,8	16 47 48	458
459	21 06 81	96 702 579	21,4243	7,7139	2,66181	2,17865	1442,0	16 54 68	459
460	21 16 00	97 336 000	21,4476	7,7194	2,66276	2,17391	1445,1	16 61 90	460
461	21 25 21	97 972 181	21,4709	7,7250	2,66370	2,16920	1448,3	16 69 14	461
462	21 34 44	98 611 128	21,4942	7,7306	2,66464	2,16450	1451,4	16 76 39	462
463	21 43 69	99 252 847	21,5174	7,7362	2,66558	2,15983	1454,6	16 83 65	463
464	21 52 96	99 897 344	21,5407	7,7418	2,66652	2,15517	1457,7	16 90 93	464
465	21 62 25	100 544 625	21,5639	7,7473	2,66745	2,15054	1460,8	16 98 23	465
466	21 71 56	101 194 696	21,5870	7,7529	2,66839	2,14592	1464,0	17 05 54	466
467	21 80 89	101 847 563	21,6102	7,7584	2,66932	2,14133	1467,1	17 12 87	467
468	21 90 24	102 503 232	21,6333	7,7639	2,67025	2,13675	1470,3	17 20 21	468
469	21 99 61	103 161 709	21,6564	7,7695	2,67117	2,13220	1473,4	17 27 57	469
470	22 09 00	103 823 000	21,6795	7,7750	2,67210	2,12766	1476,5	17 34 94	470
471	22 18 41	104 487 111	21,7025	7,7805	2,67302	2,12314	1479,7	17 42 34	471
472	22 27 84	105 154 048	21,7256	7,7860	2,67394	2,11864	1482,8	17 49 74	472
473	22 37 29	105 823 817	21,7486	7,7915	2,67486	2,11416	1486,0	17 57 16	473
474	22 46 76	106 496 424	21,7715	7,7970	2,67578	2,10970	1489,1	17 64 60	474
475	22 56 25	107 171 875	21,7945	7,8025	2,67669	2,10526	1492,3	17 72 05	475
476	22 65 76	107 850 176	21,8174	7,8079	2,67761	2,10084	1495,4	17 79 52	476
477	22 75 29	108 531 333	21,8403	7,8134	2,67852	2,09644	1498,5	17 87 01	477
478	22 84 84	109 215 352	21,8632	7,8188	2,67943	2,09205	1501,7	17 94 51	478
479	22 94 41	109 902 239	21,8861	7,8243	2,68034	2,08768	1504,8	18 02 03	479
480	23 04 00	110 592 000	21,9089	7,8297	2,68124	2,08333	1508,0	18 09 56	480
481	23 13 61	111 284 641	21,9317	7,8352	2,68215	2,07900	1511,1	18 17 11	481
482	23 23 24	111 980 168	21,9545	7,8406	2,68305	2,07469	1514,2	18 24 67	482
483	23 32 89	112 678 587	21,9773	7,8460	2,68395	2,07039	1517,4	18 32 25	483
484	23 42 56	113 379 904	22,0000	7,8514	2,68485	2,06612	1520,5	18 39 84	484
485	23 52 25	114 084 125	22,0227	7,8568	2,68574	2,06186	1523,7	18 47 45	485
486	23 61 96	114 791 256	22,0454	7,8622	2,68664	2,05761	1526,8	18 55 08	486
487	23 71 69	115 501 303	22,0681	7,8676	2,68753	2,05339	1530,0	18 62 72	487
488	23 81 44	116 214 272	22,0907	7,8730	2,68842	2,04918	1533,1	18 70 38	488
489	23 91 21	116 930 169	22,1133	7,8784	2,68931	2,04499	1536,2	18 78 05	489
490	24 01 00	117 649 000	22,1359	7,8837	2,69020	2,04082	1539,4	18 85 74	490
491	24 10 81	118 370 771	22,1585	7,8891	2,69108	2,03666	1542,5	18 93 45	491
492	24 20 64	119 096 488	22,1811	7,8944	2,69197	2,03252	1545,7	19 01 17	492
493	24 30 49	119 823 157	22,2036	7,8998	2,69285	2,02840	1548,8	19 08 90	493
494	24 40 36	120 553 784	22,2261	7,9051	2,69373	2,02429	1551,9	19 16 55	494
495	24 50 25	121 287 375	22,2486	7,9105	2,69461	2,02020	1555,1	19 24 42	495
496	24 60 16	122 023 936	22,2711	7,9158	2,69548	2,01613	1558,2	19 32 21	496
497	24 70 09	122 763 473	22,2935	7,9211	2,69636	2,01207	1561,4	19 40 00	497
498	24 80 04	123 505 992	22,3159	7,9264	2,69723	2,00803	1564,5	19 47 52	498
499	24 90 01	124 251 499	22,3383	7,9317	2,69810	2,00401	1567,7	19 55 65	499
500	25 00 00	125 000 000	22,3607	7,9370	2,69897	2,00000	1570,8	19 63 50	500

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
500	25 00 00	125 000 000	22,3607	7,9370	2,69897	2,00000	1570,8	19 63 50	500
501	25 10 01	125 751 501	22,3830	7,9423	2,69984	1,99601	1573,9	19 71 36	501
502	25 20 04	126 506 008	22,4054	7,9476	2,70070	1,99203	1577,1	19 79 23	502
503	25 30 09	127 263 527	22,4277	7,9528	2,70157	1,98807	1580,2	19 87 13	503
504	25 40 16	128 024 064	22,4499	7,9581	2,70243	1,98413	1583,4	19 95 04	504
505	25 50 25	128 787 625	22,4722	7,9634	2,70329	1,98020	1586,5	20 02 56	505
506	25 60 36	129 554 216	22,4944	7,9686	2,70415	1,97628	1589,6	20 10 50	506
507	25 70 49	130 323 843	22,5167	7,9739	2,70501	1,97239	1592,8	20 18 46	507
508	25 80 64	131 096 512	22,5389	7,9791	2,70586	1,96850	1595,9	20 26 43	508
509	25 90 81	131 872 229	22,5610	7,9843	2,70672	1,96464	1599,1	20 34 42	509
510	26 01 00	132 651 000	22,5832	7,9896	2,70757	1,96078	1602,2	20 42 42	510
511	26 11 21	133 432 831	22,6053	7,9948	2,70842	1,95695	1605,4	20 50 44	511
512	26 21 44	134 217 728	22,6274	8,0000	2,70927	1,95312	1608,7	20 58 47	512
513	26 31 69	135 005 697	22,6495	8,0052	2,71012	1,94932	1611,6	20 66 52	513
514	26 41 96	135 796 744	22,6716	8,0104	2,71096	1,94553	1614,8	20 74 59	514
515	26 52 25	136 590 875	22,6936	8,0156	2,71181	1,94175	1617,9	20 83 07	515
516	26 62 56	137 388 096	22,7156	8,0208	2,71265	1,93798	1621,1	20 91 17	516
517	26 72 89	138 188 413	22,7376	8,0260	2,71349	1,93424	1624,2	20 99 28	517
518	26 83 24	138 991 832	22,7596	8,0311	2,71433	1,93050	1627,3	21 07 41	518
519	26 93 61	139 798 359	22,7817	8,0363	2,71517	1,92678	1630,5	21 15 56	519
520	27 04 00	140 608 000	22,8035	8,0415	2,71600	1,92308	1633,6	21 23 72	520
521	27 14 41	141 420 761	22,8254	8,0466	2,71684	1,91939	1636,8	21 31 89	521
522	27 24 84	142 236 648	22,8473	8,0517	2,71767	1,91571	1639,9	21 40 08	522
523	27 35 29	143 055 667	22,8692	8,0569	2,71850	1,91205	1643,1	21 48 29	523
524	27 45 76	143 877 824	22,8910	8,0620	2,71933	1,90840	1646,2	21 56 51	524
525	27 56 25	144 703 125	22,9129	8,0671	2,72016	1,90476	1649,3	21 64 75	525
526	27 66 76	145 531 576	22,9347	8,0723	2,72099	1,90114	1652,5	21 73 01	526
527	27 77 29	146 363 183	22,9565	8,0774	2,72181	1,89753	1655,6	21 81 28	527
528	27 87 84	147 197 952	22,9783	8,0825	2,72263	1,89394	1658,8	21 89 56	528
529	27 98 41	148 035 889	23,0000	8,0876	2,72346	1,89036	1661,9	21 97 87	529
530	28 09 00	148 877 000	23,0217	8,0927	2,72428	1,88679	1665,0	22 06 18	530
531	28 19 61	149 721 291	23,0434	8,0978	2,72509	1,88324	1668,2	22 14 52	531
532	28 30 24	150 568 768	23,0651	8,1028	2,72591	1,87970	1671,3	22 22 87	532
533	28 40 89	151 419 437	23,0868	8,1079	2,72673	1,87617	1674,5	22 31 23	533
534	28 51 56	152 273 304	23,1084	8,1130	2,72754	1,87266	1677,6	22 39 61	534
535	28 62 25	153 130 375	23,1301	8,1180	2,72835	1,86916	1680,8	22 48 01	535
536	28 72 96	153 990 656	23,1517	8,1231	2,72916	1,86567	1683,9	22 56 42	536
537	28 83 69	154 854 153	23,1733	8,1281	2,72997	1,86220	1687,0	22 64 84	537
538	28 94 44	155 720 872	23,1948	8,1332	2,73078	1,85874	1690,2	22 73 29	538
539	29 05 21	156 590 819	23,2164	8,1382	2,73159	1,85529	1693,3	22 81 75	539
540	29 16 00	157 464 000	23,2379	8,1433	2,73239	1,85185	1696,5	22 90 22	540
541	29 26 81	158 340 421	23,2594	8,1483	2,73320	1,84843	1699,6	22 98 71	541
542	29 37 64	159 220 688	23,2809	8,1533	2,73400	1,84502	1702,7	23 07 22	542
543	29 48 49	160 103 007	23,3024	8,1583	2,73480	1,83162	1705,9	23 15 74	543
544	29 59 36	160 989 184	23,3238	8,1633	2,73560	1,83824	1709,0	23 24 28	544
545	29 70 25	161 878 625	23,3452	8,1683	2,73640	1,83486	1712,2	23 32 83	545
546	29 81 16	162 771 336	23,3666	8,1733	2,73719	1,83150	1715,3	23 41 40	546
547	29 92 09	163 667 323	23,3880	8,1783	2,73799	1,82815	1718,5	23 49 98	547
548	30 03 04	164 566 562	23,4094	8,1833	2,73878	1,82482	1721,6	23 58 58	548
549	30 14 01	165 469 149	23,4307	8,1882	2,73957	1,82149	1724,7	23 67 20	549
550	30 25 00	166 375 000	23,4521	8,1932	2,74036	1,81816	1727,9	23 75 83	550

550—600

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\lg n$	$\log_{10} n$	$\log_{10} n$	$\frac{n-1}{4}$	n
550	30 25 00	166 375 000	23,4521	8,1932	2,74036	1,81818	1 727,9	23 75 83	550
551	30 36 01	167 284 151	23,4734	8,1982	2,74115	1,81488	1 731,0	23 84 48	551
552	30 47 04	168 196 608	23,4947	8,2031	2,74194	1,81159	1 734,2	23 93 14	552
553	30 58 09	169 112 377	23,5160	8,2081	2,74273	1,80832	1 737,3	24 01 82	553
554	30 69 16	170 031 464	23,5372	8,2130	2,74351	1,80505	1 740,4	24 10 51	554
555	30 80 25	170 953 875	23,5584	8,2180	2,74429	1,80180	1 743,6	24 19 22	555
556	30 91 36	171 879 616	23,5797	8,2229	2,74507	1,79856	1 746,7	24 27 95	556
557	31 02 49	172 808 693	23,6008	8,2278	2,74586	1,79533	1 749,9	24 36 69	557
558	31 13 64	173 741 112	23,6220	8,2327	2,74663	1,79211	1 753,0	24 45 45	558
559	31 24 81	174 676 879	23,6432	8,2377	2,74741	1,78891	1 756,2	24 54 22	559
560	31 36 00	175 616 000	23,6643	8,2426	2,74819	1,78571	1 759,3	24 63 01	560
561	31 47 21	176 558 481	23,6854	8,2475	2,74896	1,78253	1 762,4	24 71 81	561
562	31 58,44	177 504 328	23,7065	8,2524	2,74974	1,77936	1 765,6	24 80 63	562
563	31 69 69	178 453 547	23,7276	8,2573	2,75051	1,77620	1 768,7	24 89 47	563
564	31 80 96	179 406 144	23,7487	8,2621	2,75128	1,77305	1 771,9	24 98 32	564
565	31 92 25	180 362 125	23,7697	8,2670	2,75205	1,76991	1 775,0	25 07 19	565
566	32 03 56	181 321 496	23,7908	8,2719	2,75282	1,76678	1 778,1	25 16 07	566
567	32 14 89	182 284 263	23,8118	8,2768	2,75358	1,76367	1 781,3	25 24 97	567
568	32 26 24	183 250 432	23,8329	8,2816	2,75435	1,76056	1 784,4	25 33 88	568
569	32 37 61	184 220 009	23,8537	8,2865	2,75511	1,75747	1 787,6	25 42 81	569
570	32 49 00	185 193 000	23,8747	8,2913	2,75587	1,75439	1 790,7	25 51 76	570
571	32 60 41	186 169 411	23,8956	8,2962	2,75664	1,75131	1 793,8	25 60 72	571
572	32 71 84	187 149 248	23,9165	8,3010	2,75740	1,74825	1 797,0	25 69 70	572
573	32 83 29	188 132 517	23,9374	8,3059	2,75816	1,74520	1 800,1	25 78 69	573
574	32 94 76	189 119 224	23,9583	8,3107	2,75891	1,74216	1 803,3	25 87 70	574
575	33 06 25	190 109 375	23,9792	8,3155	2,75967	1,73913	1 806,4	25 96 72	575
576	33 17 76	191 102 976	24,0000	8,3203	2,76042	1,73611	1 809,6	26 05 76	576
577	33 29 29	192 100 033	24,0208	8,3251	2,76118	1,73310	1 812,7	26 14 82	577
578	33 40 84	193 100 552	24,0416	8,3300	2,76193	1,73010	1 815,8	26 23 89	578
579	33 52 41	194 104 639	24,0624	8,3348	2,76268	1,72712	1 819,0	26 32 98	579
580	33 64 00	195 112 000	24,0832	8,3396	2,76343	1,72414	1 822,2	26 42 08	580
581	33 75 61	196 122 941	24,1039	8,3443	2,76418	1,72117	1 825,3	26 51 20	581
582	33 87 24	197 137 368	24,1247	8,3491	2,76492	1,71821	1 828,4	26 60 33	582
583	33 98 89	198 155 287	24,1454	8,3539	2,76567	1,71527	1 831,6	26 69 48	583
584	34 10 56	199 176 704	24,1661	8,3587	2,76641	1,71233	1 834,7	26 78 65	584
585	34 22 25	200 201 625	24,1868	8,3634	2,76716	1,70940	1 837,8	26 87 83	585
586	34 33 96	201 230 056	24,2074	8,3682	2,76790	1,70648	1 841,0	26 97 03	586
587	34 45 69	202 262 003	24,2281	8,3730	2,76864	1,70358	1 844,1	27 06 24	587
588	34 57 44	203 297 472	24,2487	8,3777	2,76938	1,70068	1 847,3	27 15 47	588
589	34 69 21	204 336 469	24,2693	8,3825	2,77012	1,69779	1 850,4	27 24 71	589
590	34 81 00	205 379 000	24,2899	8,3872	2,77085	1,69492	1 853,5	27 33 97	590
591	34 92 81	206 425 071	24,3105	8,3919	2,77159	1,69205	1 856,7	27 43 25	591
592	35 04 64	207 474 688	24,3311	8,3967	2,77232	1,68919	1 859,8	27 52 54	592
593	35 16 49	208 527 857	24,3516	8,4014	2,77305	1,68634	1 863,0	27 61 84	593
594	35 28 36	209 584 584	24,3721	8,4061	2,77379	1,68350	1 866,1	27 71 17	594
595	35 40 25	210 644 875	24,3926	8,4108	2,77452	1,68067	1 869,2	27 80 51	595
596	35 52 16	211 708 736	24,4131	8,4155	2,77525	1,67785	1 872,4	27 89 86	596
597	35 64 09	212 776 173	24,4336	8,4202	2,77597	1,67504	1 875,5	27 99 23	597
598	35 76 04	213 847 192	24,4540	8,4249	2,77670	1,67224	1 878,7	28 08 62	598
599	35 88 01	214 921 799	24,4745	8,4296	2,77743	1,66945	1 881,8	28 18 02	599
600	36 00 00	216 000 000	24,4949	8,4343	2,77815	1,66667	1 885,0	28 27 43	600

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
600	36 00 00	216 000 000	24,4949	8,4343	2,77815	1,66667	1885,0	28 27 43	600
601	36 12 01	217 081 801	24,5153	8,4390	2,77887	1,66389	1888,1	28 36 87	601
602	36 24 04	218 167 208	24,5357	8,4437	2,77960	1,66113	1891,2	28 46 31	602
603	36 36 09	219 256 227	24,5561	8,4484	2,78032	1,65837	1894,4	28 55 78	603
604	36 48 16	220 348 864	24,5764	8,4530	2,78104	1,65563	1897,5	28 65 26	604
605	36 60 25	221 445 125	24,5967	8,4577	2,78176	1,65289	1900,7	28 74 75	605
606	36 72 36	222 545 016	24,6171	8,4623	2,78247	1,65017	1903,8	28 84 26	606
607	36 84 49	223 648 543	24,6374	8,4670	2,78319	1,64745	1906,9	28 93 79	607
608	36 96 64	224 755 712	24,6577	8,4716	2,78390	1,64474	1910,1	29 03 33	608
609	37 08 81	225 866 629	24,6779	8,4763	2,78462	1,64204	1913,2	29 12 89	609
610	37 21 00	226 981 000	24,6982	8,4809	2,78533	1,63934	1916,4	29 22 47	610
611	37 33 21	228 099 131	24,7184	8,4856	2,78604	1,63666	1919,5	29 32 06	611
612	37 45 44	229 220 628	24,7386	8,4902	2,78675	1,63399	1922,7	29 41 66	612
613	37 57 69	230 346 397	24,7588	8,4948	2,78746	1,63132	1925,8	29 51 28	613
614	37 69 96	231 475 544	24,7790	8,4994	2,78817	1,62866	1928,9	29 60 92	614
615	37 82 25	232 608 375	24,7992	8,5040	2,78888	1,62602	1932,1	29 70 57	615
616	37 94 56	233 744 896	24,8193	8,5086	2,78958	1,62338	1935,2	29 80 24	616
617	38 06 89	234 885 113	24,8396	8,5132	2,79029	1,62075	1938,4	29 89 92	617
618	38 19 24	236 029 032	24,8598	8,5178	2,79099	1,61812	1941,5	29 99 62	618
619	38 31 61	237 176 659	24,8797	8,5224	2,79169	1,61551	1944,6	30 09 34	619
620	38 44 00	238 328 000	24,8998	8,5270	2,79239	1,61290	1947,8	30 19 07	620
621	38 56 41	239 483 061	24,9199	8,5316	2,79309	1,61031	1950,9	30 28 82	621
622	38 68 84	240 641 848	24,9399	8,5362	2,79379	1,60772	1954,1	30 38 58	622
623	38 81 29	241 804 367	24,9600	8,5408	2,79449	1,60514	1957,2	30 48 36	623
624	38 93 76	242 970 624	24,9800	8,5453	2,79518	1,60256	1960,4	30 58 15	624
625	39 06 25	244 140 625	25,0000	8,5499	2,79588	1,60000	1963,5	30 67 96	625
626	39 18 76	245 312 376	25,0200	8,5544	2,79657	1,59744	1966,6	30 77 79	626
627	39 31 29	246 491 883	25,0400	8,5590	2,79727	1,59490	1969,8	30 87 63	627
628	39 43 84	247 673 152	25,0599	8,5635	2,79796	1,59236	1972,9	30 97 48	628
629	39 56 41	248 858 189	25,0799	8,5681	2,79865	1,58983	1976,1	31 07 36	629
630	39 69 00	250 047 000	25,0998	8,5726	2,79934	1,58730	1979,2	31 17 25	630
631	39 81 61	251 239 591	25,1197	8,5772	2,80003	1,58479	1982,3	31 27 15	631
632	39 94 24	252 435 968	25,1396	8,5817	2,80072	1,58228	1985,5	31 37 07	632
633	40 06 89	253 636 137	25,1595	8,5862	2,80140	1,57978	1988,6	31 47 00	633
634	40 19 56	254 840 194	25,1794	8,5907	2,80209	1,57729	1991,8	31 56 96	634
635	40 32 25	256 047 875	25,1992	8,5952	2,80277	1,57480	1994,9	31 66 92	635
636	40 44 96	257 259 456	25,2190	8,5997	2,80346	1,57233	1998,1	31 76 90	636
637	40 57 69	258 474 853	25,2389	8,6043	2,80414	1,56988	2 001,2	31 86 90	637
638	40 70 44	259 694 072	25,2587	8,6088	2,80482	1,56740	2 004,3	31 96 92	638
639	40 83 21	260 917 119	25,2784	8,6132	2,80550	1,56495	2 007,5	32 06 95	639
640	40 96 00	262 144 000	25,2982	8,6177	2,80618	1,56250	2 010,6	32 16 99	640
641	41 08 81	263 374 721	25,3180	8,6222	2,80686	1,56006	2 013,8	32 27 05	641
642	41 21 64	264 609 288	25,3377	8,6267	2,80754	1,55763	2 016,9	32 37 13	642
643	41 34 49	265 847 707	25,3574	8,6312	2,80821	1,55521	2 020,0	32 47 22	643
644	41 47 36	267 089 984	25,3772	8,6357	2,80889	1,55280	2 023,2	32 57 33	644
645	41 60 25	268 336 125	25,3969	8,6401	2,80956	1,55039	2 026,3	32 67 45	645
646	41 73 16	269 586 136	25,4165	8,6446	2,81023	1,54799	2 029,5	32 77 59	646
647	41 86 09	270 840 023	25,4363	8,6490	2,81090	1,54560	2 032,6	32 87 75	647
648	41 99 04	272 097 792	25,4568	8,6535	2,81158	1,54321	2 035,8	32 97 92	648
649	42 12 01	273 359 449	25,4765	8,6579	2,81224	1,54083	2 038,9	33 08 10	649
650	42 25 00	274 625 000	25,4961	8,6624	2,81291	1,53846	2 042,0	33 18 31	650

650—700

n	n^3	n^2	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1000}{n}$	π/n	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
650	42 25 00	274 625 000	25,4951	8,6624	2,81291	1,53846	2 042,0	33 18 31	650
651	42 38 01	275 894 451	25,5147	8,6668	2,81358	1,53610	2 045,2	33 28 58	651
652	42 51 04	277 167 808	25,5343	8,6713	2,81425	1,53374	2 048,3	33 38 76	652
653	42 64 09	278 445 077	25,5539	8,6757	2,81491	1,53139	2 051,5	33 49 01	653
654	42 77 17	279 726 264	25,5734	8,6801	2,81558	1,52905	2 054,6	33 59 27	654
655	42 90 25	281 011 375	25,5930	8,6845	2,81624	1,52672	2 057,7	33 69 55	655
656	43 03 36	282 300 416	25,6125	8,6889	2,81690	1,52439	2 060,9	33 79 86	656
657	43 16 49	283 593 393	25 6320	8,6934	2,81757	1,52207	2 064,0	33 90 16	657
658	43 19 64	284 890 312	25,6516	8,6978	2,81823	1,51976	2 067,2	34 00 49	658
659	43 42 81	286 191 179	25,6710	8,7022	2,81889	1,51745	2 070,3	34 10 83	659
660	43 56 00	287 496 000	25,6905	8,7066	2,81954	1,51515	2 073,5	34 21 19	660
661	43 69 21	288 804 781	25,7099	8,7110	2,82020	1,51286	2 076,6	34 31 57	661
662	43 82 44	290 117 528	25,7294	8,7154	2,82086	1,51057	2 079,7	34 41 96	662
663	43 95 69	291 434 247	25,7488	8,7198	2,82151	1,50830	2 082,9	34 52 37	663
664	44 08 96	292 754 944	25,7682	8,7241	2,82217	1,50602	2 086,0	34 62 79	664
665	44 22 25	294 079 635	25,7876	8,7285	2,82282	1,50376	2 089,2	34 73 23	665
666	44 35 56	295 408 296	25,8070	8,7329	2,82347	1,50150	2 092,3	34 83 68	666
667	44 48 89	296 740 963	25,8263	8,7373	2,82413	1,49925	2 095,4	34 94 15	667
668	44 62 24	298 077 632	25,8457	8,7416	2,82478	1,49701	2 098,6	35 04 64	668
669	44 75 61	299 418 309	25,8650	8,7460	2,82543	1,49477	2 101,7	35 15 14	669
670	44 89 00	300 763 000	25,8844	8,7503	2,82607	1,49254	2 104,9	35 25 65	670
671	45 02 41	302 111 711	25,9037	8,7547	2,82672	1,49031	2 108,0	35 36 18	671
672	45 15 84	303 464 448	25,9230	8,7590	2,82737	1,48810	2 111,2	35 46 73	672
673	45 29 29	304 821 217	25,9422	8,7634	2,82802	1,48588	2 114,3	35 57 30	673
674	45 42 76	306 182 024	25,9615	8,7677	2,82866	1,48368	2 117,4	35 67 88	674
675	45 56 25	307 546 875	25,9808	8,7721	2,82930	1,48148	2 120,6	35 78 47	675
676	45 69 76	308 915 776	26,0000	8,7764	2,82995	1,47929	2 123,7	35 89 08	676
677	45 82 39	310 288 733	26,0192	8,7807	2,83059	1,47710	2 126,9	35 99 71	677
678	45 96 84	311 665 752	26,0384	8,7850	2,83123	1,47493	2 130,0	36 10 35	678
679	46 10 41	313 046 839	26,0576	8,7893	2,83187	1,47275	2 133,1	36 21 01	679
680	46 24 00	314 432 000	26,0768	8,7937	2,83251	1,47059	2 136,3	36 31 68	680
681	46 37 61	315 821 241	26,0960	8,7980	2,83315	1,46843	2 139,4	36 42 37	681
682	46 51 24	317 214 568	26,1151	8,8023	2,83378	1,46628	2 142,6	36 53 08	682
683	46 64 89	318 611 987	26,1343	8,8066	2,83442	1,46413	2 145,7	36 63 80	683
684	46 78 56	320 013 504	26,1534	8,8109	2,83506	1,46199	2 148,8	36 74 53	684
685	46 92 25	321 419 125	26,1725	8,8152	2,83569	1,45985	2 152,0	36 85 29	685
686	47 05 96	322 828 856	26,1916	8,8194	2,83632	1,45773	2 155,1	36 96 05	686
687	47 19 69	324 242 703	26,2107	8,8237	2,83696	1,45560	2 158,3	37 06 84	687
688	47 33 44	325 660 672	26,2298	8,8280	2,83759	1,45349	2 161,4	37 17 64	688
689	47 47 21	327 082 769	26,2489	8,8323	2,83822	1,45138	2 164,6	37 28 45	689
690	47 61 00	328 509 000	26,2679	8,8366	2,83885	1,44928	2 167,7	37 39 28	690
691	47 74 81	329 939 371	26,2869	8,8408	2,83948	1,44718	2 170,8	37 50 13	691
692	47 88 64	331 373 888	26,3059	8,8451	2,84011	1,44509	2 174,0	37 60 99	692
693	48 02 49	332 812 557	26,3249	8,8493	2,84073	1,44300	2 177,1	37 71 87	693
694	48 16 36	334 255 384	26,3439	8,8536	2,84136	1,44092	2 180,3	37 82 76	694
695	48 30 25	335 702 375	26,3629	8,8578	2,84198	1,43885	2 183,4	37 93 67	695
696	48 44 16	337 153 536	26,3818	8,8621	2,84261	1,43678	2 186,5	38 04 59	696
697	48 58 09	338 608 873	26,4008	8,8663	2,84323	1,43472	2 189,7	38 15 53	697
698	48 72 04	340 068 392	26,4197	8,8706	2,84386	1,43266	2 192,8	38 26 49	698
699	48 86 01	341 532 099	26,4386	8,8748	2,84448	1,43062	2 196,0	38 37 64	699
700	49 00 00	343 000 000	26,4575	8,8790	2,84510	1,42857	2 199,1	38 48 45	700

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
700	49 00 00	343 000 000	26,4575	8,3790	2,84510	1,42857	2 199,1	38 48 45	700
701	49 14 01	344 472 101	26,4764	8,8833	2,84572	1,42653	2 202,3	38 59 45	701
702	49 28 04	346 948 408	26,4953	8,8875	2,84634	1,42450	2 205,4	38 70 47	702
703	49 42 09	347 428 927	26,5141	8,8917	2,84696	1,42248	2 208,5	38 81 51	703
704	49 56 16	348 913 664	26,5330	8,8959	2,84757	1,42045	2 211,7	38 92 56	704
705	49 70 25	350 402 625	26,5518	8,9001	2,84819	1,41844	2 214,8	39 03 63	705
706	49 84 36	351 895 816	26,5707	8,9043	2,84880	1,41643	2 218,0	39 14 71	706
707	49 98 49	353 393 243	26,5895	8,9085	2,84942	1,41443	2 221,1	39 25 80	707
708	50 12 64	354 894 912	26,6083	8,9127	2,85003	1,41243	2 224,2	39 36 92	708
709	50 26 81	356 400 829	26,6271	8,9169	2,85065	1,41044	2 227,4	39 48 05	709
710	50 41 00	357 911 000	26,6458	8,9211	2,85126	1,40845	2 230,5	39 59 19	710
711	50 55 21	359 425 431	26,6646	8,9253	2,85187	1,40647	2 233,7	39 70 35	711
712	50 69 44	360 944 128	26,6833	8,9295	2,85248	1,40449	2 236,8	39 81 53	712
713	50 83 69	362 467 097	26,7021	8,9337	2,85309	1,40252	2 240,0	39 92 72	713
714	50 97 96	363 994 344	26,7208	8,9378	2,85370	1,40056	2 243,1	40 03 93	714
715	51 12 25	365 525 875	26,7395	8,9420	2,85431	1,39860	2 246,2	40 15 15	715
716	51 26 56	367 061 696	26,7582	8,9462	2,85491	1,39665	2 249,4	40 26 39	716
717	51 41 29	368 601 813	26,7769	8,9503	2,85552	1,39470	2 252,5	40 37 65	717
718	51 55 54	370 146 232	26,7955	8,9545	2,85612	1,39276	2 255,7	40 48 92	718
719	51 69 61	371 694 989	26,8142	8,9587	2,85673	1,39082	2 258,8	40 60 20	719
720	51 84 00	373 248 000	26,8328	8,9628	2,85733	1,38889	2 261,9	40 71 50	720
721	51 98 41	374 805 361	26,8514	8,9670	2,85794	1,38696	2 265,1	40 82 82	721
722	52 12 84	376 367 048	26,8701	8,9711	2,85854	1,38504	2 268,2	40 94 15	722
723	52 27 29	377 933 067	26,8887	8,9752	2,85914	1,38313	2 271,4	41 05 50	723
724	52 41 76	379 503 424	26,9072	8,9794	2,85974	1,38122	2 274,5	41 16 87	724
725	52 56 25	381 078 125	26,9258	8,9835	2,86034	1,37931	2 277,7	41 28 25	725
726	52 70 76	382 657 176	26,9444	8,9876	2,86094	1,37741	2 280,8	41 39 65	726
727	52 85 29	384 240 583	26,9629	8,9918	2,86153	1,37552	2 283,9	41 51 06	727
728	52 99 84	385 828 352	26,9815	8,9959	2,86213	1,37363	2 287,1	41 62 48	728
729	53 14 41	387 420 489	27,0000	9,0000	2,86273	1,37174	2 290,2	41 73 93	729
730	53 29 00	389 017 000	27,0185	9,0041	2,86332	1,36986	2 293,4	41 85 39	730
731	53 43 61	390 617 891	27,0370	9,0082	2,86392	1,36799	2 296,5	41 96 86	731
732	53 58 24	392 223 168	27,0559	9,0123	2,86451	1,36612	2 299,6	42 08 35	732
733	53 72 89	393 832 837	27,0740	9,0164	2,86510	1,36426	2 302,8	42 19 86	733
734	53 87 56	395 446 904	27,0924	9,0205	2,86570	1,36240	2 305,9	42 31 38	734
735	54 02 25	397 065 375	27,1109	9,0246	2,86629	1,36054	2 309,1	42 42 93	735
736	54 16 96	398 688 256	27,1293	9,0287	2,86688	1,35870	2 312,2	42 54 47	736
737	54 31 69	400 315 583	27,1477	9,0328	2,86747	1,35685	2 315,4	42 66 04	737
738	54 46 44	401 947 272	27,1662	9,0369	2,86806	1,35501	2 318,5	42 77 62	738
739	54 61 21	403 583 419	27,1846	9,0410	2,86864	1,35318	2 321,6	42 89 22	739
740	54 76 00	405 224 000	27,2029	9,0450	2,86923	1,35135	2 324,8	43 00 84	740
741	54 90 81	406 869 021	27,2213	9,0491	2,86982	1,34953	2 327,9	43 12 47	741
742	55 05 64	408 518 488	27,2397	9,0532	2,87040	1,34771	2 331,1	43 24 12	742
743	55 20 49	410 172 407	27,2580	9,0572	2,87099	1,34590	2 334,2	43 35 78	743
744	55 35 36	411 830 784	27,2764	9,0613	2,87157	1,34409	2 337,3	43 47 48	744
745	55 50 25	413 493 625	27,2947	9,0654	2,87216	1,34228	2 340,5	43 59 16	745
746	55 65 16	415 160 936	27,3130	9,0694	2,87274	1,34048	2 343,6	43 70 87	746
747	55 80 09	416 832 723	27,3313	9,0735	2,87332	1,33869	2 346,8	43 82 59	747
748	55 95 04	418 508 992	27,3496	9,0775	2,87390	1,33690	2 349,9	43 94 33	748
749	56 10 01	420 189 749	27,3679	9,0816	2,87448	1,33511	2 353,1	44 06 09	749
750	56 25 00	421 875 000	27,3861	9,0856	2,87506	1,33333	2 356,2	44 17 86	750

750—800

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
750	56 25 00	421 875 000	27,3861	9,0856	2,87506	1,33333	2 356,2	44 17 86	750
751	56 40 01	423 564 751	27,4044	9,0896	2,87564	1,33156	2 359,3	44 29 66	751
752	56 55 04	425 259 008	27,4226	9,0937	2,87622	1,32979	2 362,5	44 41 45	752
753	56 70 09	426 957 777	27,4408	9,0977	2,87679	1,32802	2 365,6	44 53 28	753
754	56 85 16	428 661 064	27,4591	9,1017	2,87731	1,32626	2 368,8	44 65 11	754
755	57 00 25	430 368 875	27,4773	9,1057	2,87795	1,32450	2 371,9	44 76 97	755
756	57 15 36	432 081 216	27,4955	9,1098	2,87852	1,32275	2 375,0	44 88 83	756
757	57 30 49	433 798 093	27,5136	9,1138	2,87910	1,32100	2 378,2	45 00 72	757
758	57 45 64	435 519 512	27,5318	9,1178	2,87967	1,31926	2 381,3	45 12 62	758
759	57 60 81	437 245 479	27,5500	9,1218	2,88024	1,31752	2 384,5	45 24 53	759
760	57 76 00	438 976 000	27,5681	9,1258	2,88081	1,31579	2 387,6	45 36 46	760
761	57 91 21	440 711 081	27,5862	9,1298	2,88138	1,31406	2 390,8	45 48 41	761
762	58 06 44	442 450 728	27,6043	9,1338	2,88195	1,31234	2 393,9	45 60 37	762
763	58 21 69	444 194 947	27,6225	9,1378	2,88252	1,31062	2 397,0	45 72 34	763
764	58 36 96	445 943 744	27,6405	9,1418	2,88309	1,30890	2 400,2	45 84 34	764
765	58 52 25	447 697 125	27,6586	9,1458	2,88366	1,30719	2 403,3	45 96 35	765
766	58 67 56	449 456 096	27,6767	9,1498	2,88423	1,30548	2 406,5	46 08 37	766
767	58 82 89	451 217 663	27,6948	9,1537	2,88480	1,30378	2 409,6	46 20 41	767
768	58 98 24	452 984 832	27,7128	9,1577	2,88536	1,30208	2 412,7	46 32 47	768
769	59 13 61	454 756 609	27,7308	9,1617	2,88593	1,30039	2 415,9	46 44 54	769
770	59 29 00	456 533 000	27,7489	9,1657	2,88649	1,29870	2 419,0	46 56 63	770
771	59 44 41	458 314 011	27,7669	9,1696	2,88705	1,29702	2 422,2	46 68 73	771
772	59 59 84	460 099 648	27,7849	9,1736	2,88762	1,29534	2 425,3	46 80 85	772
773	59 75 29	461 889 917	27,8029	9,1775	2,88818	1,29366	2 428,5	46 92 98	773
774	59 90 76	463 684 824	27,8209	9,1815	2,88874	1,29199	2 431,6	47 05 13	774
775	60 06 25	465 484 375	27,8388	9,1855	2,88930	1,29032	2 434,7	47 17 30	775
776	60 21 76	467 288 676	27,8568	9,1894	2,88986	1,28865	2 437,9	47 29 48	776
777	60 37 29	469 097 433	27,8747	9,1933	2,89042	1,28700	2 441,0	47 41 68	777
778	60 52 84	470 910 952	27,8927	9,1973	2,89098	1,28535	2 444,2	47 53 89	778
779	60 68 41	472 729 139	27,9106	9,2012	2,89154	1,28370	2 447,3	47 66 12	779
780	60 84 00	474 552 000	27,9285	9,2052	2,89209	1,28205	2 450,4	47 78 36	780
781	60 99 61	476 379 541	27,9464	9,2091	2,89265	1,28041	2 453,6	47 90 62	781
782	61 15 24	478 211 768	27,9643	9,2130	2,89321	1,27877	2 456,7	48 02 90	782
783	61 30 89	480 048 687	27,9821	9,2170	2,89376	1,27714	2 459,9	48 15 19	783
784	61 46 56	481 890 304	28,0000	9,2209	2,89432	1,27551	2 463,0	48 27 50	784
785	61 62 25	483 736 625	28,0179	9,2248	2,89487	1,27389	2 466,2	48 39 82	785
786	61 77 96	485 587 656	28,0357	9,2287	2,89542	1,27226	2 469,3	48 52 16	786
787	61 93 69	487 443 403	28,0535	9,2326	2,89597	1,27065	2 472,4	48 64 51	787
788	62 09 44	489 303 872	28,0713	9,2365	2,89653	1,26904	2 475,6	48 76 88	788
789	62 25 21	491 169 069	28,0891	9,2404	2,89708	1,26743	2 478,7	48 89 27	789
790	62 41 00	493 039 000	28,1069	9,2443	2,89763	1,26582	2 481,9	49 01 67	790
791	62 56 81	494 913 671	28,1247	9,2482	2,89818	1,26422	2 485,0	49 14 09	791
792	62 72 64	496 793 088	28,1425	9,2521	2,89873	1,26263	2 488,1	49 26 52	792
793	62 88 49	498 677 257	28,1603	9,2560	2,89927	1,26103	2 491,3	49 39 37	793
794	63 04 36	500 566 184	28,1780	9,2599	2,89982	1,25945	2 494,4	49 51 83	794
795	63 20 25	502 459 875	28,1957	9,2638	2,90037	1,25786	2 497,6	49 63 91	795
796	63 36 16	504 358 336	28,2135	9,2677	2,90091	1,25628	2 500,7	49 76 41	796
797	63 52 09	506 261 573	28,2312	9,2716	2,90146	1,25471	2 503,8	49 88 92	797
798	63 68 04	508 169 592	28,2489	9,2754	2,90200	1,25313	2 507,0	50 01 45	798
799	63 84 01	510 082 399	28,2666	9,2793	2,90255	1,25156	2 510,1	50 13 99	799
800	64 00 00	512 000 000	28,2843	9,2832	2,90309	1,25000	2 513,3	50 26 56	800

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\frac{1}{n}$
800	64 00 00	512 000 000	28,2843	9,2832	2,90309	1,25000	2 513,3	50 26 55	800
801	64 16 01	513 922 401	28,3019	9,2870	2,90363	1,24844	2 516,4	50 39 12	801
802	64 32 04	515 849 608	28,3196	9,2909	2,90417	1,24688	2 519,6	50 51 71	802
803	64 48 09	516 781 627	28,3373	9,2948	2,90472	1,24533	2 522,7	50 64 32	803
804	64 64 16	518 718 404	28,3549	9,2986	2,90526	1,24378	2 525,8	50 76 94	804
805	64 80 25	521 660 125	28,3725	9,3025	2,90580	1,24224	2 529,0	50 89 58	805
806	64 96 36	523 606 616	28,3901	9,3063	2,90634	1,24069	2 532,1	51 02 23	806
807	65 12 49	525 557 943	28,4077	9,3102	2,90687	1,23916	2 535,3	51 14 90	807
808	65 28 64	527 514 112	28,4253	9,3140	2,90741	1,23762	2 538,4	51 27 58	808
809	65 44 81	529 475 129	28,4429	9,3179	2,90795	1,23609	2 541,5	51 40 28	809
810	65 61 00	531 441 000	28,4605	9,3217	2,90849	1,23457	2 544,7	51 53 00	810
811	65 77 21	533 411 731	28,4781	9,3255	2,90902	1,23305	2 547,8	51 65 73	811
812	66 03 44	535 387 328	28,4956	9,3294	2,90956	1,23153	2 551,0	51 78 48	812
813	66 09 69	537 367 797	28,5132	9,3332	2,91009	1,23001	2 554,1	51 91 24	813
814	66 25 96	539 353 144	28,5307	9,3370	2,91062	1,22850	2 557,3	52 04 02	814
815	66 42 25	541 343 375	28,5482	9,3408	2,91116	1,22699	2 560,4	52 16 81	815
816	66 58 56	543 338 496	28,5657	9,3447	2,91169	1,22549	2 563,5	52 29 62	816
817	66 74 89	545 338 513	28,5832	9,3485	2,91222	1,22399	2 566,7	52 42 45	817
818	66 91 24	547 343 432	28,6007	9,3523	2,91275	1,22249	2 569,8	52 55 29	818
819	67 07 61	549 353 259	28,6182	9,3561	2,91328	1,22100	2 573,0	52 68 14	819
820	67 24 00	551 368 000	28,6356	9,3599	2,91381	1,21951	2 576,1	52 81 02	820
821	67 40 41	553 387 661	28,6531	9,3637	2,91434	1,21803	2 579,2	52 93 91	821
822	67 56 84	555 412 248	28,6705	9,3675	2,91487	1,21655	2 582,4	53 06 81	822
823	67 73 29	557 441 767	28,6880	9,3713	2,91540	1,21507	2 585,5	53 19 73	823
824	67 89 76	559 476 224	28,7054	9,3751	2,91593	1,21359	2 588,7	53 32 67	824
825	68 06 25	561 515 626	28,7228	9,3789	2,91645	1,21212	2 591,8	53 45 62	825
826	68 22 76	563 559 976	28,7402	9,3827	2,91698	1,21065	2 595,0	53 58 58	826
827	68 39 29	565 609 283	28,7576	9,3865	2,91751	1,20919	2 598,1	53 71 57	827
828	68 55 84	567 663 552	28,7750	9,3902	2,91803	1,20773	2 601,2	53 84 56	828
829	68 72 41	569 722 789	28,7924	9,3940	2,91855	1,20627	2 604,4	53 97 58	829
830	68 89 00	571 787 000	28,8097	9,3978	2,91908	1,20482	2 607,5	54 10 15	830
831	69 05 61	573 856 191	28,8271	9,4016	2,91960	1,20337	2 610,7	54 23 66	831
832	69 22 24	575 930 368	28,8444	9,4053	2,92012	1,20192	2 613,8	54 36 71	832
833	69 38 89	578 009 537	28,8617	9,4091	2,92065	1,20048	2 616,9	54 49 79	833
834	69 55 56	580 093 704	28,8791	9,4129	2,92117	1,19904	2 620,1	54 62 88	834
835	69 72 25	582 182 875	28,8964	9,4166	2,92169	1,19760	2 623,2	54 75 99	835
836	69 88 96	584 277 056	28,9137	9,4204	2,92221	1,19617	2 626,4	54 89 12	836
837	70 05 69	586 376 253	28,9310	9,4241	2,92273	1,19474	2 629,5	55 02 26	837
838	70 22 44	588 480 472	28,9482	9,4279	2,92324	1,19332	2 632,7	55 15 41	838
839	70 39 21	590 589 719	28,9655	9,4316	2,92376	1,19190	2 635,8	55 28 58	839
840	70 56 00	592 704 000	28,9828	9,4354	2,92428	1,19048	2 638,9	55 41 77	840
841	70 72 81	594 823 321	29,0000	9,4391	2,92480	1,18906	2 642,1	55 54 97	841
842	70 89 64	596 947 688	29,0172	9,4429	2,92531	1,18765	2 645,2	55 68 19	842
843	71 06 49	599 077 107	29,0345	9,4466	2,92583	1,18624	2 648,4	55 81 42	843
844	71 23 36	601 211 584	29,0517	9,4503	2,92634	1,18483	2 651,5	55 94 67	844
845	71 40 25	603 351 125	29,0689	9,4541	2,92686	1,18343	2 654,6	56 07 94	845
846	71 57 16	605 495 736	29,0861	9,4578	2,92737	1,18203	2 657,8	56 21 22	846
847	71 74 09	607 645 423	29,1033	9,4615	2,92788	1,18064	2 660,9	56 34 52	847
848	71 91 04	609 800 192	29,1204	9,4652	2,92840	1,17925	2 664,1	56 47 83	848
849	72 08 01	611 960 049	29,1376	9,4690	2,92891	1,17786	2 667,2	56 61 16	849
850	72 25 00	614 125 000	29,1548	9,4727	2,92942	1,17647	2 670,4	56 74 50	850

850—900

п	п ²	п ³	$\sqrt{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	1/n	$\frac{1000}{n}$	π	$\frac{\pi^2}{4}$	п
850	72 26 00	614 125 000	29,1548	9,4727	2,92942	1,17647	2 670,4	56 74 50	850
851	72 42 01	616 295 051	29,1719	9,4764	2,92993	1,17509	2 673,5	56 87 86	851
852	72 59 04	618 470 208	29,1890	9,4801	2,93044	1,17371	2 676,6	57 01 24	852
853	73 76 09	620 650 477	29,2062	9,4838	2,93095	1,17233	2 679,8	57 14 63	853
854	73 93 16	622 833 864	29,2233	9,4875	2,93146	1,17096	2 682,9	57 28 03	854
855	73 10 25	625 026 375	29,2404	9,4912	2,93197	1,16959	2 686,1	57 41 46	855
856	73 27 36	627 222 016	29,2575	9,4949	2,93247	1,16822	2 689,2	57 54 90	856
857	73 44 49	629 422 793	29,2746	9,4986	2,93298	1,16686	2 692,3	57 68 35	857
858	73 61 64	631 628 712	29,2916	9,5023	2,93349	1,16550	2 695,5	57 81 82	858
859	73 78 81	633 839 779	29,3087	9,5060	2,93399	1,16414	2 698,6	57 95 30	859
860	73 96 00	636 056 000	29,3258	9,5097	2,93450	1,16279	2 701,8	58 08 60	860
861	74 13 21	638 277 321	29,3428	9,5134	2,93500	1,16144	2 704,9	58 22 32	861
862	74 30 44	640 503 968	29,3598	9,5171	2,93551	1,16009	2 708,1	58 35 85	862
863	74 47 69	642 735 647	29,3769	9,5207	2,93601	1,15875	2 711,2	58 49 40	863
864	74 64 96	644 972 544	29,3939	9,5244	2,93651	1,15741	2 714,3	58 62 97	864
865	74 82 25	647 214 625	29,4109	9,5281	2,93702	1,15607	2 717,5	58 76 55	865
866	74 99 56	649 461 896	29,4279	9,5317	2,93752	1,15473	2 720,6	58 90 14	866
867	75 16 89	651 714 365	29,4449	9,5354	2,93802	1,15340	2 723,8	59 03 75	867
868	75 34 24	653 972 032	29,4618	9,5391	2,93852	1,15207	2 726,9	59 17 38	868
869	75 51 61	656 234 909	29,4788	9,5427	2,93902	1,15075	2 730,0	59 31 02	869
870	75 69 00	658 503 000	29,4958	9,5464	2,93952	1,14943	2 733,2	59 44 68	870
871	75 86 41	660 776 311	29,5127	9,5501	2,94002	1,14811	2 736,3	59 58 35	871
872	76 03 84	663 054 848	29,5296	9,5537	2,94052	1,14679	2 739,5	59 72 04	872
873	76 21 29	665 338 617	29,5466	9,5574	2,94101	1,14548	2 742,6	59 85 75	873
874	76 38 76	667 627 624	29,5635	9,5610	2,94151	1,14416	2 745,8	59 99 47	874
875	76 56 25	669 921 875	29,5804	9,5647	2,94201	1,14286	2 748,9	60 13 20	875
876	76 73 76	672 221 376	29,5973	9,5683	2,94250	1,14155	2 752,0	60 26 96	876
877	76 91 29	674 526 133	29,6142	9,5719	2,94300	1,14025	2 755,2	60 40 73	877
878	77 08 84	676 836 152	29,6311	9,5756	2,94349	1,13895	2 758,3	60 54 51	878
879	77 26 41	679 151 439	29,6479	9,5792	2,94399	1,13766	2 761,5	60 68 31	879
880	77 44 00	681 472 000	29,6648	9,5828	2,94448	1,13636	2 764,6	60 82 12	880
881	77 61 61	683 797 841	29,6816	9,5865	2,94498	1,13507	2 767,7	60 95 95	881
882	77 79 24	686 128 968	29,6985	9,5901	2,94547	1,13379	2 770,9	61 09 80	882
883	77 96 89	688 465 387	29,7153	9,5937	2,94596	1,13250	2 774,0	61 23 66	883
884	78 14 56	690 807 104	29,7321	9,5973	2,94645	1,13122	2 777,2	61 37 54	884
885	78 32 25	693 154 125	29,7489	9,6010	2,94694	1,12994	2 780,3	61 51 43	885
886	78 49 96	695 506 456	29,7658	9,6046	2,94743	1,12867	2 783,5	61 65 34	886
887	78 67 69	697 864 103	29,7825	9,6082	2,94792	1,12740	2 786,6	61 79 27	887
888	78 85 44	700 227 072	29,7993	9,6118	2,94841	1,12613	2 789,7	61 93 21	888
889	79 03 21	702 595 369	29,8161	9,6154	2,94890	1,12486	2 792,9	62 07 17	889
890	79 21 00	704 969 000	29,8329	9,6190	2,94939	1,12360	2 796,0	62 21 14	890
891	79 38 81	707 347 971	29,8496	9,6226	2,94988	1,12233	2 799,2	62 35 12	891
892	79 56 64	709 732 888	29,8664	9,6262	2,95036	1,12108	2 802,3	62 49 13	892
893	79 74 49	712 121 967	29,8831	9,6298	2,95085	1,11982	2 805,4	62 63 15	893
894	79 92 36	714 516 984	29,8998	9,6334	2,95134	1,11857	2 808,6	62 77 18	894
895	80 10 25	716 917 375	29,9166	9,6370	2,95182	1,11732	2 811,7	62 91 24	895
896	80 28 16	719 323 136	29,9333	9,6406	2,95231	1,11607	2 814,9	63 05 30	896
897	80 46 09	721 734 173	29,9500	9,6442	2,95279	1,11483	2 818,0	63 19 38	897
898	80 64 04	724 150 792	29,9666	9,6477	2,95328	1,11359	2 821,2	63 33 48	898
899	80 82 01	726 572 699	29,9833	9,6513	2,95376	1,11235	2 824,3	63 47 60	899
900	81 00 00	729 000 000	30,0000	9,6549	2,95424	1,11111	2 827,4	63 61 73	900

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	π
900	81 00 00	729 000 000	30,0000	9,6549	2,95424	1,11111	2 827,4	63 61 73	900
901	81 18 01	731 432 701	30,0167	9,6588	2,95472	1,10988	2 830,6	63 78 87	901
902	81 36 04	733 870 808	30,0333	9,6620	2,95521	1,10865	2 833,7	63 90 03	902
903	81 54 09	736 314 327	30,0500	9,6655	2,95569	1,10742	2 836,9	64 04 21	903
904	81 72 16	738 763 264	30,0666	9,6692	2,95617	1,10619	2 840,0	64 18 40	904
905	81 90 25	741 217 625	30,0832	9,6727	2,95665	1,10497	2 843,1	64 32 61	905
906	82 08 36	743 677 416	30,0998	9,6763	2,95713	1,10375	2 846,3	64 46 83	906
907	82 26 49	746 142 643	30,1164	9,6799	2,95761	1,10254	2 849,4	64 61 07	907
908	82 44 64	748 613 312	30,1330	9,6834	2,95809	1,10132	2 852,6	64 75 33	908
909	82 62 81	751 089 429	30,1496	9,6870	2,95856	1,10011	2 855,7	64 89 60	909
910	82 81 00	753 571 000	30,1662	9,6906	2,95904	1,09890	2 858,8	65 03 88	910
911	82 99 21	756 058 031	30,1828	9,6941	2,95952	1,09769	2 862,0	65 18 18	911
912	83 17 44	758 550 528	30,1993	9,6976	2,95999	1,09649	2 865,1	65 32 50	912
913	83 35 69	761 048 497	30,2159	9,7012	2,96047	1,09529	2 868,3	65 46 84	913
914	83 53 96	763 551 944	30,2324	9,7047	2,96095	1,09409	2 871,4	65 61 18	914
915	83 72 25	766 060 875	30,2490	9,7082	2,96142	1,09290	2 874,6	65 75 65	915
916	83 90 56	768 575 296	30,2655	9,7118	2,96190	1,09170	2 877,7	65 89 93	916
917	84 08 19	771 095 213	30,2820	9,7153	2,96237	1,09051	2 880,8	66 04 33	917
918	84 27 24	773 620 632	30,2985	9,7188	2,96284	1,08932	2 884,0	66 18 74	918
919	84 45 51	776 151 559	30,3150	9,7224	2,96334	1,08814	2 887,1	66 33 17	919
920	84 64 00	778 688 000	30,3315	9,7259	2,96379	1,08696	2 890,3	66 47 61	920
921	84 82 41	781 229 961	30,3480	9,7294	2,96426	1,08578	2 893,4	66 62 07	921
922	85 00 24	783 777 448	30,3645	9,7329	2,96473	1,08460	2 896,5	66 76 54	922
923	85 19 29	786 330 467	30,3809	9,7364	2,96520	1,08342	2 899,7	66 91 03	923
924	85 37 16	788 889 024	30,3974	9,7400	2,96567	1,08225	2 902,8	67 05 54	924
925	85 55 25	791 453 125	30,4138	9,7435	2,96614	1,08108	2 906,0	67 20 06	925
926	85 74 76	794 022 776	30,4302	9,7470	2,96661	1,07991	2 909,1	67 34 80	926
927	85 93 29	796 597 983	30,4467	9,7505	2,96708	1,07875	2 912,3	67 49 15	927
928	86 11 84	799 178 752	30,4631	9,7540	2,96755	1,07759	2 915,4	67 63 72	928
929	86 30 41	801 765 089	30,4795	9,7575	2,96802	1,07643	2 918,5	67 78 31	929
930	86 49 00	804 357 000	30,4959	9,7610	2,96848	1,07527	2 921,7	67 92 91	930
931	86 67 61	806 954 491	30,5123	9,7645	2,96895	1,07411	2 924,8	68 07 52	931
932	86 86 24	809 557 568	30,5287	9,7680	2,96942	1,07296	2 928,0	68 22 16	932
933	87 04 89	812 166 237	30,5450	9,7715	2,96988	1,07181	2 931,1	68 36 80	933
934	87 23 56	814 780 504	30,5614	9,7750	2,97035	1,07066	2 934,2	68 51 47	934
935	87 42 25	817 400 375	30,5778	9,7785	2,97081	1,06952	2 937,4	68 66 15	935
936	87 60 96	820 025 856	30,5941	9,7819	2,97128	1,06838	2 940,5	68 80 64	936
937	87 79 69	822 656 953	30,6105	9,7854	2,97174	1,06724	2 943,7	68 95 55	937
938	87 98 44	825 293 672	30,6268	9,7889	2,97220	1,06610	2 946,8	69 10 28	938
939	88 17 21	827 936 019	30,6431	9,7924	2,97267	1,06496	2 950,0	69 25 02	939
940	88 36 00	830 584 000	30,6594	9,7959	2,97313	1,06383	2 953,1	69 39 78	940
941	88 54 81	833 237 621	30,6757	9,7993	2,97359	1,06270	2 956,2	69 54 55	941
942	88 73 64	835 896 888	30,6920	9,8028	2,97405	1,06157	2 959,4	69 69 34	942
943	88 92 49	838 561 807	30,7083	9,8063	2,97451	1,06045	2 962,5	69 84 15	943
944	89 11 36	841 232 384	30,7246	9,8097	2,97497	1,05932	2 965,7	69 98 97	944
945	89 30 25	843 908 625	30,7409	9,8132	2,97543	1,05820	2 968,8	70 13 60	945
946	89 49 16	846 590 656	30,7571	9,8167	2,97589	1,05708	2 971,9	70 28 65	946
947	89 68 09	849 278 123	30,7734	9,8201	2,97635	1,05597	2 975,1	70 43 52	947
948	89 87 04	851 971 392	30,7896	9,8236	2,97681	1,05485	2 978,2	70 58 40	948
949	90 06 01	854 670 349	30,8058	9,8270	2,97727	1,05374	2 981,4	70 73 30	949
950	90 25 00	857 375 000	30,8221	9,8305	2,97772	1,05263	2 984,5	70 88 22	950

850—1000

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	π
950	90 25 00	857 375 000	30,8221	9,8305	2,97772	1,05263	2 984,5	70 88 22	950
951	90 44 01	860 085 351	30,8389	9,8339	2,97818	1,05152	2 987,7	71 03 15	951
952	90 63 04	862 801 408	30,8545	9,8374	2,97864	1,05042	2 990,8	71 18 09	952
953	90 82 09	865 523 177	30,8707	9,8408	2,97909	1,04932	2 993,9	71 33 06	953
954	91 01 16	868 250 664	30,8869	9,8443	2,97955	1,04822	2 997,1	71 48 03	954
955	91 20 28	870 983 875	30,9031	9,8477	2,98000	1,04712	3 000,2	71 63 03	955
956	91 39 36	873 722 816	30,9192	9,8511	2,98046	1,04603	3 003,4	71 78 04	956
957	91 58 59	876 467 493	30,9354	9,8546	2,98091	1,04493	3 006,5	71 93 06	957
958	91 77 64	879 217 912	30,9516	9,8580	2,98137	1,04384	3 009,6	72 08 10	958
959	91 96 81	881 974 079	30,9677	9,8614	2,98182	1,04275	3 012,8	72 23 16	959
960	92 16 00	884 736 000	30,9839	9,8648	2,98227	1,04167	3 015,9	72 38 23	960
961	92 35 21	887 503 681	31,0000	9,8683	2,98272	1,04058	3 019,1	72 53 32	961
962	92 54 44	890 277 128	31,0161	9,8717	2,98318	1,03950	3 022,2	72 68 42	962
963	92 73 69	893 056 347	31,0322	9,8751	2,98363	1,03842	3 025,4	72 83 54	963
964	92 92 96	895 841 344	31,0483	9,8785	2,98408	1,03734	3 028,5	72 98 67	964
965	93 12 25	898 632 125	31,0644	9,8819	2,98453	1,03627	3 031,6	72 13 82	965
966	93 31 56	901 428 696	31,0805	9,8854	2,98498	1,03520	3 034,8	73 28 99	966
967	93 50 89	904 231 063	31,0966	9,8888	2,98543	1,03413	3 037,9	73 44 17	967
968	93 70 24	907 039 232	31,1127	9,8922	2,98588	1,03306	3 041,1	73 59 37	968
969	93 89 61	909 853 209	31,1288	9,8956	2,98632	1,03199	3 044,2	73 74 58	969
970	94 09 00	912 673 000	31,1448	9,8990	2,98677	1,03093	3 047,3	73 89 81	970
971	94 28 41	915 498 611	31,1609	9,9024	2,98722	1,02987	3 050,5	74 05 06	971
972	94 47 84	918 330 048	31,1769	9,9058	2,98767	1,02881	3 053,6	74 20 32	972
973	94 67 29	921 127 317	31,1929	9,9092	2,98811	1,02775	3 056,8	74 35 59	973
974	94 86 76	924 010 424	31,2090	9,9125	2,98856	1,02669	3 059,9	74 50 88	974
975	95 06 25	926 859 375	31,2250	9,9160	2,98900	1,02564	3 063,1	74 66 19	975
976	95 25 76	929 714 176	31,2410	9,9194	2,98945	1,02459	3 066,2	74 81 51	976
977	95 45 29	932 574 833	31,2570	9,9227	2,98989	1,02354	3 069,3	74 96 8	977
978	95 64 84	935 441 352	31,2730	9,9261	2,99034	1,02249	3 072,5	75 12 2	978
979	95 84 41	938 313 739	31,2890	9,9295	2,99078	1,02145	3 075,6	75 27 58	979
980	96 04 00	941 192 000	31,3050	9,9329	2,99123	1,02041	3 078,8	75 42 96	980
981	96 23 61	944 076 141	31,3209	9,9363	2,99167	1,01937	3 081,9	75 58 37	981
982	96 43 24	946 966 168	31,3369	9,9396	2,99211	1,01833	3 085,0	75 73 78	982
983	96 62 89	949 862 087	31,3528	9,9430	2,99255	1,01729	3 088,2	75 89 22	983
984	96 82 56	952 763 904	31,3688	9,9464	2,99300	1,01626	3 091,3	76 04 66	984
985	97 02 25	955 671 625	31,3847	9,9497	2,99344	1,01523	3 094,5	76 20 13	985
986	97 21 96	958 585 256	31,4006	9,9531	2,99388	1,01420	3 097,6	76 35 61	986
987	97 41 69	961 504 803	31,4166	9,9565	2,99432	1,01317	3 100,8	76 51 11	987
988	97 61 44	964 430 272	31,4325	9,9598	2,99476	1,01215	3 103,9	76 66 62	988
989	97 81 21	967 361 669	31,4484	9,9632	2,99520	1,01112	3 107,0	76 82 14	989
990	98 01 00	970 299 000	31,4643	9,9666	2,99564	1,01010	3 110,2	76 97 69	990
991	98 20 81	973 242 271	31,4802	9,9699	2,99607	1,00908	3 113,3	77 13 25	991
992	98 40 64	976 191 488	31,4960	9,9733	2,99651	1,00806	3 116,5	77 28 82	992
993	98 60 49	979 146 657	31,5119	9,9766	2,99695	1,00705	3 119,6	77 44 41	993
994	98 80 36	982 107 784	31,5278	9,9800	2,99739	1,00604	3 122,7	77 60 02	994
995	99 00 25	985 074 875	31,5436	9,9833	2,99782	1,00503	3 125,9	77 75 64	995
996	99 20 16	988 047 936	31,5595	9,9866	2,99826	1,00402	3 129,0	77 91 28	996
997	99 40 09	991 026 973	31,5753	9,9900	2,99870	1,00301	3 132,2	78 06 93	997
998	99 60 04	994 011 992	31,5911	9,9933	2,99913	1,00200	3 135,3	78 22 60	998
999	99 80 01	997 002 999	31,6070	9,9967	2,99957	1,00100	3 138,5	78 38 28	999
1000	100 00 00	1000 000 000	31,6228	10,0000	3,00000	1,00000	3 141,6	78 53 98	1000

Б. Квадраты и кубы чисел от 1001 до 1450.

п	п ²	п ³	п	п ²	п ³	п	п ²	п ³
1001	1 00 20 01	1 003 003 001	1051	1 10 46 01	1 160 935 651	1101	1 21 22 01	1 334 633 301
1002	1 00 40 04	1 006 012 008	1052	1 10 67 04	1 164 252 608	1102	1 21 44 04	1 338 273 208
1003	1 00 60 09	1 009 027 027	1053	1 10 88 09	1 167 575 877	1103	1 21 66 09	1 341 919 727
1004	1 00 80 16	1 012 048 064	1054	1 11 09 16	1 170 905 464	1104	1 21 88 16	1 345 572 864
1005	1 01 00 25	1 015 075 125	1055	1 11 30 25	1 174 241 375	1105	1 22 10 25	1 349 232 625
1006	1 01 20 36	1 018 108 216	1056	1 11 51 36	1 177 583 616	1106	1 22 32 36	1 352 899 016
1007	1 01 40 49	1 021 147 343	1057	1 11 72 49	1 180 932 193	1107	1 22 54 49	1 356 572 043
1008	1 01 60 64	1 024 192 512	1058	1 11 93 64	1 184 287 112	1108	1 22 76 64	1 360 251 712
1009	1 01 80 81	1 027 243 729	1059	1 12 14 81	1 187 648 379	1109	1 22 98 81	1 363 938 029
1010	1 02 01 00	1 030 301 000	1060	1 12 36 00	1 191 016 000	1110	1 23 21 00	1 367 631 000
1011	1 02 21 21	1 033 364 331	1061	1 12 57 21	1 194 389 981	1111	1 23 43 21	1 371 330 631
1012	1 02 41 44	1 036 433 728	1062	1 12 78 44	1 197 770 328	1112	1 23 65 44	1 375 036 928
1013	1 02 61 69	1 039 509 197	1063	1 12 99 69	1 201 157 047	1113	1 23 87 69	1 378 749 897
1014	1 02 81 96	1 042 590 744	1064	1 13 20 96	1 204 550 144	1114	1 24 09 96	1 382 469 544
1015	1 03 02 25	1 045 678 375	1065	1 13 42 25	1 207 949 625	1115	1 24 32 25	1 386 195 875
1016	1 03 22 56	1 048 772 096	1066	1 13 63 56	1 211 355 496	1116	1 24 54 56	1 389 928 896
1017	1 03 42 89	1 051 871 913	1067	1 13 84 89	1 214 767 763	1117	1 24 76 89	1 393 668 613
1018	1 03 63 24	1 054 977 832	1068	1 14 06 24	1 218 186 432	1118	1 24 99 24	1 397 415 032
1019	1 03 83 61	1 058 089 859	1069	1 14 27 61	1 221 611 509	1119	1 25 21 61	1 401 168 159
1020	1 04 04 00	1 061 208 000	1070	1 14 49 00	1 225 043 000	1120	1 25 44 00	1 404 928 000
1021	1 04 24 41	1 064 332 261	1071	1 14 70 41	1 228 480 911	1121	1 25 66 41	1 408 694 561
1022	1 04 44 84	1 067 462 648	1072	1 14 91 84	1 231 925 248	1122	1 25 88 84	1 412 467 848
1023	1 04 65 29	1 070 599 167	1073	1 15 13 29	1 235 376 017	1123	1 26 11 29	1 416 247 867
1024	1 04 85 76	1 073 741 824	1074	1 15 34 76	1 238 833 224	1124	1 26 33 76	1 420 034 624
1025	1 05 06 25	1 076 890 625	1075	1 15 56 25	1 242 296 875	1125	1 26 56 25	1 423 828 125
1026	1 05 26 76	1 080 045 576	1076	1 15 77 76	1 245 766 976	1126	1 26 78 76	1 427 628 376
1027	1 05 47 29	1 083 206 683	1077	1 15 99 29	1 249 243 533	1127	1 27 01 29	1 431 435 383
1028	1 05 67 84	1 086 373 952	1078	1 16 20 84	1 252 726 552	1128	1 27 23 84	1 435 249 152
1029	1 05 88 41	1 089 547 389	1079	1 16 42 41	1 256 216 039	1129	1 27 46 41	1 439 069 889
1030	1 06 09 00	1 092 727 000	1080	1 16 64 00	1 259 712 000	1130	1 27 69 00	1 442 897 000
1031	1 06 29 61	1 095 912 791	1081	1 16 85 61	1 263 214 441	1131	1 27 91 61	1 446 731 091
1032	1 06 50 24	1 099 104 768	1082	1 17 07 24	1 266 723 368	1132	1 28 14 24	1 450 571 968
1033	1 06 70 89	1 102 302 927	1083	1 17 28 89	1 270 238 787	1133	1 28 36 89	1 454 419 637
1034	1 06 91 56	1 105 507 304	1084	1 17 50 56	1 273 760 704	1134	1 28 59 56	1 458 274 104
1035	1 07 12 25	1 108 717 875	1085	1 17 72 25	1 277 289 125	1135	1 28 82 25	1 462 135 375
1036	1 07 32 96	1 111 934 656	1086	1 17 93 96	1 280 824 056	1136	1 29 04 96	1 466 003 456
1037	1 07 53 69	1 115 157 653	1087	1 18 15 69	1 284 365 503	1137	1 29 27 69	1 469 878 353
1038	1 07 74 44	1 118 366 872	1088	1 18 37 44	1 287 913 472	1138	1 29 50 44	1 473 760 072
1039	1 07 95 21	1 121 622 319	1089	1 18 59 21	1 291 467 969	1139	1 29 73 21	1 477 648 619
1040	1 08 16 00	1 124 864 000	1090	1 18 81 00	1 295 029 000	1140	1 29 96 00	1 481 544 000
1041	1 08 36 81	1 128 111 921	1091	1 19 02 81	1 298 596 571	1141	1 30 18 81	1 485 446 221
1042	1 08 57 63	1 131 368 088	1092	1 19 24 84	1 302 170 688	1142	1 30 41 64	1 489 355 288
1043	1 08 78 49	1 134 626 507	1093	1 19 46 49	1 305 751 357	1143	1 30 64 49	1 493 271 207
1044	1 08 99 36	1 137 893 184	1094	1 19 68 36	1 309 338 584	1144	1 30 87 36	1 497 193 984
1045	1 09 20 25	1 141 166 125	1095	1 19 90 25	1 312 932 375	1145	1 31 10 25	1 501 123 625
1046	1 09 41 16	1 144 445 336	1096	1 20 12 16	1 316 532 736	1146	1 31 33 16	1 505 060 136
1047	1 09 62 09	1 147 730 523	1097	1 20 34 09	1 320 139 673	1147	1 31 56 09	1 509 003 523
1048	1 09 83 04	1 151 022 892	1098	1 20 56 04	1 323 753 192	1148	1 31 79 04	1 512 953 792
1049	1 10 04 01	1 154 320 649	1099	1 20 78 01	1 327 373 299	1149	1 32 02 01	1 516 910 949
1050	1 10 25 00	1 157 625 000	1100	1 21 00 00	1 331 000 000	1150	1 32 25 00	1 520 875 000

n	n²	n³	n	n²	n³	n	n²	n³
1150	1 32 25 00	1 520 875 000	1200	1 44 00 00	1 732 000 000	1250	1 56 25 00	1 953 125 000
1151	1 32 48 01	1 524 845 951	1201	1 44 24 01	1 732 323 601	1251	1 56 50 01	1 957 816 251
1152	1 32 71 04	1 528 823 808	1202	1 44 48 04	1 736 654 408	1252	1 56 75 04	1 962 516 008
1153	1 32 94 09	1 532 808 577	1203	1 44 72 09	1 740 992 427	1253	1 57 00 09	1 967 221 277
1154	1 33 17 16	1 536 800 264	1204	1 44 96 16	1 745 337 664	1254	1 57 25 16	1 971 935 064
1155	1 33 40 25	1 540 798 875	1205	1 45 20 25	1 749 690 125	1255	1 57 50 25	1 976 656 375
1156	1 33 63 36	1 544 804 416	1206	1 45 44 36	1 754 049 816	1256	1 57 75 36	1 981 385 216
1157	1 33 86 49	1 548 816 893	1207	1 45 68 49	1 758 416 743	1257	1 58 00 49	1 986 121 593
1158	1 34 09 64	1 552 836 312	1208	1 45 92 64	1 762 790 912	1258	1 58 25 64	1 990 865 512
1159	1 34 32 81	1 556 862 679	1209	1 46 16 81	1 767 172 329	1259	1 58 50 81	1 995 616 979
1160	1 34 56 00	1 560 896 000	1210	1 46 41 00	1 771 561 000	1260	1 58 76 00	2 000 376 000
1161	1 34 79 21	1 564 936 281	1211	1 46 65 21	1 775 956 931	1261	1 59 01 21	2 005 142 581
1162	1 35 02 44	1 568 983 528	1212	1 46 89 44	1 780 360 128	1262	1 59 26 44	2 009 916 728
1163	1 35 25 69	1 573 037 748	1213	1 47 13 69	1 784 770 597	1263	1 59 51 69	2 014 698 447
1164	1 35 48 96	1 577 098 944	1214	1 47 37 96	1 789 188 344	1264	1 60 76 96	2 019 497 744
1165	1 35 72 25	1 581 167 125	1215	1 47 62 25	1 793 613 375	1265	1 60 02 25	2 024 284 625
1166	1 35 95 56	1 585 242 296	1216	1 47 86 56	1 798 045 696	1266	1 60 27 56	2 029 089 096
1167	1 36 18 89	1 589 324 469	1217	1 48 10 89	1 802 485 313	1267	1 60 52 89	2 033 901 163
1168	1 36 42 24	1 593 413 632	1218	1 48 35 24	1 806 932 232	1268	1 60 78 24	2 038 720 832
1169	1 36 65 61	1 597 509 809	1219	1 48 59 61	1 811 386 459	1269	1 61 03 61	2 043 548 109
1170	1 36 89 00	1 601 613 000	1220	1 48 84 00	1 815 848 000	1270	1 61 29 00	2 048 383 000
1171	1 37 12 41	1 605 723 211	1221	1 49 08 41	1 820 316 861	1271	1 61 54 41	2 053 225 511
1172	1 37 35 84	1 609 840 448	1222	1 49 32 84	1 824 793 048	1272	1 61 79 84	2 058 075 648
1173	1 37 59 29	1 613 964 717	1223	1 49 57 29	1 829 276 567	1273	1 62 05 29	2 062 933 417
1174	1 37 82 76	1 618 096 024	1224	1 49 81 76	1 833 767 424	1274	1 62 30 76	2 067 798 824
1175	1 38 06 25	1 622 234 375	1225	1 50 06 25	1 838 265 625	1275	1 62 56 25	2 072 671 875
1176	1 38 29 76	1 626 379 776	1226	1 50 30 76	1 842 771 176	1276	1 62 81 76	2 077 552 576
1177	1 38 53 29	1 630 532 233	1227	1 50 55 29	1 847 284 083	1277	1 63 07 29	2 082 440 933
1178	1 38 76 84	1 634 691 752	1228	1 50 79 84	1 851 804 352	1278	1 63 32 84	2 087 336 952
1179	1 39 00 41	1 638 858 339	1229	1 51 04 41	1 856 331 969	1279	1 63 58 41	2 092 240 639
1180	1 39 24 00	1 643 032 000	1230	1 51 29 00	1 860 867 000	1280	1 63 84 00	2 097 152 000
1181	1 39 47 61	1 647 212 741	1231	1 51 53 61	1 865 409 391	1281	1 64 09 61	2 102 071 041
1182	1 39 71 24	1 651 400 568	1232	1 51 78 24	1 869 959 168	1282	1 64 35 24	2 106 997 768
1183	1 39 94 89	1 655 595 487	1233	1 52 02 89	1 874 516 337	1283	1 64 60 89	2 111 932 187
1184	1 40 18 56	1 659 797 504	1234	1 52 27 56	1 879 080 904	1284	1 64 86 56	2 116 874 304
1185	1 40 42 25	1 664 006 625	1235	1 52 52 25	1 883 652 875	1285	1 65 12 25	2 121 824 125
1186	1 40 65 96	1 668 222 856	1236	1 52 76 96	1 888 232 256	1286	1 65 37 96	2 126 781 656
1187	1 40 89 69	1 672 446 203	1237	1 53 01 69	1 892 819 053	1287	1 65 63 69	2 131 746 003
1188	1 41 13 44	1 676 676 672	1238	1 53 26 44	1 897 413 272	1288	1 65 89 44	2 136 719 872
1189	1 41 37 21	1 680 914 269	1239	1 53 51 21	1 902 014 919	1289	1 66 15 21	2 141 800 569
1190	1 41 61 00	1 685 169 000	1240	1 53 76 00	1 906 624 000	1290	1 66 41 00	2 146 689 000
1191	1 41 84 81	1 689 410 871	1241	1 54 00 81	1 911 240 621	1291	1 66 66 81	2 151 685 171
1192	1 42 08 64	1 693 669 888	1242	1 54 25 64	1 915 964 488	1292	1 66 92 64	2 156 689 088
1193	1 42 32 49	1 697 936 057	1243	1 54 50 49	1 920 495 907	1293	1 67 18 49	2 161 700 757
1194	1 42 56 36	1 702 209 384	1244	1 54 75 36	1 925 134 784	1294	1 67 44 36	2 166 720 184
1195	1 42 80 25	1 706 489 875	1245	1 55 00 25	1 929 781 125	1295	1 67 70 25	2 171 747 375
1196	1 43 04 16	1 710 777 536	1246	1 55 25 16	1 934 434 936	1296	1 67 96 16	2 176 782 336
1197	1 43 28 09	1 715 072 373	1247	1 55 50 09	1 939 096 223	1297	1 68 22 09	2 181 825 073
1198	1 43 52 04	1 719 374 392	1248	1 55 75 04	1 943 764 992	1298	1 68 48 04	2 186 875 592
1199	1 43 76 01	1 723 683 599	1249	1 56 00 01	1 948 441 249	1299	1 68 74 01	2 191 933 899
1200	1 44 00 00	1 728 000 000	1250	1 56 25 00	1 953 125 000	1300	1 69 00 00	2 197 000 000

n	n^2	n^3	n	n^2	n^3	n	n^2	n^3
1300	1 69 00 00	2 197 000 000	1350	1 82 25 00	2 460 375 000	1400	1 96 00 00	2 744 000 000
1301	1 69 26 01	2 202 073 901	1351	1 82 52 01	2 465 846 551	1401	1 96 28 01	2 749 884 201
1302	1 69 52 04	2 207 155 608	1352	1 82 79 04	2 471 326 208	1402	1 96 56 04	2 755 776 808
1303	1 69 78 09	2 212 245 217	1353	1 83 06 09	2 476 813 977	1403	1 96 84 09	2 761 677 827
1304	1 70 04 16	2 217 342 464	1354	1 83 33 16	2 482 309 864	1404	1 97 12 16	2 767 587 264
1305	1 70 30 25	2 222 447 625	1355	1 83 60 25	2 487 813 875	1405	1 97 40 25	2 773 505 125
1306	1 70 56 36	2 227 560 616	1356	1 83 87 36	2 493 326 016	1406	1 97 68 36	2 779 431 416
1307	1 70 82 49	2 232 681 443	1357	1 84 14 49	2 498 846 293	1407	1 97 96 49	2 785 366 143
1308	1 71 08 64	2 237 810 112	1358	1 84 41 64	2 504 374 712	1408	1 98 24 64	2 791 309 312
1309	1 71 34 81	2 242 946 629	1359	1 84 68 81	2 509 911 279	1409	1 98 52 81	2 797 260 929
1310	1 71 61 00	2 248 091 000	1360	1 84 96 00	2 515 456 000	1410	1 98 81 00	2 803 221 000
1311	1 71 87 21	2 253 243 231	1361	1 85 23 21	2 521 008 881	1411	1 99 09 21	2 809 189 531
1312	1 72 13 44	2 258 403 328	1362	1 85 50 44	2 526 569 928	1412	1 99 37 44	2 815 166 528
1313	1 72 39 69	2 263 571 297	1363	1 85 77 69	2 532 139 147	1413	1 99 65 69	2 821 151 997
1314	1 72 65 69	2 268 747 144	1364	1 86 04 96	2 537 716 544	1414	1 99 93 96	2 827 145 944
1315	1 72 92 25	2 273 930 875	1365	1 86 32 25	2 543 302 125	1415	2 00 22 25	2 833 148 375
1316	1 73 18 56	2 279 122 496	1366	1 86 59 56	2 548 895 896	1416	2 00 50 56	2 839 159 296
1317	1 73 44 89	2 284 322 013	1367	1 86 86 89	2 554 497 863	1417	2 00 78 89	2 845 178 713
1318	1 73 71 24	2 289 529 432	1368	1 87 14 24	2 560 108 032	1418	2 01 07 24	2 851 206 632
1319	1 73 97 61	2 294 744 769	1369	1 87 41 61	2 565 726 409	1419	2 01 35 61	2 857 243 059
1320	1 74 24 00	2 299 968 000	1370	1 87 69 00	2 571 353 000	1420	2 01 64 00	2 863 288 000
1321	1 74 50 41	2 305 199 161	1371	1 87 96 41	2 576 987 811	1421	2 01 92 41	2 869 341 461
1322	1 74 76 84	2 310 438 248	1372	1 88 23 84	2 582 630 848	1422	2 02 20 84	2 875 403 448
1323	1 75 03 29	2 315 685 267	1373	1 88 51 29	2 588 282 117	1423	2 02 49 29	2 881 473 967
1324	1 75 29 76	2 320 940 224	1374	1 88 78 76	2 593 941 624	1424	2 02 77 76	2 887 553 024
1325	1 75 56 25	2 326 203 125	1375	1 89 06 25	2 599 609 375	1425	2 03 06 25	2 893 640 625
1326	1 75 82 76	2 331 473 976	1376	1 89 33 76	2 605 285 376	1426	2 03 34 76	2 899 736 776
1327	1 76 09 29	2 336 752 783	1377	1 89 61 29	2 610 696 633	1427	2 03 63 29	2 905 841 483
1328	1 76 36 84	2 342 039 552	1378	1 89 88 84	2 616 662 152	1428	2 03 91 84	2 911 954 752
1329	1 76 62 41	2 347 434 289	1379	1 90 16 41	2 622 362 939	1429	2 04 20 41	2 918 076 589
1330	1 76 89 00	2 352 637 000	1380	1 90 44 00	2 628 072 000	1430	2 04 49 00	2 924 207 000
1331	1 77 15 61	2 357 947 691	1381	1 90 71 61	2 633 789 341	1431	3 04 77 61	2 930 345 991
1332	1 77 42 24	2 363 266 368	1382	1 90 99 24	2 639 514 968	1432	2 05 06 24	2 936 493 568
1333	1 77 68 89	2 368 593 037	1383	1 91 26 89	2 645 248 887	1433	2 05 34 89	2 942 649 737
1334	1 77 95 56	2 373 927 704	1384	1 91 54 46	2 650 991 104	1434	2 05 63 56	2 948 814 504
1335	1 78 22 25	2 379 270 375	1385	1 91 82 25	2 656 741 625	1435	2 05 92 25	2 954 987 875
1336	1 78 48 96	2 384 621 056	1386	1 92 09 96	2 662 500 456	1436	2 06 20 96	2 961 169 856
1337	1 78 75 69	2 389 979 753	1387	1 92 37 69	2 668 267 603	1437	2 06 49 69	2 967 360 453
1338	1 79 02 44	2 395 346 472	1388	1 92 65 44	2 674 043 072	1438	2 06 78 44	2 973 559 672
1339	1 79 29 21	2 400 721 219	1389	1 92 93 21	2 679 826 869	1439	2 07 07 21	2 979 767 519
1340	1 79 56 00	2 406 104 000	1390	1 93 21 00	2 685 619 000	1440	2 07 36 00	2 985 984 000
1341	1 79 82 81	2 411 494 821	1391	1 93 48 81	2 691 419 471	1441	2 07 64 81	2 992 209 121
1342	1 80 09 64	2 416 893 688	1392	1 93 76 64	2 697 228 288	1442	2 07 93 64	2 998 442 888
1343	1 80 36 49	2 422 300 607	1393	1 94 04 49	2 703 045 457	1443	2 08 22 49	3 004 685 307
1344	1 80 63 36	2 427 715 584	1394	1 94 32 36	2 708 870 984	1444	2 08 51 36	3 010 936 384
1345	1 80 90 25	2 433 138 625	1395	1 94 60 25	2 714 704 875	1445	2 08 80 25	3 017 196 125
1346	1 81 17 16	2 438 569 736	1396	1 94 88 16	2 720 547 136	1446	2 09 09 16	3 023 464 536
1347	1 81 44 09	2 444 008 923	1397	1 95 16 09	2 726 397 773	1447	2 09 38 09	3 029 741 623
1348	1 81 71 04	2 449 456 192	1398	1 95 44 04	2 732 256 792	1448	2 09 67 04	3 036 027 392
1349	1 81 98 01	2 454 911 549	1399	1 95 72 01	2 738 124 199	1449	2 09 96 01	3 042 321 849
1350	1 82 25 00	2 460 375 000	1400	1 96 00 00	2 744 000 000	1450	2 10 25 00	3 048 625 000

В. Таблица пятых степеней чисел от 0,100 до 100.

d	d^5	d	d^5	d	d^5	d	d^5	d	d^5	d	d^5
0,100	0,0000100	0,220	0,000518	0,43	0,014701	0,62	0,370746	1,42	5,77353	2,50	97,6562
0,102	0,0000110	0,225	0,000577	0,44	0,016492	0,63	0,393904	1,44	6,19174	2,55	107,820
0,104	0,0000122	0,230	0,000644	0,45	0,018453	0,64	0,418212	1,46	6,63383	2,60	118,814
0,106	0,0000134	0,235	0,000717	0,46	0,020596	0,65	0,443705	1,48	7,10082	2,65	130,686
0,108	0,0000147	0,240	0,000796	0,47	0,022935	0,66	0,470427	1,50	7,59375	2,70	143,489
0,110	0,0000161	0,245	0,000883	0,48	0,025480	0,67	0,498421	1,52	8,11368	2,75	157,276
0,112	0,0000176	0,250	0,000977	0,49	0,028248	0,68	0,527732	1,54	8,66171	2,80	172,104
0,114	0,0000193	0,255	0,001078	0,50	0,031250	0,69	0,558406	1,56	9,23896	2,85	188,029
0,116	0,0000210	0,260	0,001188	0,51	0,034503	0,90	0,590490	1,58	9,84658	2,90	205,111
0,118	0,0000229	0,265	0,001307	0,52	0,038020	0,91	0,624032	1,60	10,4858	2,95	223,414
0,120	0,0000249	0,270	0,001435	0,53	0,041820	0,92	0,659082	1,62	11,1577	3,00	243,000
0,122	0,0000270	0,275	0,001573	0,54	0,045917	0,93	0,695688	1,64	11,8637	3,05	263,936
0,124	0,0000293	0,280	0,001721	0,55	0,050328	0,94	0,733904	1,66	12,6047	3,10	286,292
0,126	0,0000318	0,285	0,001880	0,56	0,055073	0,95	0,773781	1,68	13,3828	3,15	310,136
0,128	0,0000344	0,290	0,002051	0,57	0,060169	0,96	0,815373	1,70	14,1986	3,20	335,544
0,130	0,0000371	0,295	0,002234	0,58	0,065636	0,97	0,858734	1,72	15,0537	3,25	362,591
0,132	0,0000401	0,300	0,002430	0,59	0,071492	0,98	0,903921	1,74	15,9495	3,30	391,354
0,134	0,0000432	0,305	0,002639	0,60	0,077760	0,99	0,950990	1,76	16,8874	3,35	421,419
0,136	0,0000466	0,310	0,002863	0,61	0,084460	1,00	1,000000	1,78	17,8690	3,40	454,354
0,138	0,0000500	0,315	0,003101	0,62	0,091813	1,02	1,10408	1,80	18,8957	3,45	488,760
0,140	0,0000538	0,320	0,003355	0,63	0,099244	1,04	1,21665	1,82	19,9690	3,50	525,219
0,142	0,0000577	0,325	0,003626	0,64	0,107374	1,06	1,33823	1,84	21,0906	3,55	563,822
0,144	0,0000619	0,330	0,003914	0,65	0,116029	1,08	1,46933	1,86	22,2620	3,60	604,662
0,146	0,0000663	0,335	0,004219	0,66	0,125233	1,10	1,61051	1,88	23,4849	3,65	647,835
0,148	0,0000710	0,340	0,004544	0,67	0,135012	1,12	1,76234	1,90	24,7610	3,70	693,440
0,150	0,0000754	0,345	0,004888	0,68	0,145393	1,14	1,92541	1,92	26,0919	3,75	741,577
0,155	0,0000895	0,350	0,005252	0,69	0,156403	1,16	2,10034	1,94	27,4795	3,80	792,352
0,160	0,000105	0,355	0,005638	0,70	0,168070	1,18	2,28775	1,96	28,9255	3,85	845,870
0,165	0,000122	0,360	0,006047	0,71	0,180423	1,20	2,48832	1,98	30,4317	3,90	902,242
0,170	0,000142	0,365	0,006478	0,72	0,193492	1,22	2,70271	2,00	32,0000	3,95	961,580
0,175	0,000164	0,370	0,006934	0,73	0,207307	1,24	2,93163	2,05	36,2051	4,00	1024,00
0,180	0,000189	0,375	0,007416	0,74	0,221901	1,26	3,17580	2,10	40,8410	4,05	1089,62
0,185	0,000217	0,380	0,007924	0,75	0,237305	1,28	3,43597	2,15	45,9401	4,10	1158,56
0,190	0,000248	0,385	0,008459	0,76	0,253553	1,30	3,71293	2,20	51,5383	4,15	1230,95
0,195	0,000282	0,390	0,009022	0,77	0,270678	1,32	4,00746	2,25	57,6850	4,20	1306,91
0,200	0,000320	0,395	0,009616	0,78	0,288717	1,34	4,32040	2,30	64,3634	4,25	1386,58
0,205	0,000362	0,400	0,010240	0,79	0,307706	1,36	4,65259	2,35	71,6703	4,30	1470,08
0,210	0,000408	0,41	0,011566	0,80	0,327680	1,38	5,00490	2,40	79,6262	4,35	1557,57
0,215	0,000459	0,42	0,013069	0,81	0,348678	1,40	5,37824	2,45	88,2735	4,40	1649,16

d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d
4,45	1745,02	8,10	34868	14,6	663383	28,0	6436343	33,5	42191410	59	714924299
4,50	1845,28	8,20	37074	14,8	710082	23,2	6721093	34,0	45435424	60	777600000
4,55	1950,10	8,30	39890	15,0	759375	23,4	7015834	34,5	48875980	61	844896301
4,60	2059,63	8,40	41821	15,2	811368	23,6	7320625	35,0	52521875	62	916132832
4,65	2174,03	8,50	44371	15,4	868171	23,8	7636332	35,5	56382167	63	992436543
4,70	2293,46	8,60	47043	15,6	923896	24,0	7962624	36,0	60466176	64	1073741824
4,75	2418,07	8,70	49842	15,8	984658	24,2	8299978	36,5	64783487	65	1160290625
4,80	2548,04	8,80	52773	16,0	1048578	24,4	8648666	37,0	69343957	66	1252332576
4,85	2683,54	8,90	55841	16,2	1115771	24,6	9008978	37,5	74157715	67	1350125107
4,90	2824,75	9,00	59049	16,4	1186967	24,8	9381200	38,0	79235168	68	1453833568
4,95	2971,84	9,10	62403	16,6	1260493	25,0	9765625	38,5	84587005	69	1564031349
5,00	3125,00	9,20	65908	16,8	1338278	25,2	10162550	39,0	90224199	70	1680700000
5,10	3450,25	9,30	69569	17,0	1419857	25,4	10572278	39,5	96158012	71	1804228351
5,20	3802,04	9,40	73390	17,2	1505366	25,6	10995116	40,0	102460000	72	1934917632
5,30	4181,95	9,50	77378	17,4	1594947	25,8	11431377	40,5	108962013	73	2073071593
5,40	4591,65	9,60	81537	17,6	1688742	26,0	11881376	41,0	115856201	74	2219006624
5,50	5032,84	9,70	85873	17,8	1786899	26,2	12345437	41,5	123065020	75	2373046675
5,60	5507,32	9,80	90392	18,0	1889568	26,4	12823886	42,0	130691232	76	2535525376
5,70	6061,92	9,90	95099	18,2	1996903	26,6	13317055	42,5	138657910	77	2706784157
5,80	6663,57	10,0	100000	18,4	2109061	26,8	13825281	43,0	147008443	78	2887174368
5,90	7149,24	10,2	110408	18,6	2226203	27,0	14348907	43,5	155786538	79	3077056399
6,00	7776,00	10,4	121665	18,8	2348493	27,2	14888280	44,0	164916224	80	3276800000
6,10	8445,96	10,6	133823	19,0	2476099	27,4	15443752	44,5	174501858	81	3486784401
6,20	9161,33	10,8	146933	19,2	2609193	27,6	16015681	45,0	184628125	82	3707398432
6,30	9924,37	11,0	161051	19,4	2747949	27,8	16604430	45,5	195010045	83	3939040643
6,40	10737	11,2	176234	19,6	2892547	28,0	17210368	46,0	205962976	84	4182119424
6,50	11603	11,4	192541	19,8	3043168	28,2	17833868	46,5	217402615	85	4437053125
6,60	12523	11,6	210034	20,0	3200000	28,4	18475309	47,0	229345007	86	4704270176
6,70	13501	11,8	228776	20,2	3363232	28,6	19135075	47,5	241806543	87	4984209207
6,80	14539	12,0	248832	20,4	3533059	28,8	19813557	48,0	254803968	88	5277319168
6,90	15640	12,2	270271	20,6	3709677	29,0	20511149	48,5	268364863	89	5584069449
7,00	16807	12,4	293163	20,8	3893289	29,2	21228253	49,0	282415249	90	5904900000
7,10	18042	12,6	317580	21,0	4084101	29,4	21965275	49,5	297184391	91	6240321451
7,20	19349	12,8	343597	21,2	4282322	29,6	22722628	50,0	312500000	92	6590815232
7,30	20731	13,0	371293	21,4	4488166	29,8	23500728	51	345025251	93	6966883693
7,40	22190	13,2	400746	21,6	4701850	30,0	24300000	52	380204032	94	7339040224
7,50	23730	13,4	432040	21,8	4923597	30,5	26393834	53	418195493	95	7737808375
7,60	25355	13,6	465259	22,0	5153632	31,0	28629151	54	459165024	96	8153725976
7,70	27068	13,8	500490	22,2	5392186	31,5	31013642	55	503284375	97	8587340257
7,80	28872	14,0	537824	22,4	5639493	32,0	33554432	56	550731776	98	9039207968
7,90	30771	14,2	577353	22,6	5895793	32,5	36259082	57	601692057	99	9509900499
8,00	32768	14,4	619174	22,8	6161327	33,0	39135393	58	656356768		

Г. Корни квадратные из пятой степени от 0,25 до 100.

d	$\sqrt{d^5}$	d	$\sqrt{d^5}$	d	$\sqrt{d^5}$	d	$\sqrt{d^5}$	d	$\sqrt{d^5}$	d	$\sqrt{d^5}$
0,25	0,031	7	129,64	17,5	1281,1	31	5 351	49	16 807	76	50 354
0,5	0,177	7,25	141,53	18	1374,6	31,5	5 569	50	17 678	77	52 027
0,75	0,485	7,5	154,05	18,5	1472,1	32	5 793	51	18 575	78	53 732
1	1	7,76	167,21	19	1573,6	32,5	6 022	52	19 499	79	55 471
1,25	1,747	8	181,02	19,5	1679,1	33	6 266	53	20 450	80	57 243
1,5	2,756	8,25	195,50	20	1788,9	33,5	6 496	54	21 428	81	59 049
1,75	4,051	8,5	210,64	20,5	1902,8	34	6 741	55	22 434	82	60 888
2	5,657	8,75	226,48	21	2 020,9	34,5	6 991	56	23 468	83	62 762
2,25	7,594	9	243	21,5	2 143,4	35	7 247	57	24 529	84	64 669
2,5	9,882	9,25	260,23	22	2 270,2	35,5	7 509	58	25 620	85	66 601
2,75	12,541	9,5	278,17	22,5	2 401,4	36	7 776	59	26 738	86	68 568
3	15,588	9,75	296,83	23	2 537	36,5	8 049	60	27 886	87	70 569
3,25	19,042	10	316,23	23,5	2 677,1	37	8 327	61	29 062	88	72 606
3,5	22,918	10,5	357,2	24	2 821,8	37,5	8 611	62	30 268	89	74 727
3,75	27,232	11	401,3	24,5	2 971,1	38	8 901	63	31 503	90	76 843
4	32	11,5	448,5	25	3 126	38,5	9 197	64	32 768	91	78 996
4,25	37,24	12	498,8	25,5	3 283,6	39	9 498	65	34 063	92	81 184
4,5	42,96	12,5	552,4	26	3 446,9	39,5	9 806	66	35 388	93	83 408
4,75	49,17	13	609,3	26,5	3 615,1	40	10 119	67	36 744	94	85 668
5	55,90	13,5	669,6	27	3 788	41	10 764	68	38 131	95	87 965
5,25	63,15	14	733,4	27,5	3 965,8	42	11 432	69	39 548	96	90 298
5,5	70,94	14,5	800,6	28	4 148,5	43	12 125	70	40 996	97	92 665
5,75	79,28	15	871,4	28,5	4 336,2	44	12 842	71	42 476	98	95 075
6	88,18	15,5	945,9	29	4 528,9	45	13 584	72	43 988	99	97 519
6,25	97,66	16	1 024	29,5	4 726,7	46	14 351	73	45 531	100	100 000
6,5	107,72	16,5	1 105,9	30	4 929,5	47	15 144	74	47 106		
6,75	118,38	17	1 191,6	30,5	5 138	48	15 963	75	48 714		

Д. Важные числовые величины (π) и их логарифмы ($\lg \pi$).

π	$\lg \pi$	π	$\lg \pi$
$\sqrt{2} = 1,4142$	0,15052	$\sqrt{2\pi} = 2,5066$	0,39909
$\frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,7071$	0,84948	$\pi\sqrt{2} = 4,4429$	0,64707
$\sqrt{3} = 1,7321$	0,23856	$\sqrt[3]{\pi} = 1,4646$	0,16372
$\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0,8661$	0,93753	$\sqrt[3]{2\pi} = 1,8453$	0,26606
$\frac{1}{3}\sqrt{3} = \sqrt{\frac{1}{3}} = 0,5774$	0,76144	$\frac{\pi}{180} = 0,01745$	0,24180
$\sqrt[3]{2} = 1,2599$	0,10034	$\frac{1}{\pi} = 0,3183$	0,50285
$\sqrt[3]{3} = 1,4422$	0,15903	$\frac{180}{\pi} = 57,2958$	1,75812
$\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = 0,6934$	0,84097	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0,56419$	0,75148
$\pi = 3,1416$	0,49715	$\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}} = 0,68278$	0,83428
$2\pi = 6,2832$	0,79818	$g = 9,81$	0,99617
$\frac{\pi}{2} = 1,5708$	0,19612	$\sqrt{g} = 3,1321$	0,49583
$\frac{\pi}{3} = 1,0472$	0,02003	$\sqrt{2g} = 4,4294$	0,64006
$\frac{\pi}{4} = 0,7854$	0,89509	$\frac{1}{\sqrt{2g}} = 0,2258$	0,83365
$\frac{\pi}{6} = 0,5236$	0,71900	$\frac{\pi}{\sqrt{g}} = 1,0030$	0,00132
$\frac{4}{3}\pi = 4,1888$	0,62209	$\frac{1}{g} = 0,1019$	0,00833
$\pi^2 = 9,8696$	0,99430	$\frac{1}{2g} = 0,0510$	0,70830
$\sqrt{\pi} = 1,7725$	0,24857	$e = 2,7183$	0,43429

Е. Натуральные логарифмы.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	N
0	— ∞	0,0000	0,0931	1,0980	1,3803	1,6094	1,7918	1,9459	2,0794	2,1972	0
10	2,3026	2,3979	2,4849	2,5649	2,6391	2,7081	2,7728	2,8332	2,8904	2,9444	10
20	2,9957	3,0445	3,0910	3,1355	3,1781	3,2189	3,2581	3,2958	3,3322	3,3673	20
30	3,4012	3,4340	3,4657	3,4965	3,5264	3,5553	3,5835	3,6109	3,6376	3,6636	30
40	3,6889	3,7136	3,7377	3,7612	3,7842	3,8067	3,8286	3,8501	3,8712	3,8918	40
50	3,9120	3,9318	3,9512	3,9703	3,9890	4,0073	4,0254	4,0431	4,0604	4,0775	50
60	4,0943	4,1109	4,1271	4,1431	4,1589	4,1744	4,1897	4,2047	4,2195	4,2341	60
70	4,2485	4,2627	4,2767	4,2905	4,3041	4,3175	4,3307	4,3438	4,3567	4,3694	70
80	4,3820	4,3944	4,4067	4,4188	4,4308	4,4427	4,4543	4,4659	4,4773	4,4886	80
90	4,4998	4,5109	4,5218	4,5326	4,5433	4,5539	4,5643	4,5747	4,5850	4,5951	90
100	4,6052	4,6151	4,6250	4,6347	4,6444	4,6540	4,6634	4,6728	4,6821	4,6913	100
110	4,7005	4,7095	4,7185	4,7274	4,7362	4,7449	4,7536	4,7622	4,7707	4,7791	110
120	4,7875	4,7958	4,8040	4,8122	4,8203	4,8283	4,8363	4,8442	4,8520	4,8598	120
130	4,8675	4,8752	4,8828	4,8903	4,8978	4,9053	4,9127	4,9200	4,9273	4,9345	130
140	4,9416	4,9488	4,9558	4,9628	4,9698	4,9767	4,9836	4,9904	4,9972	5,0039	140
150	5,0106	5,0173	5,0239	5,0304	5,0370	5,0434	5,0499	5,0562	5,0626	5,0689	150
160	5,0752	5,0814	5,0876	5,0938	5,0999	5,1059	5,1120	5,1180	5,1240	5,1299	160
170	5,1358	5,1417	5,1475	5,1533	5,1591	5,1648	5,1705	5,1761	5,1818	5,1874	170
180	5,1930	5,1985	5,2040	5,2095	5,2149	5,2204	5,2257	5,2311	5,2364	5,2417	180
190	5,2470	5,2523	5,2575	5,2627	5,2679	5,2730	5,2781	5,2832	5,2883	5,2933	190
200	5,2983	5,3033	5,3083	5,3132	5,3181	5,3230	5,3279	5,3327	5,3375	5,3423	200
210	5,3471	5,3519	5,3566	5,3613	5,3660	5,3706	5,3753	5,3799	5,3845	5,3891	210
220	5,3936	5,3982	5,4027	5,4072	5,4116	5,4161	5,4205	5,4250	5,4293	5,4337	220
230	5,4381	5,4424	5,4467	5,4510	5,4553	5,4596	5,4638	5,4681	5,4723	5,4765	230
240	5,4806	5,4848	5,4889	5,4931	5,4972	5,5013	5,5053	5,5094	5,5134	5,5175	240
250	5,5215	5,5255	5,5294	5,5334	5,5373	5,5413	5,5452	5,5491	5,5530	5,5568	250
260	5,5607	5,5645	5,5683	5,5722	5,5759	5,5797	5,5835	5,5872	5,5910	5,5947	260
270	5,5984	5,6021	5,6058	5,6095	5,6131	5,6168	5,6204	5,6240	5,6276	5,6312	270
280	5,6348	5,6384	5,6419	5,6454	5,6490	5,6525	5,6560	5,6595	5,6630	5,6664	280
290	5,6699	5,6733	5,6768	5,6802	5,6836	5,6870	5,6904	5,6937	5,6971	5,7004	290
300	5,7038	5,7071	5,7104	5,7137	5,7170	5,7203	5,7236	5,7268	5,7301	5,7333	300
310	5,7366	5,7398	5,7430	5,7462	5,7494	5,7526	5,7557	5,7589	5,7621	5,7652	310
320	5,7683	5,7714	5,7746	5,7777	5,7807	5,7838	5,7869	5,7900	5,7930	5,7961	320
330	5,7991	5,8021	5,8051	5,8081	5,8111	5,8141	5,8171	5,8201	5,8230	5,8260	330
340	5,8289	5,8319	5,8348	5,8377	5,8406	5,8435	5,8464	5,8493	5,8522	5,8551	340
350	5,8579	5,8608	5,8636	5,8665	5,8693	5,8721	5,8749	5,8777	5,8805	5,8833	350
360	5,8861	5,8889	5,8916	5,8944	5,8972	5,8999	5,9026	5,9054	5,9081	5,9011	360
370	5,9135	5,9162	5,9189	5,9216	5,9243	5,9269	5,9296	5,9322	5,9349	5,9375	370
380	5,9402	5,9428	5,9454	5,9480	5,9506	5,9532	5,9558	5,9584	5,9610	5,9636	380
390	5,9661	5,9687	5,9713	5,9738	5,9764	5,9789	5,9814	5,9839	5,9865	5,9890	390
400	5,9915	5,9940	5,9965	5,9989	6,0014	6,0039	6,0064	6,0088	6,0113	6,0137	400
410	6,0162	6,0186	6,0210	6,0234	6,0259	6,0283	6,0307	6,0331	6,0355	6,0379	410
420	6,0403	6,0426	6,0450	6,0474	6,0497	6,0521	6,0544	6,0568	6,0591	6,0615	420
430	6,0638	6,0661	6,0684	6,0707	6,0730	6,0753	6,0776	6,0799	6,0822	6,0845	430
440	6,0868	6,0890	6,0913	6,0936	6,0958	6,0981	6,1003	6,1026	6,1048	6,1070	440
450	6,1092	6,1115	6,1137	6,1159	6,1181	6,1203	6,1225	6,1247	6,1269	6,1291	450
460	6,1312	6,1334	6,1356	6,1377	6,1399	6,1420	6,1442	6,1463	6,1485	6,1506	460
470	6,1527	6,1549	6,1570	6,1591	6,1612	6,1633	6,1654	6,1675	6,1696	6,1717	470
480	6,1738	6,1759	6,1779	6,1800	6,1821	6,1841	6,1862	6,1883	6,1903	6,1924	480
490	6,1944	6,1964	6,1985	6,2005	6,2025	6,2046	6,2066	6,2086	6,2106	6,2126	490

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	N
500	6,2146	6,2166	6,2186	6,2206	6,2226	6,2246	6,2265	6,2285	6,2305	6,2324	500
510	6,2344	6,2364	6,2383	6,2403	6,2422	6,2442	6,2461	6,2480	6,2500	6,2519	510
520	6,2538	6,2558	6,2577	6,2596	6,2615	6,2634	6,2653	6,2672	6,2691	6,2710	520
530	6,2729	6,2748	6,2766	6,2785	6,2804	6,2823	6,2841	6,2860	6,2879	6,2897	530
540	6,2916	6,2934	6,2963	6,2971	6,2989	6,3008	6,3026	6,3044	6,3063	6,3081	540
550	6,3099	6,3117	6,3135	6,3154	6,3172	6,3190	6,3208	6,3226	6,3244	6,3261	550
560	6,3279	6,3297	6,3315	6,3333	6,3351	6,3368	6,3386	6,3404	6,3421	6,3439	560
570	6,3456	6,3474	6,3491	6,3509	6,3526	6,3544	6,3561	6,3578	6,3596	6,3613	570
580	6,3630	6,3648	6,3665	6,3682	6,3699	6,3716	6,3733	6,3750	6,3767	6,3784	580
590	6,3801	6,3818	6,3835	6,3852	6,3869	6,3886	6,3902	6,3919	6,3936	6,3953	590
600	6,3969	6,3986	6,4003	6,4019	6,4036	6,4052	6,4069	6,4085	6,4102	6,4118	600
610	6,4135	6,4151	6,4167	6,4184	6,4200	6,4216	6,4232	6,4249	6,4265	6,4281	610
620	6,4297	6,4313	6,4329	6,4345	6,4362	6,4378	6,4394	6,4409	6,4425	6,4441	620
630	6,4457	6,4473	6,4489	6,4505	6,4520	6,4536	6,4552	6,4568	6,4583	6,4599	630
640	6,4615	6,4630	6,4646	6,4661	6,4677	6,4693	6,4708	6,4723	6,4739	6,4754	640
650	6,4770	6,4785	6,4800	6,4816	6,4831	6,4846	6,4862	6,4877	6,4892	6,4907	650
660	6,4922	6,4938	6,4953	6,4968	6,4983	6,4998	6,5013	6,5028	6,5043	6,5058	660
670	6,5073	6,5088	6,5103	6,5117	6,5132	6,5147	6,5162	6,5177	6,5191	6,5206	670
680	6,5221	6,5236	6,5250	6,5265	6,5280	6,5294	6,5309	6,5323	6,5338	6,5352	680
690	6,5367	6,5381	6,5396	6,5410	6,5425	6,5439	6,5453	6,5468	6,5482	6,5497	690
700	6,5511	6,5525	6,5539	6,5554	6,5568	6,5582	6,5596	6,5610	6,5624	6,5639	700
710	6,5653	6,5667	6,5681	6,5695	6,5709	6,5723	6,5737	6,5751	6,5765	6,5779	710
720	6,5793	6,5806	6,5820	6,5834	6,5848	6,5862	6,5876	6,5889	6,5903	6,5917	720
730	6,5930	6,5944	6,5958	6,5971	6,5985	6,5999	6,6012	6,6026	6,6039	6,6053	730
740	6,6067	6,6080	6,6093	6,6107	6,6120	6,6134	6,6147	6,6161	6,6174	6,6187	740
750	6,6201	6,6214	6,6227	6,6241	6,6254	6,6267	6,6280	6,6294	6,6307	6,6320	750
760	6,6333	6,6346	6,6359	6,6373	6,6386	6,6399	6,6412	6,6425	6,6438	6,6451	760
770	6,6464	6,6477	6,6490	6,6503	6,6516	6,6529	6,6542	6,6554	6,6567	6,6580	770
780	6,6593	6,6606	6,6619	6,6631	6,6644	6,6657	6,6670	6,6682	6,6695	6,6708	780
790	6,6720	6,6733	6,6746	6,6758	6,6771	6,6783	6,6796	6,6809	6,6821	6,6834	790
800	6,6846	6,6859	6,6871	6,6884	6,6896	6,6908	6,6921	6,6933	6,6946	6,6958	800
810	6,6970	6,6983	6,6995	6,7007	6,7020	6,7032	6,7044	6,7056	6,7069	6,7081	810
820	6,7093	6,7105	6,7117	6,7130	6,7142	6,7154	6,7166	6,7178	6,7190	6,7202	820
830	6,7214	6,7226	6,7238	6,7250	6,7262	6,7274	6,7286	6,7298	6,7310	6,7322	830
840	6,7334	6,7346	6,7358	6,7370	6,7382	6,7393	6,7405	6,7417	6,7429	6,7441	840
850	6,7452	6,7464	6,7476	6,7488	6,7499	6,7511	6,7523	6,7534	6,7546	6,7558	850
860	6,7567	6,7561	6,7593	6,7604	6,7616	6,7627	6,7639	6,7650	6,7662	6,7673	860
870	6,7685	6,7696	6,7708	6,7719	6,7731	6,7742	6,7754	6,7765	6,7776	6,7788	870
880	6,7799	6,7811	6,7822	6,7833	6,7845	6,7856	6,7867	6,7878	6,7890	6,7901	880
890	6,7912	6,7923	6,7935	6,7946	6,7957	6,7968	6,7979	6,7991	6,8002	6,8013	890
900	6,8024	6,8035	6,8046	6,8057	6,8068	6,8079	6,8090	6,8101	6,8112	6,8123	900
910	6,8134	6,8145	6,8155	6,8167	6,8178	6,8189	6,8200	6,8211	6,8222	6,8233	910
920	6,8244	6,8255	6,8265	6,8276	6,8287	6,8298	6,8309	6,8320	6,8330	6,8341	920
930	6,8352	6,8363	6,8373	6,8384	6,8395	6,8405	6,8416	6,8427	6,8437	6,8448	930
940	6,8459	6,8469	6,8480	6,8491	6,8501	6,8512	6,8522	6,8533	6,8544	6,8554	940
950	6,8565	6,8575	6,8586	6,8596	6,8607	6,8617	6,8628	6,8638	6,8648	6,8659	950
960	6,8669	6,8680	6,8690	6,8701	6,8711	6,8721	6,8732	6,8742	6,8752	6,8763	960
970	6,8773	6,8783	6,8794	6,8804	6,8814	6,8824	6,8835	6,8845	6,8855	6,8865	970
980	6,8876	6,8886	6,8896	6,8906	6,8916	6,8926	6,8937	6,8947	6,8957	6,8967	980
990	6,8977	6,8987	6,8997	6,9007	6,9017	6,9027	6,9037	6,9047	6,9057	6,9068	990

Ж. Таблицы тригонометрических функций.

Град. и мин.	Sinus	Tang.	Cotang.	Cosinus	Град. и мин.	Град. и мин.	Sinus	Tang.	Cotang.	Cosinus	Град. и мин.
0°	0,0000000	0,000000	∞	1,0000000	90°	4°	0,0697565	0,069926	14,30066	0,9975641	86°
5	0,0014544	0,001454	687,5488	0,9999989	55	5	0,0712073	0,071388	14,00785	0,9974615	55
10	0,0029069	0,002906	343,7737	0,9999958	50	10	0,0726580	0,072850	13,72673	0,9973569	50
15	0,0043633	0,004363	229,1816	0,9999905	45	15	0,0741085	0,074312	13,45662	0,9972502	45
20	0,0058177	0,005817	171,8854	0,9999831	40	20	0,0755589	0,075775	13,19688	0,9971413	40
25	0,0072721	0,007272	131,5076	0,9999786	35	25	0,0770091	0,077238	12,94692	0,9970304	35
30	0,0087265	0,008726	114,5886	0,9999619	30	30	0,0784591	0,078701	12,70620	0,9969173	30
35	0,0101809	0,010181	98,21794	0,9999482	25	35	0,0799090	0,080165	12,47422	0,9968022	25
40	0,0116853	0,011686	85,93979	0,9999323	20	40	0,0813587	0,081629	12,25050	0,9966849	20
45	0,0130896	0,013090	76,39000	0,9999143	15	45	0,0828082	0,083093	12,03462	0,9965655	15
50	0,0145439	0,014545	68,75008	0,9998942	10	50	0,0842576	0,084558	11,82616	0,9964440	10
55	0,0159982	0,016000	62,49915	0,9998720	5	55	0,0857067	0,086023	11,62476	0,9963204	5
1°	0,0174524	0,017455	57,28996	0,9998477	89°	5°	0,0871557	0,087488	11,43005	0,9961947	89°
5	0,0189066	0,018910	52,88211	0,9998213	55	5	0,0886046	0,088954	11,24171	0,9960669	55
10	0,0203608	0,020365	49,10388	0,9997927	50	10	0,0900532	0,090420	11,05943	0,9959370	50
15	0,0218149	0,021820	45,82935	0,9997620	45	15	0,0915016	0,091887	10,88292	0,9958049	45
20	0,0232690	0,023275	42,96407	0,9997292	40	20	0,0929499	0,093354	10,71191	0,9956708	40
25	0,0247230	0,024730	40,43583	0,9996943	35	25	0,0943979	0,094821	10,54615	0,9955345	35
30	0,0261769	0,026185	38,18845	0,9996573	30	30	0,0958458	0,096289	10,38539	0,9953962	30
35	0,0276309	0,027641	36,17759	0,9996182	25	35	0,0972934	0,097757	10,22942	0,9952557	25
40	0,0290847	0,029097	34,36777	0,9995770	20	40	0,0987408	0,099226	10,07803	0,9951132	20
45	0,0305385	0,030552	32,73026	0,9995336	15	45	0,1001881	0,100694	9,931008	0,9949685	15
50	0,0319922	0,032008	31,24157	0,9994881	10	50	0,1016351	0,102164	9,788173	0,9948217	10
55	0,0334459	0,033464	29,88229	0,9994405	5	55	0,1030819	0,103634	9,649347	0,9946729	5
2°	0,0348995	0,034920	28,63625	0,9993908	88°	6°	0,1045285	0,105104	9,514364	0,9945219	84°
5	0,0363530	0,036377	27,48985	0,9993390	55	5	0,1059748	0,106575	9,383066	0,9943688	55
10	0,0378065	0,037833	26,43160	0,9992851	50	10	0,1074210	0,108046	9,255303	0,9942136	50
15	0,0392598	0,039290	25,45170	0,9992290	45	15	0,1088669	0,109517	9,130934	0,9940563	45
20	0,0407131	0,040746	24,54175	0,9991709	40	20	0,1103126	0,110989	9,009826	0,9938969	40
25	0,0421663	0,042203	23,69453	0,9991106	35	25	0,1117580	0,112462	8,891850	0,9937355	35
30	0,0436194	0,043660	22,90376	0,9990482	30	30	0,1132032	0,113935	8,776897	0,9935719	30
35	0,0450724	0,045118	22,16398	0,9989837	25	35	0,1146482	0,115409	8,654822	0,9934062	25
40	0,0465253	0,046575	21,47040	0,9989171	20	40	0,1160929	0,116883	8,535546	0,9932384	20
45	0,0479781	0,048033	20,81882	0,9988484	15	45	0,1175374	0,118357	8,418957	0,9930685	15
50	0,0494308	0,049491	20,20555	0,9987775	10	50	0,1189816	0,119832	8,344955	0,9928965	10
55	0,0508835	0,050949	19,62729	0,9987046	5	55	0,1204256	0,121308	8,243448	0,9927224	5
6°	0,0523360	0,052407	19,08113	0,9986295	87°	7°	0,1218693	0,122784	8,144346	0,9925462	83°
5	0,0537883	0,053866	18,56447	0,9985524	55	5	0,1233128	0,124261	8,047564	0,9923679	55
10	0,0552406	0,055325	18,07497	0,9984731	50	10	0,1247560	0,125738	7,953022	0,9921874	50
15	0,0566928	0,056784	17,61055	0,9983917	45	15	0,1261990	0,127216	7,860642	0,9920049	45
20	0,0581448	0,058243	17,16933	0,9983082	40	20	0,1276416	0,128694	7,770350	0,9918204	40
25	0,0595967	0,059702	16,74961	0,9982225	35	25	0,1290841	0,130173	7,682076	0,9916337	35
30	0,0610485	0,061162	16,34986	0,9981348	30	30	0,1305262	0,131652	7,595754	0,9914449	30
35	0,0625002	0,062622	15,96886	0,9980450	25	35	0,1319681	0,133132	7,511317	0,9912540	25
40	0,0639517	0,064082	15,60476	0,9979530	20	40	0,1334096	0,134612	7,428706	0,9910610	20
45	0,0654031	0,065543	15,25705	0,9978589	15	45	0,1348509	0,136094	7,347861	0,9908659	15
50	0,0668544	0,067004	14,92441	0,9977627	10	50	0,1362919	0,137575	7,268725	0,9906687	10
55	0,0683055	0,068465	14,60591	0,9976645	5	55	0,1377327	0,139058	7,191245	0,9904694	5
4°	0,0697565	0,069926	14,30066	0,9975641	86°	8°	0,1391731	0,140540	7,115369	0,9902681	82°
Град. и мин.	Cosinus	Cotang.	Tang.	Sinus	Град. и мин.	Град. и мин.	Cosinus	Cotang.	Tang.	Sinus	Град. и мин.

Град. и мин.	Sinus	Tang.	Cotang.	Cosinus	Град. и мин.	Град. и мин.	Sinus	Tang.	Cotang.	Cosinus	Град. и мин.
8°	0,1391731	0,140540	7,115369	0,9902681	82°	12°	0,2079117	0,212558	4,704630	0,9781476	78°
5	0,1406132	0,142028	7,041048	0,9900646	55	5	0,2093341	0,214077	4,671212	0,9778415	55
10	0,1420531	0,143508	6,968233	0,9898590	50	10	0,2107561	0,215598	4,638245	0,9775386	50
15	0,1434926	0,144993	6,896879	0,9896514	45	15	0,2121777	0,217121	4,605720	0,9772311	45
20	0,1449319	0,146478	6,826943	0,9894416	40	20	0,2135988	0,218644	4,573628	0,9769215	40
25	0,1463708	0,147964	6,758382	0,9892298	35	25	0,2150194	0,220169	4,541960	0,9766098	35
30	0,1478094	0,149451	6,691156	0,9890159	30	30	0,2164396	0,221694	4,510708	0,9762960	30
35	0,1492477	0,150938	6,625225	0,9887998	25	35	0,2178593	0,223221	4,479863	0,9759802	25
40	0,1506857	0,152426	6,560553	0,9885817	20	40	0,2192786	0,224748	4,449418	0,9756623	20
45	0,1521234	0,153914	6,497104	0,9883615	15	45	0,2206974	0,226276	4,419364	0,9753423	15
50	0,1535607	0,155404	6,434842	0,9881392	10	50	0,2221158	0,227806	4,389694	0,9750203	10
55	0,1549978	0,156893	6,373735	0,9879148	5	55	0,2235337	0,229336	4,360400	0,9746962	5
60	0,1564345	0,158384	6,313751	0,9876883	81°	13°	0,2249511	0,230868	4,331475	0,9743701	77°
5	0,1578708	0,159875	6,254858	0,9874598	55	5	0,2263680	0,232400	4,302913	0,9740419	55
10	0,1593069	0,161367	6,197027	0,9872291	50	10	0,2277844	0,233934	4,274706	0,9737116	50
15	0,1607426	0,162860	6,140230	0,9869964	45	15	0,2292004	0,235468	4,246848	0,9733792	45
20	0,1621779	0,164353	6,084438	0,9867615	40	20	0,2306159	0,237004	4,219331	0,9730449	40
25	0,1636129	0,165847	6,029624	0,9865246	35	25	0,2320309	0,238541	4,192151	0,9727084	35
30	0,1650476	0,167342	5,975764	0,9862856	30	30	0,2334455	0,240078	4,165299	0,9723699	30
35	0,1664819	0,168838	5,922832	0,9860445	25	35	0,2348594	0,241617	4,138771	0,9720294	25
40	0,1679159	0,170334	5,870804	0,9858013	20	40	0,2362729	0,243157	4,112561	0,9716867	20
45	0,1693495	0,171831	5,819657	0,9855561	15	45	0,2376859	0,244698	4,086662	0,9713421	15
50	0,1707828	0,173329	5,769368	0,9853087	10	50	0,2390984	0,246240	4,061070	0,9709953	10
55	0,1722156	0,174827	5,719917	0,9850593	5	55	0,2405104	0,247783	4,035777	0,9706466	5
60	0,1736482	0,176327	5,671291	0,9848078	80°	14°	0,2419219	0,249328	4,010870	0,9702957	76°
5	0,1750803	0,177827	5,623442	0,9845542	55	5	0,2433329	0,250873	3,986073	0,9699428	55
10	0,1765121	0,179327	5,576378	0,9842985	50	10	0,2447433	0,252420	3,961651	0,9695879	50
15	0,1779435	0,180829	5,530072	0,9840407	45	15	0,2461533	0,253967	3,937509	0,9692309	45
20	0,1793746	0,182331	5,484505	0,9837808	40	20	0,2475627	0,255516	3,913642	0,9688719	40
25	0,1808062	0,183835	5,439659	0,9835189	35	25	0,2489716	0,257066	3,890044	0,9685108	35
30	0,1822355	0,185339	5,395517	0,9832549	30	30	0,2503800	0,258617	3,866713	0,9681476	30
35	0,1836654	0,186843	5,352062	0,9829888	25	35	0,2517979	0,260169	3,843642	0,9677825	25
40	0,1850949	0,188349	5,309279	0,9827206	20	40	0,2532152	0,261723	3,820628	0,9674152	20
45	0,1865240	0,189856	5,267151	0,9824504	15	45	0,2546301	0,263278	3,798266	0,9670459	15
50	0,1879526	0,191363	5,225664	0,9821781	10	50	0,2560482	0,264833	3,775951	0,9666748	10
55	0,1893811	0,192871	5,184803	0,9819037	5	55	0,2574139	0,266390	3,753881	0,9663012	5
60	0,1908090	0,194380	5,144554	0,9816272	79°	15°	0,2588190	0,267949	3,732050	0,9659258	75°
5	0,1922365	0,195890	5,104902	0,9813486	55	5	0,2602377	0,269508	3,710455	0,9655484	55
10	0,1936636	0,197400	5,065835	0,9810680	50	10	0,2616277	0,271069	3,689092	0,9651689	50
15	0,1950903	0,198912	5,027339	0,9807853	45	15	0,2630312	0,272631	3,667957	0,9647873	45
20	0,1965166	0,200424	4,989402	0,9805005	40	20	0,2644342	0,274194	3,647046	0,9644037	40
25	0,1979425	0,201938	4,952012	0,9802136	35	25	0,2658366	0,275758	3,626356	0,9640181	35
30	0,1993679	0,203452	4,915157	0,9799247	30	30	0,2672384	0,277324	3,605883	0,9636306	30
35	0,2007930	0,204967	4,878824	0,9796337	25	35	0,2686396	0,278891	3,585624	0,9632408	25
40	0,2022176	0,206483	4,843004	0,9793406	20	40	0,2700403	0,280459	3,565574	0,9628490	20
45	0,2036418	0,208000	4,807685	0,9790455	15	45	0,2714404	0,282029	3,545732	0,9624552	15
50	0,2050658	0,209518	4,772856	0,9787483	10	50	0,2728400	0,283599	3,526093	0,9620594	10
55	0,2064888	0,211036	4,738508	0,9784490	5	55	0,2742390	0,285172	3,506665	0,9616616	5
60	0,2079117	0,212556	4,704630	0,9781476	78°	16°	0,2756374	0,286745	3,487414	0,9612617	74°
Град. и мин.	Cosinus	Cotang.	Tang.	Sinus	Град. и мин.	Град. и мин.	Cosinus	Cotang.	Tang.	Sinus	Град. и мин.

Град. и мин.	Sinus	Tang.	Cotang.	Cosinus	Град. и мин.	Град. и мин.	Sinus	Tang.	Cotang.	Cosinus	Град. и мин.
16°	0,2756374	0,286745	3,487414	0,9612617	74°	20°	0,3420201	0,363970	2,747477	0,9396926	70°
5	0,2770352	0,288320	3,468367	0,9608598	55	5	0,3433885	0,365618	2,735093	0,9391942	55
10	0,2784324	0,289896	3,449512	0,9604558	50	10	0,3447521	0,367268	2,722807	0,9386938	50
15	0,2798290	0,291473	3,430844	0,9600499	45	15	0,3461171	0,368919	2,710618	0,9381913	45
20	0,2812251	0,293052	3,412362	0,9596418	40	20	0,3474812	0,370572	2,698525	0,9376869	40
25	0,2826205	0,294632	3,394063	0,9592318	35	25	0,3488447	0,372227	2,686526	0,9371806	35
30	0,2840153	0,296213	3,375943	0,9588197	30	30	0,3502074	0,373884	2,674621	0,9366722	30
35	0,2854096	0,297796	3,358000	0,9584056	25	35	0,3515693	0,375543	2,662808	0,9361618	25
40	0,2868032	0,299380	3,340232	0,9579985	20	40	0,3529306	0,377203	2,651086	0,9356495	20
45	0,2881963	0,300965	3,322636	0,9575714	15	45	0,3542910	0,378866	2,639454	0,9351352	15
50	0,2895887	0,302552	3,305209	0,9571512	10	50	0,3556508	0,380530	2,627912	0,9346189	10
55	0,2909805	0,304141	3,287948	0,9567290	5	55	0,3570097	0,382196	2,616457	0,9341007	5
17°	0,2923717	0,305730	3,270852	0,9563048	73°	21°	0,3583679	0,383864	2,605089	0,9335804	69°
5	0,2937623	0,307321	3,253918	0,9558785	55	5	0,3597254	0,385533	2,593806	0,9330582	55
10	0,2951522	0,308914	3,237143	0,9554502	50	10	0,3610821	0,387205	2,582609	0,9325304	50
15	0,2965416	0,310508	3,220526	0,9550199	45	15	0,3624380	0,388878	2,571495	0,9320079	45
20	0,2979303	0,312103	3,204063	0,9545876	40	20	0,3637932	0,390554	2,560464	0,9314797	40
25	0,2993184	0,313700	3,187754	0,9541533	35	25	0,3651476	0,392231	2,549516	0,9309496	35
30	0,3007058	0,315298	3,171594	0,9537170	30	30	0,3665012	0,393910	2,538647	0,9304176	30
35	0,3020926	0,316898	3,155584	0,9532786	25	35	0,3678541	0,395591	2,527859	0,9298835	25
40	0,3034788	0,318499	3,139719	0,9528382	20	40	0,3692061	0,397274	2,517150	0,9293475	20
45	0,3048643	0,320102	3,123999	0,9523958	15	45	0,3705574	0,398959	2,506519	0,9288096	15
50	0,3062492	0,321706	3,108421	0,9519514	10	50	0,3719079	0,400646	2,495966	0,9282696	10
55	0,3076334	0,323312	3,092983	0,9515050	5	55	0,3732577	0,402335	2,485488	0,9277277	5
18°	0,3090170	0,324919	3,077683	0,9510565	72°	22°	0,3746066	0,404026	2,475086	0,9271829	68°
5	0,3103999	0,326528	3,062520	0,9506051	55	5	0,3759547	0,405719	2,464759	0,9266390	55
10	0,3117822	0,328138	3,047491	0,9501536	50	10	0,3773021	0,407413	2,454506	0,9260902	50
15	0,3131638	0,329750	3,032595	0,9496991	45	15	0,3786486	0,409110	2,444325	0,9255405	45
20	0,3145448	0,331363	3,017830	0,9492426	40	20	0,3799944	0,410809	2,434217	0,9249888	40
25	0,3159250	0,332978	3,003193	0,9487842	35	25	0,3813393	0,412510	2,424180	0,9244351	35
30	0,3173047	0,334595	2,988685	0,9483237	30	30	0,3826834	0,414213	2,414213	0,9238796	30
35	0,3186836	0,336213	2,974301	0,9478612	25	35	0,3840268	0,415918	2,404316	0,9233220	25
40	0,3200619	0,337833	2,960042	0,9473966	20	40	0,3853693	0,417625	2,394488	0,9227624	20
45	0,3214395	0,339453	2,945905	0,9469301	15	45	0,3867110	0,419334	2,384729	0,9222010	15
50	0,3228164	0,341077	2,931888	0,9464616	10	50	0,3880518	0,421046	2,375037	0,9216375	10
55	0,3241926	0,342701	2,917990	0,9459911	5	55	0,3893919	0,422759	2,365411	0,9210722	5
19°	0,3255682	0,344327	2,904210	0,9455186	71°	23°	0,3907311	0,424474	2,355852	0,9205049	67°
5	0,3269430	0,345953	2,890546	0,9450441	55	5	0,3920695	0,426192	2,346358	0,9199356	55
10	0,3283172	0,347584	2,876997	0,9445675	50	10	0,3934071	0,427912	2,336928	0,9193644	50
15	0,3296906	0,349215	2,863560	0,9440890	45	15	0,3947439	0,429633	2,327563	0,9187912	45
20	0,3310634	0,350848	2,850234	0,9436085	40	20	0,3960798	0,431357	2,318280	0,9182161	40
25	0,3324355	0,352482	2,837019	0,9431260	35	25	0,3974148	0,433084	2,309020	0,9176391	35
30	0,3338069	0,354118	2,823912	0,9426415	30	30	0,3987491	0,434812	2,299842	0,9170601	30
35	0,3351775	0,355756	2,810913	0,9421550	25	35	0,4000825	0,436542	2,290725	0,9164791	25
40	0,3365475	0,357395	2,798019	0,9416665	20	40	0,4014150	0,438275	2,281669	0,9158963	20
45	0,3379167	0,359036	2,785230	0,9411760	15	45	0,4027467	0,440010	2,272672	0,9153115	15
50	0,3392852	0,360679	2,772544	0,9406835	10	50	0,4040775	0,441747	2,263735	0,9147247	10
55	0,3406531	0,362324	2,759960	0,9401891	5	55	0,4054050	0,443487	2,254857	0,9141361	5
20°	0,3420201	0,363970	2,747477	0,9396926	70°	24°	0,4067366	0,445228	2,246036	0,9135455	66°
Cosinus	Cotang.	Tang.	Sinus	Град. и мин.	Град. и мин.	Cosinus	Cotang.	Tang.	Sinus	Град. и мин.	

Град. и мин.	Sinus	Tang.	Cotang.	Cosinus	Град. и мин.	Град. и мин.	Sinus	Tang.	Cotang.	Cosinus	Град. и мин.
24°	0,4067366	0,445228	2,246036	0,9135455	66°	28°	0,4694716	0,531709	1,880726	0,8829476	62°
5	0,4080649	0,446972	2,237273	0,9129129	55	5	0,4707553	0,533576	1,874150	0,8822638	55
10	0,4093923	0,448718	2,228567	0,9123584	50	10	0,4720380	0,535446	1,867600	0,8815782	50
15	0,4107189	0,450467	2,219917	0,9117620	45	15	0,4733187	0,537319	1,861090	0,8808907	45
20	0,4120445	0,452217	2,211323	0,9111637	40	20	0,4746004	0,539195	1,854615	0,8802014	40
25	0,4133693	0,453970	2,202784	0,9105637	35	25	0,4758801	0,541074	1,848178	0,8795102	35
30	0,4146932	0,455726	2,194299	0,9099613	30	30	0,4771598	0,542955	1,841770	0,8788171	30
35	0,4160163	0,457483	2,185869	0,9093572	25	35	0,4784364	0,544840	1,835399	0,8781222	25
40	0,4173385	0,459243	2,177492	0,9087511	20	40	0,4797131	0,546728	1,829062	0,8774254	20
45	0,4186597	0,461006	2,169167	0,9081432	15	45	0,4809888	0,548618	1,822759	0,8767268	15
50	0,4199801	0,462771	2,160895	0,9075333	10	50	0,4822634	0,550512	1,816489	0,8760263	10
55	0,4212996	0,464538	2,152675	0,9069215	5	55	0,4835370	0,552409	1,810252	0,8753239	5
28°	0,4226183	0,466307	2,144508	0,9063078	65°	28°	0,4848096	0,554309	1,804047	0,8746197	61°
5	0,4239360	0,468079	2,136389	0,9056922	55	5	0,4860812	0,556211	1,797875	0,8739137	55
10	0,4252528	0,469850	2,128321	0,9050746	50	10	0,4873517	0,558117	1,791736	0,8732058	50
15	0,4265687	0,471630	2,120303	0,9044551	45	15	0,4886212	0,560026	1,785628	0,8724960	45
20	0,4278838	0,473409	2,112334	0,9038338	40	20	0,4898887	0,561939	1,779552	0,8717844	40
25	0,4291979	0,475191	2,104415	0,9032105	35	25	0,4911572	0,563854	1,773507	0,8710710	35
30	0,4305119	0,476976	2,096453	0,9025853	30	30	0,4924236	0,565772	1,767494	0,8703557	30
35	0,4318234	0,478762	2,088720	0,9019582	25	35	0,4936889	0,567694	1,761511	0,8696386	25
40	0,4331348	0,480551	2,080943	0,9013292	20	40	0,4949532	0,569619	1,755559	0,8689198	20
45	0,4344453	0,482342	2,073214	0,9006982	15	45	0,4962165	0,571547	1,749637	0,8681988	15
50	0,4357548	0,484136	2,065531	0,9000654	10	50	0,4974787	0,573478	1,743745	0,8674762	10
55	0,4370634	0,485933	2,057895	0,8994307	5	55	0,4987399	0,575412	1,737883	0,8667517	5
26°	0,4383711	0,487732	2,050303	0,8987940	64°	26°	0,5000000	0,577350	1,732050	0,8660254	60°
5	0,4396779	0,489534	2,042757	0,8981555	55	5	0,5012591	0,579291	1,726247	0,8652973	55
10	0,4409838	0,491338	2,035256	0,8975151	50	10	0,5025170	0,581235	1,720473	0,8645675	50
15	0,4422887	0,493145	2,027799	0,8968727	45	15	0,5037740	0,583182	1,714728	0,8638355	45
20	0,4435927	0,494954	2,020386	0,8962285	40	20	0,5050298	0,585133	1,709011	0,8631019	40
25	0,4448957	0,496766	2,013016	0,8955824	35	25	0,5062846	0,587087	1,703323	0,8623664	35
30	0,4461978	0,498581	2,005689	0,8949344	30	30	0,5075384	0,589045	1,697663	0,8616292	30
35	0,4474990	0,500398	1,998405	0,8942844	25	35	0,5087910	0,591005	1,692030	0,8608901	25
40	0,4487992	0,502218	1,991163	0,8936326	20	40	0,5100426	0,592969	1,686406	0,8601491	20
45	0,4500984	0,504041	1,983963	0,8929769	15	45	0,5112931	0,594937	1,680848	0,8594064	15
50	0,4513967	0,505866	1,976805	0,8923234	10	50	0,5125425	0,596908	1,675298	0,8586619	10
55	0,4526941	0,507694	1,969637	0,8916669	5	55	0,5137908	0,598882	1,669775	0,8579155	5
27°	0,4539905	0,509525	1,962610	0,8910065	63°	27°	0,5150381	0,600860	1,664279	0,8571673	63°
5	0,4552859	0,511358	1,955573	0,8903453	55	5	0,5162842	0,602841	1,658809	0,8564173	55
10	0,4565804	0,513195	1,948577	0,8896822	50	10	0,5175293	0,604826	1,653366	0,8556655	50
15	0,4578739	0,515033	1,941620	0,8890171	45	15	0,5187733	0,606814	1,647949	0,8549119	45
20	0,4591665	0,516875	1,934702	0,8883503	40	20	0,5200161	0,608806	1,642557	0,8541584	40
25	0,4604580	0,518719	1,927822	0,8876815	35	25	0,5212579	0,610801	1,637191	0,8533992	35
30	0,4617486	0,520567	1,920962	0,8870108	30	30	0,5224986	0,612800	1,631851	0,8526402	30
35	0,4630382	0,522417	1,914179	0,8863383	25	35	0,5237381	0,614803	1,626536	0,8518793	25
40	0,4643269	0,524269	1,907414	0,8856639	20	40	0,5249766	0,616809	1,621246	0,8511167	20
45	0,4656145	0,526125	1,900687	0,8849876	15	45	0,5262139	0,618818	1,615962	0,8503522	15
50	0,4669012	0,527983	1,893997	0,8843095	10	50	0,5274502	0,620832	1,610741	0,8495860	10
55	0,4681869	0,529845	1,887343	0,8836295	5	55	0,5286863	0,622848	1,605526	0,8488179	5
28°	0,4694716	0,531709	1,880726	0,8829476	62°	28°	0,5299193	0,624860	1,600334	0,8480481	58°
Град. и мин.	Cosinus	Cotang.	Tang.	Sinus	Град. и мин.	Град. и мин.	Cosinus	Cotang.	Tang.	Sinus	Град. и мин.

	Sinus	Tang.	Cotang.	Cosinus	Град. и мин.			Sinus	Tang.	Cotang.	Cosinus	Град. и мин.
54°	0,5299193	0,624869	1,600334	0,8480481	58°	36'	0,5877853	0,726542	1,376381	0,8090170	54°	
55	0,5311521	0,626893	1,595167	0,8472765	55	5	0,5889613	0,728767	1,372180	0,8081612	25	
56	0,5323839	0,628921	1,590023	0,8465030	50	10	0,5901361	0,730996	1,367995	0,8073038	50	
57	0,5336145	0,630953	1,584904	0,8457278	45	15	0,5913098	0,733230	1,363827	0,8064446	45	
58	0,5348440	0,632988	1,579807	0,8449508	40	20	0,5924819	0,735469	1,359676	0,8055837	40	
59	0,5360724	0,635027	1,574735	0,8441720	35	25	0,5936530	0,737712	1,355541	0,8047211	35	
60	0,5372996	0,637070	1,569685	0,8433914	30	30	0,5948228	0,739961	1,351422	0,8038569	30	
61	0,5385257	0,639116	1,564659	0,8426091	25	35	0,5959913	0,742214	1,347319	0,8029909	25	
62	0,5397509	0,641167	1,559655	0,8418249	20	40	0,5971586	0,744472	1,343233	0,8021232	20	
63	0,5409745	0,643221	1,554674	0,8410390	15	45	0,5983246	0,746735	1,339162	0,8012538	15	
64	0,5421971	0,645279	1,549715	0,8402513	10	50	0,5994893	0,749003	1,335107	0,8003827	10	
65	0,5434187	0,647341	1,544779	0,8394618	5	55	0,6006528	0,751276	1,331068	0,7995100	5	
66	0,5446390	0,649407	1,539865	0,8386706	57°	37'	0,6018150	0,753554	1,327044	0,7986385	53°	
67	0,5458583	0,651477	1,534972	0,8378775	55	5	0,6029760	0,755836	1,323036	0,7977694	55	
68	0,5470763	0,653551	1,530102	0,8370827	50	10	0,6041356	0,758124	1,319044	0,7968815	50	
69	0,5482932	0,655628	1,525263	0,8362862	45	15	0,6052940	0,760417	1,315066	0,7960020	45	
70	0,5495090	0,657710	1,520428	0,8354878	40	20	0,6064511	0,762715	1,311104	0,7951208	40	
71	0,5507236	0,659796	1,515602	0,8346877	35	25	0,6076069	0,765018	1,307152	0,7942379	35	
72	0,5519300	0,661885	1,510835	0,8338858	30	30	0,6087614	0,767327	1,303226	0,7933533	30	
73	0,5531422	0,663979	1,506071	0,8330822	25	35	0,6099147	0,769640	1,299308	0,7924671	25	
74	0,5543503	0,666076	1,501328	0,8322768	20	40	0,6110666	0,771959	1,295405	0,7915792	20	
75	0,5555570	0,668178	1,496505	0,8314696	15	45	0,6122173	0,774282	1,291517	0,7906896	15	
76	0,5567620	0,670284	1,491903	0,8306607	10	50	0,6133686	0,776611	1,287644	0,7897983	10	
77	0,5579685	0,672394	1,487222	0,8298500	5	55	0,6145147	0,778946	1,283786	0,7889054	5	
78	0,5591829	0,674508	1,482561	0,8290376	56°	38'	0,6156616	0,781285	1,279941	0,7880106	52°	
79	0,5603981	0,676626	1,477919	0,8282234	55	5	0,6168069	0,783630	1,276111	0,7871145	55	
80	0,5616021	0,678749	1,473298	0,8274074	50	10	0,6179511	0,785980	1,272295	0,7862185	50	
81	0,5628049	0,680875	1,468696	0,8265897	45	15	0,6190939	0,788336	1,268494	0,7853169	45	
82	0,5640066	0,683006	1,464114	0,8257703	40	20	0,6202355	0,790697	1,264708	0,7844157	40	
83	0,5652070	0,685141	1,459552	0,8249491	35	25	0,6213757	0,793064	1,260932	0,7835127	35	
84	0,5664062	0,687281	1,455009	0,8241262	30	30	0,6225146	0,795435	1,257172	0,7826062	30	
85	0,5676043	0,689424	1,450485	0,8233015	25	35	0,6236522	0,797813	1,253426	0,7817019	25	
86	0,5688011	0,691572	1,445980	0,8224751	20	40	0,6247885	0,800196	1,249693	0,7807940	20	
87	0,5699968	0,693724	1,441494	0,8216469	15	45	0,6259235	0,802584	1,245974	0,7798845	15	
88	0,5711912	0,695881	1,437026	0,8208170	10	50	0,6270571	0,804979	1,242268	0,7789733	10	
89	0,5723844	0,698042	1,432578	0,8199854	5	55	0,6281894	0,807378	1,238576	0,7780604	5	
90	0,5735764	0,700207	1,428148	0,8191520	55°	39'	0,6293204	0,809784	1,234897	0,7771460	51°	
91	0,5747672	0,702377	1,423736	0,8183169	55	5	0,6304500	0,812195	1,231231	0,7762298	55	
92	0,5759568	0,704551	1,419342	0,8174801	50	10	0,6315784	0,814611	1,227578	0,7753121	50	
93	0,5771452	0,706730	1,414967	0,8166416	45	15	0,6327053	0,817034	1,223938	0,7743926	45	
94	0,5783323	0,708913	1,410609	0,8158013	40	20	0,6338310	0,819452	1,220312	0,7734716	40	
95	0,5795183	0,711100	1,406270	0,8149593	35	25	0,6349553	0,821896	1,216698	0,7725489	35	
96	0,5807030	0,713293	1,401948	0,8141185	30	30	0,6360782	0,824336	1,213097	0,7716246	30	
97	0,5818864	0,715490	1,397644	0,8132701	25	35	0,6371998	0,826782	1,209508	0,7706986	25	
98	0,5830687	0,717691	1,393357	0,8124229	20	40	0,6383201	0,829233	1,205932	0,7697710	20	
99	0,5842497	0,719897	1,389087	0,8115740	15	45	0,6394390	0,831691	1,202369	0,7688418	15	
100	0,5854294	0,722107	1,384836	0,8107234	10	50	0,6405566	0,834154	1,198818	0,7679110	10	
101	0,5866080	0,724322	1,380600	0,8098710	5	55	0,6416728	0,836624	1,195279	0,7669786	5	
102	0,5877853	0,726542	1,376381	0,8090170	54°	40'	0,6427876	0,839099	1,191753	0,7660444	50°	
Cosinus	Cotang.	Tang.	Sinus	Град. и мин.	Град. и мин.	Cosinus	Cotang.	Tang.	Sinus	Град. и мин.		

Град. и мин.	Sinus	Tang.	Cotang.	Cosinus	Град. и мин.	Град. и мин.	Sinus	Tang.	Cotang.	Cosinus	Град. и мин.
40°	0,6427876	0,839099	1,191753	0,7660444	50°	35	0,8766618	0,919010	1,068126	0,7362940	25
5	0,6439011	0,841581	1,188239	0,7651087	55	40	0,8777320	0,921696	1,064955	0,7353090	20
10	0,6450132	0,844068	1,184737	0,7641714	50	45	0,8788027	0,924391	1,061793	0,7343225	15
15	0,6461240	0,846562	1,181247	0,7632325	45	50	0,8798681	0,927091	1,078642	0,7333345	10
20	0,6472334	0,849062	1,177769	0,7622919	40	55	0,8809339	0,929799	1,075500	0,7323449	5
25	0,6483444	0,851568	1,174303	0,7613497	35	45°	0,8819984	0,932515	1,072368	0,7313537	47
30	0,6494480	0,854080	1,170849	0,7604060	30	5	0,8830613	0,935238	1,069246	0,7303610	55
35	0,6505533	0,856599	1,167407	0,7594606	20	10	0,8841229	0,937968	1,066134	0,7293688	50
40	0,6516572	0,859124	1,163976	0,7585136	20	15	0,8851830	0,940708	1,063031	0,7283710	45
45	0,6527598	0,861655	1,160557	0,7575650	15	20	0,8862416	0,943451	1,059938	0,7273736	40
50	0,6538609	0,864192	1,157149	0,7566148	10	25	0,8872988	0,946204	1,056854	0,7263748	35
55	0,6549607	0,866736	1,153753	0,7556630	5	30	0,8883546	0,948964	1,053780	0,7253744	30
41°	0,6560590	0,869286	1,150368	0,7547096	49°	35	0,8894089	0,951732	1,050715	0,7243724	25
5	0,6571560	0,871843	1,148994	0,7537546	55	40	0,8904617	0,954508	1,047659	0,7233690	20
10	0,6582516	0,874406	1,146332	0,7527980	50	45	0,8915131	0,957291	1,044613	0,7223640	15
15	0,6593458	0,876976	1,142081	0,7518398	45	50	0,8925630	0,960082	1,041576	0,7213574	10
20	0,6604386	0,879552	1,136941	0,7508800	40	55	0,8936114	0,962881	1,038548	0,7203404	5
25	0,6615300	0,882135	1,133612	0,7499187	35	44°	0,8946584	0,965688	1,035530	0,7193398	48°
30	0,6626200	0,884725	1,130294	0,7489557	30	5	0,8957039	0,968503	1,032520	0,7183287	55
35	0,6637087	0,887321	1,126987	0,7479912	25	10	0,8967479	0,971326	1,029520	0,7173161	50
40	0,6647959	0,889924	1,123690	0,7470251	20	15	0,8977905	0,974156	1,026528	0,7163019	45
45	0,6658817	0,892534	1,120405	0,7460574	15	20	0,8988315	0,976995	1,023546	0,7152863	40
50	0,6669661	0,895150	1,117130	0,7450881	10	25	0,8998711	0,979842	1,020572	0,7142691	35
55	0,6680490	0,897773	1,113866	0,7441173	5	30	0,9009093	0,982697	1,017607	0,7132504	30
42°	0,6691306	0,900404	1,110612	0,7431448	48°	35	0,9019459	0,985560	1,014651	0,7122303	25
5	0,6702108	0,903041	1,107369	0,7421708	55	40	0,9029811	0,988431	1,011703	0,7112086	20
10	0,6712895	0,905685	1,104136	0,7411953	50	45	0,9040147	0,991311	1,008704	0,7101854	15
15	0,6723668	0,908336	1,100914	0,7402181	45	50	0,9050469	0,994199	1,005834	0,7091607	10
20	0,6734427	0,910994	1,097702	0,7392394	40	55	0,9060776	0,997095	1,002913	0,7081345	5
25	0,6745172	0,913669	1,094500	0,7382592	35	45°	0,9071068	1,000000	1,000000	0,7071068	45°
30	0,6755902	0,916331	1,091308	0,7372773	30						
Град. и мин.	Cosinus	Cotang.	Tang.	Sinus	Град. и мин.	Град. и мин.	Cosinus	Cotang.	Tang.	Sinus	Град. и мин.

3. Таблица перевода минут и секунд в градусы.

Мин.	Градусы	Мин.	Градусы	Мин.	Градусы	Сек.	Градусы	Сек.	Градусы	Сек.	Градусы
1	0,016667	21	0,350000	41	0,683333	1	0,000278	21	0,005833	41	0,011389
2	0,033333	22	0,366667	42	0,700000	2	0,000556	22	0,008111	42	0,011667
3	0,050000	23	0,383333	43	0,716667	3	0,000833	23	0,008389	43	0,011944
4	0,066667	24	0,400000	44	0,733333	4	0,001111	24	0,008667	44	0,012222
5	0,083333	25	0,416667	45	0,750000	5	0,001389	25	0,008944	45	0,012500
6	0,100000	26	0,433333	46	0,766667	6	0,001667	26	0,009222	46	0,012778
7	0,116667	27	0,450000	47	0,783333	7	0,001944	27	0,009500	47	0,013056
8	0,133333	28	0,466667	48	0,800000	8	0,002222	28	0,009778	48	0,013333
9	0,150000	29	0,483333	49	0,816667	9	0,002500	29	0,009856	49	0,013611
10	0,166667	30	0,500000	50	0,833333	10	0,002778	30	0,008333	50	0,013889
11	0,183333	31	0,516667	51	0,850000	11	0,003056	31	0,008611	51	0,014167
12	0,200000	32	0,533333	52	0,866667	12	0,003333	32	0,008889	52	0,014444
13	0,216667	33	0,550000	53	0,883333	13	0,003611	33	0,009167	53	0,014722
14	0,233333	34	0,566667	54	0,900000	14	0,003889	34	0,009444	54	0,015000
15	0,250000	35	0,583333	55	0,916667	15	0,004167	35	0,009722	55	0,015278
16	0,266667	36	0,600000	56	0,933333	16	0,004444	36	0,010000	56	0,015556
17	0,283333	37	0,616667	57	0,950000	17	0,004722	37	0,010278	57	0,015833
18	0,300000	38	0,633333	58	0,966667	18	0,005000	38	0,010556	58	0,016111
19	0,316667	39	0,650000	59	0,983333	19	0,005278	39	0,010833	59	0,016389
20	0,333333	40	0,666667	60	1,000000	20	0,005556	40	0,011111	60	0,016667

И. Длина круговой дуги для радиуса — 1.

Град.	Длина	Град.	Длина	Град.	Длина	Мин.	Длина	Сек.	Длина
1	0,0174523	61	1,06465508	121	2,1118484	1	0,0002909	1	0,0000048
2	0,0349086	62	1,0821041	122	2,1293017	2	0,0005818	2	0,0000097
3	0,0523639	63	1,0995574	123	2,1467550	3	0,0008727	3	0,0000146
4	0,0698132	64	1,1170107	124	2,1642083	4	0,0011636	4	0,0000194
5	0,0872665	65	1,1344640	125	2,1816616	5	0,0014544	5	0,0000242
6	0,1047198	66	1,1519173	126	2,1991149	6	0,0017453	6	0,0000291
7	0,1221730	67	1,1693706	127	2,2165682	7	0,0020362	7	0,0000339
8	0,1396263	68	1,1868239	128	2,2340214	8	0,0023271	8	0,0000388
9	0,1570796	69	1,2042772	129	2,2514747	9	0,0026180	9	0,0000436
10	0,1745329	70	1,2217305	130	2,2689280	10	0,0029089	10	0,0000485
11	0,1919862	71	1,2391838	131	2,2863813	11	0,0031998	11	0,0000533
12	0,2094395	72	1,2566371	132	2,3038346	12	0,0034907	12	0,0000582
13	0,2268928	73	1,2740904	133	2,3212879	13	0,0037815	13	0,0000630
14	0,2443461	74	1,2915436	134	2,3387412	14	0,0040724	14	0,0000679
15	0,2617994	75	1,3089969	135	2,3561945	15	0,0043633	15	0,0000727
16	0,2792527	76	1,3264502	136	2,3736478	16	0,0046542	16	0,0000776
17	0,2967060	77	1,3439035	137	2,3911011	17	0,0049451	17	0,0000824
18	0,3141593	78	1,3613568	138	2,4085544	18	0,0052360	18	0,0000873
19	0,3316126	79	1,3788101	139	2,4260077	19	0,0055269	19	0,0000921
20	0,3490659	80	1,3962634	140	2,4434610	20	0,0058178	20	0,0000970
21	0,3665191	81	1,4137167	141	2,4609142	21	0,0061087	21	0,0001018
22	0,3839724	82	1,4311700	142	2,4783675	22	0,0063995	22	0,0001067
23	0,4014257	83	1,4486233	143	2,4958208	23	0,0066904	23	0,0001115
24	0,4188790	84	1,4660766	144	2,5132741	24	0,0069813	24	0,0001164
25	0,4363323	85	1,4835299	145	2,5307274	25	0,0072722	25	0,0001212
26	0,4537856	86	1,5009832	146	2,5481807	26	0,0075631	26	0,0001261
27	0,4712389	87	1,5184364	147	2,5656340	27	0,0078540	27	0,0001309
28	0,4886922	88	1,5358897	148	2,5830873	28	0,0081449	28	0,0001357
29	0,5061455	89	1,5533430	149	2,6005406	29	0,0084358	29	0,0001406
30	0,5235988	90	1,5707963	150	2,6179939	30	0,0087266	30	0,0001454
31	0,5410521	91	1,5882496	151	2,6354472	31	0,0090175	31	0,0001503
32	0,5585054	92	1,6057029	152	2,6529005	32	0,0093084	32	0,0001551
33	0,5759587	93	1,6231562	153	2,6703538	33	0,0095993	33	0,0001600
34	0,5934119	94	1,6406095	154	2,6878071	34	0,0098902	34	0,0001648
35	0,6108652	95	1,6580628	155	2,7052604	35	0,0101811	35	0,0001697
36	0,6283185	96	1,6755161	156	2,7227137	36	0,0104720	36	0,0001745
37	0,6457718	97	1,6929694	157	2,7401670	37	0,0107629	37	0,0001794
38	0,6632251	98	1,7104227	158	2,7576203	38	0,0110538	38	0,0001842
39	0,6806784	99	1,7278760	159	2,7750736	39	0,0113446	39	0,0001891
40	0,6981317	100	1,7453293	160	2,7925269	40	0,0116355	40	0,0001939
41	0,7155850	101	1,7627825	161	2,8099801	41	0,0119264	41	0,0001988
42	0,7330383	102	1,7802358	162	2,8274334	42	0,0122173	42	0,0002036
43	0,7504916	103	1,7976891	163	2,8448867	43	0,0125082	43	0,0002085
44	0,7679449	104	1,8151424	164	2,8623400	44	0,0127991	44	0,0002133
45	0,7853982	105	1,8325957	165	2,8797933	45	0,0130900	45	0,0002182
46	0,8028515	106	1,8500490	166	2,8972466	46	0,0133809	46	0,0002230
47	0,8203047	107	1,8675023	167	2,9146999	47	0,0136717	47	0,0002279
48	0,8377580	108	1,8849556	168	2,9321531	48	0,0139626	48	0,0002327
49	0,8552113	109	1,9024089	169	2,9496064	49	0,0142535	49	0,0002376
50	0,8726646	110	1,9198622	170	2,9670597	50	0,0145444	50	0,0002424
51	0,8901179	111	1,9373155	171	2,9845130	51	0,0148353	51	0,0002473
52	0,9075712	112	1,9547688	172	3,0019663	52	0,0151262	52	0,0002521
53	0,9250245	113	1,9722221	173	3,0194196	53	0,0154171	53	0,0002570
54	0,9424778	114	1,9896753	174	3,0368729	54	0,0157080	54	0,0002618
55	0,9599311	115	2,0071286	175	3,0543262	55	0,0159989	55	0,0002666
56	0,9773844	116	2,0245819	176	3,0717795	56	0,0162898	56	0,0002715
57	0,9948377	117	2,0420352	177	3,0892328	57	0,0165806	57	0,0002763
58	1,0122910	118	2,0594885	178	3,1066861	58	0,0168715	58	0,0002812
59	1,0297443	119	2,0769418	179	3,1241394	59	0,0171624	59	0,0002860
60	1,0471976	120	2,0943951	180	3,1415927	60	0,0174533	60	0,0002909

К. Длина дуги, стрелки, длина хорды и

Центр. угол в град.	Длина дуги l	Стрел- ка h	$\frac{l}{h}$	Длина хорды	Пло- щадь сег- мента	Центр. угол в град.	Длина дуги l	Стрел- ка h	$\frac{l}{h}$	Длина хорды	Пло- щадь сег- мента
1	0,0175	0,0000	458,36	0,0175	0,00000	46	0,8029	0,0795	10,10	0,7815	0,04176
2	0,0349	0,0002	229,19	0,0349	0,00000	47	0,8203	0,0829	9,89	0,7975	0,04448
3	0,0524	0,0003	152,79	0,0524	0,00001	48	0,8378	0,0865	9,69	0,8135	0,04731
4	0,0698	0,0006	114,60	0,0698	0,00003	49	0,8552	0,0900	9,50	0,8294	0,05025
5	0,0873	0,0010	91,69	0,0872	0,00006	50	0,8727	0,0937	9,31	0,8452	0,05331
6	0,1047	0,0014	76,41	0,1047	0,00010	51	0,8901	0,0974	9,14	0,8610	0,05649
7	0,1222	0,0019	64,01	0,1221	0,00015	52	0,9076	0,1012	8,97	0,8767	0,05978
8	0,1396	0,0024	56,01	0,1395	0,00023	53	0,9250	0,1051	8,80	0,8924	0,06319
9	0,1571	0,0031	50,96	0,1569	0,00032	54	0,9425	0,1090	8,65	0,9080	0,06673
10	0,1745	0,0038	45,87	0,1743	0,00044	55	0,9599	0,1130	8,49	0,9235	0,07039
11	0,1920	0,0046	41,70	0,1917	0,00059	56	0,9774	0,1171	8,35	0,9389	0,07417
12	0,2094	0,0055	38,23	0,2091	0,00076	57	0,9948	0,1212	8,21	0,9543	0,07806
13	0,2269	0,0064	35,28	0,2264	0,00097	58	1,0123	0,1254	8,07	0,9696	0,08212
14	0,2443	0,0075	32,78	0,2437	0,00121	59	1,0297	0,1296	7,94	0,9848	0,08629
15	0,2618	0,0086	30,60	0,2611	0,00149	60	1,0472	0,1340	7,81	1,0000	0,09050
16	0,2793	0,0097	28,04	0,2783	0,00181	61	1,0647	0,1384	7,69	1,0151	0,09502
17	0,2967	0,0110	27,01	0,2956	0,00217	62	1,0821	0,1428	7,56	1,0301	0,09958
18	0,3142	0,0123	25,35	0,3129	0,00257	63	1,0996	0,1474	7,46	1,0450	0,10428
19	0,3316	0,0137	24,17	0,3301	0,00302	64	1,1170	0,1520	7,35	1,0598	0,10911
20	0,3491	0,0152	22,98	0,3473	0,00352	65	1,1345	0,1566	7,24	1,0746	0,11408
21	0,3665	0,0167	21,95	0,3645	0,00408	66	1,1519	0,1613	7,14	1,0893	0,11919
22	0,3840	0,0184	20,90	0,3816	0,00468	67	1,1694	0,1661	7,04	1,1039	0,12443
23	0,4014	0,0201	20,00	0,3987	0,00535	68	1,1868	0,1710	6,94	1,1184	0,12982
24	0,4189	0,0219	19,17	0,4158	0,00607	69	1,2043	0,1759	6,85	1,1328	0,13535
25	0,4363	0,0237	18,47	0,4329	0,00686	70	1,2217	0,1808	6,76	1,1472	0,14102
26	0,4538	0,0256	17,71	0,4499	0,00771	71	1,2392	0,1859	6,67	1,1614	0,14688
27	0,4712	0,0276	17,06	0,4669	0,00862	72	1,2566	0,1910	6,58	1,1756	0,15279
28	0,4887	0,0297	16,45	0,4838	0,00961	73	1,2741	0,1961	6,50	1,1896	0,15889
29	0,5061	0,0319	15,89	0,5008	0,01067	74	1,2915	0,2014	6,41	1,2036	0,16514
30	0,5235	0,0341	15,37	0,5176	0,01180	75	1,3090	0,2066	6,34	1,2175	0,17154
31	0,5411	0,0364	14,88	0,5345	0,01301	76	1,3265	0,2120	6,26	1,2313	0,17808
32	0,5586	0,0387	14,42	0,5512	0,01429	77	1,3439	0,2174	6,18	1,2450	0,18477
33	0,5760	0,0412	13,99	0,5680	0,01566	78	1,3614	0,2229	6,11	1,2586	0,19160
34	0,5934	0,0437	13,58	0,5847	0,01711	79	1,3788	0,2284	6,04	1,2722	0,19859
35	0,6109	0,0463	13,20	0,6014	0,01864	80	1,3963	0,2340	5,97	1,2856	0,20573
36	0,6283	0,0489	12,84	0,6180	0,02027	81	1,4137	0,2396	5,90	1,2989	0,21301
37	0,6458	0,0517	12,50	0,6346	0,02198	82	1,4312	0,2453	5,83	1,3121	0,22045
38	0,6632	0,0545	12,17	0,6511	0,02378	83	1,4486	0,2510	5,77	1,3252	0,22804
39	0,6807	0,0574	11,87	0,6676	0,02568	84	1,4661	0,2569	5,71	1,3383	0,23578
40	0,6981	0,0603	11,58	0,6840	0,02767	85	1,4835	0,2627	5,65	1,3512	0,24367
41	0,7156	0,0633	11,30	0,7004	0,02976	86	1,5010	0,2686	5,59	1,3640	0,25171
42	0,7330	0,0664	11,04	0,7167	0,03195	87	1,5184	0,2746	5,53	1,3767	0,25990
43	0,7505	0,0696	10,78	0,7330	0,03425	88	1,5359	0,2807	5,47	1,3893	0,26825
44	0,7679	0,0728	10,55	0,7492	0,03664	89	1,5533	0,2867	5,42	1,4018	0,27675
45	0,7854	0,0761	10,32	0,7654	0,03915	90	1,5708	0,2929	5,36	1,4142	0,28540

Радиус r для заданной длины дуги l и стрелки h определяется по $r = l / \varphi$, где l_0 — та длина дуги, которая при радиусе $= 1$ соответствует заданному l/h . Если r — радиус круга и φ — центральный угол в град., то имеем:

1) длина хорды: $s = 2r \cdot \sin \frac{\varphi}{2}$;

2) стрелка: $h = r \left(1 - \cos \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{s}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{4} = 2r \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{4}$;

3) длина дуги: $l = \pi r \cdot \frac{\varphi}{180} = 0,017453 \cdot \varphi = \sqrt{s^2 + \frac{16}{3} h^3}$ (приблизительно);

Площадь сегмента для радиуса = 1.

Центр. угол в град.	Длина дуги l	Стрел- ка h	$\frac{l}{h}$	Длина хорды	Пло- щадь сег- мента	Центр. угол в град.	Длина дуги l	Стрел- ка h	$\frac{l}{h}$	Длина хорды	Пло- щадь сег- мента
81	1,5882	0,2991	5,31	1,4265	0,29420	136	2,3736	0,6254	3,80	1,8544	0,83949
82	1,6057	0,3053	5,26	1,4387	0,30316	137	2,3911	0,6335	3,77	1,8608	0,85455
83	1,6232	0,3116	5,21	1,4507	0,31226	138	2,4086	0,6416	3,75	1,8672	0,86971
84	1,6406	0,3180	5,16	1,4627	0,32152	139	2,4260	0,6498	3,73	1,8733	0,88497
85	1,6580	0,3244	5,11	1,4746	0,33093	140	2,4435	0,6580	3,71	1,8794	0,90034
86	1,6755	0,3309	5,06	1,4863	0,34050	141	2,4609	0,6662	3,69	1,8853	0,91580
87	1,6930	0,3374	5,02	1,4979	0,35021	142	2,4784	0,6744	3,67	1,8910	0,93135
88	1,7104	0,3439	4,97	1,5094	0,36008	143	2,4958	0,6827	3,66	1,8966	0,94700
89	1,7279	0,3506	4,93	1,5208	0,37009	144	2,5133	0,6910	3,64	1,9021	0,96274
90	1,7453	0,3572	4,89	1,5321	0,38026	145	2,5307	0,6993	3,62	1,9074	0,97858
91	1,7628	0,3639	4,84	1,5432	0,39058	146	2,5482	0,7076	3,60	1,9126	0,99449
92	1,7802	0,3707	4,80	1,5543	0,40104	147	2,5656	0,7160	3,58	1,9176	1,01050
93	1,7977	0,3775	4,76	1,5652	0,41166	148	2,5831	0,7244	3,57	1,9225	1,02658
94	1,8151	0,3843	4,72	1,5760	0,42242	149	2,6005	0,7328	3,55	1,9278	1,04275
95	1,8326	0,3912	4,68	1,5867	0,43333	150	2,6180	0,7412	3,53	1,9319	1,05900
96	1,8500	0,3982	4,65	1,5973	0,44439	151	2,6354	0,7496	3,52	1,9363	1,07532
97	1,8675	0,4052	4,61	1,6077	0,45560	152	2,6529	0,7581	3,50	1,9406	1,09171
98	1,8850	0,4122	4,57	1,6180	0,46695	153	2,6704	0,7666	3,48	1,9447	1,10818
99	1,9024	0,4193	4,54	1,6282	0,47845	154	2,6878	0,7750	3,47	1,9487	1,12472
100	1,9199	0,4264	4,50	1,6383	0,49008	155	2,7053	0,7836	3,45	1,9526	1,14132
101	1,9373	0,4336	4,47	1,6483	0,50187	156	2,7227	0,7921	3,44	1,9563	1,15799
102	1,9548	0,4408	4,43	1,6581	0,51379	157	2,7402	0,8006	3,42	1,9598	1,17472
103	1,9722	0,4481	4,40	1,6678	0,52586	158	2,7576	0,8092	3,41	1,9633	1,19151
104	1,9897	0,4554	4,37	1,6773	0,53807	159	2,7751	0,8178	3,39	1,9665	1,20835
105	2,0071	0,4627	4,34	1,6868	0,55041	160	2,7925	0,8264	3,38	1,9696	1,22525
106	2,0246	0,4701	4,31	1,6961	0,56289	161	2,8100	0,8350	3,37	1,9726	1,24221
107	2,0420	0,4775	4,28	1,7053	0,57551	162	2,8274	0,8436	3,35	1,9754	1,25921
108	2,0595	0,4850	4,25	1,7143	0,58827	163	2,8449	0,8522	3,34	1,9780	1,27626
109	2,0769	0,4925	4,22	1,7233	0,60116	164	2,8623	0,8608	3,33	1,9805	1,29335
110	2,0944	0,5000	4,19	1,7321	0,61418	165	2,8798	0,8695	3,31	1,9829	1,31049
111	2,1118	0,5076	4,16	1,7407	0,62734	166	2,8972	0,8781	3,30	1,9851	1,32766
112	2,1293	0,5152	4,13	1,7492	0,64063	167	2,9147	0,8868	3,28	1,9871	1,34487
113	2,1468	0,5228	4,11	1,7576	0,65404	168	2,9322	0,8955	3,27	1,9890	1,36212
114	2,1642	0,5305	4,08	1,7659	0,66759	169	2,9496	0,9042	3,26	1,9908	1,37940
115	2,1817	0,5383	4,05	1,7740	0,68125	170	2,9671	0,9128	3,25	1,9924	1,39671
116	2,1991	0,5460	4,03	1,7820	0,69505	171	2,9845	0,9215	3,24	1,9938	1,41404
117	2,2166	0,5538	4,00	1,7899	0,70897	172	3,0020	0,9302	3,23	1,9951	1,43140
118	2,2340	0,5616	3,98	1,7976	0,72301	173	3,0194	0,9390	3,22	1,9963	1,44878
119	2,2515	0,5693	3,95	1,8052	0,73716	174	3,0369	0,9477	3,20	1,9973	1,46617
120	2,2689	0,5774	3,93	1,8126	0,75144	175	3,0543	0,9564	3,19	1,9981	1,48359
121	2,2864	0,5853	3,91	1,8199	0,76584	176	3,0718	0,9651	3,18	1,9988	1,50101
122	2,3038	0,5933	3,88	1,8271	0,78034	177	3,0892	0,9738	3,17	1,9993	1,51845
123	2,3213	0,6013	3,86	1,8341	0,79497	178	3,1067	0,9825	3,16	1,9997	1,53589
124	2,3387	0,6093	3,84	1,8410	0,80970	179	3,1241	0,9913	3,15	1,9999	1,55334
125	2,3562	0,6173	3,82	1,8478	0,82454	180	3,1416	1,0000	3,14	2,0000	1,57080

б) площадь сегмента = $\frac{r^2}{2} \left(\frac{\pi}{180} \varphi - \sin \varphi \right)$;

б) « сектора = $\frac{\varphi}{360} \cdot \pi r^2 = 0,00872665 \pi r^2$.

б) $l = r$ соответствует $\varphi = 57^\circ 17' 44,806'' = 57,2957795^\circ = 206\ 264,806''$.

б) $\arcsin 1^\circ = \pi : 180 = 0,17\ 453\ 292\ 52$; $\lg \arcsin 1^\circ = 0,241877387 - 1$.

б) $\arcsin 1' = \pi : 10800 = 0,000\ 290\ 888\ 21$; $\lg \arcsin 1' = 0,463726177 - 4$.

б) $\arcsin 1'' = \pi : 648000 = 0,000\ 004\ 848\ 14$; $\lg \arcsin 1'' = 0,685574866 - 6$.

Л. Объемы шпоров для диаметров $d = 1$ до 209.

d	$\frac{\pi}{6} d^3$	d	$\frac{\pi}{6} d^3$	d	$\frac{\pi}{6} d^3$	d	$\frac{\pi}{6} d^3$	d	$\frac{\pi}{6} d^3$
1	0,523599	41	36 086,95	81	278 261,8	121	927 537,2	161	2 185 125
2	4,188790	42	38 792,39	82	288 695,6	122	950 775,8	162	2 226 094
3	14,13717	43	41 629,77	83	299 387,0	123	974 347,7	163	2 267 574
4	33,51032	44	44 602,24	84	310 339,1	124	998 305,9	164	2 309 565
5	65,44065	45	47 712,94	85	321 555,1	125	1 022 654	165	2 352 071
6	113,0973	46	50 965,01	86	333 038,2	126	1 047 394	166	2 395 096
7	179,5944	47	54 361,60	87	344 791,4	127	1 072 531	167	2 438 642
8	268,0828	48	57 905,84	88	356 817,9	128	1 098 066	168	2 482 713
9	381,7035	49	61 600,87	89	369 120,9	129	1 124 004	169	2 527 311
10	523,5988	50	65 449,85	90	381 703,5	130	1 150 347	170	2 572 441
11	696,9100	51	69 455,91	91	394 568,9	131	1 177 098	171	2 618 104
12	904,7787	52	73 622,18	92	407 720,1	132	1 204 260	172	2 664 305
13	1 150,347	53	77 951,81	93	421 160,3	133	1 231 838	173	2 711 046
14	1 436,755	54	82 447,92	94	434 892,8	134	1 259 833	174	2 758 331
15	1 767,148	55	87 113,75	95	448 920,5	135	1 288 249	175	2 806 162
16	2 144,660	56	91 952,32	96	463 246,7	136	1 317 090	176	2 854 543
17	2 572,441	57	96 966,83	97	477 874,5	137	1 346 357	177	2 903 477
18	3 053,628	58	102 150,4	98	492 807,0	138	1 376 055	178	2 952 967
19	3 591,364	59	107 536,2	99	508 047,4	139	1 406 187	179	3 0 3 006
20	4 188,790	60	113 097,3	100	523 598,8	140	1 436 755	180	3 053 628
21	4 849,048	61	118 847,0	101	539 464,3	141	1 467 763	181	3 104 805
22	5 575,280	62	124 788,2	102	555 647,2	142	1 499 214	182	3 156 551
23	6 370,628	63	130 924,3	103	572 150,5	143	1 531 112	183	3 208 869
24	7 238,229	64	137 258,2	104	588 977,4	144	1 563 457	184	3 261 761
25	8 181,231	65	143 793,3	105	606 131,0	145	1 596 256	185	3 315 231
26	9 202,772	66	150 532,6	106	623 614,5	146	1 629 511	186	3 369 282
27	10 305,99	67	157 479,1	107	641 431,0	147	1 663 224	187	3 423 919
28	11 494,04	68	164 638,2	108	659 583,7	148	1 697 398	188	3 479 142
29	12 770,05	69	172 006,9	109	678 075,6	149	1 732 038	189	3 534 956
30	14 137,17	70	179 594,4	110	696 910,0	150	1 767 146	190	3 591 364
31	15 598,53	71	187 401,8	111	716 090,0	151	1 802 725	191	3 648 369
32	17 157,28	72	195 432,2	112	735 618,6	152	1 838 778	192	3 705 973
33	18 816,57	73	203 688,8	113	755 499,1	153	1 875 309	193	3 764 181
34	20 579,53	74	212 174,8	114	775 734,6	154	1 912 321	194	3 822 996
35	22 449,30	75	220 893,2	115	796 328,3	155	1 949 816	195	3 882 419
36	24 429,02	76	229 847,3	116	817 283,2	156	1 987 799	196	3 942 456
37	26 521,85	77	239 040,1	117	838 602,7	157	2 026 271	197	4 003 108
38	28 730,91	78	248 474,9	118	860 289,5	158	2 065 237	198	4 064 379
39	31 059,38	79	258 154,6	119	882 347,3	159	2 104 699	199	4 126 272
40	33 510,32	80	268 082,6	120	904 778,7	160	2 144 660	200	4 188 790

М. Таблица гиперболических функций

для значений φ от 0 до 5,99.

φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	0,0000	0100	0200	0300	0400	0500	0600	0701	0801	0901	101
0,1	0,1002	1102	1203	1304	1405	1506	1607	1708	1810	1911	102
0,2	0,2013	2115	2218	2320	2423	2526	2629	2733	2837	2941	104
0,3	0,3045	3150	3255	3360	3466	3572	3678	3785	3892	4000	108
0,4	0,4108	4216	4325	4434	4543	4653	4764	4875	4986	5098	113
0,5	0,5211	5324	5438	5552	5666	5782	5897	6014	6131	6248	119
0,6	0,6367	6485	6605	6725	6846	6967	7090	7213	7336	7461	125
0,7	0,7586	7712	7838	7966	8094	8223	8353	8483	8615	8748	133
0,8	0,8881	9015	9150	9286	9423	9561	9700	9840	9981	*0122	143
0,9	1,0265	0400	0554	0700	0847	0995	1144	1294	1446	1598	154
1,0	1,1752	1907	2063	2220	2379	2539	2700	2862	3025	3190	166
1,1	1,3356	3524	3693	3863	4035	4208	4382	4558	4735	4914	181
1,2	1,5095	5276	5460	5645	5831	6019	6209	6400	6593	6788	196
1,3	1,6984	7182	7381	7583	7786	7991	8198	8406	8617	*8829	214
1,4	1,9043	9259	9477	9697	9919	0143	*0369	*0597	*0827	1059	234
1,5	2,1293	1529	1768	2008	2251	2496	2743	2993	3245	3499	257
1,6	2,3766	4015	4278	4540	4806	5076	5346	5620	5898	6178	281
1,7	2,6456	6740	7027	7317	7609	*7904	8202	8503	8806	9112	310
1,8	2,9422	9734	*0049	*0367	*0689	1013	*1340	*1671	*2005	*2341	341
1,9	3,2682	3025	3372	3722	4075	4432	4792	5156	5523	5894	375
2,0	3,6269	6647	7028	7414	7803	8196	8593	8993	9398	9806	413
2,1	4,0219	0635	1056	1480	1909	2342	2779	3221	3666	4117	454
2,2	4,4571	5030	5494	5962	6434	6912	7394	7880	8372	8868	502
2,3	4,9370	9876	*0387	*0903	*1425	1951	*2483	*3020	*3562	*4109	553
2,4	5,4662	5221	5785	6354	6929	7510	8097	8689	9288	9892	610
2,5	6,0502	1118	1741	2369	3004	3645	4293	4946	5607	6274	673
2,6	6,6947	7628	8315	9009	9709	*0417	*1132	*1854	2583	*3310	744
2,7	7,4063	4814	5572	6338	7112	7894	8683	9480	*0285	*1098	821
2,8	8,1919	2749	3586	4432	5287	6150	7021	7902	8791	9689	907
2,9	9,0596	1512	2437	3371	4315	5268	6231	7203	8185	9177	1002
3,0	10,0179	1191	2212	3245	4287	5340	6403	7477	8562	9658	1107
3,1	11,0765	1882	3011	4151	5303	6466	7641	8827	*0026	*1236	1223
3,2	12,2459	3694	4941	6201	7473	8758	*0056	*1367	*2691	*4028	1351
3,3	13,5379	6743	8121	9513	*0919	*2338	*3772	*5221	*6684	*8161	1493
3,4	14,9655	15,116	15,268	15,422	15,577	15,734	15,893	16,053	16,214	16,378	165
3,5	16,543	16,709	16,877	17,047	17,219	17,392	17,567	17,744	17,923	18,103	182
3,6	18,285	18,470	18,655	18,843	19,033	19,224	19,418	19,613	19,811	20,010	201
3,7	20,211	20,415	20,620	20,828	21,037	21,249	21,463	21,679	21,897	22,117	222
3,8	22,339	22,564	22,791	23,020	23,252	23,486	23,722	23,961	24,202	24,445	246
3,9	24,691	24,939	25,190	25,444	25,700	25,958	26,219	26,483	26,749	27,018	272
4,0	27,290	27,564	27,842	28,122	28,404	28,690	28,979	29,270	29,564	29,862	300
4,1	30,162	30,465	30,772	31,081	31,393	31,709	32,028	32,350	32,675	33,004	332
4,2	33,336	33,671	34,009	34,351	34,697	35,046	35,398	35,754	36,113	36,476	367
4,3	36,843	37,214	37,588	37,966	38,347	38,733	39,122	39,515	39,913	40,314	405
4,4	40,719	41,129	41,542	41,960	42,382	42,808	43,238	43,673	44,112	44,555	448
4,5	45,003	45,455	45,912	46,374	46,840	47,311	47,787	48,267	48,752	49,242	495
4,6	49,737	50,237	50,742	51,252	51,767	52,288	52,813	53,344	53,880	54,422	547
4,7	54,969	55,522	56,080	56,643	57,213	57,788	58,369	58,955	59,548	60,147	604
4,8	60,751	61,362	61,979	62,601	63,231	63,866	64,508	65,157	65,812	66,473	668
4,9	67,141	67,816	68,498	69,186	69,882	70,584	71,293	72,010	72,734	73,465	738
5,0	74,203	74,949	75,702	76,463	77,232	78,008	78,792	79,584	80,384	81,192	818
5,1	82,008	82,835	83,665	84,508	85,355	86,213	87,079	87,955	88,839	89,732	902
5,2	90,633	91,544	92,464	93,394	94,332	95,281	96,239	97,205	98,182	99,169	997
5,3	100,166	101,173	102,190	103,217	104,254	105,302	106,360	107,429	108,509	109,599	1102
5,4	110,701	111,814	112,938	114,072	115,219	116,377	117,547	118,728	119,921	121,127	1217
5,5	122,344	123,570	124,816	126,079	127,337	128,611	129,913	131,215	132,534	133,866	1346
5,6	135,211	136,574	137,943	139,329	140,730	142,144	143,573	145,016	146,473	147,945	1487
5,7	149,432	150,934	152,451	153,983	155,531	157,094	158,673	160,267	161,878	163,505	1643
5,8	165,148	166,808	168,486	170,178	171,888	173,616	175,361	177,123	178,903	180,701	1816
5,9	182,517	184,352	186,205	188,076	189,966	191,875	193,804	195,752	197,719	199,706	2007

для значений φ от 0 до 5,99.

φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	1,0000	0001	0002	0005	0008	0013	0018	0025	0032	0041	9
0,1	1,0050	0061	0072	0085	0098	0113	0128	0145	0162	0181	20
0,2	1,0201	0221	0243	0266	0289	0314	0340	0367	0395	0423	30
0,3	1,0453	0484	0516	0549	0584	0619	0655	0692	0731	0770	41
0,4	1,0811	0852	0895	0939	0984	1030	1077	1125	1174	1225	51
0,5	1,1276	1329	1383	1438	1494	1551	1609	1669	1730	1792	63
0,6	1,1855	1919	1984	2051	2119	2188	2258	2330	2402	2476	76
0,7	1,2552	2628	2708	2785	2865	2947	3030	3114	3199	3286	88
0,8	1,3374	3463	3555	3647	3740	3835	3932	4029	4128	4229	102
0,9	1,4331	4434	4539	4646	4753	4862	4973	5085	5199	5314	117
1,0	1,5431	5549	5669	5790	5913	6038	6164	6292	6421	6552	133
1,1	1,6685	6820	6966	7093	7233	7374	7517	7662	7808	7957	151
1,2	1,8107	8258	8412	8568	8725	8884	9045	9208	9373	9540	169
1,3	1,9709	9880	0053	0228	0404	0583	0764	0947	1132	1320	189
1,4	2,1509	1700	1894	2090	2288	2488	2691	2896	3103	3312	212
1,5	2,3524	3738	3955	4174	4395	4619	4845	5073	5305	5538	237
1,6	2,5775	6013	6255	6499	6746	6995	7247	7502	7760	8020	263
1,7	2,8283	8549	8818	9090	9364	9642	9922	0206	0492	0782	293
1,8	3,1075	1311	1609	1972	2277	2585	2897	3212	3530	3852	325
1,9	3,4177	4506	4838	5173	5512	5855	6201	6551	6904	7261	361
2,0	3,7622	7087	8355	8727	9103	9483	9867	0255	0647	1043	400
2,1	4,1443	1847	2256	2689	3086	3507	3932	4362	4797	5236	443
2,2	4,5679	6127	5080	7037	7499	7966	8437	8914	9395	9881	491
2,3	5,0372	0868	1370	1876	2388	2905	3427	3954	4487	5026	543
2,4	5,5570	6119	6674	7235	7801	8373	8951	9535	0125	0721	602
2,5	6,1323	1931	2545	3166	3793	4426	5066	5712	6365	7024	666
2,6	6,7690	8363	9043	9729	0423	1123	1831	2548	3268	3998	737
2,7	7,4735	8749	6231	6990	7758	8533	9316	0106	0805	1512	815
2,8	8,2527	3351	4182	5022	5871	6728	7594	8469	9352	0244	902
2,9	9,1146	2050	2976	3905	4844	5792	6749	7716	8693	9680	998
3,0	10,0678	1683	2701	3728	4765	5814	6872	7942	9022	0113	1102
3,1	11,1215	2328	3453	4589	5736	6895	8065	9247	0442	1648	1218
3,2	12,2867	4097	5340	6596	7864	9146	0440	1747	3067	4401	1347
3,3	13,5748	7108	8483	9871	11273	2689	4120	5565	7024	8498	1489
3,4	14,999	15,149	15,301	15,455	15,610	15,766	15,924	16,084	16,245	16,408	165
3,5	16,537	16,739	16,907	17,077	17,248	17,421	17,596	17,772	17,951	18,131	182
3,6	18,313	18,497	18,682	18,870	19,059	19,250	19,444	19,639	19,836	20,035	201
3,7	20,236	20,439	20,644	20,852	21,061	21,272	21,486	21,702	21,919	22,140	222
3,8	22,362	22,586	22,813	23,042	23,273	23,507	23,743	23,982	24,222	24,466	245
3,9	24,711	24,960	25,210	25,463	25,719	25,977	26,238	26,502	26,768	27,037	271
4,0	27,306	27,583	27,860	28,139	28,422	28,707	28,996	29,287	29,581	29,878	300
4,1	30,178	30,482	30,788	31,097	31,409	31,725	32,044	32,365	32,687	33,019	332
4,2	33,351	33,688	34,024	34,366	34,711	35,060	35,412	35,768	36,127	36,490	367
4,3	36,857	37,227	37,601	37,979	38,360	38,746	39,135	39,528	39,925	40,326	406
4,4	40,732	41,141	41,554	41,972	42,393	42,819	43,250	43,684	44,123	44,566	448
4,5	45,014	45,466	45,923	46,385	46,851	47,321	47,797	48,277	48,762	49,252	495
4,6	49,747	50,247	50,752	51,262	51,777	52,297	52,823	53,354	53,890	54,431	547
4,7	54,978	55,531	56,089	56,652	57,221	57,796	58,377	58,964	59,556	60,155	604
4,8	60,579	61,370	61,987	62,609	63,239	63,874	64,516	65,164	65,819	66,481	668
4,9	67,149	67,823	68,505	69,193	69,889	70,591	71,300	72,017	72,741	73,472	738
5,0	74,210	74,956	75,709	76,470	77,238	78,014	78,798	79,590	80,390	81,198	816
5,1	82,014	82,838	83,671	84,512	85,361	86,219	87,086	87,960	88,844	89,737	902
5,2	90,639	91,560	92,470	93,399	94,338	95,286	96,243	97,211	98,188	99,174	997
5,3	100,171	101,178	102,194	103,221	104,259	105,307	106,365	107,434	108,513	109,604	1102
5,4	110,706	111,818	112,942	114,077	115,223	116,381	117,551	118,732	119,925	121,131	1217
5,5	122,348	123,578	124,820	126,074	127,341	128,621	129,913	131,219	132,538	133,780	1345
5,6	135,215	136,574	137,947	139,333	140,733	142,148	143,576	145,019	146,476	147,949	1487
5,7	149,435	150,937	152,454	153,986	155,534	157,097	158,676	160,270	161,881	163,508	1643
5,8	166,151	166,811	168,498	170,181	171,891	173,619	175,364	177,126	178,906	180,704	1816
5,9	182,520	184,354	186,207	188,079	189,969	191,878	193,806	195,754	197,721	199,700	200

В. Бриггсовы логарифмы $\lg x$ для значений x от 0 до 5,89. Все значения $\lg$ увеличены на 10.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	0,0000	0000	0001	0002	0004	0005	0006	0011	0014	0018	4
0,1	0,0022	0028	0031	0037	0042	0049	0055	0063	0070	0078	8
0,2	0,0086	0095	0104	0114	0124	0134	0145	0156	0168	0180	13
0,3	0,0193	0206	0219	0232	0248	0261	0276	0291	0306	0322	17
0,4	0,0339	0355	0372	0390	0407	0426	0444	0463	0482	0502	20
0,5	0,0522	0542	0563	0583	0605	0626	0648	0670	0693	0716	23
0,6	0,0739	0762	0786	0810	0835	0859	0884	0910	0935	0961	26
0,7	0,0987	1013	1040	1067	1094	1122	1149	1177	1206	1234	29
0,8	0,1236	1262	1291	1320	1350	1380	1410	1440	1470	1501	31
0,9	0,1563	1594	1625	1657	1689	1721	1753	1786	1818	1851	33
1,0	0,1684	1917	1950	1984	2018	2052	2086	2120	2154	2189	34
1,1	0,2223	2258	2293	2328	2364	2399	2435	2470	2506	2542	36
1,2	0,2578	2615	2651	2688	2724	2761	2798	2835	2872	2909	38
1,3	0,2947	2984	3022	3059	3097	3135	3173	3211	3250	3288	38
1,4	0,3326	3366	3403	3442	3481	3520	3559	3598	3637	3676	39
1,5	0,3716	3755	3794	3833	3873	3913	3952	3992	4032	4072	40
1,6	0,4112	4152	4192	4232	4273	4313	4353	4394	4434	4475	40
1,7	0,4515	4556	4597	4637	4678	4719	4760	4801	4842	4883	41
1,8	0,4924	4965	5006	5048	5089	5130	5172	5213	5254	5296	41
1,9	0,5337	5379	5421	5462	5504	5546	5587	5629	5671	5713	41
2,0	0,5754	5796	5838	5880	5922	5964	6006	6048	6090	6132	43
2,1	0,6175	6217	6259	6301	6343	6386	6428	6470	6512	6555	42
2,2	0,6597	6640	6682	6724	6767	6809	6852	6894	6937	6979	43
2,3	0,7023	7064	7107	7150	7192	7235	7278	7320	7363	7406	42
2,4	0,7448	7491	7534	7577	7619	7662	7705	7748	7791	7833	43
2,5	0,7876	7919	7962	8005	8048	8091	8134	8176	8219	8262	43
2,6	0,8305	8348	8391	8434	8477	8520	8563	8606	8649	8692	43
2,7	0,8735	8778	8821	8864	8907	8951	8994	9037	9080	9123	43
2,8	0,9160	9203	9245	9288	9331	9374	9417	9460	9503	9546	43
2,9	0,9597	9641	9684	9727	9770	9813	9856	9900	9943	9986	43
3,0	1,0029	0073	0116	0159	0202	0245	0289	0332	0375	0418	44
3,1	1,0462	0505	0548	0591	0635	0678	0721	0764	0808	0851	43
3,2	1,0884	0938	0981	1024	1068	1111	1154	1197	1241	1284	43
3,3	1,1327	1371	1414	1457	1501	1544	1587	1631	1674	1717	44
3,4	1,1761	1804	1847	1891	1934	1977	2021	2064	2107	2151	43
3,5	1,2194	2237	2281	2324	2367	2411	2454	2497	2541	2584	44
3,6	1,2628	2671	2714	2758	2801	2844	2888	2931	2975	3018	43
3,7	1,3061	3105	3148	3191	3235	3278	3322	3365	3408	3452	43
3,8	1,3495	3538	3582	3625	3669	3712	3756	3799	3842	3886	43
3,9	1,3929	3972	4016	4059	4103	4146	4189	4233	4276	4320	43
4,0	1,4363	4406	4450	4493	4537	4580	4623	4667	4710	4754	43
4,1	1,4797	4840	4884	4927	4971	5014	5057	5101	5144	5188	43
4,2	1,5231	5274	5318	5361	5405	5448	5492	5535	5578	5622	43
4,3	1,5665	5709	5752	5795	5839	5882	5926	5969	6012	6056	43
4,4	1,6099	6143	6186	6230	6273	6316	6360	6403	6447	6490	43
4,5	1,6533	6577	6620	6664	6707	6751	6794	6837	6881	6924	44
4,6	1,6968	7011	7055	7098	7141	7185	7228	7272	7315	7358	44
4,7	1,7402	7445	7489	7532	7576	7619	7662	7706	7749	7793	43
4,8	1,7836	7880	7923	7966	8010	8053	8097	8140	8184	8227	43
4,9	1,8270	8314	8357	8401	8444	8487	8531	8574	8618	8661	44
5,0	1,8705	8748	8791	8835	8878	8922	8965	9009	9052	9096	43
5,1	1,9139	9182	9226	9268	9313	9356	9399	9443	9486	9530	43
5,2	1,9573	9617	9660	9703	9747	9790	9834	9877	9921	9964	43
5,3	2,0007	0051	0094	0138	0181	0225	0268	0311	0355	0398	43
5,4	2,0442	0485	0529	0572	0615	0659	0702	0746	0789	0833	43
5,5	2,0875	0919	0963	1006	1050	1093	1137	1180	1223	1267	43
5,6	2,1310	1354	1397	1441	1484	1527	1571	1614	1658	1701	43
5,7	2,1745	1788	1831	1875	1918	1962	2005	2049	2092	2135	43
5,8	2,2179	2222	2265	2309	2353	2396	2439	2483	2526	2570	43
5,9	2,2613	2657	2700	2743	2787	2830	2874	2917	2961	3004	43

Бриггсовы логарифмы $\lg x$ для значений x от 0 до 5,99.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	— ∞	8,0000	3011	4772	6022	6992	7784	8455	9036	9548	459
0,1	9,0007	0423	0802	1152	1476	1777	2060	2325	2576	2814	225
0,2	9,3039	3254	3459	3656	3844	4025	4199	4366	4528	4685	151
0,3	9,4838	4983	5125	5264	5398	5529	5656	5781	5902	6020	116
0,4	9,6138	6249	6369	6488	6574	6678	6780	6880	6978	7074	95
0,5	9,7169	7263	7354	7444	7533	7620	7707	7791	7876	7958	81
0,6	9,8039	8119	8199	8277	8354	8431	8506	8581	8655	8728	72
0,7	9,8800	8872	8942	9012	9082	9150	9219	9288	9353	9419	66
0,8	9,9485	9550	9614	9678	9724	9808	9868	9920	9992	0053	61
0,9	10,0114	0174	0234	0294	0353	0412	0470	0529	0586	0644	57
1,0	10,0701	0758	0816	0871	0927	0983	1038	1093	1148	1203	54
1,1	10,1257	1311	1365	1419	1472	1525	1578	1631	1684	1736	52
1,2	10,1788	1840	1892	1944	1995	2046	2098	2149	2199	2250	50
1,3	10,2300	2351	2401	2451	2501	2551	2600	2650	2699	2748	42
1,4	10,2797	2846	2895	2944	2993	3041	3090	3138	3186	3234	48
1,5	10,3282	3330	3378	3426	3474	3521	3569	3616	3663	3711	47
1,6	10,3758	3805	3852	3899	3946	3992	4039	4086	4132	4179	46
1,7	10,4225	4272	4318	4364	4411	4457	4503	4549	4595	4641	46
1,8	10,4687	4733	4778	4824	4870	4915	4961	5007	5052	5098	46
1,9	10,5143	5188	5234	5279	5324	5370	5415	5460	5505	5550	45
2,0	10,5595	5640	5685	5730	5775	5820	5865	5910	5955	6000	45
2,1	10,6044	6089	6134	6178	6223	6268	6312	6357	6401	6446	45
2,2	10,6491	6535	6580	6624	6668	6713	6757	6802	6846	6890	45
2,3	10,6935	6979	7023	7067	7112	7156	7200	7244	7289	7333	44
2,4	10,7377	7421	7465	7509	7553	7597	7642	7686	7730	7774	44
2,5	10,7818	7862	7906	7950	7994	8038	8082	8126	8169	8213	44
2,6	10,8257	8301	8345	8389	8433	8477	8521	8564	8608	8652	44
2,7	10,8696	8740	8784	8827	8871	8915	8959	9003	9046	9090	44
2,8	10,9134	9178	9221	9265	9309	9353	9396	9440	9484	9527	44
2,9	10,9571	9615	9658	9702	9746	9789	9833	9877	9920	9964	44
3,0	11,0008	0051	0095	0139	0183	0226	0270	0313	0357	0400	44
3,1	11,0444	0488	0531	0575	0618	0662	0706	0749	0793	0836	44
3,2	11,0880	0923	0967	1011	1054	1098	1141	1185	1228	1272	44
3,3	11,1316	1359	1403	1446	1490	1533	1577	1620	1664	1707	44
3,4	11,1751	1794	1838	1881	1925	1968	2012	2056	2099	2143	43
3,5	11,2186	2230	2273	2317	2360	2404	2447	2491	2534	2578	43
3,6	11,2621	2665	2708	2752	2795	2839	2882	2925	2969	3012	44
3,7	11,3056	3099	3143	3186	3230	3273	3317	3360	3404	3447	44
3,8	11,3491	3534	3578	3621	3665	3708	3752	3795	3838	3882	43
3,9	11,3925	3969	4012	4056	4099	4143	4186	4230	4273	4317	43
4,0	11,4360	4403	4447	4490	4534	4577	4621	4664	4708	4751	44
4,1	11,4795	4838	4881	4925	4968	5012	5055	5099	5142	5186	43
4,2	11,5229	5273	5316	5359	5403	5446	5490	5533	5577	5620	44
4,3	11,5664	5707	5750	5794	5837	5881	5924	5968	6011	6055	43
4,4	11,6098	6141	6185	6228	6272	6315	6359	6402	6446	6489	43
4,5	11,6532	6576	6619	6663	6706	6750	6793	6836	6880	6923	44
4,6	11,6967	7010	7054	7097	7141	7184	7227	7271	7314	7358	43
4,7	11,7401	7445	7488	7531	7575	7618	7662	7706	7749	7792	44
4,8	11,7836	7879	7922	7966	8009	8053	8096	8140	8183	8226	44
4,9	11,8270	8313	8357	8400	8444	8487	8530	8574	8617	8661	43
5,0	11,8704	8748	8791	8835	8878	8921	8965	9008	9052	9095	43
5,1	11,9139	9182	9225	9269	9312	9356	9399	9443	9486	9529	43
5,2	11,9573	9616	9660	9703	9747	9790	9833	9877	9920	9964	43
5,3	12,0007	0051	0094	0137	0181	0224	0268	0311	0355	0398	43
5,4	12,0442	0485	0528	0572	0615	0659	0702	0746	0789	0832	43
5,5	12,0876	0919	0963	1006	1050	1093	1136	1180	1223	1267	43
5,6	12,1310	1354	1397	1440	1484	1527	1571	1614	1658	1701	43
5,7	12,1744	1788	1831	1875	1918	1962	2005	2048	2092	2135	43
5,8	12,2179	2222	2266	2309	2352	2396	2439	2483	2526	2570	43
5,9	12,2613	2656	2700	2743	2787	2830	2874	2917	2960	3004	43

th φ для значения ст 0 до 2,69.

φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	0,0000	0100	0200	0300	0400	0500	0599	0699	0798	0898	99
0,1	0,0997	1098	1194	1293	1391	1489	1587	1684	1781	1878	96
0,2	0,1974	2070	2165	2260	2355	2449	2543	2636	2739	2821	92
0,3	0,2913	3004	3095	3185	3275	3364	3452	3540	3627	3714	86
0,4	0,3800	3883	3969	4053	4137	4119	4301	4382	4462	4542	79
0,5	0,4621	4700	4777	4854	4930	5005	5080	5154	5227	5299	71
0,6	0,5370	5441	5511	5581	5649	5717	5784	5850	5915	5980	64
0,7	0,6044	6107	6169	6231	6291	6352	6411	6469	6527	6584	56
0,8	0,6640	6696	6751	6805	6858	6911	6963	7014	7064	7114	48
0,9	0,7168	7211	7259	7306	7352	7398	7443	7487	7531	7574	42
1,0	0,7616	7658	7699	7739	7779	7818	7857	7895	7932	7969	36
1,1	0,8005	8041	8076	8110	8144	8178	8210	8243	8275	8306	31
1,2	0,8337	8367	8397	8426	8455	8483	8511	8538	8565	8591	26
1,3	0,8617	8643	8668	8693	8717	8741	8764	8787	8810	8831	22
1,4	0,8854	8875	8898	8917	8937	8957	8977	8996	9015	9033	19
1,5	0,9052	9069	9087	9104	9121	9138	9154	9170	9186	9202	15
1,6	0,9217	9232	9246	9261	9275	9289	9302	9316	9329	9342	12
1,7	0,9354	9367	9379	9391	9402	9414	9425	9436	9447	9458	10
1,8	0,9468	9478	9488	9498	9508	9518	9527	9536	9545	9554	8
1,9	0,9562	9571	9579	9587	9595	9603	9611	9619	9626	9633	7
2,0	0,9640	9647	9654	9661	9668	9674	9680	9687	9693	9699	6
2,1	0,9705	9710	9716	9722	9727	9732	9738	9743	9748	9753	5
2,2	0,9757	9762	9767	9771	9776	9780	9785	9789	9793	9797	4
2,3	0,9801	9805	9809	9812	9816	9820	9823	9827	9830	9834	3
2,4	0,9837	9840	9843	9846	9849	9852	9855	9858	9861	9864	2
2,5	0,9866	9869	9871	9874	9876	9879	9881	9884	9886	9888	2
2,6	0,9890	9892	9895	9897	9899	9901	9903	9905	9906	9908	2
2,7	0,9910	9912	9914	9915	9917	9919	9920	9922	9923	9925	1
2,8	0,9926	9928	9929	9931	9932	9933	9935	9936	9937	9938	2

th для значений φ от 0 до 2,69.

φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	—∞	8,0000	3010	4770	6018	6986	7776	8444	9022	9531	455
0,1	8,9986	*0397	*0771	*1115	*1433	*1729	*2004	*2263	*2506	*2736	217
0,2	9,2953	3159	33,5	3542	3720	3890	4053	4210	4360	4505	139
0,3	9,4644	4778	4907	5031	5152	5268	5383	5490	5596	5698	99
0,4	9,5797	5894	5987	6078	6166	6252	6336	6417	6496	6573	75
0,5	9,6648	6721	6792	6861	6928	6993	7058	7121	7182	7242	58
0,6	9,7300	7357	7413	7467	7520	7572	7622	7671	7720	7767	46
0,7	9,7813	7858	7902	7945	7988	8029	8069	8109	8147	8185	37
0,8	9,8222	8258	8294	8328	8362	8395	8428	8460	8491	8521	30
0,9	9,8551	8580	8609	8637	8664	8691	8717	8743	8768	8793	24
1,0	9,8817	8841	8864	8887	8909	8931	8952	8973	8994	9014	20
1,1	9,9034	9053	9072	9090	9108	9126	9144	9161	9177	9194	16
1,2	9,9210	9226	9241	9256	9271	9286	9300	9314	9327	9341	13
1,3	9,9354	9367	9379	9391	9404	9415	9427	9438	9450	9460	11
1,4	9,9471	9482	9492	9502	9512	9522	9531	9540	9550	9558	9
1,5	9,9567	9576	9584	9592	9601	9608	9616	9624	9631	9639	7
1,6	9,9646	9653	9660	9666	9673	9680	9686	9692	9698	9704	6
1,7	9,9710	9716	9721	9727	9732	9738	9743	9748	9753	9758	5
1,8	9,9763	9767	9772	9776	9781	9785	9790	9794	9798	9802	4
1,9	9,9806	9810	9813	9817	9821	9824	9828	9831	9834	9838	3
2,0	9,9841	9844	9847	9850	9853	9856	9859	9862	9864	9867	3
2,1	9,9870	9872	9875	9877	9880	9882	9884	9887	9889	9891	2
2,2	9,9893	9895	9896	9900	9902	9904	9905	9907	9909	9911	2
2,3	9,9913	9914	9916	9918	9919	9921	9923	9924	9926	9927	2
2,4	9,9929	9930	9931	9933	9934	9935	9937	9938	9939	9940	1
2,5	9,9941	9943	9944	9945	9946	9947	9948	9949	9950	9951	1
2,6	9,9952	9953	9954	9955	9956	9957	9958	9958	9959	9960	1
2,7	9,9961	9962	9962	9963	9964	9965	9965	9966	9967	9967	1
2,8	9,9968	9969	9969	9970	9970	9971	9972	9972	9973	9973	1

О. Коэффициенты бинома Ньютона $(n)_i$ до $(n)_{15}$.

n	$(n)_0$	$(n)_1$	$(n)_2$	$(n)_3$	$(n)_4$	$(n)_5$	$(n)_6$	$(n)_7$	$(n)_8$	$(n)_9$	$(n)_{10}$	$(n)_{11}$	$(n)_{12}$	$(n)_{13}$	$(n)_{14}$	$(n)_{15}$
1	1															
2	1	2														
3	1	3	3													
4	1	4	6	4												
5	1	5	10	10	5											
6	1	6	15	20	15	6										
7	1	7	21	35	35	21	7									
8	1	8	28	56	70	56	28	8								
9	1	9	30	84	126	126	84	36	9							
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10						
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11					
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12				
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13			
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14		
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1

Элементарная математика.

Арифметика.

§ 1. Степени и действия над ними.

1. **Определения.** Выражение a^n называется степенью, a — ее основанием, n — показателем степени.

При показателе целом и положительном n :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_n$$

$$(+a)^{2n} = +a^{2n}; \quad (-a)^{2n} = +a^{2n}; \quad a^0 = 1, \text{ если } a \neq 0.$$

$$(+a)^{2n-1} = +a^{2n-1}; \quad (-a)^{2n-1} = -a^{2n-1};$$

При показателе целом и отрицательном: $-m$:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

При показателе дробном и положительном: $\frac{m}{n}$:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

При показателе дробном и отрицательном: $-\frac{m}{n}$:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}.$$

2. **Действия над степенями (при любых показателях):**

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}};$$

$$a^m : a^n = a^{m-n};$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n;$$

$$(a^m)^n = a^{mn};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

§ 2. Корни и действия над ними.

1. Определения. Если $a^n = b$, то $a = \sqrt[n]{b}$, где a называется корнем, подкоренным выражением, n — показателем корня.

$$\sqrt[n]{+b} = \pm \sqrt[n]{b}; \quad \sqrt[n]{-b} = \text{мнимому числу (см. § 8, п. 2)};$$

$$^{2n-1}\sqrt[n]{+b} = + \sqrt[n]{b}; \quad ^{2n-1}\sqrt[n]{-b} = - \sqrt[n]{b}.$$

2. Действия над корнями.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b^n};$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}; \quad \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a^n}{b^n}};$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}; \quad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}; \quad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{mq}} = \sqrt[n]{a^{\frac{m}{p}}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a};$$

3. Уничтожение иррациональности в знаменателе дроби.

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-m}}}{b};$$

$$\frac{a}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b} \pm \sqrt{c})}{b - c}.$$

4. Преобразование выражения $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$:

Если $\sqrt{A^2 - B} = m$, то:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+m}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-m}{2}}.$$

Напр.:

$$\sqrt{5 - \sqrt{24}} = \sqrt{\frac{5+1}{2}} - \sqrt{\frac{5-1}{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

§ 3. Логарифмы.

1. Определения. Если $a^x = b$, то $x = \lg_a b$, где x называется логарифмом, b — числом, a — основанием логарифма. При $a = 10$ логарифмы называются десятичными (или Бригговыми); при $a = e = 2,71828...$ логарифмы называются натуральными (или Неперовыми) и обозначаются символом $\ln$.

Соотношения между $\lg b$ и $\ln b$ будет:

$$\ln b = 2,30258... \lg b; \quad \lg b = 0,43429... \ln b.$$

Числа $2,30258...$ и $0,43429... = \frac{1}{2,30258...}$ называются модулями одной системы относительно другой.

2. Основные свойства натуральных и десятичных логарифмов.

- 1) Логарифмы отрицательных чисел мнимы.
- 2) Логарифмы чисел, меньших единицы, отрицательны.
- 3) $\lg 0 = -\infty$; $\ln 0 = -\infty$.
- 4) $\lg 1 = 0$; $\ln 1 = 0$.

- 5) Логарифмы чисел, больших единицы, положительны.
 6) $\lg 10 = 1$; $\ln e = 1$.
 7) С увеличением чисел их логарифмы возрастают.
 8) $\lg(+\infty) = +\infty$; $\ln(+\infty) = +\infty$.
 9) $10^{\lg N} = e^{\ln N} = N$.

3. Основные теоремы (при любом a):

$$\lg_a(bb_1) = \lg_a b + \lg_a b_1;$$

$$\lg_a\left(\frac{b}{b_1}\right) = \lg_a b - \lg_a b_1;$$

$$\lg_a(b^n) = n \lg_a b, \text{ где } n \text{—любое число.}$$

§ 4. Соединения.

Число размещений из m элементов по n в каждом вычисляется по ф-ле:

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\dots[m-(n-1)].$$

Число перестановок из n элементов вычисляется по ф-ле:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n = n!$$

Число сочетаний из m элементов по n в каждом вычисляется по ф-ле:

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}.$$

Кроме того:

$$C_m^n = C_m^{m-n}.$$

§ 5. Определители.

1. Определения. Выражение

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

называется определителем, или детерминантом, второго порядка; количества a_1, b_1, a_2, b_2 — его элементами.

Выражение

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1$$

называется определителем, или детерминантом, третьего порядка.

2. Вычисление определителей. Вычислить определитель третьего порядка можно двумя способами:

а) Разложением определителя по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) - \\ - b_1(a_2 c_3 - a_3 c_2) + c_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + \\ + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1.$$

Определители, на к-рые умножаются элементы первой строки, называются минорами, соответствующими этим элементам; для получения их достаточно в определителе третьего порядка зачеркнуть строку и столбец, в к-рые входит взятый элемент.

Таким же способом можно разложить определитель и по элементам третьей строки и первого или третьего столбцов. Если же разлагаем по элементам второго столбца или второй строки, то все разложение надо взять со знаком—(минус). Этот прием разложения—общий и м. б. применен к определителям высшего порядка.

б) Способом Саррюса (только для определителей третьего порядка). Подписываем под определителем две первые строки:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{matrix} - \\ - \\ - \end{matrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix} + \begin{matrix} + \\ + \\ + \end{matrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}$$



и составляем алгебраическую сумму произведений элементов, взятых по три и расположенных по диагоналям определителя и их параллелям, при чем произведения по диагонали $a_1 b_2 c_3$ (главной диагонали) и по ее параллелям берем со знаком $+$, а остальные со знаком $-$.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-24 + 0 + 2) - (-24 + 2 + 0) = -24 + 2 + 24 - 2 = 0.$$



Если неудобно подписывать две строки внизу, то можно справа приписать первые два столбца и поступать аналогично.

Пример:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{matrix} = (-24 + 2 + 0) - (-24 + 2 + 0) = 0.$$



3. Основные свойства определителей. 1) Определитель не меняет своей величины, если все строки его заменить соответствующими столбцами:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2) Если все элементы какой-либо строки (или столбца) равны нулю, то определитель равен нулю.

3) От перестановки двух строк (или столбцов) определитель меняет знак:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & c_1 \\ a_2 & b_1 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

4) Если определитель имеет две одинаковых строки (или столбца), то он равен нулю.

5) Общий множитель всех элементов какой-либо строки (или столбца) можно вынести множителем за знак определителя.

6) Определитель не меняет своей величины, если к элементам какой-либо

строки (или столбца) прибавить элементы другой строки (или столбца), умноженные на одно и то же число:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + ka_2 & b_1 + kb_2 & c_1 + kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

§ 6. Прогрессии (см. «Ряды»).

§ 7. Простые и сложные проценты.

Сотая часть числа называется процентом и обозначается знаком $\%$. Если b будет $p\%$ числа a , то: $b = \frac{a \cdot p}{100}$. Число a , $p\%$ которого равно b , будет: $a = \frac{100 \cdot b}{p}$. Чтобы найти отношение $\frac{m}{n}$ двух значений величины в процентах, надо обратить дробь $\frac{m}{n}$ в десятичную, — число сотых долей и даст искомое отношение в процентах. Напр.: $\frac{2}{3} = 0,666 \dots = 66,7\%$.

Изменение какого-либо числа за год, выраженное в процентах от него, называется годовым процентом. Число a за t лет при $p\%$ годовых, если наращение каждого года не влияет на наращение следующих лет, обращается в число A , определяемое ф-лой:

$$A = a + \frac{a \cdot p \cdot t}{100},$$

или, обозначая $\frac{p}{100}$ через r :

$$A = a + art = a(1 + rt).$$

Число a за t лет при $p\%$ годовых, если наращение каждого года влияет на наращение следующих лет, обращается в число A , определяемое ф-лой:

$$A = a(1 + r)^t, \text{ где } r = \frac{p}{100}.$$

§ 8. Числа действительные, мнимые и комплексные.

1. Числа рациональные и иррациональные, как положительные, так и отрицательные, называются действительными.

Если мы определенный отрезок, напр., OA_1 (черт. 1), возьмем за единицу и точку O — за начальную точку, то все положительные числа, как рациональные, так и иррациональные, м. б. изображены точками прямой.

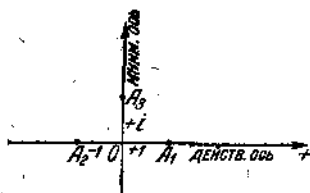
Для изображения отрицательных чисел вводим новую единицу OA_2 , по величине равную OA_1 , но противоположно направленную; тогда все отрицательные числа будут также изображены точками этой же прямой, лежащими налево от точки O . Следовательно, совокупность всех действительных чисел изображается точками прямой: каждому действительному числу соответствует определенная точка прямой (действительной оси) и, обратно, каждой точке — определенное действительное число.

2. Корень четной степени из отрицательного числа не м. б. выражен никаким действительным числом и называется мнимым числом.

Введя новую единицу счисления, так называемую мнимую единицу, определяемую равенством:

$$i = -1 \text{ или } i = \sqrt{-1},$$

мы можем всякое мнимое число выразить с помощью этой единицы в виде:



Черт. 1.

числа b — действительное число. Напр.: $\sqrt{-4} = 2\sqrt{-1} = 2i$; $\sqrt{-3} = \sqrt{3}\sqrt{-1} = i\sqrt{3}$.

Для изображения мнимых чисел мы вводим новую единицу i , по величине равную OA_1 , но повернутую на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки (рис. 1); тогда совокупность всех мнимых чисел изобразится точками прямой, перпендикулярной действительной оси и проходящей через точку O , называемой мнимой осью (положительное направление ее указано на рисунке).

Из определения следует, что $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = +1$; $i^5 = i$ и т. д.;

$$\begin{aligned} i^{4m} &= +1; & i^{4m+2} &= -1; \\ i^{4m+1} &= i; & i^{4m+3} &= -i. \end{aligned}$$

3. Число вида $a + bi$, где a и b — действительные числа, называется комплексным числом, a — его действительной частью, bi — мнимой, b — коэффициентом при мнимой части.

Комплексное число $a + bi$ изображается на плоскости точкой M с координатами a и b (черт. 2).

Число $a - bi$ изображается точкой N , симметричной с точкой M относительно действительной оси, и называется сопряженным с $a + bi$:

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 i &= a_2 + b_2 i, \text{ если } a_1 = a_2 \text{ и } b_1 = b_2; \\ a + bi &= 0, \text{ если } a = 0 \text{ и } b = 0. \end{aligned}$$

Тригонометрическая форма комплексного числа:

$$a + bi = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi),$$

где вектор

$$r = +\sqrt{a^2 + b^2}$$

называется модулем комплексного числа и обозначается $|a + bi|$ и

$$\varphi = \arctg \frac{b}{a} + 2k\pi$$

называется аргументом комплексного числа.

Сложение и вычитание комплексных чисел.

$$1) (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i.$$

Чтобы построить сумму двух комплексных чисел, изображаемых точками C_1 и C_2 (черт. 3), мы из точки C_1 проводим прямую, параллельную OC_2 , и откладываем на ней отрезок $C_1 S = OC_2$. Точка S и будет служить изображением суммы этих чисел. След., вектор суммы двух комплексных чисел равен замыкающей ломаной линии, построенной на векторах слагаемых.

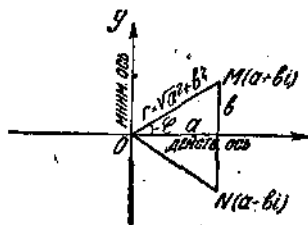
Сумма двух сопряженных комплексных чисел равна $2a$:

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a.$$

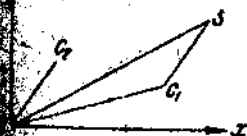
$$2) (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i.$$

Построение разности этих чисел сводится к построению суммы:

$$(a_1 + b_1 i) + (-a_2 - b_2 i).$$



Черт. 2.



Черт. 3.

Умножение комплексных чисел.

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

или, в тригонометрической форме:

$$[r_1 (\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1)] \cdot [r_2 (\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2)] = r_1 r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin (\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Пусть точки C_1 и C_2 (черт. 4) — изображения данных комплексных чисел и $OE = 1$. Соединяем точку C_2 с точкой E , откладываем на оси OX отрезок $OC'_1 = OC_2$, через точку C'_1 проводим прямую, параллельную C_1E , и вращаем полученный $\triangle OC'_1P$ против часовой стрелки до совпадения OC'_1 с OC_2 ; точка P будет изображением произведения данных чисел.

Ф-ла и построение произведения верны для произвольного числа множителей.

Произведение сопряженных комплексных чисел равно $a^2 + b^2$:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

Произведение комплексных чисел равно нулю, когда один из множителей равен нулю.

Деление комплексных чисел.

$$\frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin (\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Пусть C_1 и C_2 — изображения делимого и делителя и $OE = 1$ (черт. 5). Соединяем точку C_2 с точкой E , откладываем на прямой OC_2 отрезок $OC'_1 = OC_1$, через точку C'_1 проводим прямую, параллельную C_2E , и вращаем полученный $\triangle OC'_1Q$ против часовой стрелки до совпадения OC'_1 с OC_2 ; точка Q и будет изображением частного данных комплексных чисел.

Возведение в степень комплексного числа.

$$[r (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi),$$

где n — целое число, положительное или отрицательное.

Извлечение корня из комплексного числа.

$$\sqrt[n]{r (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right),$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \dots (n-1)$.

Полагая $r = 1$ и $\varphi = 0$, получим:

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{2k\pi}{n},$$

т. е. $\sqrt[n]{1}$ имеет n значений, из к-рых при n четном будут два действительных значения, при n нечетном — одно.

Комплексные значения $\sqrt[n]{1}$ будут попарно сопряженными. Если все значения $\sqrt[n]{1}$ можно представить в виде степеней одного из корней, то этот

корень называется первообразным. Напр., значения $\sqrt[n]{1}$ будут: $\alpha_0 = 1$; $\alpha_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{3}$; $\alpha_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{4\pi}{3}$. Т. к. $\alpha_1 = \alpha_2^2$; $\alpha_2 = \alpha_1^2$; $\alpha_0 = \alpha_1^3$ и $\alpha_2 = \alpha_1^2$; $\alpha_1 = \alpha_2^2$, $\alpha_0 = \alpha_2^3$, то α_1 и α_2 будут первообразные корни $\sqrt[3]{1}$.

Изображениями значений $\sqrt[n]{1}$ будут служить вершины правильного n -угольника с центром в начале координат и радиусом описанного круга $= 1$.

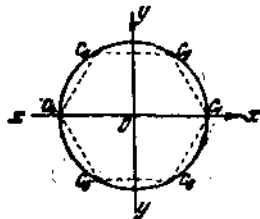
На черт. 6 изображены значения $\sqrt[3]{1}$.

Для построения изображений $\sqrt[n]{r}$ достаточно повернуть правильный n -угольник против часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{n}$ около начала координат и изменить радиус описанного около него круга в отношении $\sqrt[n]{r}:1$.

Ф-ла Муавра:

$$(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi,$$

где n — рациональная дробь.



Черт. 6.

Алгебра.

§ 1. Тождества.

- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$;
 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;
 $(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$;
 $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$;
 $a^3 \pm b^3 = (a \pm b) \cdot (a^2 \mp ab + b^2)$;
 $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$;
 $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots - ab^{2n-1} + b^{2n})$;
 $a^{2n} - b^{2n} = (a + b)(a^{2n-1} - a^{2n-2}b + a^{2n-3}b^2 - \dots + ab^{2n-2} - b^{2n-1})$.

- Теорема Безу. Остаток от деления целого рационального многочлена

$$f(x) = p_0x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_n$$

на $(x - a)$, где a — число постоянное, равен $f(a)$:

$$f(x) = (x - a) \cdot P + f(a).$$

Если $f(a) = 0$, т. е. a — корень многочлена, то деление совершится без остатка.

Следовательно, если $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ — корни данного многочлена, то:

$$f(x) = p_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n).$$

- Бинном Ньютона.

$$(a + b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3}b^3 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} a^{m-n}b^n + \dots + b^m,$$

где m — число целое и положительное (см. «Ряды»).

§ 2. Пропорции и их решение.

$$a:b=c:d, \text{ или } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}; ad=bc.$$

a и d называются крайними членами, b и c — средними.

Если

$$x:b=c:d \text{ или } d:b=c:x,$$

то:

$$x=\frac{b \cdot c}{d}.$$

Если

$$a:x=b:c \text{ или } a:b=x:c,$$

то:

$$x=\frac{a \cdot c}{b}.$$

В непрерывной пропорции

$$x:a=b:x \text{ или } \frac{a}{x}=\frac{x}{b}$$

называется средним геометрическим или средним пропорциональным между a и b .

Производные пропорции. Если:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

то:

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}; \frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}; \frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{b}{d} = \frac{a}{c}; \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}.$$

Если мы имеем n чисел:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n,$$

то их среднее арифметическое x , среднее геометрическое y и среднее гармоническое z определяются равенствами:

$$x = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n};$$

$$y = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n};$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} \right).$$

§ 3. Аналитические и графические методы решения уравнений.

1. Уравнения первой степени с одним неизвестным. Всякое уравнение первой степени с одним неизвестным можно привести к виду: $ax + b = 0$, откуда $x = -\frac{b}{a}$. Если a стремится к нулю, то x неограниченно возрастает.

2. Система уравнений первой степени со многими неизвестными. Для решения системы n уравнений с n неизвестными мы преобразовываем ее в систему $(n-1)$ уравнений с $(n-1)$ неизвестными. Полученную систему сводим к системе $(n-2)$ уравнений с $(n-2)$ неизвестными и т. д., пока не получим одно уравнение с одним неизвестным, которое и решаем.

Подставляя найденное значение этого неизвестного в систему двух уравнений с двумя неизвестными, находим другое неизвестное и т. д.

Преобразование системы из одной в другую производится одним из сл. способов.

а) Способ подстановки. Решить:

$$3x + 2y + 4z = 17;$$

$$2x + 5y - 3z = 11;$$

$$8x - y + z = 2.$$

(1)

(2)

(3)

Выразим из одного ур-ия какое-нибудь неизвестное через другие, напр., y из ур-ия (3):

$$y = 3x + z - 2,$$

и подставляем его выражение в ур-ия (2) и (1); получаем систему двух ур-ий с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned} 3x + 2(3x + z - 2) + 4z &= 17; \\ 2x + 5(3x + z - 2) - 3z &= 11, \end{aligned}$$

или, по упрощении:

$$\begin{aligned} 3x + 2z &= 7; \\ 17x + 2z &= 21. \end{aligned}$$

Решаем эту систему тем же способом, т. е. выражаем, напр., из первого ур-ия $2z$:

$$2z = 7 - 3x,$$

и подставляем это выражение в ур-ие (2), — получим одно ур-ие с одним неизвестным:

$$17x + 7 - 3x = 21,$$

откуда:

$$14x = 14; \quad x = 1.$$

Значение $x = 1$ подставляем в ур-ие: $2z = 7 - 3x$, откуда:

$$z = \frac{7-3}{2} = 2.$$

Найденные для x и z значения подставляем в ур-ие:

$$y = 3x + z - 2,$$

откуда:

$$y = 3 + 2 - 2 = 3.$$

б) Способ сложения. Взяв одно из ур-ий с каждым из остальных, уравниваем коэф-ты при одном и том же неизвестном так, чтобы в каждом ур-ии они были обратны по знаку, и затем складываем. Напр., умножим все члены ур-ия (3) на 2 и складываем с уравнением (1):

$$\begin{aligned} &+ \frac{3x + 2y + 4z = 17}{6x - 5y + 2z = 4} \\ &\hline &9x + 6z = 21, \end{aligned}$$

или:

$$3x + 2z = 7.$$

Умножаем все члены ур-ия (3) на 5 и складываем с ур-ием (2):

$$\begin{aligned} &+ \frac{15x - 5y + 5z = 10}{2x + 5y - 3z = 11} \\ &\hline &17x + 2z = 21 \end{aligned}$$

Полученную систему двух ур-ий с двумя неизвестными решаем этим же способом. Умножаем все члены первого из полученных ур-ий на -1 и складываем со вторым:

$$\begin{aligned} &+ \frac{-3x - 2z = -7}{17x + 2z = 21} \\ &\hline &14x = 14, \end{aligned}$$

откуда:

$$x = 1.$$

Найдя одно из неизвестных, другие определяем подстановкой. Подставляем значение x в одно из ур-ий системы с двумя неизвестными, напр., в первое:

$$3 + 2z = 7,$$

откуда:

$$z = 2.$$

Подставляем значения x и z в одно из ур-ий системы с тремя неизвестными, напр., в ур-ие (3):

$$3 - y + 2 = 2,$$

откуда:

$$y = 3.$$

в) Способ сравнения неизвестных. Определяем какое-нибудь неизвестное, напр., y , из всех ур-ий:

$$y = \frac{17-3x-4z}{2}; \quad y = \frac{11-2x+3z}{5}; \quad y = 3x + z - 2,$$

или:

$$\frac{17 - 3x - 4z}{2} = 3x + z - 2;$$

$$\frac{11 - 2x + 3z}{5} = 3x + z - 2;$$

или, по упрощениям:

$$\begin{aligned} x + 3z &= 7; \\ 17x + 2z &= 21. \end{aligned}$$

Решаем эту систему тем же способом. Определяем x из обеих ур-ий:

$$x = 7 - 3z; \quad x = \frac{21 - 2z}{17},$$

или:

$$7 - 3z = \frac{21 - 2z}{17}.$$

откуда:

$$z = 2.$$

Значение других неизвестных определяем подстановкой.

г) Способ неопределенных множителей (способ Безу). Умножаем все члены одного из ур-ий, напр., (3), на неопределенные пока множители m и n и складываем почленно с ур-ями (1) и (2):

$$\begin{aligned} &+ 3x + 2y + 4z = 17 \\ &+ 3mx + my + mz = 3m \\ \hline &3(1+m)x + (2+m)y + (4+m)z = 17 + 3m \\ &+ 2x + 5y - 3z = 11 \\ &+ 3nx - ny + nz = 2n \\ \hline &(2+3n)x + (5-n)y + (3-n)z = 11 + 2n \end{aligned}$$

Выбираем m и n так, чтобы коэф-ты при одном из неизвестных, напр., при z , обратились в нуль:

$$\begin{aligned} 4 + m &= 0, \text{ откуда: } m = -4; \\ 3 - n &= 0, \text{ откуда: } n = 3. \end{aligned}$$

Давая m и n эти значения, мы получим систему двух ур-ий с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned} -2x + 6y &= 9, \\ 11x + 2y &= 17, \end{aligned}$$

или, по упрощениям:

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= -3; \\ 11x + 2y &= 17. \end{aligned}$$

Полученную систему можно решить тем же способом, но проще решить способом сложения:

$$14x = 14; \quad x = 1.$$

Значения других неизвестных определяем подстановкой.

Все рассмотренные способы применимы к системе n ур-ий с n неизвестными, причем в большинстве случаев при решении мы применяем не один из способов, а каждый раз наиболее простой.

д) Решение системы с помощью определителей. Возьмем систему трех ур-ий в общем виде:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1; \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2; \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3. \end{aligned}$$

тогда:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

т. е. каждое из неизвестных равно дроби, знаменателем которой служит опре-

делитель, составленный из коэф-тов при неизвестных (называемый определителем системы), а числителем—определитель, полученный из определителя системы заменой столбца из коэф-тов при определяемом неизвестном свободными членами, перенесенными в правые части ур-ий.

По этому же правилу мы можем написать решение системы n ур-ий с n неизвестными.

е) Графическое решение системы. Возьмем систему трех ур-ий с тремя неизвестными:

$$2,7x + 3,7y - 1,7z - 7,5 = 0; \quad (1)$$

$$7x - 4,1y + 4,6z - 9,3 = 0; \quad (2)$$

$$7,1x - 4,7y + 0,7z - 6,7 = 0. \quad (3)$$

Проведем три (по числу ур-ий) параллельные прямые I, II и III и пересечем их прямой O_1O_2 (черт. 7). Изображаем на каждой прямой коэф-ты при x, y, z соответственно векторами $O_nA_n; A_nB_n; B_nC_n$, а свободный член— C_nD_n , где n —номер соответствующей прямой, и получим:

на прямой $I: O_1A_1 = 2,7; A_1B_1 = 3,7; B_1C_1 = -1,7; C_1D_1 = -7,5;$

» » $II: O_2A_2 = 7; A_2B_2 = -4,1; B_2C_2 = 4,6; C_2D_2 = -9,3;$

» » $III: O_3A_3 = 7,1; A_3B_3 = -4,7; B_3C_3 = 0,7; C_3D_3 = -6,7.$

Ур-ие, полученное в результате исключения z из ур-ий (1) и (2), мы прочтем на прямой IV , проведенной через точку B_1 (она же C_1) пересечения прямых B_1B_2 и C_1C_2 параллельно прямой I ; точки пересечения ее с прямыми A_1A_2 и D_1D_2 будут соответственно A_4 и D_4 ; тогда:

$$O_4A_4 = 3,9; A_4B_4 = 1,5;$$

$$B_4C_4 = 0; C_4D_4 = -7,9,$$

следовательно:

$$3,9x + 1,5y - 7,9 = 0. \quad (4)$$

Так же исключаем z из ур-ий (1) и (3): через точку B_1 (она же C_1) пересечения прямых B_1B_3 и C_1C_3 проводим прямую V , параллельную прямой I ; точки пересечения ее с прямыми A_1A_3 и D_1D_3 будут соответственно A_5 и D_5 ; тогда:

$$O_5A_5 = 5,8; A_5B_5 = -2,3; B_5C_5 = 0; C_5D_5 = 6,9;$$

следовательно:

$$5,8x - 2,3y - 6,9 = 0. \quad (5)$$

Исключаем y из ур-ий (4) и (5): через точку A_5 (она же B_5 и C_5) пересечения прямых A_5A_4 и B_5B_4 проводим прямую, параллельную прямой I ; точка пересечения ее с прямой D_4D_5 будет D_6 ; тогда:

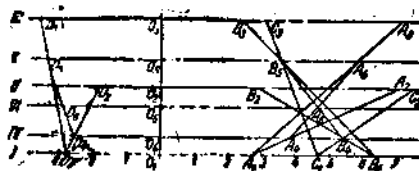
$$O_6A_6 = 4,7; A_6B_6 = 0; B_6C_6 = 0; C_6D_6 = -7,6;$$

следовательно:

$$4,7x - 7,6 = 0,$$

откуда:

$$x = 1,6.$$



Черт. 7.

Движок линейки вынимаем и вставляем его обратным концом. (Обозначив шкалы линейки снизу вверх через A, B, C и D , получим, что B прилегает к D , а C — к A). Выдвигаем теперь движок так, чтобы число q шкалы B стояло над цифрой 1 шкалы A , и подыскиваем на шкалах A и B такие друг под другом стоящие числа, чтобы сумма их была равна p , — они и будут корнями ур-ия, при чем знак их противоположен знаку p .

Если ур-ие имеет вид:

$$x^2 \pm px - q = 0,$$

где p и q — положительные числа, то поступаем, как и в предыдущем случае, но ищем уже такие два друг под другом стоящие числа, чтобы разность их была равна p ; больший по абсолютной величине корень имеет знак, противоположный знаку p .

Например. Ур-ие $x^2 - 6,4x + 8,7 = 0$ имеет корни: $x_1 = 4,44$; $x_2 = 1,96$, а ур-ие $x^2 + 3,7x - 5,2 = 0$ имеет корни: $x_1 = -4,81$; $x_2 = 1,08$.

2) Свойства корней квадратного уравнения. Если корни ур-ия

$$ax^2 + bx + c = 0$$

обозначим через x_1 и x_2 , то:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

3) Исследование корней квадратного уравнения. Возьмем ур-ие в виде:

$$ax^2 + 2mx + c = 0.$$

Выражение:

$$ac - m^2$$

или:

$$\left| \begin{array}{cc} a & m \\ m & c \end{array} \right| = \Delta$$

называется дискриминантом квадратного ур-ия.

Если $\Delta < 0$, то корни действительные и разные; если $\Delta = 0$, то корни действительные и равны между собой; если $\Delta > 0$, то корни мнимые.

При $c = 0$ ур-ие будет:

$$ax^2 + bx = 0$$

и

$$x_1 = 0; x_2 = -\frac{b}{a}.$$

При $b = 0$ ур-ие будет:

$$ax^2 + c = 0$$

и

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Если a стремится к нулю, то один корень ур-ия стремится к бесконечности, а другой будет $x_2 = -\frac{c}{b}$.

Если a стремится к нулю и b стремится к нулю, то $x_1 = \infty$, $x_2 = \infty$.

4) Трекчлен второй степени: $ax^3 + bx + c$.

Значения x , обращающие его в нуль, называются корнями трекчлена. Если x_1 и x_2 — корни трекчлена, то:

$$ax^3 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Знак трехчлена совпадает со знаком a для всех значений x , кроме обращающих его в нуль и заключенных между его корнями.

Всякий трехчлен второй степени можно представить в виде:

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)^2 \right],$$

т. е. в виде произведения a на разность квадратов, если корни его действительные и разные, и в виде произведения a на сумму квадратов, если корни его мнимые.

Если $a=1$ и b — четное число, то:

$$x^2 + 2px + q = (x + p)^2 - (\sqrt{p^2 - q})^2.$$

Примеры.

$$x^2 + 6x + 8 = (x + 3)^2 - 1;$$

$$2x^2 + 5x + 2 = 2 \left[\left(x + \frac{5}{4} \right)^2 - \left(\frac{3}{4} \right)^2 \right];$$

$$x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1;$$

$$8x^2 + 4x + 5 = 8 \left[\left(x + \frac{1}{4} \right)^2 + \left(\frac{3}{4} \right)^2 \right].$$

4. Уравнения высших степеней. а) Биквадратные уравнения. Корни биквадратного уравнения

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

являются ф-лой:

$$x = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

б) Возвратные уравнения. Возвратные ур-ия третьей степени

$$ax^3 + bx^2 \pm bx \pm a = 0$$

можно представить в виде:

$$(x \pm 1) [ax^2 + (b \mp a)x + a] = 0,$$

т. е. свести к решению ур-ий первой и второй степени.

Возвратные ур-ия четвертой степени:

$$ax^4 \pm bx^3 + cx^2 \pm bx + a = 0,$$

путем деления всех членов ур-ия на x^2 и заменкой:

$$x + \frac{1}{x} = y,$$

откуда:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2,$$

сводятся к ур-ию:

$$ay^2 + by + (c - 2a) = 0.$$

Если члены bx^3 и bx имеют разные знаки, то берем замену:

$$x - \frac{1}{x} = y.$$

в) Двучленные уравнения. Корни двучленного уравнения

$$x^2 - a = 0$$

даются формулой:

$$x = \sqrt{a} \left[\cos \frac{2k\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{2k\pi}{n} \right]$$

(см. «Арифметика», § 8, п. 3).

г) Трехчленные уравнения. Трехчленные уравнения вида

$$ax^3 + bx^2 + c = 0$$

подстановкой $x^2 = y$ сводятся к уравнению:

$$ay^2 + by + c = 0.$$

5. Кубические уравнения. а) Аналитическое решение. Корни кубического уравнения вида

$$x^3 + px + q = 0.$$

даются формулой Кардана:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

а) Если:

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0,$$

то:

$$x_1 = A + B;$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}(A + B) + i \sqrt{\frac{3}{2}}(A - B);$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(A + B) - i \sqrt{\frac{3}{2}}(A - B),$$

где A и B — действительные значения кубических корней, входящих в формулу.

б) Если:

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0,$$

то:

$$A = B, \quad x_1 = 2A, \quad x_2 = x_3 = -A.$$

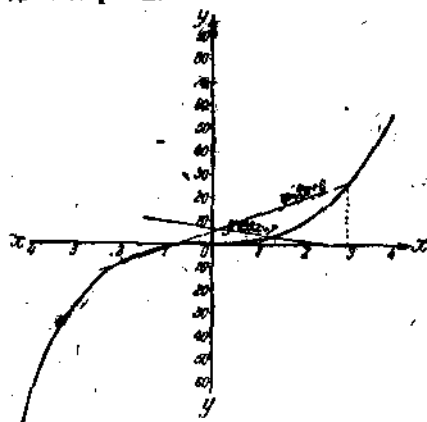
в) Если:

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0,$$

то:

$$x_1 = 2r \cdot \cos \frac{\varphi}{3},$$

$$x_2 = 2r \cdot \cos \frac{\varphi + 2\pi}{3} = r \left(-\cos \frac{\varphi}{3} - \sqrt{3} \cdot \sin \frac{\varphi}{3} \right),$$



Черт. 10.

$$x_2 = 2r \cdot \cos \frac{\varphi + 4\pi}{3} = r \left(-\cos \frac{\varphi}{3} + \sqrt{3} \cdot \sin \frac{\varphi}{3} \right),$$

где: $r = \sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}$ и $\cos \varphi = -\frac{q}{2r}$.

Если ур-ие дано в виде

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

то, разделив его на a , подстановкой

$$x = y - \frac{1}{3} \frac{b}{a},$$

сводим его к ур-ию разобранного вида.

б) Графическое решение. Всякое кубическое ур-ие, как было указано, можно привести к виду:

$$x^3 + px + q = 0,$$

или:

$$x^3 = -px - q.$$

Абсциссы точек пересечения параболы

$$y = x^3$$

и прямой

$$y = -px - q$$

и будут корнями данного уравнения.

Примечание. Масштаб по оси x выгодно брать больше, чем по оси y , раз в двадцать.

Примеры. Решить ур-ия (черт. 10):

$$1) x^3 - 7x - 6 = 0; x_1 = -2; x_2 = -1; x_3 = 3;$$

$$2) x^3 + 2,8x - 7 = 0; x_1 = 1,4; x_2 \text{ и } x_3 - \text{мнимы.}$$

в) Номографическое решение. Возьмем ур-ие в виде:

$$x^3 + px + q = 0.$$

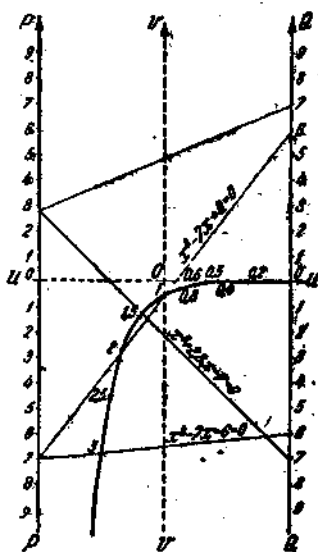
На параллельных прямых P и Q , отстоящих друг от друга на расстояние $2c$ (черт. 11), отмечены различные значения коэф-тов p и q . Координаты точек кривой, отнесенной к системе координат UOV , соответствующих различным значениям корней ур-ий, вычисляются по ф-лам:

$$u = -c \frac{x-1}{x+1}; v = -\frac{x^3}{x+1}.$$

Чтобы найти положительные корни ур-ия, надо провести прямую, отсекающую на прямых P и Q соответственно отрезки p и q , и прочесть числа, стоящие у точек пересечения этой прямой с кривой номограммы. Чтобы найти отрицательные корни, надо в ур-ии заменить x через $(-x)$ и для полученного ур-ия

$$x^3 + px - q = 0$$

найти положительные корни,



Черт. 11.

Пример 1. Решить ур-ие:

$$x^2 + 2,8x - 7 = 0.$$

Ищем положительные корни, соединяя точку 2,8 прямой P и точку (-7) прямой Q ; пересечение этой прямой с кривой номограммы дает корень, равный 1,4.

Чтобы найти отрицательные корни, возьмем ур-ие:

$$x^2 + 2,8x + 7 = 0.$$

Прямая, соединяющая точку 2,8 прямой P и точку 7 прямой Q , кривой номограммы не пересекает; корни его мнимы; следовательно, отрицательных действительных корней данное ур-ие не имеет.

Пример 2. Решить ур-ие:

$$x^2 - 7x - 6 = 0.$$

Соединяя точку (-7) прямой P и точку (-6) прямой Q , получаем корень $x_1 = 3$.
Взяв ур-ие

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

и соединяя точку (-7) прямой P и точку $(+6)$ прямой Q , получаем корни: $x_2 = -1$, $x_3 = -2$.

6. Общие методы приближенного решения ур-ий. Чтобы вычислить приближенное значение корня ур-ия $f(x) = 0$, устанавливают пределы, между к-рыми заключается искомый корень, а затем ищут приближенное значение его.

Мы будем искать только положительные корни, т. к. отыскание отрицательного корня сводится к отысканию положительного корня ур-ия, в к-ром x заменен через $(-x)$.

а) Способ пропорциональных частей. Пусть a и b — границы, между к-рыми заключается значение корня ур-ия $f(x) = 0$.

На кривой $y = f(x)$ мы будем иметь две точки: $M(x_1, y_1)$ под осью OX и $N(x_2, y_2)$ над ней.

Соединив их прямой

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

мы, полагая $y = 0$, найдем абсциссу точки пересечения этой прямой с осью OX :

$$x = x_1 + \frac{(x_2 - x_1) \cdot y_1}{y_2 - y_1},$$

к-рая и будет первым приближенным значением искомого корня.

Чтобы найти приближенное значение этого корня с большей точностью, мы, пользуясь найденным значением и одним из предельных, поступаем по предыдущему.

x	0	1	2	3	4
y	8,7	6,5	10,3	25,9	59,9

Заменяем x через $(-x)$ и ищем положительные корни ур-ия:

x	0	1	2	3
y	-8,7	-10,9	-7,1	8,7

Пример. Решить ур-ие:

$$x^2 - 3,2x + 8,7 = 0.$$

Строим кривую: $y = x^2 - 3,2x + 8,7$.
Т. к. кривая при положительных значениях x ось OX не пересекает, то данное ур-ие положительных корней не имеет.

$$-x^2 + 3,2x + 8,7 = 0 \text{ или: } x^2 - 3,2x - 8,7 = 0$$

Корень ур-ия заключается между 2 и 3. Точки кривой будут $M(2; -7,1)$ и $N(3; 8,7)$, следовательно, приближенное значение корня:

$$x = 2 + \frac{1 \cdot 7,1}{8,7 + 7,1} = 2,45.$$

Подставив это значение x в ур-ие кривой, получим:

$$y = -1,83.$$

Более точное значение корня мы получим, применяя ту же ф-лу для найденной точки $M_1(2,45; -1,83)$ и точки N :

$$x = 2,45 + \frac{(3 - 2,45) \cdot 1,83}{8,7 + 1,83} = 2,54.$$

б) Способ Ньютона. Определив первое приближенное значение корня x_1 , мы можем получить следующее его приближение $x_1 + h$, определяя h из ур-ния:

$$h = - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Напр., определив в предыдущем примере $x_1 = 2,45$, мы получаем:

$$f(x_1) = -1,83; f'(x_1) = 3 \cdot 2,45^2 - 3,2 = 14,8;$$

$$h = + \frac{1,83}{14,8} = 0,12;$$

следовательно, следующее приближение корня будет: $x = 2,57$.

Подставив это значение x в ур-ие кривой, получим: $y = 0,05$, —точность вполне достаточная.

Повторяя этот прием, мы можем получить значение корня с любой степенью точности.

Разобранные способы основаны на отыскании точки пересечения кривой $y = f(x)$ с осью OX .

В целом ряде случаев предпочитают представить $f(x)$ в виде:

$$f_1(x) + f_2(x);$$

тогда ур-ие примет вид:

$$f_1(x) + f_2(x) = 0$$

или

$$f_1(x) = -f_2(x)$$

и корнями его будут абсциссы точек пересечения кривых:

$$y = f_1(x); y = f_2(x).$$

Этим приемом мы пользуемся при графическом решении квадратных и кубических ур-ий (см. § 3 п. 3 «б» и п. 5 «б») и при решении ур-ий вида:

$$2x - 4x = 0; \operatorname{tg} x - x = 0 \text{ и т. п.}$$

Примечание. Способ Ньютона применим и для получения приближенных значений корней системы ур-ий, напр.:

$$f_1(x, y, z) = 0; f_2(x, y, z) = 0; f_3(x, y, z) = 0.$$

Если x_1, y_1, z_1 —приближенные значения корней системы, то след. приближения их: $x_1 + h, y_1 + k, z_1 + l$, мы получим, определяя h, k и l из равенств:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_1 \cdot h + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)_1 \cdot k + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)_1 \cdot l + (f_1)_1 = 0;$$

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)_1 \cdot h + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)_1 \cdot k + \left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)_1 \cdot l + (f_2)_1 = 0;$$

$$\left(\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)_1 \cdot h + \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}\right)_1 \cdot k + \left(\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)_1 \cdot l + (f_3)_1 = 0,$$

в индексе 1, поставленный у скобок, обозначает, что в ф-лы и их производные надо поставить вместо x, y, z числовые значения x_1, y_1, z_1 .

Повторяя этот прием, мы можем получить значения корней с любой степенью точности.

Тригонометрия.

§ 1. Измерение углов и дуг.

Существует два способа измерения углов: градусное и радиальное.

1. **Градусное измерение.** За единицу меры принимается угол в 1° , состоящий $\frac{1}{90}$ прямого угла.

$$1^\circ = 60 \text{ мин.}$$

$$1' = 60 \text{ сек.}$$

2. **Радиальное измерение.** За единицу меры принимается радиан, т. е. центральный угол, опирающийся на дугу окружности, длина которой равна радиусу.

Градусная мера одного радиана равна

$$\frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ 17' 45''$$

с точностью до 1 сек.

3. **Переход от градусной меры угла к радиальной и наоборот.**

$$x = x \frac{\pi}{180^\circ};$$

$$n^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} x,$$

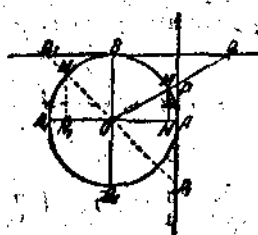
или:

$$n^\circ = 57^\circ 17' 45'' x,$$

где: x — угол в радианах, n° — угол в градусах.

4. **Измерение углов в окружности.**

- а) Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается;
- б) вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается;
- в) угол, образованный касательной и хордой, проходящей через точку касания, измеряется половиной дуги, заключенной между ними;
- г) угол, образованный двумя секущими, с вершиной вне круга, измеряется полуразностью дуг, заключенных между его сторонами;
- д) угол, образованный двумя секущими, с вершиной внутри круга, измеряется полусуммой дуг, заключенных между его сторонами и их продолжениями.



Черт. 12.

§ 2. Тригонометрические ф-ии.

Из черт. 12:

$$\sin \varphi = \frac{MN}{r}; \quad \cos \varphi = \frac{ON}{r}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{PA}{r}; \quad \operatorname{ctg} \varphi = \frac{QB}{r};$$

$$\sec \varphi = \frac{OP}{r}; \quad \csc \varphi = \frac{OQ}{r}.$$

Знаки ф-ий в каждом координатном углу:

Коорд. угол	sin	cos	tg	ctg	Коорд. угол	sin	cos	tg	ctg
I	+	+	+	+	III	-	-	+	+
II	+	-	-	-	IV	-	+	-	-

§ 3. Пределы изменения тригонометрических ф-ий при изменении угла от 0 до 360°.

Угол	sin	cos	tg	ctg
0°—90°	0...1	1...0	0...∞	∞...0
90°—180°	1...0	0...-1	-∞...0	0...-∞
180°—270°	0...-1	-1...0	0...∞	∞...0
270°—360°	-1...0	0...1	-∞...0	0...-∞

§ 4. Периодичность тригонометрических ф-ий.

Тригонометрические ф-ии—ф-ии периодические. Период тангенса и котангенса в градусной мере 180°, а в радиальной π. Период синуса и косинуса в градусной мере 360°, а в радиальной 2π.

Периодичность тригонометрических ф-ий м. б. выражена след. ф-лами: при градусной мере угла:

$$\sin \alpha = \sin(\alpha + 360^\circ n); \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha + 180^\circ n);$$

$$\cos \alpha = \cos(\alpha + 360^\circ n); \quad \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + 180^\circ n);$$

при радиальной мере угла:

$$\sin \alpha = \sin(\alpha + 2\pi n); \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \pi n);$$

$$\cos \alpha = \cos(\alpha + 2\pi n); \quad \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + \pi n),$$

где n—целое положительное или отрицательное число.

6. Соотношения между ф-иями положительного и отрицательного углов.

Для углов α и -α имеем:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha; \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha; \quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

8. Приведения тригонометрических ф-ий любого угла к ф-иям острого угла.

	-α	90°-α	90°+α	180°-α	180°+α	270°-α	270°+α	360°·n±α
sin	-sin α	+cos α	+cos α	+sin α	-sin α	-cos α	-cos α	sin(±α)
cos	+cos α	+sin α	-sin α	-cos α	-cos α	-sin α	+sin α	cos(±α)
tg	-tg α	+ctg α	-ctg α	-tg α	+tg α	+ctg α	-ctg α	tg(±α)
ctg	-ctg α	+tg α	-tg α	-ctg α	+ctg α	+tg α	-tg α	ctg(±α)

§ 7. Значения тригонометрических ф-ий наиболее важных углов.

	0° 360°	90°	180°	270°	45°	30°	60°
-sin	0	1	0	-1	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
cos	1	0	-1	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
tg	0	∞	0	∞	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
ctg	∞	0	∞	0	1	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$

§ 8. Зависимость между ф-иями одного и того же аргумента.

1. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$; 2. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$; 3. $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$; 4. $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$;
 5. $\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$; 6. $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$; 7. $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$; 8. $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$\sin \alpha =$		$\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$
$\cos \alpha =$	$\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$		$\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$
$\operatorname{tg} \alpha =$	$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$		$\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$
$\operatorname{ctg} \alpha =$	$\frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$	$\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$	

§ 9. Ф-ии суммы и разности аргументов.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}.$$

§ 10. Ф-ии кратных и половинных аргументов.

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha; \quad \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2};$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha; \quad \cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}};$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha; \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha;$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2};$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}; \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}.$$

§ 11. Формулы приведения ф-ий к логарифмическому виду.

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\beta - \alpha}{2};$$

$$\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cdot \sin (45^\circ + \alpha);$$

$$\cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \cdot \cos (45^\circ + \alpha);$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin (\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta};$$

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}; 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2};$$

$$1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = 2 \sin^2 \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right);$$

$$1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = 2 \cos^2 \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right);$$

$$1 + \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2} \cdot \sin (45^\circ + \alpha)}{\cos \alpha}; 1 - \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2} \cdot \sin (45^\circ - \alpha)}{\cos \alpha};$$

$$\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg} (45^\circ + \alpha); \frac{\operatorname{ctg} \alpha + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - 1} = \operatorname{ctg} (45^\circ - \alpha);$$

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}; \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{ctg} 2\alpha.$$

§ 12. Тригонометрические уравнения.

Решение тригонометрических ур-ий производится по одному из след. способов в зависимости от характера ур-ия.

1. Все тригонометрические ф-ии, входящие в состав ур-ия, приводятся к ф-ии одного и того же аргумента и выражаются через какую-нибудь из них. Эта последняя ф-ия принимается за неизвестное и ур-ие разрешается относительно нее при помощи обычных приемов алгебры.

Пример. Решить ур-ие: $\cos x = \sin^2 x - \cos^2 x$.

Заменяя $\sin^2 x$ через $1 - \cos^2 x$, получаем ур-ие:

$$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0,$$

откуда:

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4};$$

$$\cos x_1 = -1; \cos x_2 = \frac{1}{2};$$

$$x_1 = 2\pi n \pm \pi = \pi(2n \pm 1); x_2 = 2\pi n \pm \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}(6n \pm 1).$$

2. Если окажется возможным разложить левую часть ур-ня на множители, то каждый из сомножителей приравнивается нулю. Т. о., данное ур-не разбивается на ряд простейших ур-ий.

Пример. Решить ур-ие: $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 3 = 0$.

Имеем:

$$\operatorname{tg}^2 x (\operatorname{tg} x + 1) - 3 (\operatorname{tg} x + 1) = 0;$$

$$(\operatorname{tg} x + 1) (\operatorname{tg}^2 x - 3) = 0;$$

$$\operatorname{tg} x_1 = -1; \operatorname{tg} x_2 = \pm \sqrt{3};$$

$$x_1 = \pi n - \frac{\pi}{4}; x_2 = \pi \cdot n \pm \frac{\pi}{3}.$$

3. Если рядом преобразований ур-ие удастся свести к равенству двух одноименных ф-ий, то аргументы этих ф-ий должны удовлетворять след. условиям:

а) если равны синусы, то или сумма аргументов $= \pi(2n + 1)$, или разность аргументов $= 2\pi n$;

б) если равны косинусы, то или сумма, или разность аргументов $= 2\pi n$;

в) если равны тангенсы или котангенсы, то разность аргументов $= \pi n$, n — всюду целое число.

Использование этих условий и приводит к решению данного ур-ия.

Пример. Решить ур-ие: $2 \sin 17x + \sqrt{3} \cdot \cos 5x + \sin 5x = 0$.

Преобразовываем:

$$\sin 17x + \sin \frac{\pi}{3} \cos 5x + \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin 5x = 0;$$

$$\sin 17x + \sin \left(\frac{\pi}{3} + 5x \right) = 0;$$

$$\sin 17x = \sin \left(-\frac{\pi}{3} - 5x \right).$$

Согласно условию первому имеем:

$$17x + \left(-\frac{\pi}{3} - 5x \right) = \pi(2n + 1),$$

откуда:

$$x = \frac{\pi}{18}(3n + 2);$$

или:

$$17x - \left(-\frac{\pi}{3} - 5x \right) = 2\pi n,$$

откуда:

$$x = \frac{\pi}{66}(6n - 1).$$

§ 13. Обратно-круговые ф-ии.

Равенства:

$$y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arccotg} x$$

выражают зависимость угла (дуги) от его тригонометрических ф-ий.

Если $x = \sin y$, то обратная зависимость будет: $y = \arcsin x$; если $x = \operatorname{tg} y$, то $y = \operatorname{arctg} x$, и т. д. Такого рода зависимость угла (дуги) от его тригонометрических ф-ий носит название обратно-круговых ф-ий.

Свойства обратно-круговых ф-ий.

1. Всякая обратно-круговая ф-ия м. б. выражена через канюю угодно другую обратно-круговую же ф-ию.

Примеры.

а) Выразить $y = \arccos x$ через $\arcsin x$.

Если $y = \arccos x$, то $x = \cos y$; но т. к. $\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$, то $y = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$.

Следовательно:

$$\arccos x = \arcsin \sqrt{1 - x^2}.$$

б) Выразить $y = \arcsin x$ через $\arctg x$.

Если $y = \arcsin x$, то $x = \sin y$; но т. к. $\operatorname{tg} y = \frac{\sin y}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, то $y = \arctg \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, следовательно: $\arcsin x = \arctg \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

$$2. \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2};$$

$$\arctg x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Геометрические формы и их элементы.

§ 1. Треугольники.

1. Прямоугольный треугольник. $\angle C = 90^\circ$; c — гипотенуза;

$$\angle A + \angle B = 90^\circ;$$

a и b — катеты, лежащие против углов соответствующих наименований;

$$1) a^2 + b^2 = c^2;$$

$$2) a = b \cdot \operatorname{tg} A = b \cdot \operatorname{ctg} B;$$

$$b = a \cdot \operatorname{tg} B = a \cdot \operatorname{ctg} A;$$

$$3) a = c \cdot \sin A = c \cdot \cos B;$$

$$b = c \cdot \sin B = c \cdot \cos A.$$

4) Площадь P :

$$P = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c^2 \cdot \sin 2A}{4} = \frac{c^2 \cdot \sin 2B}{4}.$$

2. Равносторонний треугольник. a — сторона; h — высота; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности.

$$1) h = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$2) a = R\sqrt{3} = 2r\sqrt{3};$$

3) Площадь P :

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

3. Равнобедренный треугольник.

$$\angle A = \angle B = \alpha; \angle C = 180^\circ - 2\alpha; a = b;$$

h — высота; c — основание.

$$1) c = 2a \cdot \cos \alpha = 2b \cdot \cos \alpha;$$

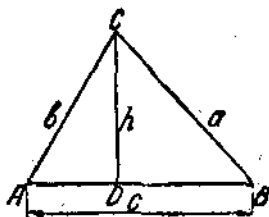
$$2) h = a \cdot \sin \alpha = b \cdot \sin \alpha = \frac{c}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

3) Площадь P :

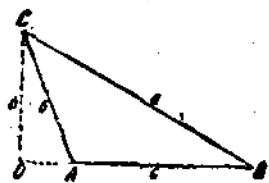
$$P = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{c^2}{4} \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

4. Косугольный треугольник. Обозначения: R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной; $a + b + c = 2p$.

$$1) \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ.$$



Черт. 13.



Черт. 14.

2) Во всяком треугольнике:

$$a = 2R \cdot \sin A; b = 2R \cdot \sin B; c = 2R \cdot \sin C,$$

откуда:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

или:

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C.$$

3) Во всяком треугольнике $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

Отсюда вытекает следствие:

если A —острый угол, то:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot \overline{AD} \text{ (см. черт. 13);}$$

если A —тупой угол, то:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2c \cdot \overline{AD} \text{ (см. черт. 14).}$$

4. Ф-лы для определения углов треугольника по трем его сторонам:

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{b \cdot c}}; \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{b \cdot c}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \frac{r}{p-a}.$$

Пользуются обыкновенно последней.

5) Площадь P :

$$a) P = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2};$$

$$b) P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R} = 2R^2 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \\ = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin B \cdot \sin C}{\sin A} = \frac{b^2}{2} \cdot \frac{\sin A \cdot \sin C}{\sin B} = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\sin A \cdot \sin B}{\sin C}.$$

в) Если даны координаты вершин треугольника (x_1, y_1) , (x_2, y_2) и (x_3, y_3) , то:

$$P = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

6) Ф-лы Мольвейде:

$$\begin{cases} (b+c) \cdot \sin \frac{A}{2} = a \cdot \cos \frac{B-C}{2} \\ (c+a) \cdot \sin \frac{B}{2} = b \cdot \cos \frac{C-A}{2} \\ (a+b) \cdot \sin \frac{C}{2} = c \cdot \cos \frac{A-B}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} (b-c) \cdot \cos \frac{A}{2} = a \cdot \sin \frac{B-C}{2} \\ (c-a) \cdot \cos \frac{B}{2} = b \cdot \sin \frac{C-A}{2} \\ (a-b) \cdot \cos \frac{C}{2} = c \cdot \sin \frac{A-B}{2} \end{cases}$$

7) Ненероно равенство:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}.$$

§ 2. Четырехугольники.

Общие обозначения: R —радиус описанной окружности, r —вписанной; h —высота; d —диагональ.

1. Квадрат.

$$1) d = a\sqrt{2}; 2) R = \frac{a\sqrt{2}}{2}; 3) r = \frac{a}{2};$$

4) площадь P :

$$P = a^2 = \frac{d^2}{2}.$$

2. Ромб.

1) Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят углы ромба пополам.

2) $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$.

3) Площадь P :

$$P = ah = a^2 \cdot \sin \alpha = \frac{d_1 d_2}{2},$$

где a —сторона; d_1 и d_2 —диагонали; α —угол между сторонами.

3. Параллелограмм.

 a и b —стороны; d_1 и d_2 —диагонали; h —высота при основании b ; α —угол между сторонами; φ —угол между диагоналями.

1) Диагонали параллелограмма взаимно делятся пополам.

2) $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

3) Площадь P :

$$P = b \cdot h = ab \cdot \sin \alpha = \frac{d_1 d_2}{2} \sin \varphi.$$

4. Прямоугольник.

1) Диагонали прямоугольника равны между собою.

2) $d^2 = a^2 + b^2$.

3) Площадь P :

$$P = a \cdot b = \frac{d^2}{2} \cdot \sin \varphi.$$

Обозначения те же, что и в параллелограмме.

5. Трапеция.

 a и b —параллельные стороны; h —расстояние между ними (высота); d_1 и d_2 —диагонали; φ —угол между ними; m —средняя линия.

1) $m = \frac{a+b}{2}$.

2) Площадь P :

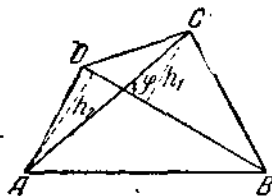
$$P = \frac{a+b}{2} h = mh = \frac{d_1 d_2}{2} \cdot \sin \varphi.$$

6. Четырехугольник с непараллельными сторонами.

$$\overline{DB} = d_1; \overline{AC} = d_2.$$

Площадь P :

$$P = \frac{1}{2} d_1 (h_1 + h_2) = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin \varphi.$$



Черт. 15.

§ 3. Правильные многоугольники.

 a —сторона; R —радиус описанной окружности; r —вписанной; n —число сторон; φ —центральный угол, опирающийся на сторону; α —угол многоугольника.

1) $\varphi = \frac{360^\circ}{n}$.

2) $\alpha = \frac{180^\circ}{n} (n-2) = 180^\circ - \varphi$.

3) Периметр $= a \cdot n = 2nR \cdot \sin \frac{\varphi}{2} = 2nr \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$.

4) $R = \frac{a_n}{2 \sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{a_n}{\sqrt{2(1 - \cos \varphi)}}$.

$$5) r = \frac{a_n}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}.$$

$$6) a_n = 2R \cdot \sin \frac{\varphi}{2} = 2r \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = 2 \sqrt{R^2 - r^2}.$$

7) Площадь P :

$$P = \frac{1}{4} n a_n^2 \cdot \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} n R^2 \cdot \sin \varphi \neq n r^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

$$8) a_3 = R \sqrt{3}; a_4 = R \sqrt{2}; a_6 = R; a_{10} = \frac{R}{2} (\sqrt{5} - 1).$$

§ 4. Круг и его элементы.

R — радиус; d — диаметр.

$$1) \text{Площадь круга} = \pi R^2 = \frac{\pi d^2}{4} = 0,78539 d^2.$$

$$2) \text{Длина окружности} = 2\pi R = \pi d.$$

3) Площади кругов относятся как квадраты радиусов или диаметров.

$$4) \text{Площадь сектора } OAMB = \frac{\pi R^2 \varphi}{360} = \frac{\pi d^2}{360} \cdot \frac{\varphi}{4} = 0,00873 \pi R^2.$$

5) Площадь сегмента AMB , меньшего площади полукруга, $= \frac{2}{3} bh + \frac{h^3}{2b}$ (ошибка $< 1\%$).

Площадь сегмента AMB , дуга к-рого меньше 50° , $= \frac{2}{3} bh$ (ошибка $< 1\%$).

Ф-ла площади сегмента (тригонометрическая):

$$P = \frac{1}{2} R^2 \left(\frac{\pi \varphi}{180} - \sin \varphi \right).$$

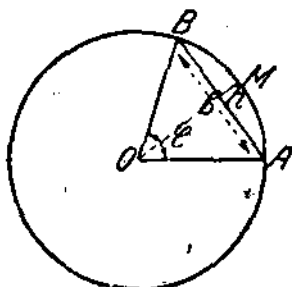
φ — центральный угол.

6) Кольцо, образованное двумя концентрическими окружностями радиусов R и r .

Площадь кольца P :

$$P = \pi (R^2 - r^2) = \frac{1}{4} \pi (d^2 - d_1^2).$$

и d_1 — диаметры.



Черт. 16.

§ 5. Площади фигур произвольного вида.

(См. «Интегральное исчисление. Определение интеграла», § 6).

§ 6. Поверхности и объемы.

Обозначение: V — объем, P — полная поверхность, M — боковая поверхность.

1. Призма.

$$V = F \cdot h.$$

F — площадь основания, h — высота.

1) Треугольная призма, усеченная непараллельно основанию:

$$V = \frac{1}{3} (a + b + c) N.$$

a, b, c — три параллельных ребра; N — площадь перпендикулярного ребрам сечения.

2) Произвольная призма, усеченная непараллельно основанию:

$$V = N \cdot L$$

N —площадь перпендикулярного сечения; l —длина прямой, соединяющей центры тяжести оснований.

3) Прямоугольный параллелепипед:

$$V = a \cdot b \cdot c;$$

$$P = 2(ab + ac + bc);$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

a, b, c —ребра; d —диагональ.

4) Куб.

$$V = a^3; P = 6a^2; d = a\sqrt{3}.$$

a —ребро, d —диагональ.

2. Пирамида.

$$V = \frac{1}{3} Fh.$$

F —площадь основания; h —высота.

1) Усеченная пирамида:

$$V = \frac{1}{3} h (F + f + \sqrt{Ff}).$$

F и f —площади оснований; h —высота.

2) Трехгранная пирамида, три вершины которой находятся в точках: (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) , а четвертая—в начале координат.

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

3. Клин (черт. 17).

$$V = \frac{1}{6} (a + 2b) ch.$$

4. Цилиндр.

$$V = F \cdot h.$$

F —площадь основания; h —высота.

1) Круглый цилиндр:

$$V = \pi r^2 h;$$

$$M = 2\pi r h;$$

$$P = 2\pi r (r + h).$$

r —радиус основания; h —высота.

2) Круглый цилиндр, усеченный непараллельно основанию:

$$V = \pi r^2 \frac{h_1 + h_2}{2};$$

$$M = \pi r (h_1 + h_2).$$

h_1 и h_2 —наибольшее и наименьшее значения образующей; r —радиус основания.

3) Цилиндрическое кольцо:

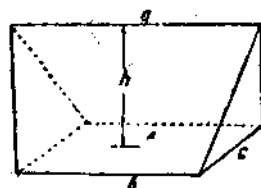
$$V = \frac{\pi}{3a} [b(3r^2 - b^2) + 3r^2(a - r)\varphi];$$

$$M = \frac{2\pi r h}{a} [(a - r)\varphi + b],$$

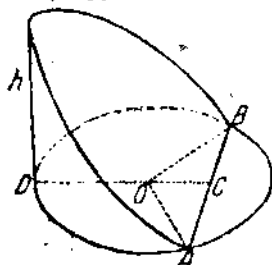
где $a = \overline{DC}$; $b = \overline{AC} = \overline{BC}$; r —радиус основания; $\varphi = \angle DOB$.

Если сечение проходит через центр основания O , то $DC = \overline{AC} = \overline{BC} = r$ и, следовательно:

$$V = \frac{2}{3} r^3 h; M = 2\pi r h.$$



Черт. 17.



Черт. 18.

4) Полный цилиндр:

$$V = \pi h (R^2 - r^2) = \pi h S (2R - S) = \pi h S (2r + S) = 2\pi h S r.$$

R —наружный радиус; r —внутренний радиус; h —высота, $S = R - r$ —толщина; $\rho = \frac{1}{2}(R + r)$ —средний радиус.

5. Круглый конус.

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h;$$

$$M = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} = \pi r s;$$

$$s = \sqrt{r^2 + h^2}.$$

r —радиус основания; h —высота; s —образующая.

Усеченный конус:

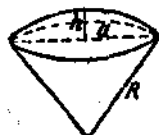
$$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2);$$

$$M = \pi s (R + r);$$

$$s = \sqrt{(R - r)^2 + h^2}.$$

R и r —радиусы основания; h —высота; s —образующая.

6. Шар и его элементы.



Черт. 19.

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{1}{3} \pi R^2 h = 4,18879 R^3;$$

$$P = 4\pi R^2 = \frac{3V}{R};$$

$$R = 0,62035 \sqrt[3]{V}$$

R —радиус шара.

1) Шаровой сегмент:

$$V = \frac{1}{6} \pi h (3a^2 + h^2) = \frac{1}{3} \pi h^3 (3R - h);$$

$$M = 2\pi R h = \pi (a^2 + h^2);$$

$$a^2 = h (2R - h).$$

h —высота сегмента; a —радиус основания.

2) Шаровой сектор:

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h = 2,0944 R^2 h;$$

$$P = \pi R (2h + a).$$

h —высота соответствующего сегмента; a —радиус его основания.

3) Шаровой слой:

$$V = \frac{1}{6} \pi h (3a^2 + 3b^2 + h^2);$$

$$M = 2\pi R h;$$

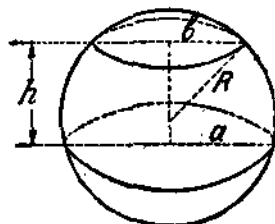
$$R^2 = a^2 + \left(\frac{a^2 - b^2 - h^2}{2h} \right)^2.$$

a —радиус большего основания; b —меньшего;

h —высота слоя.

Если $a = R$, то:

$$V = \pi h \left(R^2 - \frac{h^2}{3} \right).$$



Черт. 20.

4) Часть шара, ограниченная двумя большими кругами.

$$V = 0,011635 \varphi R^3; \quad M = 0,034907 \varphi R^2.$$

φ —угол между сечениями больших кругов (в градусах).

5) Сферический треугольник:

$$M = \frac{\epsilon^2}{180^2} \pi R^2 = 0,017453 \epsilon^2 R^2.$$

ϵ — сферический избыток, т. е. разность между суммой углов треугольника и 180° .

6) Полный шар.

$$V = \frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3) = \frac{1}{6} \pi (D^3 - d^3).$$

R — наружный радиус; r — внутренний; D и d — диаметры.

Сферическая тригонометрия.

§ 1. Прямоугольный треугольник.

a — гипотенуза; α — прямой угол.

$$1) \cos a = \cos b \cdot \cos c = \operatorname{ctg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \gamma;$$

$$2) \cos b = \frac{\cos \beta}{\sin \gamma}; \cos c = \frac{\cos \gamma}{\sin \beta};$$

$$3) \sin \beta = \frac{\sin b}{\sin a}; \sin \gamma = \frac{\sin c}{\sin a};$$

$$4) \cos \beta = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} a}; \cos \gamma = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a};$$

$$5) \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin c}; \operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} c}{\sin b}.$$

§ 2. Косоугольный треугольник.

Обозначения: a, b, c — стороны тр-ка; α, β, γ — углы; $a + b + c = 2p$; $\alpha + \beta + \gamma = 2\sigma$; $\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ = \epsilon$ — сферический избыток.

$$1) \cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha;$$

$$\cos a = -\cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos \alpha;$$

$$2) \sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma;$$

$$3) \cos a \cdot \sin b = \sin a \cdot \cos b \cdot \cos \gamma + \sin c \cdot \cos a;$$

$$\operatorname{ctg} a \cdot \sin b = \sin \gamma \cdot \operatorname{ctg} a + \cos \gamma \cdot \cos b.$$

$$\cos a \cdot \sin \beta = \sin \gamma \cdot \cos a - \sin a \cdot \cos \beta \cdot \cos c;$$

$$\operatorname{ctg} a \cdot \sin \beta = \sin c \cdot \operatorname{ctg} a - \cos c \cdot \cos \beta;$$

$$4) \sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos \sigma \cdot \cos (\sigma - a)}{\sin \beta \cdot \sin \gamma}}; \cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos (\sigma - \beta) \cdot \cos (\sigma - \gamma)}{\sin \beta \cdot \sin \gamma}};$$

$$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin (p - b) \cdot \sin (p - c)}{\sin b \cdot \sin c}}; \cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \cdot \sin (p - a)}{\sin b \cdot \sin c}}.$$

$$5) \operatorname{tg} \frac{a}{4} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{p}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{p-a}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{p-b}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{p-c}{2}};$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\epsilon}{4} \right) = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \frac{p-b}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{p-c}{2}}{\operatorname{tg} \frac{p}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{p-a}{2}}}.$$

$$6) s = \sqrt{\sin p \cdot \sin (p - a) \cdot \sin (p - b) \cdot \sin (p - c)};$$

$$\sin \alpha = \frac{2s}{\sin b \cdot \sin c}.$$

Неперовы аналогии.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} &= \operatorname{tg} \frac{c}{2} \cdot \frac{\cos \frac{a-\beta}{2}}{\cos \frac{a+\beta}{2}}; & \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} &= \operatorname{tg} \frac{c}{2} \cdot \frac{\sin \frac{a-\beta}{2}}{\sin \frac{a+\beta}{2}}; \\ \operatorname{tg} \frac{a+\beta}{2} &= \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+\beta}{2}}; & \operatorname{tg} \frac{a-\beta}{2} &= \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+\beta}{2}}. \end{aligned}$$

Формулы Гаусса.

$$\begin{aligned} \sin \frac{a}{2} \cdot \sin \frac{b+c}{2} &= \sin \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{\beta-\gamma}{2}; \\ \sin \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{b+c}{2} &= \cos \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{\beta+\gamma}{2}; \\ \cos \frac{a}{2} \cdot \sin \frac{b-c}{2} &= \sin \frac{a}{2} \cdot \sin \frac{\beta-\gamma}{2}; \\ \cos \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{b-c}{2} &= \cos \frac{a}{2} \cdot \sin \frac{\beta+\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Функции.

Функции, их непрерывность и разрывы.

§ 1. Непрерывность ф-ий.

Ф-ия $y=f(x)$ называется непрерывной при $x=a$, если бесконечно-малому приращению аргумента $\Delta x = \Delta a$ соответствует бесконечно-малое приращение ф-ии.

Непрерывность обуславливается следующим равенством:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = f(\lim x).$$

Ф-ия $u=F(x, y)$ называется непрерывной при $x=a$ и $y=b$, если:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} F(x, y) = F(a, b).$$

§ 2. Теорема Роля.

Если ф-ия $y=f(x)$ непрерывна в интервале от $x=a$ до $x=b$ и численные значения ее на концах этого интервала равны, то производная ее $f'(x)$ по крайней мере один раз внутри этого интервала обращается в нуль. Геометрически это значит, что внутри интервала на кривой должна иметься хотя бы одна точка, через к-рую проходит касательная, параллельная оси x .

Исключением может явиться наличие внутри интервала точки возврата, дающей касательную, перпендикулярную оси x .

§ 3. Теорема о конечном приращении Лагранжа.

Если ф-ия $y=f(x)$ непрерывна внутри нек-рого интервала, то точное приращение ф-ии при нек-ром конечном приращении h аргумента (внутри этого интервала) определяется ф-лой:

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a+\theta h),$$

где $0 < \theta < 1$. Геометрически это значит, что внутри интервала на кривой есть точка, через которую проходит касательная, параллельная хорде, стягивающей концы интервала.

§ 4. Разрыв непрерывности.

Ф-ия $y=f(x)$ при $x=a$ претерпевает разрыв непрерывности; если при $x \rightarrow a$ она подходит к двум разным пределам в зависимости от того, убывая x стремится к a или возрастаая.

§ 5. Прерывность и непрерывность элементарных ф-ий.

1) Непрерывны при всех значениях аргумента следующие ф-ии:

а) всякая целая рациональная ф-ия;

б) показательная ф-ия $y=a^x$;

в) тригонометрические ф-ии:

$$y = \sin x; y = \cos x;$$

г) ф-ия:

$$y = \arcsin x.$$

2) Непрерывна при всех положительных значениях x ф-ия:

$$y = \lg x.$$

3) Непрерывны при всех значениях x от -1 до $+1$ ф-ии:

$$y = \arcsin x; y = \arccos x.$$

4) Претерпевают разрыв сл. ф-ии:

а) дробная рациональная ф-ия при значениях аргумента, обращающих знаменатель ее в нуль;

б) тригонометрические ф-ии:

$$y = \operatorname{tg} x$$

при $x = 2\pi n \pm \frac{\pi}{2}$;

$$y = \operatorname{ctg} x$$

при $x = \pm \pi$;

в) ф-ия

$$y = \operatorname{arccot} x$$

при $x = 0$.

Maxima et minima.

§ 1. Maxima et minima ф-ий одного переменного.

Ф-ия $y=f(x)$ при $x=a$ достигает наибольшего или наименьшего значения, если $f'(a)=0$ и $f''(a) \geq 0$.

Нахождение maxima et minima ф-ий. 1-й способ. Первая производная ф-ии $y=f(x)$ приравняется нулю и корни ее подставляются во вторую производную. Если в результате подстановки испытуемого корня x_1 во вторую производную получаем:

$$f''(x_1) < 0,$$

то этот корень дает максимум ф-ии, а если:

$$f''(x_1) > 0,$$

то он дает ее минимум.

Чтобы получить самый максимум или минимум, найденное значение корня x_1 подставляют в ур-ие $y=f(x)$.

Если в результате подстановки будем иметь:

$$f''(x_1) = 0,$$

то за величину ее при этом значении аргумента принимают:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

§ 2. Неопределенности вида: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ и $0 \cdot \infty$.

Если ф-ия $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ при $x = a$ дает неопределенность $\frac{0}{0}$ или же $\frac{\infty}{\infty}$, то:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)},$$

т. е., чтобы найти предельное значение дробной ф-ии $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, дающей при $x = a$ неопределенность $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, дифференцируют отдельно ее числитель и знаменатель. Числовая величина новой дроби $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ при $x = a$ и будет предельным значением данной дробной ф-ии.

Если $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ при $x = a$ дает также неопределенность $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то с нею поступают по-предыдущему, т. е. находят $\frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)}$, и т. д.

Пример.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

Если ф-ия $f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$ при $x = a$ дает неопределенность $0 \cdot \infty$, то ее можно представить в таком виде:

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}}$$

и тогда мы будем иметь неопределенность или $\frac{0}{0}$, или $\frac{\infty}{\infty}$; к-рая раскрывается по-предыдущему.

§ 3. Неопределенность вида $\infty - \infty$.

Ф-ия, дающая неопределенность $\infty - \infty$, м. б. преобразована алгебраически так, что указанная неопределенность сведется к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример.

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos \varphi} - \operatorname{tg} \varphi \right) &= \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos \varphi} - \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \right) = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin \varphi}{\cos \varphi} = \\ &= \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin \varphi)'}{(\cos \varphi)'} = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos \varphi}{-\sin \varphi} = 0. \end{aligned}$$

§ 4. Неопределенности вида: 0^0 , 1^∞ , ∞^0 .

Если ф-ия $f(x) = [\varphi(x)]^{\psi(x)}$ при $x = a$ дает одну из трех неопределенностей вида 0^0 , 1^∞ , ∞^0 , то, прологарифмировав обе ее части:

$$\ln f(x) = \psi(x) \ln[\varphi(x)],$$

получим для $\ln f(x)$ неопределенность вида $0 \cdot \infty$, сводящуюся алгебраически к неопределенности $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Если, т. о., найдем, что:

то будем иметь:

$$\lim [\ln f(x)] = m,$$

$$\lim f(x) = e^m.$$

Пример

Ф-ия

$$f(\varphi) = (\sin \varphi) \operatorname{tg} \varphi$$

при $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ дает 1^∞ .

Логарифмируя, получаем:

$$\ln f(\varphi) = \operatorname{tg} \varphi \cdot \ln (\sin \varphi).$$

При $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$

$$\ln f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \infty \cdot 0;$$

$$\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} [\ln f(\varphi)] = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} [\operatorname{tg} \varphi \cdot \ln (\sin \varphi)] = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln (\sin \varphi)}{\operatorname{ctg} \varphi} =$$

$$= \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{-\frac{1}{\sin^2 \varphi}} = 0.$$

Итак:

$$\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} [\ln f(\varphi)] = 0,$$

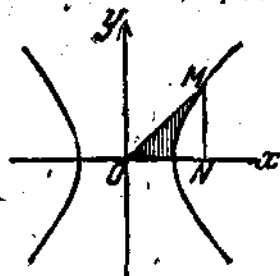
а

$$\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(\varphi) = e^0 = 1$$

Гиперболические функции.

§ 1. Определения.

Гиперболические ф-ии, а именно: гиперболические синус, косинус, тангенс и котангенс, выражают собою след. часто встречающиеся в приложениях комбинации показательной ф-ии:



Черт. 21.

$$\operatorname{sh} \varphi = \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{2}; \operatorname{ch} \varphi = \frac{e^\varphi + e^{-\varphi}}{2};$$

$$\operatorname{th} \varphi = \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{e^\varphi + e^{-\varphi}}; \operatorname{cth} \varphi = \frac{e^\varphi + e^{-\varphi}}{e^\varphi - e^{-\varphi}}.$$

Существуют и иные обозначения этих гиперболических ф-ий, а именно: $\sin \operatorname{hyp} \varphi$, $\cos \operatorname{hyp} \varphi$, $\operatorname{tg} \operatorname{hyp} \varphi$ и $\operatorname{ctg} \operatorname{hyp} \varphi$, или: $\sin h \varphi$, $\cos h \varphi$, $\operatorname{tg} h \varphi$, $\operatorname{ctg} h \varphi$.

Если построить равнобедренную гиперболу:

$$x^2 - y^2 = 1$$

и взять на ней точку $M(x, y)$, то $x = ON$ будет гиперболическим косинусом, а $y = MN$ — гиперболическим синусом аргумента φ , к-рый выражает собою удвоенную площадь заштрихованного на чертеже гиперболического сектора.

При действительных значениях аргумента φ

$$\cosh \varphi \geq 1; -1 \leq \tanh \varphi \leq 1; \operatorname{ctg} h \varphi \geq 1,$$

а $\sinh \varphi$ может иметь какие угодно значения, как положительные, так и отрицательные.

§ 2. Соотношения между гиперболическими ф-иями.

2. $\operatorname{sh}(-\varphi) = -\operatorname{sh} \varphi; \operatorname{ch}(-\varphi) = \operatorname{ch} \varphi;$
 $\operatorname{th}(-\varphi) = -\operatorname{th} \varphi; \operatorname{cth}(-\varphi) = -\operatorname{cth} \varphi;$
3. $\operatorname{sh}(\varphi_1 + \varphi_2) = \operatorname{sh} \varphi_1 \operatorname{ch} \varphi_2 + \operatorname{ch} \varphi_1 \cdot \operatorname{sh} \varphi_2;$
 $\operatorname{ch}(\varphi_1 + \varphi_2) = \operatorname{ch} \varphi_1 \cdot \operatorname{ch} \varphi_2 + \operatorname{sh} \varphi_1 \cdot \operatorname{sh} \varphi_2.$

§ 3. Обратные ф-ии.

Обратные ф-ии гиперболически обозначаются так:

$$\operatorname{Ar} \operatorname{sh} u, \operatorname{Ar} \operatorname{ch} u, \operatorname{Ar} \operatorname{th} u, \operatorname{Ar} \operatorname{cth} u.$$

«Ar» произносится «ареа», что означает «площадь».

$$\operatorname{Ar} \operatorname{sh} u = \ln(u + \sqrt{u^2 + 1}); \operatorname{Ar} \operatorname{ch} u = \ln(u + \sqrt{u^2 - 1});$$

$$\operatorname{Ar} \operatorname{th} u = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u}; \operatorname{Ar} \operatorname{cth} u = \frac{1}{2} \ln \frac{u+1}{u-1}.$$

§ 4. Соотношения между круговыми и гиперболическими ф-иями.

- 1) $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = -i \cdot \operatorname{sh} ix.$
- 2) $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \operatorname{ch} ix.$
- 3) $\operatorname{tg} x = -i \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} = -i \cdot \operatorname{th} ix.$
- 4) $\operatorname{ctg} x = i \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}} = i \cdot \operatorname{cth} ix.$
- 5) $\cos ix = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \operatorname{ch} x.$
- 6) $\sin ix = e \frac{ix - e^{-ix}}{2} = i \cdot \operatorname{sh} x.$
- 7) $\operatorname{tg} ix = i \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} = i \cdot \operatorname{th} x.$
- 8) $\operatorname{ctg} ix = -i \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}} = -\operatorname{cth} x.$

Библиотека «В. Сергеев»
 М. Технич. Библиот.

Дифференциальное исчисление.

Производные и дифференциалы.

§ 1. Производные и дифференциалы ф-ии одного переменного.

- 1) Аналитическое определение производной ф-ции $y = f(x)$:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

- 2) Геометрическое толкование производной.

Если α — угол наклона к оси x касательной к кривой $y = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$, то:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$$

3) Дифференциал ф-ии $y = f(x)$.

Величины dy и dx , входящие в состав производной $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, называются дифференциалами: первый — дифференциалом ф-ии, второй — дифференциалом аргумента

$$dy = f'(x) dx$$

§ 2. Производные и дифференциалы высших порядков.

1. Порядок производной или дифференциала определяется числом дифференцирований.

2. Обозначения производных и дифференциалов высших порядков ф-ии $y = f(x)$.

Производные:

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x); \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = f''(x); \quad \frac{d^3y}{dx^3} = y''' = f'''(x);$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)} = f^{(n)}(x).$$

Дифференциалы:

$$dy = y' dx = f'(x) dx; \quad d^2y = y'' dx^2 = f''(x) dx^2 \text{ и т. д.};$$

$$d^ny = y^{(n)} dx^n = f^{(n)}(x) dx^n.$$

§ 3. Частные производные и частные дифференциалы.

1) Если имеем ф-ию нескольких переменных, то дифференцирование ее по любому из переменных при условии неизменяемости остальных называется частным дифференцированием, а такого рода производные называются частными производными.

2) Обозначения частных производных и частных дифференциалов.

Функция $z = f(x, y)$.

Частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} = F'_x = F_1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} = F'_y = F_2;$$

второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = F''_{xx} = F_{11}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = F''_{yy} = F_{22};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = F''_{xy} = F_{12};$$

Третьего, четвертого порядка и т. д. — по аналогии.

Частные дифференциалы.

Первого порядка:

$$\partial_x z = \partial_x F = \frac{\partial F}{\partial x} dx = F_1 dx; \quad \partial_y z = \partial_y F = \frac{\partial F}{\partial y} dy = F_2 dy.$$

Остальных порядков — по аналогии.

3) Теорема. От порядка дифференцирования результат не изменяется:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x \partial y}.$$

4) Геометрическое толкование частных производных первого порядка ф-ии $z = F(x, y)$.

а) Если поверхность $z = F(x, y)$ пересечь плоскостью, параллельной координатной плоскости XOZ , то тангенс угла наклона к оси X , касательной к кривой сечения, равен: $\frac{\partial z}{\partial x}$.

б) Если поверхность $z = F(x, y)$ пересечь плоскостью, параллельной координатной плоскости YOZ , то тангенс угла наклона к оси Y , касательной к кривой сечения, равен: $\frac{\partial z}{\partial y}$.

§ 4. Полная производная и полный дифференциал.

Для ф-ии $u = F(x, y)$:

$$du = dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy.$$

Для ф-ии $u = F(x, y, z)$:

$$du = dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz.$$

и т. д.

Пример. Для ф-ии:

$$V = \frac{R(1 + \alpha t)}{p},$$

определяющей зависимость объема известной массы газа от темп-ры t и давления p (R и α — постоянные):

$$dv = \frac{\partial v}{\partial t} dt + \frac{\partial v}{\partial p} dp = \frac{\alpha R}{p} dt - \frac{R(1 + \alpha t)}{p^2} dp,$$

что и выражает собою полное изменение объема от одновременного изменения темп-ры и давления.

2) Для ф-ии

$$u = F(x, y, z),$$

где:

$$x = f(t); y = \varphi(t); z = \psi(t),$$

полная производная этой ф-ии по переменному t будет:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}.$$

§ 5. Производная неявной ф-ии $F(x, y) = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

§ 6. Дифференцирование ф-ии от ф-ии.

Если $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$, то:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

§ 7. Дифференцирование обратных ф-ий.

Если $y = f(x)$, а обратная ей ф-ия $x = \varphi(y)$, то:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}},$$

или, что то же:

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

§ 8. Основные формулы дифференцирования.

- 1) $\frac{dC}{dx} = 0$; $C = \text{Const.}$
- 2) $\frac{dx}{dx} = 1.$
- 3) $(u + v - w)' = u' + v' - w'.$
- 4) $(c \cdot u)' = c \cdot u'$; $c = \text{Const.}$
- 5) $\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}$; $c = \text{Const.}$
- 6) $(u \cdot v)' = u \cdot v' + v \cdot u'.$
- 7) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}.$
- 8) $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'.$
 $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}.$
- 9) $(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n \sqrt[n]{u}}.$
- 10) $(a^x)' = a^x \ln a.$
- 11) $(e^x)' = e^x.$
- 12) $(\lg_a x)' = \frac{1}{x} \lg_a e.$
- 13) $\ln x = \frac{1}{x}.$
- 14) $(\sin x)' = \cos x.$
- 15) $(\cos x)' = -\sin x.$
- 16) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$
- 17) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$
- 18) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
- 19) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
- 20) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$
- 21) $(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$

§ 9. Дифференцирование гиперболических ф-ий.

- 1) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$
- 2) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$
- 3) $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$
- 4) $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$

§ 10. Дифференцирование обратных гиперболических ф-ий.

- 1) $(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$

$$2) (\operatorname{ar ch} xy = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$3) (\operatorname{ar th} xy = \frac{1}{1 - x^2}.$$

$$4) (\operatorname{ar cth} x)' = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Ряды.

§ 1. Ряды конечные и бесконечные.

Математическим рядом называется совокупность постоянных или переменных величин, следующих одна за другой и составленных по определенному закону. Величины, образующие ряд, называются его членами.

Если в ряде число членов ограничено, ряд называется конечным, если же число членов безгранично, то ряд называется бесконечным.

§ 2. Конечные ряды.

1. Арифметическая прогрессия.

$$a; a + d; a + 2d; a + 3d \dots a + (n - 1)d.$$

a — первый член, d — разность прогрессии, n — число членов прогрессии.
 n -й член:

$$a_n = a + (n - 1)d.$$

Сумма n первых членов:

$$s_n = \frac{a + a_n}{2} n = \frac{n}{2} [2a + (n - 1)d].$$

2. Геометрическая прогрессия.

$$a; aq; aq^2; aq^3 \dots aq^{n-1}.$$

a — первый член, q — знаменатель прогрессии, n — число членов.
 n -й член:

$$a_n = aq^{n-1}.$$

Сумма n первых членов:

$$s_n = a \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

При $q < 1$ и при $n \rightarrow \infty$:

$$s = \frac{a}{1 - q}.$$

§ 3. Бесконечные ряды.

1) Суммой бесконечного ряда называется предел, к которому стремится сумма n его членов при неограниченном возрастании n .

2) Сходящимся рядом называется ряд, сумма членов которого — величина конечная; в противном случае ряд называется расходящимся.

3) Ряд называется абсолютно сходящимся или безусловно сходящимся, если сходится ряд из абсолютных величин его членов.

4) Ряд называется условно сходящимся, если он сходится, а ряд из абсолютных величин его членов расходится.

Признаки сходимости.

Дан бесконечный ряд:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots$$

Для того, чтобы этот ряд был сходящимся, необходимо, чтобы члены его по абсолютным их величинам неограниченно убывали, т. е. чтобы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Это условие необходимо для сходимости ряда, но недостаточно. Достаточными признаками сходимости являются следующие.

Признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1.$$

Признак Коши:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1.$$

Ряд знакопередающийся:

$$u_1 - u_2 + u_2 - u_3 + u_3 - u_4 + u_4 - \dots,$$

при условии, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

всегда сходится.

§ 4. Ряды Тейлора и Маклорена для ф-ий одного переменного.

1) Обширный класс трансцендентных ф-ий разлагается в степенной ряд при помощи ряда Тейлора или же при помощи ряда Маклорена.

Ряд Тейлора:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1} f'(x_0) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x_0) + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(x_0) + \\ + \frac{h^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f^{(4)}(x_0) + \dots + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} f^{(n)}(x_0) + \dots$$

Ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(0) + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(0) + \dots + \\ + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} f^{(n)}(x_0) + \dots$$

2) Остаточный член ряда Тейлора.

Форма Лагранжа:

$$R_n = \frac{h^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} f^{(n)}(x_0 + kh),$$

где k — нек-рая правильная дробь.

Форма Коши:

$$R_n = \frac{h^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-2)(n-1)} (1-k)^{n-1} f^{(n)}(x_0 + kh),$$

где k — нек-рая правильная дробь.

3) Остаточный член ряда Маклорена.

Форма Лагранжа:

$$R_n = \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} f^{(n)}(kx),$$

где k — нек-рая правильная дробь.

Форма Коши:

$$R_n = \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-2)(n-1)} (1-k)^{n-1} f^{(n)}(kx),$$

где k — нек-рая правильная дробь.

§ 5. Ряды Тейлора и Маклорена для ф-ий двух переменных.

Ряд Тейлора:

$$F(x+h, y+k) = F(x, y) + (F'_x h + F'_y k) + \frac{1}{1.2} (F''_{xx} h^2 + 2F''_{xy} hk + F''_{yy} k^2) + \\ + \frac{1}{1.2.3} (F'''_{xxx} h^3 + 3F'''_{x^2y} h^2 k + 3F'''_{xy^2} h k^2 + F'''_{yyy} k^3) + \dots$$

Ряд Маклорена:

$$F(x, y) = F(0, 0) + [(F'_x)_0 x + (F'_y)_0 y] + \frac{1}{1.2} [(F''_{xx})_0 x^2 + 2(F''_{xy})_0 xy + \\ + (F''_{yy})_0 y^2] + \frac{1}{1.2.3} [(F'''_{xxx})_0 x^3 + 3(F'''_{x^2y})_0 x^2 y + 3(F'''_{xy^2})_0 x y^2 + (F'''_{yyy})_0 y^3] + \dots$$

§ 6. Разложение в ряд элементарных ф-ий.

$$1) (x+h)^m = x^m + m x^{m-1} h + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} h^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^{m-3} h^3 + \\ + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} x^{m-4} h^4 + \dots$$

при m целом и положительном ряде конечен, в противном случае — бесконечен.

Особые случаи этого ряда:

$$a) \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

сходится при условии: $-1 < x < +1$.

$$б) \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

$$в) \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2.4}x^2 + \frac{1.3}{2.4.6}x^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^4 + \dots$$

сходится при условии: $-1 \leq x \leq +1$.

$$г) \sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1.2}{3.6}x^2 + \frac{1.2.5}{3.6.9}x^3 - \frac{1.2.5.8}{3.6.9.12}x^4 + \dots$$

сходится при условии: $-1 \leq x \leq +1$.

$$2) e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots$$

сходится при всех значениях x .

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots = 2,718281 \dots$$

$$3) \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \dots = -\operatorname{sh}(-x).$$

$$4) \operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \dots = \operatorname{ch}(-x)$$

$$5) a^x = 1 + \frac{(\ln a)}{1}x + \frac{(\ln a)^2}{1.2}x^2 + \frac{(\ln a)^3}{1.2.3}x^3 + \dots$$

сходится при всех значениях x .

$$6) \ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \frac{x^5}{5} \dots$$

сходится при $-1 < x < +1$.

$$7) \ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right)$$

сходится при $-1 < x < +1$.

$$8) \ln x + 2 \left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^5 + \dots \right]$$

сходится при всех положительных значениях x .

$$9) \sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$$

сходится при всех значениях x .

$$10) \cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$$

сходится при всех значениях x .

$$11) \operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{2835} x^9 + \dots$$

сходится при: $-\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}$.

$$12) \operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \left\{ \frac{1}{3} x + \frac{1}{45} x^3 + \frac{2}{945} x^5 + \frac{2}{4725} x^7 + \dots \right.$$

сходится при $-\pi < x < +\pi$.

$$13) \operatorname{Arcsin} x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$$

сходится при $-1 \leq x \leq +1$.

$$14) \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

сходится при $-1 \leq x \leq +1$.

§ 7. Ряды Фурье.

Всякая функциональная зависимость м. б. выражена общей для всех ф-ий ф-лой в виде бесконечного тригонометрического ряда:

$$f(x) = a + b_1 \cdot \cos x + b_2 \cdot \cos 2x + b_3 \cdot \cos 3x + b_4 \cdot \cos 4x + \dots + \\ + c_1 \cdot \sin x + c_2 \cdot \sin 2x + c_3 \cdot \sin 3x + c_4 \cdot \sin 4x + \dots$$

Кэф-ты этого ряда определяются по ф-лам;

$$a = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx; \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cdot \cos mx dx; \quad c_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cdot \sin mx dx.$$

Такого рода разложение возможно для всякой периодической ф-ии с периодом 2π , а также и для всякой непериодической ф-ии для интервала изменения аргумента последней от $-\pi$ до $+\pi$.

Т. о., ряд Фурье м. б. написан так:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx + \cos x \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos x dx + \cos 2x \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cdot \cos 2x dx + \right. \\ + \cos 3x \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cdot \cos 3x dx + \dots + \sin x \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cdot \sin x dx + \\ \left. + \sin 2x \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cdot \sin 2x dx + \sin 3x \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cdot \sin 3x dx + \dots \right],$$

или, при сокращенном обозначении:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{m=\infty} \cos mx \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cdot \cos mx dx + \\ + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sin mx \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cdot \sin mx dx.$$

Если период ф-ии $F(x)$ равен $2h$, то разложение в ряд Фурье этой ф-ии будет таково:

$$F(x) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} F(x) dx + \frac{1}{h} \sum_{m=1}^{m=\infty} \cos \frac{m\pi x}{h} \int_{-h}^{+h} F(x) \cdot \cos \frac{m\pi x}{h} dx + \\ + \frac{1}{h} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sin \frac{m\pi x}{h} \int_{-h}^{+h} f(x) \cdot \sin \frac{m\pi x}{h} dx.$$

Интегральное исчисление.

Неопределенный интеграл.

§ 1. Понятие о неопределенном интеграле.

Если $f(x)$ есть производная ф-ии $F(x)$, то:

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Ф-ия $F(x) + C$ называется неопределенным интегралом ф-ии $f(x)$; $f(x) dx$ называется подынтегральным выражением; $f(x)$ называется подынтегральной ф-ией.

§ 2. Основные свойства неопределенного интеграла.

- 1) $\left[\int f(x) dx \right]' = f(x); \quad d \int f(x) dx = f(x) dx.$
- 2) $\int dF(x) = F(x) + C.$
- 3) $\int af(x) dx = a \int f(x) dx$ (a — постоянная)
- 4) $\int (u + v - w + \dots) dx = \int u dx + \int v dx - \int w dx + \dots$

§ 3. Методы интегрирования.

1. Метод подстановки.

Преобразуем данный интеграл $\int f(x) dx$, введя новую переменную t , связанную с x соотношением:

$$x = \varphi(t),$$

тогда:

$$dx = \varphi'(t) dt; \quad t = \psi(x),$$

при чем $\varphi(t)$ — ф-ия непрерывная и $x = \varphi(t)$ и $t = \psi(x)$ однозначны, получаем:

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt.$$

Интеграл, полученный в ф-ии t , выражаем через x с помощью соотношения: $t = \psi(x)$.

Примеры основных подстановок. I. Если подынтегральная ф-ия содержит x в разных дробных степенях α, β, γ , то полагаем:

$$x = t^m,$$

где m — наименьшее кратное знаменателей дробей α, β, γ .

Пример. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{1 + \sqrt{x}}$; подстановка: $x = t^2$; $dx = 2t dt$.

II. Если подынтегральная ф-ия содержит x и $\frac{ax+b}{cx+d}$ в разных дробных степенях α, β, γ , при чем a, b, c, d — постоянные числа и $ad \neq bc$, то полагаем:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m,$$

где m — наименьшее кратное знаменателей дробей α, β, γ .

Пример. $\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} dx$; подстановка: $\frac{1+x}{1-x} = t^2$; $x = \frac{t^2-1}{t^2+1}$; $dx = \frac{4t dt}{(t^2+1)^2}$.

III. В интегралах вида:

$$\int f(x, R) dx,$$

где $R = \sqrt{ax^2 + bx + c}$; a, b, c — постоянные числа, f — рациональная ф-ия, полагаем:

1) $R = \sqrt{ax^2 + bx + c} = t - x\sqrt{a}$, если $a > 0$;

2) $R = \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c + tx}$, если $c > 0$;

3) $R = \sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t$, если $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$ и α и β — действительные корни трехчлена $ax^2 + bx + c$.

4) $x = a \cdot \sin t$, если $R = \sqrt{a^2 - x^2}$;

5) $x = a \cdot \operatorname{tg} t$, если $R = \sqrt{a^2 + x^2}$;

6) $x = \frac{a}{\cos t}$, если $R = \sqrt{x^2 - a^2}$.

Пример. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 - x^2}}$; подстановка: $\sqrt{a^2 - x^2} = a + xt$,

откуда:

$$x = -\frac{2at}{1+t^2}; dx = \frac{2a(t^2-1)}{(1+t^2)^2}; R = \frac{a(t^2-1)}{1+t^2}.$$

или:

$$x = a \cdot \sin t; dx = a \cdot \cos t; R = \sqrt{a^2 - a^2 \cdot \sin^2 t} = a \cdot \cos t.$$

IV. В интегралах вида:

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx,$$

где a и b — постоянные числа, неравные нулю, m, n, p — рациональные числа, полагаем:

1) $x = t^k$, если p — целое число, где k — наименьшее кратное знаменателей m и n ;

- 2) $a + bx^n = t^p$, если $p = \frac{\alpha}{\beta}$ и $\frac{m+1}{n} =$ целому числу или нулю;
 3) $a + bx^n = t^p \cdot x^n$, если $p = \frac{\alpha}{\beta}$ и $\frac{m+1}{n} + p =$ целому числу или нулю.

Пример. $\int x^2(a+x^2)^{\frac{1}{2}} dx$; подстановка: $a+x^2 = t^2$, т. к.:

$$\frac{m+1}{n} = \frac{3+1}{2} = 2,$$

откуда:

$$x^2 = t^2 - a; 2x dx = 2t dt.$$

V. В интегралах вида: $\int f(\sin x, \cos x) dx$ полагаем:

1. $\sin x = t$, если $f(\sin x, \cos x)$ меняет знак при замене $\cos x$ на $(-\cos x)$;
2. $\cos x = t$, если $f(\sin x, \cos x)$ меняет знак при замене $\sin x$ на $(-\sin x)$;
3. $\operatorname{tg} x = t$, если $f(\sin x, \cos x)$ не меняет знака при замене $\cos x$ на $(-\cos x)$ и $\sin x$ на $(-\sin x)$;
4. $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ (во всех случаях), откуда:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример. $\int \cos^2 x dx$; подстановка: $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$.

Примечание. В случае интегрирования определенного интеграла методом подстановки необходимо изменить пределы интегрирования («Определенный интеграл», § 2, п. 4).

2. Метод разложения.

Сущность его заключается не только в непосредственном разложении интеграла суммы на сумму интегралов, а в предварительном разложении подынтегральной ф-ии на сумму слагаемых, что достигается различными способами в зависимости от вида ф-ии.

Пример 1.

$$\int \frac{x^2}{x+1} dx = \int \frac{(x^2+1)-1}{(x+1)} dx = \int (x^2-x+1) dx = \int \frac{dx}{x+1} = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln(x+1) + C.$$

Пример 2.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

Пример 3.

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

Пример 4.

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Пример 5.

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} dx,$$

где $f(x)$ и $F(x)$ — целые рациональные ф-ии x .

Если степень $f(x)$ не меньше степени $F(x)$, то мы выделяем целую часть ф-ии делением числителя на знаменатель.

Всякую правильную несократимую рациональную дробь можно представить в виде суммы т. н. элементарных дробей.

Это тождество в том случае, если $F(x)$ имеет все корни действительные и разные, т. е. если

$$F(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)$$

имеет вид:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \frac{C}{x - x_3} + \dots + \frac{K}{x - x_n}.$$

Если же среди корней $F(x)$ имеется несколько равных, напр., $x_1 = x_2 = x_3$, то сумма элементарных дробей, соответствующих этим корням, будет:

$$\frac{A}{(x - x_1)^2} + \frac{B}{(x - x_1)^3} + \frac{C}{x - x_1}.$$

Если среди корней $F(x)$ будут мнимые корни, то сумма двух элементарных дробей, соответствующих двум сопряженным мнимым корням, заменяется выражением:

$$\frac{Mx + N}{x^2 + px + q}.$$

Если мнимые корни будут кратные, напр., двукратные, то сумма четырех элементарных дробей, соответствующая этим корням, заменяется выражением:

$$\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^2} + \frac{Px + Q}{x^2 + px + q}.$$

Т. о., интегрирование правильных несократимых рациональных дробей с помощью разложения на элементарные дроби сводится: 1) к определению постоянных чисел $A, B, C, \dots$, к-рые мы определяем из тождества способом сравнения коэф-тов при одинаковых степенях x или подстановкой в тождество произвольных значений x , и 2) к интегралам § 4: 1, 18, 19, 23, 24, 25, 26.

Рассмотрим два случая приложения ф-лы разложения на элементарные дроби.

$$1) \quad \int \frac{2x+1}{(x^2-1)^2} dx.$$

$$F(x) = (x^2 - 1)^2 = (x+1)^2 \cdot (x-1)^2; \quad x_1 = x_2 = 1; \quad x_3 = x_4 = -1.$$

$$\int \frac{2x+1}{(x^2-1)^2} dx = A \int \frac{dx}{(x+1)^2} + B \int \frac{dx}{x+1} + C \int \frac{dx}{(x-1)^2} + D \int \frac{dx}{x-1}.$$

Определяем значения A, B, C, D из тождества:

$$\frac{2x+1}{(x^2-1)^2} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1},$$

или:

$$2x+1 = A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1)^2 + C(x+1)^2 + D(x-1)(x+1)^2.$$

Даем x различные значения:

$$\text{при } x=1; \quad 3=4C; \quad C=\frac{3}{4};$$

$$\bullet \quad x=-1; \quad -1=4A; \quad A=-\frac{1}{4};$$

$$\bullet \quad x=0; \quad 1=A+B+C-D;$$

$$\bullet \quad x=2; \quad 5=A+3B+9C+9D,$$

$$\text{Из полученных ур-ий получаем: } B=\frac{1}{4}; \quad D=-\frac{1}{4}.$$

Подставляя найденные значения A, B, C, D и интегрируя, получаем:

$$\int \frac{2x+1}{(x^2-4)^2} dx = \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{4} \ln(x+1) - \frac{3}{4(x-1)} - \frac{1}{4} \ln(x-1) + \ln C = \\ = \frac{1}{4} \left(\ln C \frac{x+1}{x-1} - \frac{2x+4}{x^2-1} \right).$$

$$2) \quad \int \frac{x^2-5x}{x^3+1} dx.$$

$$F(x) = x^3 + 1 = (x+1)(x^2-x+1); \quad x_1 = -1; \quad x_2 \text{ и } x_3 - \text{мнимы.}$$

$$\int \frac{x^2-5x}{x^3+1} dx = A \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{Mx+N}{x^2-x+1} dx.$$

Находим значения A, M, N из тождества:

$$\frac{x^2-5x}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2-x+1},$$

$$\text{или:} \quad x^2-5x = A(x^2-x+1) + (Mx+N)(x+1).$$

Можно найти A, M, N , давая, как в предыдущем случае, различные значения x , или, раскрыв в правой части скобки и сделав приведение подобных членов, приравнять друг другу коэф-ты при одинаковых степенях x :

$$x^2-5x = (A+M)x^2 - (A-M-N)x + (A+N);$$

$$A+M=1; \quad A-M-N=5; \quad A+N=0.$$

Решая эти ур-ия, получим: $A=2; M=-1; N=-2$.

Следовательно:

$$\int \frac{x^2-5x}{x^3+1} dx = 2 \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{x-2}{x^2-x+1} dx = 2 \ln(x+1) - \frac{1}{2} \ln(x^2-x+1) + \\ - \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

3. Интегрирование по частям.

Ф-ла интегрирования по частям:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du,$$

позволяет свести данный интеграл к другому, более простому.

Пример 1. $\int x \cdot \cos x dx$.

Пологая $u = x$, $dv = \cos x dx$, откуда: $du = dx$, $v = \sin x$, получаем:

$$\int x \cdot \cos x dx = x \cdot \sin x - \int \sin x dx = x \cdot \sin x + \cos x + C.$$

Пример 2. $\int x^2 e^x dx$.

Пологая $u = x^2$, $dv = e^x dx$, откуда: $du = 2x dx$, $v = e^x$, получаем:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx.$$

Прилагая к полученному интегралу тот же прием:

$$u = x, \quad dv = e^x dx,$$

откуда:

$$du = dx, \quad v = e^x,$$

получаем:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \left\{ x e^x - \int e^x dx \right\} = e^x (x^2 - 2x + 2) + C.$$

В некоторых случаях после применения ф-лы интегрирования по частям в правой части равенства восстанавливается искомый интеграл, т. е. мы получаем ур-ние относительно искомого интеграла, из к-рого его и определяем.

Пример 3. $\int e^x \cdot \sin x dx$.

Положим

$$u = \sin x, \quad du = \cos x dx,$$

откуда:

$$dx = \cos x dx, \quad v = e^x,$$

получаем:

$$\int e^x \cdot \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cdot \int \cos x dx.$$

К полученному интегралу применяем тот же прием; тогда:

$$\int e^x \cdot \sin x dx = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \sin x dx.$$

Определяем из полученного ур-ия искомый интеграл:

$$2 \int e^x \cdot \sin x = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x; \quad \int e^x \cdot \sin x = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x).$$

4. Интегрирование с помощью рядов.

Если подынтегральная ф-ия м. б. разложена в равномерно сходящийся в интервале интегрирования ряд, то мы можем интегрировать ряд почленно.

Пример — § 4, № 100.

Примечание. Равномерная сходимость является достаточным условием возможности почленного интегрирования, но не необходимым.

§ 4. Ф-лы интегрирования (произвольное постоянное C опущено).

1. Основные ф-лы.

$$1) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

$$10) \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

$$2) \int \frac{dx}{x} = \ln x.$$

$$11) \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x.$$

$$3) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}.$$

$$12) \int \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x.$$

$$4) \int e^x dx = e^x.$$

$$13) \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x.$$

$$5) \int \sin x dx = -\cos x.$$

$$14) \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x.$$

$$6) \int \cos x dx = \sin x.$$

$$15) \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arsh} x.$$

$$7) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x.$$

$$16) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arch} x, \text{ если } |x| > 1.$$

$$8) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x.$$

$$17) \int \frac{dx}{1-x^2} = \begin{cases} \operatorname{arth} x, & \text{если } |x| < 1. \\ \operatorname{arch} x, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

$$9) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a}.$$

2. Рациональные ф-ии.

$$18) \int \frac{dx}{x-a} = \ln(x-a).$$

$$19) \int \frac{dx}{(x-a)^n} = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}.$$

$$20) \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} = \frac{1}{a} \operatorname{ar th} \frac{x}{a}.$$

$$21) \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} = -\frac{1}{a} \operatorname{ar cth} \frac{x}{a}.$$

$$22) \int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b} \ln \frac{x-a}{x-b}.$$

$$23) \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)} = \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \operatorname{ar ctg} \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}},$$

если $q > \frac{p^2}{4}$.

$$24) \int \frac{x dx}{x^2+px+q} = \frac{1}{2} \ln(x^2+px+q) - \frac{p}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \operatorname{ar ctg} \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}},$$

если $q > \frac{p^2}{4}$.

$$25) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \frac{x+\frac{p}{2}}{2(n-1)\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} \cdot \frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}} +$$

$$+ \frac{2n-3}{2(n-1)\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{n-1}}, \text{ если } q > \frac{p^2}{4}.$$

$$26) \int \frac{x dx}{(x^2+px+q)^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+px+q)^{-n+1}}{-n+1} - \frac{p}{2} \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}, \text{ если } q > \frac{p^2}{4}.$$

$$27) \int \frac{f(x)}{F(x)} dx - \text{см. § 3, п. 2.}$$

3. Иррациональные ф-ии.

$$28) \int x \sqrt{a+bx} dx = -\frac{2(2a-3bx)(a+bx)^{\frac{3}{2}}}{15b^2}.$$

$$29) \int x^2 \sqrt{a+bx} dx = \frac{2(8a^2-12abx-15b^2x^2)(a+bx)^{\frac{5}{2}}}{105b^3}.$$

$$30) \int \frac{x dx}{\sqrt{a+bx}} = -\frac{2(2a-bx)}{3b^2} \sqrt{a+bx}.$$

$$31) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2(8a^2-4abx+3b^2x^2)}{15b^3} \sqrt{a+bx}.$$

$$32) \int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{ar c sin} \frac{x}{a}.$$

- 33) $\int x \sqrt{a^2 - x^2} dx = -\frac{1}{3} (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$
- 34) $\int x^3 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{8} (2x^2 - a^2) \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^4}{8} \arcsin \frac{x}{a}$
- 35) $\int (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x}{8} (5a^2 - 2x^2) \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{3a^4}{8} \arcsin \frac{x}{a}$
- 36) $\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2}$
- 37) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}$
- 38) $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 - x^2} - a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}$
- 39) $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \arcsin \frac{x}{a}$
- 40) $\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 - x^2}}$
- 41) $\int \frac{x^3 dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \arcsin \frac{x}{a}$
- 42) $\int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \ln \frac{x}{a + \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{ar ch} \frac{a}{x} = -\frac{1}{a} \operatorname{ar sh} \frac{a}{x}$
- 43) $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln (x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$
- 44) $\int x \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{3} (x^2 \pm a^2)^{\frac{3}{2}}$
- 45) $\int x^3 \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{8} (2x^2 \pm a^2) \sqrt{x^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8} \ln (x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$
- 46) $\int (x^2 \pm a^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x}{8} (2x^2 \pm 5a^2) \sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{3a^4}{8} \ln (x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$
- 47) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln (x + \sqrt{x^2 + a^2}) = \operatorname{ar sh} \frac{x}{a}$
- 48) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln (x + \sqrt{x^2 - a^2}) = \operatorname{ar ch} \frac{x}{a}$
- 49) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2}$
- 50) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln (x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$
- 51) $\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 + a^2} - a \ln \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x}$
- 52) $\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 - a^2} + \arcsin \frac{a}{x}$

$$53) \int \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x} + \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}).$$

$$54) \int \frac{dx}{(x^2 \pm a^2)^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 \pm a^2}}.$$

$$55) \int \frac{x dx}{(x^2 \pm a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} + \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}).$$

$$56) \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{a} \ln \frac{x}{a + \sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{arsh} \frac{a}{x}.$$

$$57) \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - a^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{arc} \sin \frac{a}{x}.$$

$$58) \int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx - \text{см. § 3, п. 1.}$$

$$59) \int x^m (a + bx^n)^p dx - \text{см. § 3, п. 1.}$$

4. Тригонометрические ф-ны.

$$60) \int \sin mx dx = -\frac{1}{m} \cos mx.$$

$$61) \int \cos mx dx = \frac{1}{m} \sin mx.$$

$$62) \int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x.$$

$$63) \int \operatorname{ctg} x = \ln \sin x.$$

$$64) \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

$$65) \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x} = \ln \operatorname{tg} x.$$

$$66) \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right).$$

$$67) \int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x.$$

$$67-a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{4}.$$

$$68) \int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x.$$

$$68-a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{4}.$$

$$69) \int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cdot \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

$$70) \int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \cdot \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

$$71) \int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$$

$$72) \int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$$

$$73) \int \sin^m x \cdot \cos^n x dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cdot \cos^{n+1} x}{m+n} + \\ + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} x \cdot \cos^n x dx.$$

$$74) \int \sin^m x \cdot \cos^n x dx = \frac{\sin^{m+1} x \cdot \cos^{n-1} x}{m+n} + \\ + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cdot \cos^{n-2} x dx$$

$$75) \int \frac{dx}{\sin^m x \cdot \cos^n x} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{\sin^{m-1} x \cdot \cos^{n-2} x} + \\ + \frac{m+n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^m x \cdot \cos^{n-1} x}.$$

$$76) \int \frac{dx}{\sin^m x \cdot \cos^n x} = -\frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{\sin^{m-1} x \cdot \cos^{n-1} x} + \\ + \frac{m+n-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin^{m-2} x \cdot \cos^n x}.$$

$$77) \int \operatorname{tg}^n x dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx.$$

$$78) \int \operatorname{ctg}^n x dx = -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{ctg}^{n-2} x dx.$$

$$79) \int \sin x \cdot \cos^n x dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}$$

$$80) \int \sin^n x \cdot \cos x dx = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1}$$

$$81) \int \sin mx \cdot \sin nx dx = -\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)}.$$

$$81-a) \int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \cdot \sin nx dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n. \\ \pi, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

$$82) \int \cos mx \cdot \cos nx dx = \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)}.$$

$$82-a) \int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cdot \cos nx dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n. \\ \pi, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

m и n — целые положительные числа

n — целое положительное число.

$n \neq -1.$

$$83) \int \sin mx \cdot \cos nx dx = -\frac{\cos (m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos (m-n)x}{2(m-n)}.$$

$$83-a) \int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \cdot \cos nx dx = 0.$$

$$84) \int \frac{dx}{a+b \cdot \cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \cdot \arctg \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \cdot \tg \frac{x}{2} \right), \text{ если } a > b.$$

$$85) \int \frac{dx}{a+b \cdot \cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \frac{\sqrt{b-a} \cdot \tg \frac{x}{2} + \sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a} \cdot \tg \frac{x}{2} - \sqrt{b+a}} = \\ = \frac{2}{\sqrt{b^2-a^2}} \cdot \operatorname{ar th} \left(\sqrt{\frac{b-a}{b+a}} \cdot \tg \frac{x}{2} \right), \text{ если } a < b.$$

$$86) \int \frac{dx}{a+b \cdot \sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \cdot \arctg \left[\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \cdot \tg \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right], \text{ если } a > b.$$

$$87) \int \frac{dx}{a+b \cdot \sin x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \frac{a \cdot \tg \frac{x}{2} + b - \sqrt{b^2-a^2}}{a \cdot \tg \frac{x}{2} + b + \sqrt{b^2-a^2}} = \\ = -\frac{2}{\sqrt{b^2-a^2}} \cdot \operatorname{ar th} \left[\sqrt{\frac{b+a}{b-a}} \cdot \tg \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right], \text{ если } a < b.$$

$$88) \int \frac{dx}{a^2 \cdot \cos^2 x + b^2 \cdot \sin^2 x} = \frac{1}{ab} \cdot \arctg \frac{b \cdot \tg x}{a}.$$

$$89) \int x^m \cdot \sin x = -x^m \cdot \cos x + m \int x^{m-1} \cdot \cos x dx.$$

$$90) \int x^m \cdot \cos x = x^m \cdot \sin x - m \int x^{m-1} \cdot \sin x dx.$$

$$91) \int \arcsin x dx = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$$

$$92) \int \arccos x dx = x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2}.$$

$$93) \int \operatorname{arctg} x dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

$$94) \int \operatorname{arctg} x dx = x \cdot \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

5. Показательные и логарифмические ф-ны.

$$95) \int x e^{ax} dx = \frac{1}{a^2} (ax-1) e^{ax}.$$

$$96) \int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx.$$

$$97) \int e^{ax} \cdot \sin bx dx = \frac{1}{a^2+b^2} e^{ax} (a \cdot \sin bx - b \cdot \cos bx).$$

$$98) \int e^{ax} \cdot \cos bx dx = \frac{1}{a^2+b^2} \cdot e^{ax} (b \cdot \sin bx + a \cdot \cos bx).$$

$$99) \int e^{ax} \cdot \cos^n x dx = \frac{e^{ax} \cdot \cos^{n-1} x (a \cdot \cos x + n \cdot \sin x)}{a^2 + n^2} + \\ + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int e^{ax} \cdot \cos^{n-2} x dx.$$

$$100) \int \frac{x^2}{x} dx = \int \left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \right) dx = \ln x + x + \frac{x^2}{4} + \\ + \frac{x^3}{18} + \dots$$

$$101) \int \ln x dx = x \cdot \ln x - x.$$

$$102) \int \ln^n x dx = x \cdot \ln^n x - n \int \ln^{n-1} x dx.$$

$$103) \int x^n \cdot \ln x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right).$$

$$104) \int e^x \cdot \ln x dx = e^x \cdot \ln x - \int \frac{e^x}{x} dx.$$

Определенный интеграл.

§ 1. Определенный интеграл и его геометрический смысл.

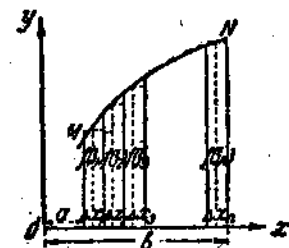
Пусть однозначная непрерывная ф-ия $y = f(x)$ определена в интервале $a < x < b$. Разделим данный интервал каким угодно способом на n интервалов: $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots, \Delta x_n$ и обозначим какие угодно абсциссы, принадлежащие соответственно этим интервалам, через $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$. Тогда предел суммы:

$$f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + f(\xi_3) \Delta x_3 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n$$

при условии, что число интервалов подразделения неограниченно возрастает и величина каждого из них при этом неограниченно убывает, называется определенным интегралом ф-ии $f(x)$ в пределах от a до b :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ геометри-



Черт. 22.

чески м. б. истолкован как величина, определяющая площадь плоской фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью OX и двумя прямыми: $x = a$; $x = b$.

Связь между определенным и неопределенным интегралами выражается ф-лой:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b F(x) = F(b) - F(a),$$

где:

$$F(x) = \int f(x) dx.$$

Ф-ла показывает, что определенный интеграл — ф-ия своих пределов.

§ 2. Основные свойства и теоремы.

$$1) \int_a^b (u + v - w + \dots) dx = \int_a^b u dx + \int_a^b v dx - \int_a^b w dx + \dots$$

$$2) \int_a^b a \cdot f(x) dx = a \int_a^b f(x) dx \quad (a - \text{постоянная}).$$

$$3) \int_a^b u \cdot dv = \left[u \cdot v \right]_a^b - \int_a^b v \cdot du.$$

$$4) \int_a^b f(x) dx = \int_{t_1}^T f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$$

при условии, что: 1) $\varphi(t)$ имеет в интервале от t_1 до T непрерывную производную; 2) $f[\varphi(t)]$ также непрерывна в этом интервале; 3) при изменении t от t_1 до T функция $\varphi(t)$ непрерывно меняется от a до b .

Примечание. В случае, если $\varphi(t)$ непрерывна, а $f[\varphi(t)]$ и $\varphi'(t)$ имеют конечное число точек разрыва, мы можем разбить интервал от a до b на части так, чтобы каждая точка разрыва находилась на одном из концов (см. сл. параграфы).

$$5) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

6) Если интервал $a < x < b$ разложен на части, то интеграл, распространенный на весь интервал, равен сумме интегралов, распространенных на отдельные части:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

$$7) \int_{-a}^{+a} f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx, \text{ если } f(x) - \text{ф-ия четная};$$

$$\int_{-a}^{+a} f(x) dx = 0, \text{ если } f(x) - \text{ф-ия нечетная},$$

8) Теоремы о среднем значении

$$\int_a^b f(x) \cdot \varphi(x) dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x) dx,$$

где ξ заключается между a и b ; $\varphi(x)$ не меняет знака в интервале от a до b .
При $\varphi(x) = 1$

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(\xi)$$

или:

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f\{a + \theta(b - a)\},$$

где $0 < \theta < 1$.

§ 3. Интегралы с бесконечными пределами.

Если в интеграле

$$\int_a^b f(x) dx$$

 $b = \infty$, то:

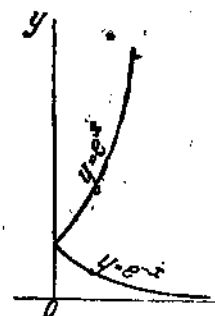
$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(x) dx;$$

если $a = \infty$, то:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^b f(x) dx;$$

если $a = -\infty$, $b = \infty$, то:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{\infty} f(x) dx.$$



Черт. 23.

Если не существует пределов выражений, написанных в этих определениях, то данный интеграл теряет смысл.

Пример 1. $\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-x} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[-e^{-x} \right]_0^x = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - e^{-x}) = 1.$

Пример 2. $\int_0^{\infty} e^x dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^x dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[e^x \right]_0^x = \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - 1) = \infty.$

Пример 3. $\int_0^{\infty} \cos x dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \cos x dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sin x \right]_0^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x = \sin \infty = \frac{0}{0}.$

§ 4. Интегралы ф-ий, обращающихся в бесконечность.

Если ф-ия $f(x)$ в интеграле $\int_a^b f(x) dx$ при каком-либо значении c , заключающемся между a и b , обращается в бесконечность, то:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_a^{c-\eta} f(x) dx + \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{c+\eta}^b f(x) dx.$$

Пример 1.

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{a-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\arcsin \frac{x}{a} \right]_0^{a-\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \arcsin \frac{a-\epsilon}{a} = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 2.

$$\int_a^{2a} \frac{dx}{(x-a)^2}.$$

Ф-ия обращается в бесконечность при $x = a$:

$$\begin{aligned} \int_a^{2a} \frac{dx}{(x-a)^2} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{a-\epsilon} \frac{dx}{(x-a)^2} + \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{a+\eta}^{2a} \frac{dx}{(x-a)^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{x-a} \right]_a^{a-\epsilon} + \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{x-a} \right]_{a+\eta}^{2a} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{a} \right) + \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{\eta} \right) = \infty - \infty. \end{aligned}$$

Интеграл не имеет смысла.

§ 5. Дифференцирование определенного интеграла по параметру.

Если в подынтегральной ф-ии интеграла

$$u = \int_a^b f(x, a) dx$$

кроме переменного x входит еще параметр a , не зависящий от x , при чем u имеет непрерывную производную по a , то:

$$u'_a = \int_a^b f'_a(x, a) dx,$$

т. е. для дифференцирования интеграла по параметру, входящему в подынтегральную ф-ию, достаточно подынтегральную ф-ию продифференцировать по этому параметру.

§ 6. Приближенное вычисление определенного интеграла.

Если подынтегральная ф-ия задана графически или таблично или интеграл от нее не может быть найден, мы прибегаем к приближенному вычислению интеграла, основанному на его геометрическом истолковании.

Всякий интеграл мы можем преобразовать, меняя его знак и разбивая интервал интегрирования на части, в виде $\int_a^b f(x) dx$, где $b > a$ и ф-ия $f(x)$ не меняет знака в пределах интегрирования.

Рассматривая этот интеграл как площадь, ограниченную кривой $y = f(x)$, осью OX и прямыми $x = a$ и $x = b$, мы можем найти приближенное значение его, заменяя данную кривую ломаной линией или суммой дуг парабол второго и высшего порядков.

Отрезок $b - a$ на оси абсцисс делим на правых частей. Обозначая абсциссы точек деления через $x = a, x_1, x_2 \dots x_{n-1}, x_n = b$ и соответственно ординаты через $y_0, y_1, y_2 \dots y_n$, имеем след. ф-лы.

1) Ф-ла трапеций:

$$\int_a^b f(x) dx = h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 \dots + y_{n-1} \right),$$

где $h = \frac{b-a}{n}$.

2) Ф-ла Симпсона:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \left\{ y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + \right. \\ \left. + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) \right\},$$

где $h = \frac{b-a}{2n}$, т. е. отрезок $b - a$ разделен на $2n$ равных частей.



Черт. 24.

3) Ф-ла Котеса.

Преобразуя переменное, можно всякий интеграл представить в виде интеграла в пределах от 0 до 1:

а) если a и b конечны, — подстановкой $x = a + (b - a)t$;

б) если $b = \infty$, $a > 0$, — подстановкой $x = \frac{a}{t}$;

в) если $a = -\infty$, $b < 0$, — подстановкой $x = \frac{b}{t}$;

г) если $a = -\infty$, $b = \infty$, — разбивая интеграл на интегралы предшествующих типов.

Преобразовав т. о. интеграл, мы пользуемся сл. ф-лой:

$$\int f(x) dx = A_0 y_0 + A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_{n-1} y_{n-1} + A_n y_n,$$

где коэф-ты A постоянны и берутся из таблицы:

при $n=1$ $A_0 = A_1 = \frac{1}{2}$;

» $n=2$ $A_0 = A_2 = \frac{1}{6}$; $A_1 = \frac{2}{3}$;

» $n=3$ $A_0 = A_3 = \frac{1}{8}$; $A_1 = A_2 = \frac{3}{8}$;

» $n=4$ $A_0 = A_4 = \frac{7}{90}$; $A_1 = A_3 = \frac{16}{45}$; $A_2 = \frac{2}{15}$;

» $n=5$ $A_0 = A_5 = \frac{19}{288}$; $A_1 = A_4 = \frac{25}{96}$; $A_2 = A_3 = \frac{25}{144}$;

» $n=6$ $A_0 = A_6 = \frac{41}{840}$; $A_1 = A_5 = \frac{9}{35}$; $A_2 = A_4 = \frac{9}{280}$; $A_3 = \frac{34}{105}$.

4) Ф-ла Чебышева:

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = \frac{1}{n} (y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n),$$

где ординаты соответствуют след. значениям абсцисс при различных n :

при $n=2$ $x_1 = -1$, $x_2 = 1$;

» $n=3$ $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$;

» $n=4$ $x_1 = -1$, $x_2 = -0,707$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$;

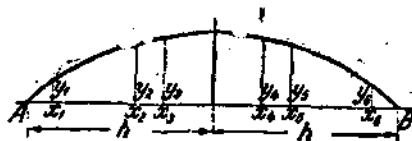
» $n=5$ $x_1 = -1$, $x_2 = -0,832$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0,375$, $x_5 = 1$;

» $n=6$ $x_1 = -1$, $x_2 = -0,866$, $x_3 = -0,422$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0,267$, $x_6 = 1$.

Пример. Площадь, ограниченная дугой кривой и хорд $AB=2h$ (ч. рт. 25), если дуга симметрична относительно прямой h , перпендикулярной AB и делящей ее пополам, выразить ф-лой:

$$S = \frac{2}{3} h(y_1 + y_2 + y_3),$$

где y_1, y_2, y_3 соответствуют $x_1 = -0,866$; $x_2 = -0,422$; $x_3 = 0,267$.



Черт. 25.

§ 7. Графическое интегрирование.

1) Если дан график кривой $y = f(x)$ (черт. 26), то величину определенного интеграла $\int_a^b f(x) dx$ мы можем найти графически.

Примечание. Указанные построения дают такую возможность построить интегральную кривую неопределенного интеграла $\int f(x) dx$, но только начальной точкой, из которой проведена прямая, параллельная EA , будет точка, данная начальными условиями, или произвольная точка.

Кратные интегралы.

§ 1. Двукратный интеграл.

Пусть f — функция двух независимых переменных величин $f(x, y)$ будет непрерывна для всех точек области S , выделенной замкнутым контуром на плоскости XOY . Разобьем данную область S каким-нибудь образом на бесконечно-малые по всем направлениям элементы и обозначим площади их: $\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3 \dots \Delta s_n$, а значения $f(x, y)$ в произвольно выбранных точках элементов соответственно $f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), f(x_3, y_3) \dots f(x_n, y_n)$.

Тогда предел суммы:

$$f(x_1, y_1)\Delta s_1 + f(x_2, y_2)\Delta s_2 + f(x_3, y_3)\Delta s_3 + \dots + f(x_n, y_n)\Delta s_n,$$

при условии, что число элементов неограниченно возрастает и площадь каждого из них при этом неограниченно убывает, называется двойным или двукратным интегралом от функции $f(x, y)$, распространенным на область S :



Черт. 28.

$$\iint_{(S)} f(x, y) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i.$$

Выражение $f(x, y) ds$ называется элементом интеграла, а область S — областью интегрирования.

Выражение ds в зависимости от метода разбиения области S на элементы будет различно. Разобьем ее, напр., прямыми, параллельными осям координат (черт. 28). Пусть прямоугольник $MNPQ$ будет один из таких элементов и координаты точки M будут (x, y) , тогда $ds = dxdy$ и один из элементов искомого интеграла будет: $f(x, y) dxdy$.

Суммируем сначала элементы $f(x, y) dxdy$ вдоль прямой AB . При этом суммирование x и dx не меняются и дело сводится к интегрированию $f(x, y)$ по y между пределами $CA = y_1$ и $CB = y_2$:

$$dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy. \quad (1)$$

Результат интегрирования зависит только от x , т. к. y_1 и y_2 — функции x .

Теперь, суммируя все элементы (1), соответствующие ряду бесконечно-узких полосок, в пределах от $OD = x_1$ до $OE = x_2$, получим:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy, \text{ или: } \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy dx.$$

Интегрирование можно произвести в обратном порядке, т. е. сначала по x , затем по y ; тогда получим:

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx, \text{ или: } \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx dy,$$

где: $FK = x_1$; $FL = x_2$; $QR = y_1$; $OT = y_2$.

§ 2. Трехкратный интеграл.

Пусть Φ -ия трех независимых переменных величин $f(x, y, z)$ будет непрерывна для всех точек области V , выделенной замкнутой поверхностью.

Разобьем данную область V каким-нибудь образом на бесконечно-малые по всем направлениям элементы и обозначим объемы их $\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta v_3 \dots \Delta v_n$, а значения $f(x, y, z)$ — в произвольно выбранных точках элементов соответственно $f(x_1, y_1, z_1), f(x_2, y_2, z_2), f(x_3, y_3, z_3) \dots f(x_n, y_n, z_n)$.

Тогда предел суммы:

$$f(x_1, y_1, z_1) \Delta v_1 + f(x_2, y_2, z_2) \Delta v_2 + f(x_3, y_3, z_3) \Delta v_3 + \dots + f(x_n, y_n, z_n) \Delta v_n$$

при условии, что число элементов неограниченно возрастает и объем каждого из них при этом неограниченно убывает, называется тройным или трехкратным интегралом от Φ -ии $f(x, y, z)$, распространенным на область V :

$$\iiint_V f(x, y, z) dv = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i; y_i; z_i) \Delta v_i.$$

Выражение $f(x, y, z) dv$ называется элементом интеграла, а область V — областью интегрирования.

Выражение dv в зависимости от метода разбития области V на элементы будет различно. Разобьем, напр., данный объем V плоскостями, параллельными плоскостям координат, на прямоугольные параллелепипеды с измерениями $dx; dy; dz$; тогда $dv = dx dy dz$. Суммируем сначала внутри области V элементы $f(x, y, z) dz$, меняя z от z_1 до z_2 , в столбец, параллельный оси z , оставляя x, y, dx, dy постоянными. Затем суммируем полученные столбцы, меняя y от y_1 до y_2 , в слой, параллельный плоскости YOZ , оставляя x, dx постоянными, и наконец суммируем все слои, меняя x от x_1 до x_2 .

Т. о. вычисление интеграла $\iiint_V f(x, y, z) dv$ сведется к трем последовательным интегрированиям:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z) dz, \text{ или: } \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z) dz \cdot dy \cdot dx.$$

Последовательные интегрирования можно было произвести в др. порядке.

Дифференциальные уравнения.

§ 1. Определения.

Дифференциальным ур-нем называется ур-ие, выражающее зависимость между переменными и их производными или дифференциалами.

Если в ур-ие входят производные или дифференциалы одной независимой переменной, то ур-ие называется обыкновенным.

Если в ур-ие входят частные производные Φ -ий от нескольких независимых переменных, то ур-ие называется ур-ием в частных производных.

Порядок и степень дифференциального ур-ия определяются соответственно порядком и степенью высшей производной (или дифференциала), в него входящей.

Общим решением, или полным интегралом, дифференциального ур-ия называется свободное от производных и дифференциалов ур-ие, связываю-

Библиотека Техн. Бюро

щее Φ -ию, независимое переменное и произвольные постоянные, число k -рых равно порядку ур-ия.

Частным решением или частным интегралом называется решение, полученное из общего при частных значениях произвольных постоянных.

С геометрической точки зрения общее решение можно рассматривать, как ур-ие семейства кривых, зависящих от n параметров.

Всякая кривая этого семейства называется интегральной кривой данного дифференциального ур-ия.

§ 2. Ур-ия первого порядка и первой степени.

Общий вид таких ур-ий:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

или;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M}{N},$$

или:

$$M dx + N dy = 0,$$

где M и N —данные Φ -ии x и y .

Общим решением его будет ур-ие:

$$F(x, y, C) = 0,$$

кое можно рассматривать как ур-ие семейства кривых, обладающих относительно касательной или нормали в каждой точке нек-рым свойством, данным аналитическим ур-ием $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$.

1) Ур-ия с разделяемыми переменными.

Если в ур-ии

$$M dx + N dy = 0$$

M и N м. б. представлены, как произведение Φ -ий, зависящих только от одной переменной: $M = \varphi(x) \cdot \psi(y)$; $N = \varphi_1(x) \cdot \psi_1(y)$, т. е. ур-ие имеет вид:

$$\varphi(x) \cdot \psi(y) dx + \varphi_1(x) \cdot \psi_1(y) dy = 0,$$

то, разделив обе части ур-ия на $\varphi_1(x) \cdot \psi(y)$, получим общее решение в виде:

$$\int \frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} dx + \int \frac{\psi_1(y)}{\psi(y)} dy = C.$$

Пример. При адиабатическом расширении газа зависимость между объемом v и давлением p выражается ур-ием:

$$\frac{dp}{dv} = -k \cdot \frac{p}{v},$$

где k —постоянная. Определить v , как Φ -цию p , если известно, что в начале процесса $p = p_0$ и $v = v_0$.

Делим в данном ур-ии переменные:

$$\frac{dp}{p} = -k \frac{dv}{v}.$$

Общее решение будет:

$$\int \frac{dp}{p} + \int \frac{dv}{v} = C; \ln p + k \ln v = \ln c;$$

или:

$$p = \frac{C}{v^k}.$$

Т. к. при $p = p_0$, $v = v_0$, то $p_0 = \frac{C}{v_0^k}$ откуда: $C = p_0 v_0^k$. След.:

$$p = p_0 \left(\frac{v_0}{v} \right)^k.$$

2) Однородные ур-ия.

Если в ур-ии

$$Mdx + Ndy = 0$$

M и N — однородные ф-ии от x и y одинаковой степени, то подстановкой $y = ux$, откуда $dy = u \cdot dx + x \cdot du$, мы приведем его к ур-ию с отделяемыми переменными.

Пример. Решить ур-ие:

$$(t-s)dt + tds = 0.$$

M и N — однородные ф-ии первой степени.

Деля подстановку $s = ut$, откуда

$$ds = u dt + t du,$$

получаем:

$$t(1-u)dt + t(u dt + t du) = 0,$$

или:

$$dt + t du = 0.$$

Общее решение будет:

$$\int \frac{dt}{t} + \int du = \ln C; \ln t + u = \ln C; t \cdot e^u = C;$$

$$t \cdot e^{\frac{s}{t}} = C.$$

Примечание. Интегральные кривые однородного дифференциального ур-ия подобны между собою относительно начала координат.

3) Ур-ие вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$$

приводится к однородному ур-ию с помощью замены переменных:

$$x = \xi + \alpha; y = \eta + \beta,$$

где ξ и η — новые переменные, а α и β определяются из системы:

$$a\alpha + b\beta + c = 0;$$

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0,$$

что возможно, если $ab_1 - a_1b \neq 0$.

Если же $ab_1 - a_1b = 0$, т. е.: $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = m$, то $a_1x + b_1y = m(ax + by)$, и ур-ие примет вид:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{m(ax+by)+c_1}\right).$$

Подстановкой $ax + by = z$ мы сведем его к ур-ию с отделяемыми переменными z и x .

4) Линейные ур-ия.

Линейное ур-ие имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q,$$

где P и Q — ф-ии от x или постоянные.

Общим решением его будет:

$$y = e^{-\int P dx} \left\{ \int Q \cdot e^{\int P dx} dx + C \right\}.$$

5) Ур-ие Бернулли:

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \cdot y^\alpha,$$

где P и Q — ф-ии от x или постоянные.

Подстановкой $z = y^{-\alpha+1}$ мы приводим его к линейному ур-ию.

6) Полные дифференциальные ур-ия.

Если для ур-ия

$$Mdx + Ndy = 0$$

выполняется условие

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

то левая часть этого ур-ия есть полный дифференциал некоторой ф-ии u .
Такое ур-ие называется полным. Его общий интеграл будет:

$$\int Mdx + \int \left(N - \int \frac{\partial M}{\partial y} dx \right) dy = C.$$

§ 3. Ур-ия первого порядка высших степеней.

Ур-ие первого порядка имеет вид:

$$f(x, y, p) = 0,$$

где $p = \frac{dy}{dx}$.

1) Если левая часть есть ур-ие n -й степени относительно p и мы умеем решить его, то получим n ур-ий вида:

$$p = \varphi_1(x, y); p = \varphi_2(x, y) \dots; p = \varphi_n(x, y).$$

Общие решения этих ур-ий будут:

$$F_1(x, y, C_1) = 0; F_2(x, y, C_2) = 0 \dots; F_n(x, y, C_n) = 0.$$

Общее решение данного ур-ия будет:

$$F_1(x, y, C_1) \cdot F_2(x, y, C_2) \dots F_n(x, y, C_n) = 0.$$

В виду трудности решений ур-ий, содержащих p в высших степенях или под знаком трансцендентных ф-ий, рассмотрим некоторые виды ур-ий, допускающих другой способ решения.

2) Ур-ия вида:

$$x = \varphi(p).$$

Общее решение его есть результат исключения p из ур-ий:

$$y = \int p \cdot \varphi'(p) dp + C;$$

$$x = \varphi(p).$$

3) Ур-ия вида

$$y = \varphi(p).$$

Общее решение его есть результат исключения p из ур-ий:

$$x = \int \frac{\varphi'(p)}{p} dp + C;$$

$$y = \varphi(p).$$

4) Ур-ия вида (ур-ия Клеро)

$$y = px + \varphi(p).$$

Общее решение его будет:

$$y = Cx + \varphi(C).$$

§ 4. Графическое интегрирование ур-ий первого порядка.

Всякое ур-ие $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ дает зависимость между координатами точки (x, y) и угловым коэф-том касательной к интегральной кривой в этой же точке.

Если нам дано начальное значение искомой функции y_0 при $x=x_0$, то мы из семейства кривых, даваемых общим решением данного у-ия, можем выделить определенную кривую, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$.

а) Для приближенного построения этой кривой разобьем координатную плоскость прямыми, параллельными оси OY , и от начала координат на оси OX отложим отрезок $OE=1$. Определив из данного у-ия $f(x_0, y_0)$, откладываем на оси OY отрезок $OA_0 = f(x_0, y_0)$ (черт. 29).

Прямая EA_0 будет параллельна касательной к интегральной кривой в точке M_0 , т. к. ее угловой коэф-т будет $f(x_0, y_0)$.

Из точки M_0 проводим прямую $M_0M_1 \parallel EA_0$ до пересечения с прямой $x=x_1$ и определяем ординату y_1 точки M_1 из соотношения:

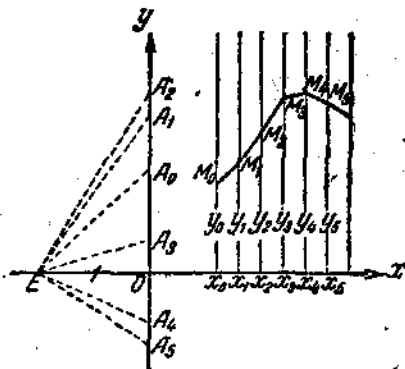
$$y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)(x_1 - x_0).$$

Затем на оси ординат откладываем отрезок $OA_1 = f(x_1, y_1)$ и из точки M_1 проводим прямую $M_1M_2 \parallel EA_1$ до пересечения прямой $x=x_2$ в точке M_2 , ординату которой определяем из соотношения:

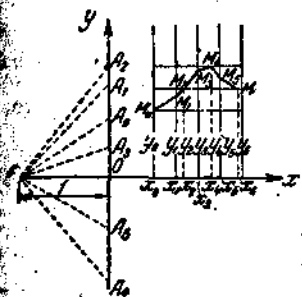
$$y_2 - y_1 = f(x_1, y_1)(x_2 - x_1) \text{ и т. д.}$$

Построенная ломаная $M_0M_1M_2M_3M_4M_5$ представляет приближенно интегральную кривую.

б) Можно было бы разбить координатную плоскость прямыми, параллельными координатным осям, и, поступая по-предыдущему, строить касательные к точкам пересечения их или с линиями, параллельными оси OY (черт. 30).



Черт. 29.



Черт. 30.

Примечание. Если $\frac{dy}{dx} = f(x)$, т. е. $y = \int f(x) dx$, то построенная по способу а) ломаная линия будет представлять приблизительно интегральную кривую интеграла $\int f(x) dx$, а разность ординат при $x=a$ и $x=b$ — величину определенного интеграла $\int_a^b f(x) dx$.

§ 5. Особые решения дифференциальных ур-ий.

Особым решением дифференциального ур-ия называется решение, не получающееся из общего ни при каких значениях произвольных постоянных.

Геометрически оно представляет собою ур-ие огибающей семейства кривых, изображаемых общим решением ур-ия, и получается исключением произвольного постоянного C из системы ур-ий:

$$F(x, y, C) = 0 \text{ и } \frac{\partial F(x, y, C)}{\partial C} = 0,$$

где $F(x, y, C) = 0$ — общее решение данного ур-ия.

Особые решения можно получить, и не найдя общего решения ур-ия, путем исключения p из системы ур-ий:

$$f(x, y, p) = 0 \text{ и } f'_p(x, y, p) = 0,$$

но в числе полученных т. о. ур-ий м. б. и частные решения и решения, не удовлетворяющие данному дифференциальному ур-ию.

§ 6. Ур-ия второго порядка.

1) Ур-ия вида:

$$f\left(\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0.$$

Полагая $\frac{dy}{dx} = p$, откуда $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, имеем:

$$f\left(p, \frac{dp}{dx}\right) = 0. \quad (1)$$

а) Если ур-ие (1) легко решается относительно $\frac{dp}{dx}$ и дает $\frac{dp}{dx} = \varphi(p)$, то:

$$dx = \frac{dp}{\varphi(p)}; x = \int \frac{dp}{\varphi(p)} + C_1$$

$$dy = p \cdot dx = \frac{p \cdot dp}{\varphi(p)}; y = \int \frac{p \cdot dp}{\varphi(p)} + C_2.$$

Общее решение получим, произведя интегрирование и исключая p из ур-ий, определяющих x и y .

б) Если ур-ие (1) легко решается относительно p и дает $p = \varphi\left(\frac{dp}{dx}\right)$, то, полагая $\frac{dp}{dx} = q$ и дифференцируя, находим:

$$dp = \varphi'(q) dq; dx = \frac{dp}{q} = \frac{\varphi'(q) dq}{q}; x = \int \frac{\varphi'(q) dq}{q} + C_1$$

$$и \quad dy = p \cdot dx = \frac{\varphi(q) \cdot \varphi'(q) dq}{q}; y = \int \frac{\varphi(q) \cdot \varphi'(q) dq}{q} + C_2.$$

Общее решение получим, произведя интегрирование и исключая p из ур-ий, определяющих x и y .

2) Ур-ия вида:

$$f\left(\frac{d^2y}{dx^2}, y\right) = 0. \quad (2)$$

а) Если ур-ие (2) легко решается относительно $\frac{d^2y}{dx^2}$ и дает $\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(y)$, то, полагая:

$$\frac{dy}{dx} = p; \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy},$$

получаем:

$$p \cdot dp = \varphi(y) dy,$$

откуда:

$$p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{2 \int \varphi(y) dy + C_1}; x = \int \frac{dy}{\sqrt{2 \int \varphi(y) dy + C_1}} + C_2.$$

б) Если ур-ие (2) легко решается относительно y и дает: $y = \varphi\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, то, полагая $\frac{dy}{dx} = p$; $\frac{dp}{dx} = q$ и дифференцируя, находим:

$$dy = \varphi'(q) dq.$$

Т. к. $dy = p \cdot dx = p \cdot \frac{dp}{q}$, то:

$$\frac{p \cdot dp}{q} = \varphi'(q) dq,$$

откуда:

$$p = \sqrt{2 \int \varphi'(q) \cdot q \cdot dq + C_1};$$

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{\varphi'(q) dq}{\sqrt{2 \int \varphi'(q) \cdot q \cdot dq + C_1}}; \quad x = \int \frac{\varphi'(q) \cdot dq}{\sqrt{2 \int \varphi'(q) \cdot q \cdot dq + C_1}} + C_2.$$

Общее решение получим, производя интегрирование и исключая q из ур-ий, определяющих x и y .

3) Ур-ия вида:

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0.$$

Полагая $\frac{dy}{dx} = p$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy}$, получим:

$$f\left(y, p, p \cdot \frac{dp}{dy}\right) = 0.$$

Пусть общее решение этого ур-ия будет:

$$F(y, p, C_1) = 0. \quad (3)$$

Тогда:

а) Если ур-ие (3) легко решается относительно p и дает: $p = \varphi(y, C_1)$, то:

$$x = \int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} + C_2.$$

б) Если же ур-ие (3) легко решается относительно y и дает: $y = \varphi(p, C_1)$, то, дифференцируя, получим:

$$dy = \varphi'(p, C_1) dp.$$

Т. к. $dx = p dx$, то:

$$x = \int \frac{\varphi'(p, C_1) dp}{p} + C_2.$$

Общее решение данного дифференциального ур-ия получим, производя интегрирование и исключая p из ур-ий, определяющих x и y .

4. Ур-ия вида:

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0.$$

Полагая $\frac{dy}{dx} = p$, получим:

$$f\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0.$$

Пусть общее решение этого ур-ия будет:

$$F(x, p, C_1) = 0. \quad (4)$$

а) Если ур-ие (4) легко решается относительно p и дает: $p = \varphi(x, C_1)$, то:

$$y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2.$$

б) Если ур-ие (4) легко решается относительно x , то получаем ур-ие вида:

$$x = \varphi(p, C_1) \text{ (см. § 3, вид 2).}$$

§ 7. Графическое интегрирование ур-ий второго порядка.

Возьмем ур-ие в виде:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y'). \quad (1)$$

Обозначив через s длину дуги интегральной кривой и дифференцируя $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$, получим:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{ds} \cdot \frac{ds}{dx}.$$

Т. к. $\frac{dx}{ds} = \cos \alpha$ и $\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R}$, где R — радиус кривизны, то ур-ие (1) примет вид:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y') = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{1}{R},$$

или:

$$\frac{1}{R} = f(x, y, y') \cdot \cos^2 \alpha. \quad (2)$$

(R положительно, если α возрастает вместе с s , т. е. кривая закручивается при возрастании s против часовой стрелки).

Следовательно, зная положение точки и направление касательной в этой точке, мы из этого ур-ия можем определить величину радиуса кривизны.

Если нам дано, что при $x = x_0$ искомая ф-ия $y = y_0$ и $y' = y'_0$, то мы можем построить точку $M(x_0, y_0)$ и из нее провести прямую M_0T_0 с угловым коэф-том $y'_0 = \operatorname{tg} \alpha_0$ (черт. 31).

Определив из ур-ия (2) величину R_0 , откладываем $R_0 = M_0C_0$ на перпендикуляре к M_0T_0 (принимая во внимание знак R_0) и из точки C_0 , как из центра, описываем дугу окружности радиуса R_0 .

Зная величину R_0 , координаты точки M_0 и y'_0 , мы можем составить ур-ие окружности и, взяв на ней точку $M_1(x_1, y_1)$, определить y'_1 и R_1 .

Если чертить на миллиметровой бумаге, то величины x_1, y_1 и y'_1 можно взять из чертежа и, подставив в ур-ие (2), определить лишь R_1 .

Отложив на линии, перпендикулярной M_1T_1 , отрезок $R_1 = M_1C_1$ (принимая во внимание его знак), из точки C_1 , как из центра, описываем дугу окружности радиуса R_1 и т. д.

Кривая $M_0M_1M_2M_3M_4$, составленная из дуг окружностей, представляет приближенно интегральную кривую.

Другой способ — см. примечание к § 11.

§ 8. Линейные однородные ур-ия n -го порядка с постоянными коэффициентами.

$$\frac{d^ny}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \dots + p_{n-1}y = 0, \quad (1)$$

где $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ — постоянные числа.

Чтобы решить ур-ие (1), надо составить характеристическое ур-ие, получаемое из ур-ия (1) заменю $\frac{d^ny}{dx^n}$ через k^n , т. е.:

$$k^n + p_1 k^{n-1} + p_2 k^{n-2} + \dots + p_{n-1}k + p_n = 0.$$

Если корни будут действительные и разные, то общее решение ур-ия (1) будет:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + C_3 e^{k_3 x} + \dots + C_n e^{k_n x}.$$

Если среди корней будут мнимые, то часть решения, соответствующая двум сопряженным мнимым корням $a \pm bi$, будет:

$$e^{ax} (C_1 \cdot \sin bx + C_2 \cdot \cos bx), \text{ или: } C_1 e^{ax} \cdot \cos(bx + \varphi).$$

Если среди корней имеется m равных $k_1 = k_2 = \dots = k_m$, то соответствующие им члены общего решения надо заменить выражением:

$$(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_m x^{m-1}) e^{k_1 x}.$$

Если будут мнимые и кратные, напр., $k_1 = k_2 = a + bi$ и $k_3 = k_4 = a - bi$, то соответствующие им члены общего решения надо заменить выражением:

$$e^{ax} (C_1 \cdot \sin bx + C_2 \cdot \cos bx) + x e^{ax} (C_3 \cdot \sin bx + C_4 \cdot \cos bx).$$

9. Неоднородные линейные ур-ия n -го порядка с постоянными коэф-тами.

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y = Q, \quad (1)$$

где $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ — постоянные числа; Q — ф-ия x .

Общее решение ур-ия (1) имеет вид:

$$y = u + v,$$

где u есть общее решение ур-ия:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y = 0, \quad (2)$$

и v — частное решение ур-ия (1).

Задача, след., сводится к разысканию частного решения ур-ия (1).

В простейших случаях легче всего руководствоваться след. правилами.

1) Если:

$$Q = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m,$$

то, полагая:

$$y = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m,$$

подбираем постоянные $A_0, A_1, \dots, A_m$ так, чтобы y было решением ур-ия (1).

В том случае, если характеристическое ур-ие для ур-ия (2) имеет нуль корнем кратности r , надо положить:

$$y = x^r (A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m).$$

2) Если:

$$Q = a e^{ax},$$

то полагаем:

$$y = A e^{ax}.$$

В том случае, если a служит корнем характеристического ур-ия кратности r , полагаем:

$$y = A x^r e^{ax}.$$

3) Если:

$$Q = a \cdot \sin \beta x + b \cdot \cos \beta x,$$

то полагаем:

$$y = A \cdot \sin \beta x + B \cdot \cos \beta x.$$

В том случае, если ф-ии $\sin \beta x$ и $\cos \beta x$ входят в состав общего решения ур-ия (2), то полагаем:

$$y = x (A \cdot \sin \beta x + B \cdot \cos \beta x).$$

4) Если:

$$Q = ae^{\alpha x} \cdot \sin \beta x + be^{\alpha x} \cdot \cos \beta x,$$

то полагаем:

$$y = Ae^{\alpha x} \cdot \sin \beta x + Be^{\alpha x} \cdot \cos \beta x.$$

В том случае, если ф-ии $e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$ и $e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$ входят в состав общего решения ур-ия (2), то полагаем:

$$y = xe^{\alpha x} (A \cdot \sin \beta x + B \cdot \cos \beta x).$$

5) Если Q содержит члены различных рассмотренных типов, то надо написать y по указанным правилам для каждого типа в отдельности и полученные выражения сложить.

§ 10. Совокупные ур-ия.

1) Система ур-ий 1-го порядка с n неизвестными ф-иями от одной независимой переменной имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = f_1(t, x, y, z, \dots, u);$$

$$\frac{dy}{dt} = f_2(t, x, y, z, \dots, u);$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{du}{dt} = f_n(t, x, y, z, \dots, u).$$

Исключая, путем последовательного дифференцирования ($n-1$) искомым ф-ий, мы получим дифференциальное ур-ие n -го порядка относительно оставшейся ф-ии.

Действительно, дифференцируя ур-ие $\frac{dx}{dt} = f_1$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt},$$

и подставляя в полученное ур-ие данные нам значения $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{du}{dt}$, получим ур-ие вида:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi_1(t, x, y, z, \dots, u).$$

Дифференцируя n раз и производя соответствующую замену, будем иметь:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi_2(t, x, y, z, \dots, u)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi_{n-1}(t, x, y, z, \dots, u).$$

Исключая из полученных n ур-ий ф-ий $y, z, \dots, u$, будем иметь:

$$F\left(x, t, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^nx}{dt^n}\right) = 0,$$

общим решением к-рого будет:

$$x = \Phi(t, C_1, C_2, C_3, \dots, C_n).$$

Зная x и, след., его производные, определяем остальные функции.

2) Система ур-ий высших порядков. Всякую систему ур-ий высших порядков, в к-рой число ур-ий равно числу неизвестных ф-ий от одной независимой переменной, можно заменить системой ур-ий 1-го порядка, в к-рой число ур-ий также будет равно числу неизвестных ф-ий.

Пусть, напр., мы имеем систему:

$$\frac{dx}{dt} = f_1\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right);$$

$$\frac{dy}{dt} = f_2\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right);$$

$$\frac{dz}{dt} = f_3\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right).$$

Положим:

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dz}{dt} = z';$$

тогда:

$$\frac{dx'}{dt} = f_1(t, x, y, z, x', y', z');$$

$$\frac{dy'}{dt} = f_2(t, x, y, z, x', y', z');$$

$$\frac{dz'}{dt} = f_3(t, x, y, z, x', y', z').$$

Мы будем иметь систему шести ур-ий 1-го порядка с шестью неизвестными ф-иями: x, y, z, x', y', z' .

3) Система линейных ур-ий 2-го порядка с постоянными коэф-тами.

а) Если мы имеем систему двух однородных линейных ур-ий:

$$a_1 \frac{dx}{dt^2} + b_1 \frac{dx}{dt} + c_1 x + a_2 \frac{dy}{dt^2} + b_2 \frac{dy}{dt} + c_2 y = 0,$$

$$m_1 \frac{dx}{dt^2} + n_1 \frac{dx}{dt} + p_1 x + m_2 \frac{dy}{dt^2} + n_2 \frac{dy}{dt} + p_2 y = 0$$

и

$$a_1 m_2 \neq a_2 m_1,$$

то полагаем:

$$x = -\left(a_1 \frac{dv}{dt^2} + b_1 \frac{dv}{dt} + c_1 v\right); \quad y = a_2 \frac{dv}{dt^2} + b_2 \frac{dv}{dt} + c_2 v,$$

где v — неизвестная ф-ия t .

Выбираем так, чтобы она удовлетворила второму ур-ию системы, т. к. первое удовлетворяется при любом v .

Подставляя значения x и y во второе ур-ие системы, получаем относительно v однородное линейное ур-ие 4-го порядка, из к-рого определяем v . x и y тогда получим простым дифференцированием.

Характеристическое ур-ие будет:

$$(a_1 k^4 + b_1 k^3 + c_1)(m_2 k^2 + n_2 k + p_2) - (a_2 k^4 + b_2 k^3 + c_2)(m_1 k^2 + n_1 k + p_1) = 0.$$

Если для корня, напр., k_1

$$a_1 k_1^4 + b_1 k_1^3 + c_1 = a_2 k_1^4 + b_2 k_1^3 + c_2 = 0,$$

то мы получим:

$$x = y = 0.$$

В этом случае для определения v берем ур-ие:

$$x = m_2 \frac{dv}{dt^2} + n_2 \frac{dv}{dt} + p_2 v; \quad y = -\left(m_1 \frac{dv}{dt^2} + n_1 \frac{dv}{dt} + p_1 v\right)$$

и подставляем эти значения в первое ур-ие системы.

Затем откладываем на оси OY отрезки $OA_1 = f_1(x_1, y_1, z_1)$ и $OB_1 = f_2(x_1, y_1, z_1)$ и из точек M_1 и N_1 проводим прямые $M_1M_2 \parallel AE_1$ и $N_1N_2 \parallel EB_1$ до пересечения с прямой $x = x_2$ в точках M_2 и N_2 , ординаты к-рых определим из соотношений: $y_2 - y_1 = f_1(x_1, y_1, z_1)(x_2 - x_1)$ и $z_2 - z_1 = f_2(x_1, y_1, z_1)(x_2 - x_1)$ и т. д.
Ломаные $M_0M_1M_2M_3M_4$ и $N_0N_1N_2N_3N_4$ и будут представлять приближенно искомые интегральные кривые.

Примечание. В случае, если $f_1(x_1, y_1, z_1) = z$, т. е. мы имеем систему:

$$\frac{dy}{dx} = z; \quad \frac{dz}{dx} = f(x, y, z),$$

равносильную ур-ню:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y'), \quad (2)$$

построение упрощается; $f(x, y, z)$ совпадает с ординатой z ломаной $N_0N_1N_2 \dots$, к-рая и дает приближенную интегральную кривую ур-ня (2).

§ 12. Ур-ня в частных производных.

а) Определения. Если для ур-ня с частными производными

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \quad (1)$$

мы найдем зависимость между x, y, z и двумя независимыми параметрами a и b , т. е.:

$$F(x, y, z, a, b) = 0, \quad (2)$$

то мы получим полное решение, или полный интеграл, ур-ня (1).

Давая в ур-ии (2) a и b частные значения, получим частные интегралы.

Если мы будем считать a и b за переменные, то, дифференцируя ур-ие (2) по a и b :

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial b} = 0,$$

и исключая из этих ур-ий и ур-ия (2) a и b , получим:

$$F_1(x, y, z) = 0,$$

называемое особым интегралом ур-ня (1).

Если мы будем считать b ф-ией a :

$$b = \varphi(a),$$

то, дифференцируя ур-ие (2) по a :

$$\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial b} \cdot \frac{d\varphi}{da} = 0,$$

и исключая a из полученного ур-ия и ур-ия (2), получим:

$$F_2(x, y, z) = 0,$$

называемое общим интегралом ур-ня (1).

Вид его зависит от выбора произвольной ф-ии $\varphi(a)$.

Пример. Для ур-ия

$$x^2 \left\{ \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 1 \right\} = z^2$$

Если для корня, напр., k_1 :

$$a_1 k_1^2 + b_1 k_1 + c_1 = a_2 k_1^2 + b_2 k_1 + c_2 = 0;$$

$$m_1 k_1^2 + n_1 k_1 + p_1 = m_2 k_1^2 + n_2 k_1 + p_2 = 0,$$

то корень k будет кратный корень характеристического ур-ия, и если он будет, напр., двукратным, то соответствующие два решения системы будут:

$$x = C_1 e^{k_1 t}; y = 0;$$

$$x = 0; y = C_2 e^{k_1 t}.$$

б) Если мы имеем систему двух неоднородных линейных ур-ий:

$$a_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + b_1 \frac{dx}{dt} + c_1 x + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + b_2 \frac{dy}{dt} + c_2 y = f_1(t);$$

$$m_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + n_1 \frac{dx}{dt} + p_1 x + m_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + n_2 \frac{dy}{dt} + p_2 y = f_2(t),$$

то общее решение, как и в случае одного ур-ия, представляет собою сумму общего решения системы однородных ур-ий и какого-либо частного решения данной системы, к-рое можно найти по тем же правилам, как и в случае одного ур-ия (см. § 9).

Напр., если $f_1(t)$ и $f_2(t)$ имеют вид:

$$ae^{at} \cdot \cos \beta t + be^{at} \cdot \sin \beta t,$$

то полагаем:

$$x = e^{at}(A_1 \cdot \cos \beta t + B_1 \cdot \sin \beta t); y = e^{at}(A_2 \cdot \cos \beta t + B_2 \cdot \sin \beta t).$$

Подставляя x и y в данные ур-ия и приравнявая коэф-ты при $e^{at} \cdot \cos \beta t$ и $e^{at} \cdot \sin \beta t$, получим ур-ия для определения A_1, A_2, B_1, B_2 .

§ 11. Графическое интегрирование системы ур-ий первого порядка с двумя неизвестными функциями.

Пусть даны ур-ия:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z); \quad \frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z). \quad (1)$$

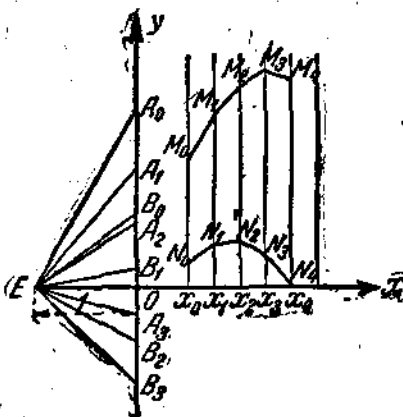
Рассматривая x как абсциссу, а y и z как ординаты, мы получим две интегральные кривые, соответствующие решению системы (1), удовлетворяю-

щему начальным условиям: при $x=x_0$ фин $y=y_0$ и $z=z_0$, т. е. кривые, проходящие через точки $M_0(x_0, y_0)$ и $N_0(x_0, z_0)$ (черт. 32).

Проведем на плоскости ряд прямых, параллельных оси OY , и от начала координат отложим отрезок $OE = 1$.

Определив из системы (1) величины $f_1(x_0, y_0, z_0)$ и $f_2(x_0, y_0, z_0)$, откладываем на оси OY отрезки $OA_0 = f_1(x_0, y_0, z_0)$ и $OB_0 = f_2(x_0, y_0, z_0)$; тогда отрезки EA_0 и EB_0 будут параллельны касательным к интегральным кривым в точках M_0 и N_0 .

Из этих точек проведем прямые $M_0 M_1 \parallel EA_0$ и $N_0 N_1 \parallel EB_0$ до пересечения с прямой $x=x_1$ в точках M_1 и N_1 , ординаты к-рых определим из соотношений $y_1 - y_0 = f_1(x_0, y_0, z_0)(x_1 - x_0)$ и $z_1 - z_0 = f_2(x_0, y_0, z_0)(x_1 - x_0)$.



Черт. 32.

Затем откладываем на оси OY отрезки $OA_1 = f_1(x_1, y_1, z_1)$ и $OB_1 = f_2(x_1, y_1, z_1)$ и из точек M_1 и N_1 проводим прямые $M_1M_2 \parallel AE_1$ и $N_1N_2 \parallel EB_1$ до пересечения с прямой $x = x_2$ в точках M_2 и N_2 , ординаты к-рых определим из соотношений: $y_2 - y_1 = f_1(x_1, y_1, z_1)(x_2 - x_1)$ и $z_2 - z_1 = f_2(x_1, y_1, z_1)(x_2 - x_1)$ и т. д.
Ломаные $M_0M_1M_2M_3M_4$ и $N_0N_1N_2N_3N_4$ и будут представлять приближенно искомые интегральные кривые.

Примечание. В случае, если $f_1(x_1, y_1, z_1) = z$, т. е. мы имеем систему:

$$\frac{dy}{dx} = z; \quad \frac{dz}{dx} = f(x, y, z),$$

равносильную ур-ию:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y'). \quad (2)$$

построение упрощается; $f(x, y, z)$ совпадает с ординатой z ломаной $N_0N_1N_2 \dots$, к-рая и дает приближенную интегральную кривую ур-ия (2).

§ 12. Ур-ия в частных производных.

1) Определения. Если для ур-ия в частными производными

$$f(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) = 0 \quad (1)$$

мы найдем зависимость между x, y, z и двумя независимыми параметрами a и b , т. е.:

$$F(x, y, z, a, b) = 0, \quad (2)$$

то мы получим полное решение, или полный интеграл, ур-ия (1).

Давая в ур-ии (2) a и b частные значения, получим частные интегралы.

Если мы будем считать a и b за переменные, то, дифференцируя ур-ие (2) по a и b :

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial b} = 0,$$

и исключая из этих ур-ий и ур-ия (2) a и b , получим:

$$F_1(x, y, z) = 0,$$

называемое особым интегралом ур-ия (1).

Если мы будем считать b ф-ией a :

$$b = \varphi(a),$$

то, дифференцируя ур-ие (2) по a :

$$\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial b} \cdot \frac{d\varphi}{da} = 0,$$

и, исключая a из полученного ур-ия и ур-ия (2), получим:

$$F_2(x, y, z) = 0,$$

называемое общим интегралом ур-ия (1).

Вид его зависит от выбора произвольной ф-ии $\varphi(a)$.

Пример. Для ур-ия

$$x^2 \left\{ \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 1 \right\} = z^2$$

полный интеграл будет:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = r^2,$$

семейство шаров радиуса r с центрами на плоскости XOY .

При частном значении a и b имеем шар радиуса r с центром в точке $(a, b, 0)$.

Особым интегралом будет:

$$z = \pm r,$$

ур-ия двух плоскостей, параллельных XOY и касающихся всех шаров.

Полагая $a = b$, получим общий интеграл в виде:

$$(x-y)^2 + 2z^2 = 2r^2,$$

ур-ие цилиндра, касающегося семейства шаров радиуса r , центры к-рых лежат на прямой $y = x$; $z = 0$.

Если бы мы дали другую зависимость между a и b , то общий интеграл дал бы огибающую другого семейства шаров с одним параметром.

В виду трудности нахождения полного интеграла на практике часто ограничиваются определением нескольких частных интегралов и из них составляют «более общее» решение, удовлетворяющее дифференциальному ур-ию и начальным данным задачи.

2) Простейшие типы ур-ий первого порядка, для к-рых можно найти полный интеграл. Введем обозначения:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q.$$

а) Ур-ие вида:

$$p = f(q)$$

(т. е. переменные не входят в ур-ие) имеет полный интеграл:

$$z = ax + f(a)y + c,$$

где a и c — независимые постоянные.

б) Ур-ие вида:

$$p = f(q, z)$$

(т. е. независимые переменные не входят в ур-ие).

Положим, $q = ap$. Подставляя это выражение в данное ур-ие и определив из него p , получим:

$$p = \varphi(z).$$

Полный интеграл данного ур-ия будет:

$$x + ay = \int \frac{dz}{\varphi(z)} + C,$$

где a и C — независимые постоянные.

в) Ур-ие вида:

$$z = dx + qy + f(p, q)$$

имеет полный интеграл:

$$z = ax + by + f(a, b),$$

где a и b — постоянные.

3) Линейные ур-ия первого порядка. Общий вид линейного ур-ия 1-го порядка с частными производными f -ой z по двум независимым переменным x и y :

$$P \cdot p + Q \cdot q = R,$$

где $p = \frac{\partial z}{\partial x}$; $q = \frac{\partial z}{\partial y}$; P, Q, R — функции x, y, z .

Чтобы найти общее решение данного ур-ия, возьмем систему обыкновенных дифференциальных ур-ий в виде:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Рассматривая u и z как ф-ии x , мы получим решение этой системы в виде:

$$\varphi(x, y, z) = C_1, \quad \psi(x, y, z) = C_2.$$

Общим интегралом данного линейного ур-ия будет:

$$F(\varphi, \psi) = 0,$$

где F — произвольная ф-ия.

Так же мы поступаем в случае, если z есть ф-ия многих независимых переменных.

Пример 1. Дано ур-ие:

$$x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Берем систему:

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}.$$

откуда:

$$x dx + y dy = 0, \quad dz = 0.$$

Решения этой системы будут:

$$x^2 + y^2 = C_1; \quad z = C_2.$$

Общий интеграл данного ур-ия:

$$F(x^2 + y^2 + z) = 0.$$

Данное ур-ие есть общее дифференциальное ур-ие поверхностей вращения около оси Z ; его общий интеграл есть общее ур-ие этих поверхностей в конечном виде.

Пример 2. Дано ур-ие:

$$x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial z}{\partial x_3} + \dots + x_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = mx.$$

Берем систему:

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{dx_3}{x_3} = \dots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{dz}{mx}.$$

Решения этой системы будут:

$$\frac{x_1}{x_n} = C_1; \quad \frac{x_2}{x_n} = C_2; \quad \frac{x_3}{x_n} = C_3 \dots \frac{x_{n-1}}{x_n} = C_{n-1}; \quad \frac{z}{x_n^m} = C_n.$$

Общий интеграл данного ур-ия будет:

$$F\left(\frac{x_1}{x_n}; \frac{x_2}{x_n} \dots \frac{x_{n-1}}{x_n}; \frac{z}{x_n^m}\right) = 0,$$

или:

$$Z = x_n^m \cdot \varphi\left(\frac{x_1}{x_n}; \frac{x_2}{x_n} \dots \frac{x_{n-1}}{x_n}\right).$$

Полученный результат — теорема, обратная теореме Эйлера: если ф-ия удовлетворяет данному дифференциальному ур-ию, то она — однородная ф-ия m -го измерения.

Прямая и кривая на плоскости.

Метод координат на плоскости.

§ 1. Прямоугольная и полярная системы координат.

Если точка M в прямоугольной системе $ХОУ$ имеет координаты x и y , а в полярной, с полюсом в O и с полярной осью $ОХ$, координаты r и φ , то:

$$x = r \cdot \cos \varphi; \quad y = r \cdot \sin \varphi;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}.$$

§ 2. Преобразование координат.

1) Перенесение начала.

Если $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — координаты точки по старой системе, x и y — по новой, a и b — координаты нового начала по старой системе, то:

$$\bar{x} = x + a; \quad \bar{y} = y + b.$$

2) Поворот осей.

Если $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — координаты точки по старой системе, x и y — по новой, α — угол поворота осей, то:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha; \\ \bar{y} &= x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha.\end{aligned}$$

3) Общее преобразование.

При одновременном перенесении начала в точку (a, b) и повороте осей на угол α имеем:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha + a; \\ \bar{y} &= x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha + b.\end{aligned}$$

Прямая на плоскости.

§ 1. Длина отрезка прямой по данным координатам его концов.

Расстояние d между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) определяется ф-лой:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

а расстояние d точки (x_1, y_1) от начала координат — ф-лой:

$$d = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

§ 2. Деление отрезка прямой в данном отношении.

Координаты точки, делящей отрезок прямой, ограниченный точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , в отношении $\frac{m}{n} = \lambda$, определяются по ф-лам:

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n}; \quad y = \frac{ny_1 + my_2}{m + n};$$

или:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},$$

а координаты середины того же отрезка — по ф-лам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

§ 3. Виды ур-ий прямой.

1) Общее ур-ие прямой:

$$Ax + By + C = 0.$$

2) Нормальное ур-ие прямой:

$$x \cdot \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

где p — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а α — угол его наклона к оси X .

Чтобы общее ур-ие

$$Ax + By + C = 0$$

привести к нормальному виду, нужно все его члены помножить на нормирующий множитель:

$$M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

знак к-рого должен быть противоположен знаку свободного члена C ; тогда будем иметь:

$$\pm \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} x + \pm \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} y + \pm \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0,$$

где:

$$\cos \alpha = \pm \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \sin \alpha = \pm \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}; p = \mp \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

3) Ур-ие прямой с угловым коэф-том:

$$y = kx + b,$$

где k —величина тангенса угла наклона прямой к оси X , а b —отрезок, отсекаемый прямой на оси ординат.

Чтобы общее ур-ие прямой привести к ур-ию с угловым коэф-том, нужно его решить относительно y и тогда будем иметь:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

где:

$$k = -\frac{A}{B}; b = -\frac{C}{B}.$$

4) Ур-ие прямой в отрезках координатных осей:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где a и b —отрезки, отсекаемые прямой на осях координат: первый—на оси X , а второй—на оси Y .

Чтобы найти отрезки a и b , отсекаемые прямой $Ax + By + C = 0$ на осях координат, подставляют в это ур-ие координаты точек $(a, 0)$ и $(0, b)$.

5) Ур-ие оси X :

$$y = 0.$$

Ур-ие оси Y :

$$x = 0.$$

6) Отсутствие в ур-ии прямой свободного члена указывает на прохождение ее через начало координат.

7) Отсутствие в ур-ии прямой члена с x указывает на параллельность оси X , а отсутствие члена с y —на параллельность оси Y .

8) Ур-ие пучка прямых, проходящих через точку (x_1, y_1) :

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Ур-ие пучка прямых, проходящих через точку пересечения прямых:

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0, \\ A_1x + B_1y + C_1 &= 0, \end{aligned}$$

имеет вид:

$$Ax + By + C + m(A_1x + B_1y + C_1) = 0,$$

где m —неопределенный числовой множитель.

9) Ур-не прямой, проходящей через две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) :

$$\frac{y-y_1}{y_1-y_2} = \frac{x-x_1}{x_1-x_2},$$

или:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

§ 4. Угол между двумя прямыми.

Если прямые даны ур-иями:

$$\begin{aligned} y &= kx + b, \\ y &= k_1x + b_1, \end{aligned}$$

то угол φ определяется так:

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{k - k_1}{1 + kk_1}.$$

Если прямые даны ур-иями:

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0; \\ A_1x + B_1y + C_1 &= 0. \end{aligned}$$

то:

$$\cos \varphi = \frac{AA_1 + BB_1}{\pm \sqrt{(A^2 + B^2)(A_1^2 + B_1^2)}}.$$

§ 5. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.

1) Прямые параллельны, если $k = k_1$ или $\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1}$.

2) Прямые взаимно перпендикулярны, если $k_1 = -\frac{1}{k}$ или $AA_1 + BB_1 = 0$.

§ 6. Точка пересечения прямых.

Координаты точки пересечения двух прямых определяются из совместного решения их ур-ий.

§ 7. Расстояние от данной точки до данной прямой.

Расстояние от точки (x_1, y_1) до прямой

$$Ax + By + C = 0$$

определяется по ф-ле:

$$d = \pm \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Знак — для случая, когда начало координат и точка лежат по одну сторону от прямой.

§ 8. Условие расположения трех точек на одной прямой.

Точки (x_1, y_1) , (x_2, y_2) и (x_3, y_3) лежат на одной прямой, если:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Общие методы изучения кривой.

§ 1. Критические точки кривой.

Точки кривой, к-рые имеют наибольшие или наименьшие ординаты из ординат точек, непосредственно им предшествующих или непосредственно за ними следующих, называются критическими точками.

Нахождение критических точек сводится к нахождению maxima и minima ф-ии.

§ 2. Точки перегиба.

Точки перегиба кривой $y = f(x)$ определяются из ур-ия:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

при чем для точки перегиба необходимо, чтобы:

$$\frac{d^3y}{dx^3} \neq 0.$$

Если же

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0; \frac{d^4y}{dx^4} = 0 \dots \frac{d^ny}{dx^n} = 0, \text{ а } \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} \neq 0,$$

то точка перегиба будет только при n четном.

Для точки перегиба радиус кривизны $= \infty$.

§ 3. Вогнутость кривой.

1. Кривая вогнута вверх, если $f''(x) > 0$.
2. Кривая вогнута вниз, если $f''(x) < 0$.

§ 4. Особые точки кривой.

Особой точкой кривой называется такая точка, через к-рую можно провести к кривой более одной касательной. В зависимости от числа касательных, проходящих через особую точку, последняя называется двойной, тройной и т. д.

Двойные точки.

Для двойной точки кривой $F(x, y) = 0$ необходимо, чтобы координаты ее удовлетворяли след. трем условиям:

$$F(x, y) = 0; \frac{\partial F}{\partial x} = 0; \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Из последних двух ур-ий координаты особой точки определяются, а на первом—проверяются, т. к. могут быть получены точки, не лежащие на кривой.

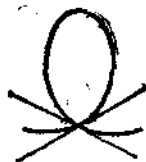
Угловые коэф-ты касательных к кривой в двойной точке определяются из ур-ия:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} k^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} k + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0.$$

1) Если:

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} > 0,$$

то особая точка—узел.



Черт. 83.

2) Если:

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0,$$

то особая точка — точка возврата:

первого рода



Черт. 34.

второго рода

или:



Черт. 35.

3) Если:

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} < 0,$$

то особая точка — эквилибровая точка, или, что то же — уединенная, или сопряженная. Такая точка находится вне системы точек кривой, но координаты ее ур-ию кривой удовлетворяют.

§ 5. Ассимптоты.

Ассимптоты определяются как касательные к кривой с точками касания в бесконечности.

1. Ассимптоты к алгебраическим кривым.

1) Чтобы найти ассимптоты, параллельные оси X , располагают ур-ие кривой $F(x, y) = 0$ по убывающим степеням x :

$$x^m \varphi(y) + x^{m-1} \varphi_1(y) + x^{m-2} \varphi_2(y) + \dots = 0$$

и приравнивают нулю коэф-т при высшей степени x :

$$\varphi(y) = 0.$$

Это последнее ур-ие и дает все ассимптоты, параллельные оси X .

2) Чтобы найти ассимптоты, параллельные оси Y , располагают ур-ие кривой $F(x, y) = 0$ по убывающим степеням y :

$$y^n \psi(x) + y^{n-1} \psi_1(x) + y^{n-2} \psi_2(x) + \dots = 0.$$

Ур-ие

$$\psi(x) = 0$$

и дает все ассимптоты, параллельные оси Y .

3) Чтобы найти ассимптоты к кривой $F(x, y) = 0$, направленные под углом к оси X , решают ур-ие кривой совместно с ур-ием

$$y = kx + b,$$

исключая из них y . В полученном после исключения y ур-ии вида

$$x^n f(k) + x^{n-1} f_1(k, b) + x^{n-2} f_2(k, b) + \dots = 0$$

приравнивают нулю коэф-ты при двух старших членах:

$$f(k) = 0 \text{ и } f_1(k, b) = 0.$$

Находя из этих последних двух ур-ий k и b и подставляя найденные их значения в ур-ие

$$y = kx + b,$$

мы и получим ур-ия ассимптот.

2. Асимптоты ко всякой кривой.

Если:

$$y = kx + b$$

уравнение асимптоты к кривой $y = f(x)$, то k и b ее уравнения определяются так:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{dy}{dx} \quad \text{при } x \rightarrow \infty; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(y - x \frac{dy}{dx} \right) \quad \text{при } x \rightarrow \infty,$$

где y есть функция от x из уравнения кривой, а $\frac{dy}{dx}$ — производная от этой функции.

§ 6. Соприкосновение кривых.

Если даны две кривые:

$$y = f(x); \quad y = \varphi(x),$$

имеющие общие точки, то порядок касания этих кривых определяется след. условиями.

Касание первого порядка:

$$f'(x) = \varphi'(x);$$

касание второго порядка:

$$f'(x) = \varphi'(x);$$

$$f''(x) = \varphi''(x);$$

касание n -го порядка:

$$f'(x) = \varphi'(x);$$

$$f''(x) = \varphi''(x);$$

$$f'''(x) = \varphi'''(x);$$

$$f^{(n)}(x) = \varphi^{(n)}(x)$$

Если касание четного порядка, то кривые пересекаются в общих точках. Если касание нечетного порядка, то кривые соприкасаются в общих точках, не пересекаясь.

Прямая, касательная к кривой, дает касание первого порядка.

§ 7. Дифференциал дуги.

1. В прямоугольных координатах:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy.$$

2. В полярных координатах:

$$ds = \sqrt{r^2 d\varphi^2 + dr^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi = \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2} dr.$$

§ 8. Радиус кривизны. Кривизна. Центр круга кривизны.

Если уравнение кривой $y = f(x)$, то в точке (x, y) :

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}; \quad k = \frac{1}{\rho},$$

где ρ — радиус кривизны, k — кривизна, при чем для кривых малой изогну-

тости, напр., для кривых прогиба, величина $\frac{dy}{dx}$ весьма мала, а поэтому пренебрегая величиною $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, мы будем иметь:

$$\rho = \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}; \quad k = \frac{dy}{dx}.$$

Координаты центра круга кривизны в точке (x, y) определяются по формулам:

$$\alpha = x - \frac{dy}{dx} \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}; \quad \beta = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

где α — абсцисса, а β — ордината центра круга кривизны.

§ 9. Вычерчивание кривой.

Для вычерчивания кривой необходимо по ее уравнению определить след.:

1) Симметрична ли кривая относительно координатных осей.

Если уравнение кривой не изменяется от замены y через $-y$, то кривая симметрична относительно оси X .

Если уравнение кривой не изменяется от замены x через $-x$, то кривая симметрична относительно оси Y .

2) Пересекает ли кривая оси координат.

Полагая $x=0$ и решая уравнение относительно y , находим отрезки на оси Y .

Полагая $y=0$ и решая уравнение относительно x , находим отрезки на оси X .

3) Имеет ли кривая асимптоты, и если имеет, то каковы их уравнения.

4) Имеются ли точки максимума и минимума, особые точки, точки перегиба, и если имеются, то каковы их координаты.

5) Если возможно, вычисляется достаточное число точек обычными средствами алгебры.

Совокупность всех этих сведений дает нам общее представление о тех пределах, в которых заключена кривая, и позволяет судить об ее геометрическом виде.

Касательная и нормаль.

§ 1. Уравнение касательной к кривой $F(x, y)=0$ в точке (x_1, y_1) имеет вид:

$$y - y_1 = k(x - x_1),$$

где $k = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$ для значений координат точки (x_1, y_1) .

§ 2. Уравнение нормали к кривой $F(x, y)=0$, в точке (x_1, y_1) имеет вид:

$$y - y_1 = k(x - x_1),$$

где $k = -\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}$ для значений координат точки (x_1, y_1) .

§ 3. Длины касательной, подкасательной, нормали и поднормали в Декартовых и полярных координатах.

Декартовы координаты.

1) За длину касательной принимают длину отрезка AB касательной от точки касания до оси X , обозначаемую через T .

$$T = y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.$$

2) Подкасательная, или субтангенс:

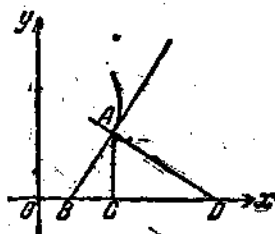
$$\overline{BC} = S_t = y \frac{dx}{dy}.$$

3) Нормаль:

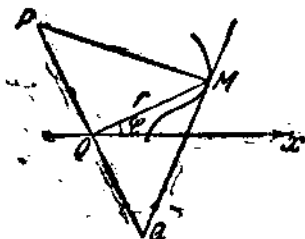
$$\overline{AD} = N = y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

4) Поднормаль, или субнормаль:

$$\overline{CD} = S_n = y \frac{dy}{dx}.$$



Черт. 36.



Черт. 37.

Полярные координаты.

Проводя к кривой $r = f(\varphi)$ в точке $M(r, \varphi)$ касательную и нормаль, а через полюс перпендикуляр PQ к радиусу-вектору этой точки, мы будем принимать отрезок касательной MQ за длину касательной, его проекцию на PQ —за длину подкасательной, отрезок нормали MP —за длину нормали, а его проекцию на PQ —за длину поднормали.

1) Полярная касательная:

$$\overline{MQ} = T = r \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}.$$

2) Полярная подкасательная:

$$\overline{OQ} = S_t = r^2 \frac{d\varphi}{dr}.$$

3) Полярная нормаль:

$$\overline{MP} = N = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}.$$

4) Длина полярной поднормали:

$$\overline{OP} = S_n = \frac{dr}{d\varphi}.$$

Семейства кривых. Огибающие. Эволюты.

§ 1. Пучки прямых — см. «Прямая на плоскости», § 3, п. 8.

§ 2. Семейства кривых.

Ур-не:

$$F(x, y, p) = 0$$

(где p — переменный параметр) представляет семейство кривых.

§ 3. Огибающая семейства кривых (обертывающая кривая).

Геометрическое место точек пересечения бесконечно-близких кривых семейства:

$$F(x, y, p) = 0$$

называется огибающей кривой этого семейства или обертывающей кривой.

Ур-не огибающей получается исключением параметра p из ур-ий:

$$F(x, y, p) = 0 \text{ и } \frac{\partial F}{\partial p} = 0.$$

Если семейство кривых определяется ур-нем:

$$F(x, y, p, q) = 0,$$

где p и q — переменные параметры, связанные между собой ур-нем

$$f(p, q) = 0,$$

то ур-не огибающей получается исключением этих параметров из ур-ий:

$$F(x, y, p, q) = 0; f(p, q) = 0; \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial f}{\partial q} = \frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\partial f}{\partial p}.$$

§ 4. Эволюта и эвольвента.

Эволютой кривой, или развертывающей, называется геометрическое место центров кривизны этой кривой, а самая кривая в этом случае называется эвольвентой, или развертываемой.

Если ур-не кривой:

$$F(x, y) = 0,$$

а α и β — текущие координаты эволюты, то ур-не последней получается исключением x и y из ур-ий:

$$F(x, y) = 0;$$

$$\begin{aligned} \alpha &= x - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}; \\ &= y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}. \end{aligned}$$

Касательная к эволюте в произвольно взятой на ней точке есть нормаль к эвольвенте в соответствующей точке.

Одной и той же эволюте соответствует бесчисленное множество эвольвент.

Кривые второго порядка.

§ 1. Кривые второго порядка, заданные ур-нем общего вида:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

1) Характер кривой определяется по дискриминанту старших членов ур-ня кривой:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2;$$

при $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ имеем эллипс.

при $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ имеем гиперболу.

при $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ имеем параболу.

2) Распадение кривой второго порядка на пару прямых обуславливается равенством нулю след. определителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

3) Если ур-ие кривой второго порядка, имеющей центр

$$F(x, y) = 0,$$

то координаты центра определяются из системы ур-ий:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Центральными кривыми являются эллипс и гиперболы.

4) Диаметр кривой второго порядка.

Диаметром кривой второго порядка называется геометрическое место средин параллельных хорд, направление к-рых определяется их угловым коэф-том k .

Если ур-ие кривой:

$$F(x, y) = 0,$$

то ур-ие диаметра, образованного вышеуказанными хордами, будет:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + k \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Этот диаметр, как говорят, сопряжен хордам направления k .

Сопряженными диаметрами называются такие два диаметра, из к-рых каждый образован серединами хорд, параллельных другому диаметру.

Угловые коэф-ты сопряженных диаметров связаны между собою след. условием:

$$a_{11} + a_{12}(k + k_1) + a_{22}kk_1 = 0.$$

5) Главными осями называются два сопряженных взаимно перпендикулярных диаметра, угловые коэф-ты к-рых определяются из ур-ия:

$$a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0.$$

6) Приведение общего ур-ия центральной кривой к каноническому виду. Чтобы привести ур-ие центральной кривой

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

к простейшему виду:

$$mx^2 + ny^2 + p = 0,$$

нужно коэф-ты последнего ур-ня m и n определить по след. условиям:

$$\begin{aligned} m + n &= a_{11} + a_{22}; \\ m \cdot n &= a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \end{aligned}$$

а свободный член p по ф-ле:

$$p = a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33},$$

где x_0 и y_0 — координаты центра.

7) Приведение общего ур-ня параболы к каноническому виду.

Чтобы привести ур-не параболы:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

в к-ром $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, к каноническому виду:

$$y^2 = 2px,$$

нужно p определить по ф-ле:

$$p = -\frac{a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}}{(a_{11} + a_{22})\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}.$$

§ 2. Окружность.

1) Ур-не окружности радиуса r с центром в точке (a, b) :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

2) Ур-не окружности радиуса r с центром в начале координат:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

3) Ур-не окружности радиуса r , проходящей через начало координат и с центром на оси X :

$$x^2 + y^2 = 2rx.$$

4) Ур-не окружности радиуса r , проходящей через начало координат и с центром на оси Y :

$$x^2 + y^2 = 2ry.$$

§ 3. Эллипс.

1. Эллипс и его элементы.

1) Оси симметрии $2a$ и $2b$:

$$\overline{AA_1} = 2a; \overline{BB_1} = 2b.$$

Точки A, A_1 и B, B_1 пересечения эллипса с осями симметрии называются вершинами.

2) Полуоси a и b . Большая полуось $\overline{OA} = a$.

Меньшая полуось $\overline{OB} = b$.

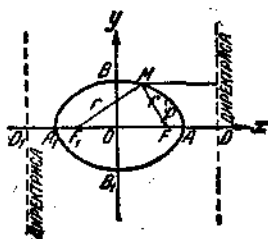
3) Линейный эксцентриситет c дает величину расстояния от центра до каждого из фокусов:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Фокусов два — F и F_1 ; оба лежат на большей оси.

4) Эксцентриситет (астрономический):

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1.$$



Черт. 38.

5) Фокальной хордой эллипса называется всякая хорда, проходящая через фокус.

6) Параметром p эллипса называется половина фокальной хорды, перпендикулярной к большей оси эллипса:

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

7) Директрисами эллипса называются две прямые, параллельные его меньшей оси и находящиеся по ту и другую сторону от нее на расстоянии:

$$\overline{OD} = \overline{OD_1} = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

8) Сумма радиусов-векторов всякой точки эллипса есть величина постоянная, равная большой оси:

$$r + r_1 = 2a.$$

Радиусом-вектором называется расстояние от точки эллипса до фокуса.

9) Отношение расстояния любой точки эллипса до фокуса к расстоянию до директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету e :

$$\frac{r}{d} = e.$$

10) Касательная и нормаль делят пополам углы, образуемые радиусами-векторами.

11) Между двумя сопряженными диаметрами (см. § 1), равными соответственно $2a_1$ и $2b_1$ и образующими между собою угол φ , существуют след. соотношения:

$$a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2;$$

$$a_1 b_1 \cdot \sin \varphi = ab.$$

12) Площадь эллипса P :

$$P = \pi ab.$$

13) Приближенная длина дуги эллипса:

$$s = \pi \left(3 \cdot \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \right).$$

II. Различные виды ур-ий эллипса.

1) Общее ур-ие:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

является ур-нем эллипса при условии, если:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0.$$

2) Каноническое ур-ие:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

3) Ур-ие эллипса, отнесенного к вершине:

$$y^2 = (e^2 - 1)x^2 + 2px,$$

или:

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2,$$

или:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2).$$

4) Ур-ие эллипса, отнесенного к фокусу:

$$y^2 = (e^2 - 1)x^2 + 2pex + p^2.$$

5) Полярное ур-ие эллипса с фокусом в полюсе:

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos \varphi}.$$

6) Полярное ур-ие эллипса с полюсом в центре:

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 + (a^2 - b^2) \cdot \sin^2 \varphi}.$$

III. Представления, связанные с рассмотрением канонического ур-ия эллипса.

Если дано ур-ие эллипса в канонической форме;

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

то:

1) Ур-ия директрис эллипса:

$$x = \pm \frac{a}{e}.$$

2) Радиусы-векторы эллипса.

Для всякой точки эллипса $M(x, y)$:

$$r = a + ex;$$

$$r_1 = a - ex.$$

3) Диаметры эллипса.

Т. к. центр эллипса находится в начале координат, то ур-ие всякого его диаметра имеет вид:

$$y = kx.$$

Если диаметр сопряжен с хордами направления k_1 (k_1 -их угловой коэф-т), то его ур-ие будет:

$$y = -\frac{b^2}{a^2 k_1} x,$$

или:

$$y = \frac{a^2 - 1}{k_1} x,$$

4) Ур-ие касательной к эллипсу в точке (x_1, y_1) :

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

5) Ур-ие нормали к эллипсу в точке (x_1, y_1) :

$$\frac{x - x_1}{b^2 x_1} - \frac{y - y_1}{a^2 y_1} = 0.$$

6) Длина касательной для точки (x, y) :

$$T = \frac{ay}{bx} \sqrt{a^2 - e^2 x^2}.$$

7) Длина нормали для точки (x, y) :

$$N = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - e^2 x^2}.$$

8) Длина подкасательной для точки (x, y) :

$$S_t = \frac{x^2 - a^2}{x}.$$

9) Длина поднормали для точки (x, y) :

$$S_n = -\frac{b^2}{a^2} x.$$

10) Радиус кривизны в точке (x, y) :

$$\rho = \frac{(a^2 - e^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a \cdot b} = \frac{(r \cdot r_1)^{\frac{3}{2}}}{a \cdot b}.$$

Для вершины A :

$$\rho = \frac{b^2}{a} = p.$$

Для вершины B :

$$\rho = \frac{a^2}{b}.$$

11) Координаты центра кривизны для точки (x, y) :

$$\alpha = x - \frac{(b^4 x^2 + a^4 y^2)x}{a^4 b^2};$$

$$\beta = y - \frac{(b^4 x^2 + a^4 y^2)y}{a^2 b^4}.$$

12) Ур-ие эволюты эллипса:

$$\left(\frac{ax}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{by}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1;$$

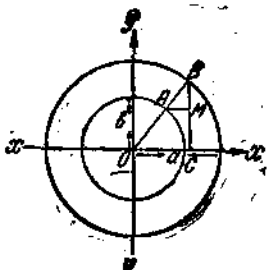
или:

$$(c^4 - a^2 x^2 - b^2 y^2)^{\frac{2}{3}} = 27 a^2 b^2 c^4 x^2 y^2.$$

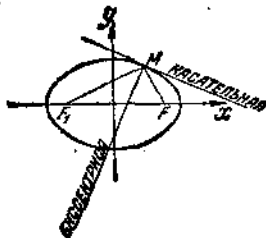
IV. Построение эллипса.

1) Если даны фокусы F и F_1 , то, закрепив в них концы нити длины, равной $2a$, натягивают ее концом карандаша и, не ослабляя нить, производят карандашом движение, след к-рого и есть искомый эллипс.

2) Вычерчивают два круга с общим центром в точке O радиусами, равными полуосям эллипса a и b . Если проведем луч из центра O , пересекающий окружности в точках A и B , и затем точку A спроектируем на перпендикуляр, опущенный из точки B на ось X , то проекция точки A , а именно, точка M , и будет точкой эллипса.



Черт. 39.



Черт. 40.

V. Построение касательной к эллипсу.

Чтобы построить касательную к эллипсу в точке M , строят биссектрису угла, образованного радиусами-векторами этой точки, и затем восстанавливают к ней перпендикуляр в точке M , к-рый и будет искомой касательной.

§ 4. Гипербола.

I. Гипербола и ее элементы.

1) Оси симметрии.

Ось симметрии $AA_1 = 2a$, пересекáемая гиперболой, называется действительной осью.

Действительные вершины A и A_1 .

Ось симметрии, не пересекáемая гиперболой, называется мнимой осью.

2) Полуоси a и b .

Действительная полуось

$$OA = a.$$

Мнимая полуось

$$OB = b.$$

3) Линейный эксцентриситет дает величину расстояния от центра гиперболы до каждого из ее фокусов:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Фокусов два; оба лежат на действительной оси.

4) Эксцентриситет e (астрономический):

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1.$$

5) Фокальной хордой гиперболы называется всякая хорда, проходящая через фокус.

6) Параметром P гиперболы называется половина фокальной хорды, перпендикулярной к действительной оси:

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

7) Директрисами гиперболы называются две прямые, параллельные ее мнимой оси и находящиеся по ту и другую сторону от нее на расстоянии:

$$\overline{OD} = \overline{OD_1} = \frac{a}{e} = \frac{a^3}{c} = \frac{a^3}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

8) Разность радиусов-векторов всякой точки гиперболы есть величина постоянная, равная ее действительной оси:

$$r - r_1 = 2a.$$

9) Отношение расстояния любой точки гиперболы до фокуса к расстоянию ее до директрисы, соответствующей этому фокусу, есть величина постоянная, равная эксцентриситету e :

$$\frac{r}{d} = e.$$

10) Касательная и нормаль делят пополам углы, образуемые радиусами-векторами.

11) Между двумя сопряженными диаметрами (см. § 1), равными соответственно $2a_1$ и $2b_1$ и образующими между собою угол φ , существуют след. соотношения:

$$a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2;$$

$$a_1 b_1 \sin \varphi = ab.$$

12) У гиперболы две асимптоты, проходящие через центр и образующие с действительной ее осью углы α и β , определяемые из равенств:

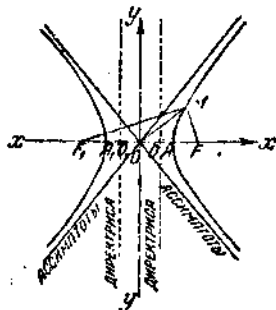
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}; \operatorname{tg} \beta = -\frac{b}{a}.$$

13) Гипербола, асимптоты которой пересекаются под прямым углом, называется равнобедренной гиперболой.

II. Различные виды уравнений гиперболы.

1) Общее ур-ие:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$



Черт. 41.

является ур-нем гиперболы, при условии, если:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0.$$

2) Каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

3) Ур-не гиперболы, отнесенной к вершине:

$$y^2 = (e^2 - 1)x^2 + 2px,$$

или:

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2,$$

или:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2).$$

4) Ур-не гиперболы, отнесенной к фокусу:

$$y^2 = (e^2 - 1)x^2 + 2pex + p^2.$$

5) Полярное ур-не гиперболы с фокусом в полюсе:

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos \varphi}.$$

6) Полярное ур-не гиперболы с полюсом в центре:

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 - (a^2 + b^2) \cdot \sin^2 \varphi}.$$

7) Ур-не равнобедренной гиперболы:

а) относительно осей симметрии:

$$x^2 - y^2 = a^2;$$

б) относительно асимптот:

$$xy = m,$$

где $m = \frac{1}{2}a^2$.

III. Представления, связанные с рассмотрением канонического ур-ия гиперболы.

Если дано каноническое ур-не гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

то:

1) Ур-не директрис гиперболы:

$$x = \pm \frac{a}{e}.$$

2) Радиусы-векторы.

Для всякой точки гиперболы $M(x, y)$:

$$r = -a + ex;$$

$$r_1 = a + ex.$$

3) Диаметры гиперболы:

Т. к. центр гиперболы находится в начале координат, то ур-не всякого ее диаметра имеет вид:

$$y = kx.$$

Если диаметр сопряжен с хордами направленной k_1 (k_1 -их угловой коэф-т), то его ур-не будет:

$$y = \frac{b^2}{a^2 k_1} x,$$

или:

$$y = \frac{e^2 - 1}{k_1} x.$$

- 4) Ур-ие асимптот:

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

- 5) Ур-ие касательной:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

- 6) Ур-ие нормали к гиперболе в точке
- (x_1, y_1)
- :

$$\frac{x-x_1}{b^2 x_1} + \frac{y-y_1}{a^2 y_1} = 0,$$

- 7) Длина касательной для точки
- (x, y)
- :

$$T = \frac{ay}{bx} \sqrt{e^2 x^2 - a^2}.$$

- 8) Длина нормали для точки
- (x, y)
- :

$$N = \frac{b}{a} \sqrt{e^2 x^2 - a^2}.$$

- 9) Длина подкасательной для точки
- (x, y)
- :

$$S_t = \frac{a^2 - x^2}{x}.$$

- 10) Длина поднормали для точки
- (x, y)
- :

$$S_n = \frac{b^2}{a^2} x.$$

- 11) Радиус кривизны в точке
- (x, y)
- :

$$\rho = \frac{(a^2 - e^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{(r \cdot r_1)^{\frac{3}{2}}}{a \cdot b}.$$

- Для вершины А:

$$\rho = \frac{b^2}{a} = p.$$

- 12) Координаты центра кривизны для точки гиперболы
- (x, y)
- :

$$\alpha = x + \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)x}{a^4 b^3};$$

$$\beta = y - \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)y}{a^3 b^4}.$$

- 13) Ур-ие эволюты гиперболы:

$$\left(\frac{ax}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{by}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

- 14) Площадь АМК (см. черт. 41):

$$P = \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2} \ln \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right).$$

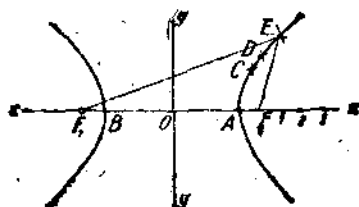
- 15) Площадь гиперболического сектора ОМА (см. черт. 41):

$$P = \ln(x+y) = -\ln(x-y).$$

IV. Построение гиперболы.

Даны полуоси a и b .

Построив на оси X вершины A и B и фокусы F и F_1 , берут на ней же ряд точек $1, 2, 3, 4$ и т. д. и радиусами AI ,



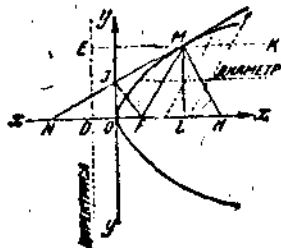
Черт. 42.

A_2, A_3 и т. д. из фокуса F описывают дуги. Точки C, D, E пересечения этих дуг с дугами, описанными из фокуса F_1 радиусами B_1, B_2, B_3 и т. д., и будут точками гиперболы.

§ 5. Парабола.

1. Парабола и ее элементы.

- 1) У параболы одна ось симметрии OX , один фокус F , одна директриса и одна вершина.
- 2) Директриса параболы перпендикулярна оси симметрии и находится на расстоянии p от фокуса (p —параметр).
- 3) Вершина параболы находится на расстоянии $\frac{p}{2}$ от фокуса и на таком же расстоянии от директрисы.
- 4) Эксцентриситет e (астрономический) параболы равен единице: $e = 1$.
- 5) Параметр p параболы—см. п. 2.
- 6) Расстояние от любой точки параболы до фокуса равно расстоянию той же точки до директрисы: $r = d$.
- 7) Касательная в точке M к параболе делит пополам угол FME .
- 8) Нормаль в точке M к параболе делит пополам угол FMK .
- 9) Все диаметры параболы параллельны оси симметрии.
- 10) Директриса параболы есть геометрическое место вершин прямых углов, стороны которых являются касательными к параболе.
- 11) Для точки M параболы угол NMF между касательной и радиусом-вектором равен углу LMN между ординатой точки и нормалью.
- 12) Угол между двумя касательными к параболе равен половине угла между радиусами-векторами точек касания.
- 13) Касательная к параболе в вершине есть геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из фокуса на касательные к параболе (напр., FJ).



Черт. 43.

II. Различные виды уравнений параболы.

1) Общее уравнение

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

является уравнением параболы при условии:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$

2) Каноническое уравнение.

Если ось абсциссы совпадает с осью симметрии:

$$y^2 = 2px.$$

Если ось ординаты совпадает с осью симметрии:

$$x^2 = 2py.$$

3) Уравнение параболы, отнесенной к фокусу:

$$y^2 = 2px + p^2.$$

4) Полярное уравнение параболы с фокусом в полюсе:

$$r = \frac{p}{1 + \cos \varphi} = \frac{p}{2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

5) Ур-ие параболы (черт. 44):

$$y = a + bx + cx^2.$$

У этой параболы ось симметрии параллельна оси Y , а вершина находится в точке $A(x_0, y_0)$, координаты которой определяются так:

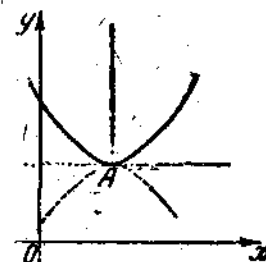
$$x_0 = -\frac{b}{2c}; y_0 = a - \frac{b^2}{4c}.$$

При $c > 0$ отверстие параболы направлено вверх.

При $c < 0$ отверстие направлено вниз.

Перенеся начало координат в вершину, параллельно передвигаем систему, мы придем к каноническому ур-ию параболы вида:

$$y = cx^2.$$



Черт. 44.

III. Представления, связанные с рассмотрением канонического ур-ия параболы.

Если дано каноническое ур-ие параболы

$$y^2 = 2px,$$

то:

1) Ур-ие директрисы параболы:

$$x = -\frac{p}{2}.$$

2) Радиус-вектор параболы.

Для всякой точки параболы

$$r = x + \frac{p}{2}.$$

3) Ур-ие диаметра, образованного серединами хорд направления k (k —угловой коэф-т хорд):

$$y = \frac{p}{k}.$$

4) Ур-ие касательной к параболе в точке (x_1, y_1) :

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

5) Ур-ие нормали в точке (x_1, y_1) :

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1).$$

6) Длина касательной для точки (x, y) :

$$T = \sqrt{2x(p + 2x)} = \sqrt{y^2 + 4x^2}.$$

7) Длина нормали для точки (x, y) :

$$N = \sqrt{p(2x + p)} = \sqrt{y^2 + p^2}.$$

8) Длина подкасательной для точки (x, y) :

$$S_t = 2x,$$

т. е. равна удвоенной абсциссе точки касания.

9) Длина поднормали для точки (x, y) :

$$S_n = p,$$

т. е. равна параметру.

10) Радиус кривизны в точке (x, y) :

$$\rho = \frac{(p + 2x)^{\frac{3}{2}}}{y' p} = \frac{N^3}{p^3} = \frac{(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^3}.$$

В вершине $\rho = p$.

11) Координаты центра кривизны

$$\alpha = p + x; \beta = \frac{2y(p+x)}{p}.$$

12) Ур-ие эволюты:

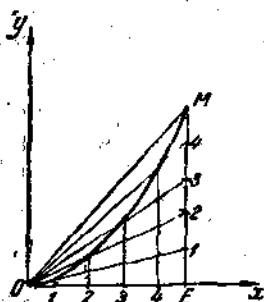
$$\beta^3 = \frac{8}{27p} (\alpha - p)^3.$$

13) Площадь OMA :

$$P = \frac{2}{3} xy.$$

14) Длина дуги OM :

$$S = \frac{p}{2} \left\{ \sqrt{\frac{2x}{p} \left(1 + \frac{2x}{p} \right)} + \ln \left[\sqrt{\frac{2x}{p}} + \sqrt{1 + \frac{2x}{p}} \right] \right\} = \\ = \frac{y}{2p} \sqrt{y^2 + p^2} + \frac{p}{2} \ln \frac{y + \sqrt{y^2 + p^2}}{p}.$$

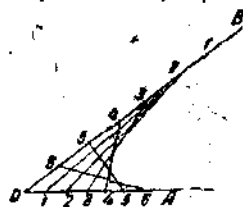


Черт. 45.

IV. Построение параболы.

1) Даны: ось симметрии параболы OY , вершина O и какая-нибудь точка параболы M .

Разделив абсциссу OE точки M и ее ординату ME на одинаковое число равных частей, соединяют лучами вершину O с точками деления ординаты, затем в точках деления абсциссы восстанавливают перпендикуляры, про-



Черт. 46.

должая каждый из них до пересечения с лучом соответствующего ему номера. Полученные точки пересечения и будут точками параболы.

2) Даны две касательные OA и OB и их точки касания A и B . Делим OA и OB на произвольное, но одинаковое число частей. Прямые 11, 22, 33 и т. д. будут касательными к параболы.

Кривые, имеющие уравнение вида $y = c \cdot x^n$.

§ 1. Параболические кривые,

Ур-ие

$$y = c \cdot x^n$$

при n целом и положительном является ур-ием параболы. Степень ур-ия определяет порядок кривой.

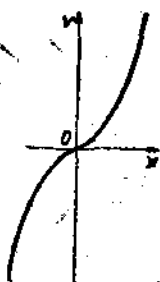
1) $n=1$. При $n=1$ имеем ур-ие прямой линии, проходящей через начало координат:

$$y = cx.$$

2) $n=2$. При $n=2$ имеем параболу второго порядка:

$$y = cx^2,$$

с вершиной в начале координат и с осью симметрии, направленной по оси Y .



Черт. 47.

3) $n=3$. При $n=3$ имеем параболу третьего порядка (кубическую, черт. 47):

$$y = cx^3.$$

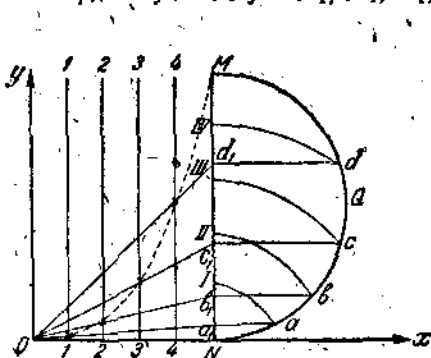
Если эта парабола проходит через точку $M(x_0, y_0)$, то у-е принимает вид:

$$y = y_0 \frac{x^3}{x_0^3}.$$

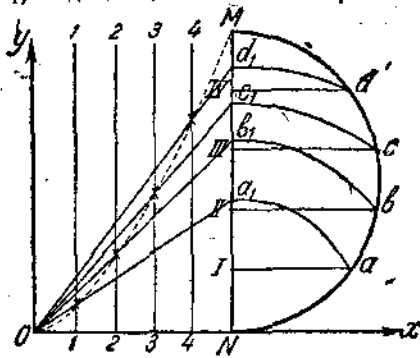
Построение (черт. 48).

Строим данную точку параболы $M(x_0, y_0)$. Делим абсциссу ON и ординату MN на одинаковое число равных частей. На ординате MN , как на диаметре, строим полуокружность MQN . Из точки N , как из центра, описываем дуги радиусами NI , NI' , NI'' и т. д. от ординаты MN до окружности MQN .

Точки a, b, c, d пересечения этих дуг с окружностью MQN проектируем на ординату MN . Лучи Oa_1, Ob_1, Oc_1, Od_1 , соединяющие полученные проек-



Черт. 48.



Черт. 49.

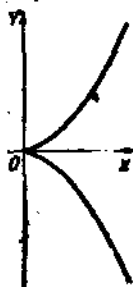
ции с началом координат, пересекут перпендикуляры соответствующих номераций, восстановленные к абсциссе ON в точках, лежащих на параболе.

4) Подкубическая парабола (черт. 50):

$$y = cx^{\frac{2}{3}}.$$

Эта кривая симметрична относительно оси X , имеет в начале координат точку возврата и простирается своими ветвями в бесконечность.

Построение аналогично построению парабол второго и третьего порядка (черт. 49).



Черт. 50.

§ 2. Гиперболические кривые.

Ур-ие

$$y = cx^{\frac{1}{n}}$$

при n целом и отрицательном является ур-ием гиперболы.

1) $n = -1$. При $n = -1$ имеем ур-ие равнобочной гиперболы:

$$y = \frac{c}{x},$$

относительной к асимптотам, как к координатным осям.

параллельную оси Y , то точка P пересечения этих прямых и будет искомой точкой кривой.

Используя точку P аналогично предшествующему, мы найдем точку P_1 кривой и т. д.

Циклоидальные кривые.

§ 1. Циклоида.

1) Циклоидой называется кривая, описываемая точкой A окружности AB , катящейся без скольжения по прямой AC .

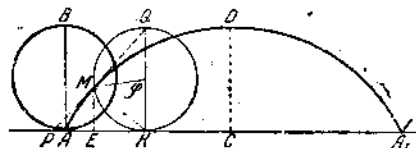
2) Ур-ие циклоиды:

$$x = r \cdot \arctan \cos \frac{r-y}{r} \pm \sqrt{y(2r-y)},$$

или, в параметрической форме:

$$x = r(\varphi - \sin \varphi); \quad y = r(1 - \cos \varphi).$$

3) Касательная к циклоиде в точке M проходит через наивысшую точку Q производящего круга соответствующего положения, а нормаль через наивысшую точку K того же круга.



Черт. 53.

4) Длина касательной $\overline{MP}$:

$$T = y \sqrt{\frac{2r}{2r-y}}.$$

5) Длина нормали $\overline{MK}$:

$$N = \sqrt{2ry} = 2r \cdot \sin \frac{\varphi}{2}.$$

6) Длина подкасательной $\overline{EP}$:

$$S_t = y - \sqrt{\frac{y}{2r-y}}.$$

7) Длина поднормали $\overline{EK}$:

$$S_n = \sqrt{y(2r-y)}.$$

8) Радиус кривизны:

$$\rho = 4r \cdot \sin \frac{\varphi}{2} = 2 \sqrt{2ry} = 2N.$$

В вершине кривой, а именно, в точке D $\rho = 4r$, а в точке A $\rho = 0$.

9) Эволюта циклоиды—такая же циклоида, как и данная, но иного расположения.

10) Площадь, ограниченная одной веткой циклоиды, ADA_1 :

$$P = 3\pi r^2.$$

11) Площадь AME :

$$AME = r^2 \left(\frac{3}{2} \varphi - 2 \sin \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) = \frac{3}{2} rx - \frac{y}{2} \sqrt{y(2r-y)}.$$

12) Длина дуги AM циклоиды:

$$s = 4r \left(1 - \cos \frac{\varphi}{2} \right) = 4r - 2 \sqrt{2r(2r-y)}.$$

Длина дуги полной ветки циклоиды $= 8r$.

13) Растянутые и сжатые циклоиды образуются точками, находящимися соответственно внутри или снаружи катящегося круга.

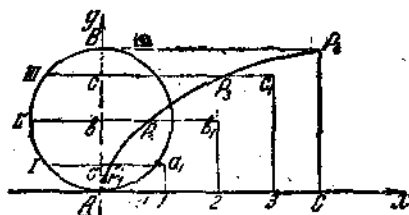
Ур-ия каждой из этих циклоид:

$$x = r\varphi - p \cdot \sin \varphi; \quad y = r - p \cdot \cos \varphi,$$

где p —расстояние образующей точки от центра круга.

14) Построение циклоиды.

Отложим на оси X отрезок AC , равный дуге $AB = \pi r$. Разделим отрезок AC и дугу AB на одинаковое число равных частей, напр., на четыре, проведем через точки I, II, III и B параллели к оси X до встречи в точках a_1, b_1, c_1 и P_4 с перпендикулярами к оси X в точках $1, 2, 3$ и C . Отложив на указанных параллелях, начиная от точек a_1, b_1, c_1 , отрезки, соответственно равные $al, bli, ciii$, получим точки циклоиды P_1, P_2, P_3 и P_4 .



Черт. 54.

§ 2. Эпициклоида.

Эпициклоидой называется кривая, описываемая точкой A окружности радиуса r , катящейся без скольжения по внешней части окружности радиуса R .

Положив $R = nr$ и обозначив угол, описываемый радиусом образующего круга, через ψ , мы будем иметь ур-ия эпициклоиды в таком виде:

$$x = r(m \cdot \cos \varphi - \cos m\varphi);$$

$$y = r(m \cdot \sin \varphi - \sin m\varphi),$$

где

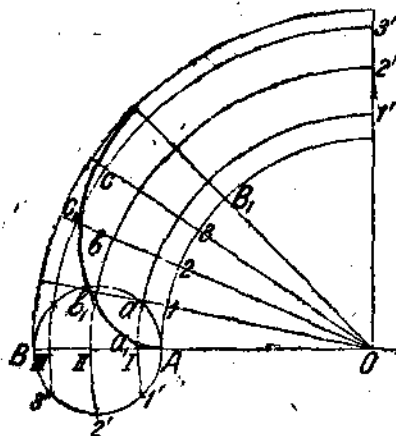
$$m = n + 1; \psi = n\varphi.$$

Построение.

На основной окружности отложим дугу AB_1 , равную полуокружности образующего круга, и разделим эту дугу и дугу AB на одинаковое число равных частей. Из центра O радиусами OI, OZ, OZ' и OB опишем дуги концентрических кругов, пересекающих диаметр AB в точках I, II, III и B .

Если теперь провести из центра O лучи через точки $A, I, 2, 3$ и B_1 , то каждый луч пересечет дугу соответствующей номерации в некоторой точке: луч OI — в точке a , луч OZ — в точке b и т. д. Отложив на дугах отрезки aa_1, bb_1, cc_1 , соответственно равные отрезкам $I-1', II-2', III-3'$, мы

получим точки A, a_1, b_1, c_1 , принадлежащие эпициклоиде.



Черт. 55.

§ 3. Кардиоида.

При $n = 1$, т. е. при $r = R$, эпициклоида обращается в кардионду, ур-ия к-рой будут:

$$x = r(2 \cos \varphi - \cos 2\varphi);$$

$$y = r(2 \sin \varphi - \sin 2\varphi),$$

или:

$$(x^2 + y^2 - 2Rx)^2 = 4R^2(x^2 + y^2),$$

или, в полярных координатах r и φ :

$$r = 2R(1 + \cos \varphi).$$

Получиле «
И. Г. Голубич. Библ.

§ 4. Гипоциклоида.

Гипоциклоидой называется кривая, описываемая точкой A окружности радиуса r , катящейся без скольжения по внутренней части окружности радиуса R .

Если $R = nr$, угол, описываемый радиусом-вектором — φ , то ур-ия гипоциклоиды будут:

$$x = r(m \cdot \cos \varphi + \cos m\varphi);$$

$$y = r(m \cdot \sin \varphi + \sin m\varphi),$$

где

$$m = n - 1; \quad \psi = n\varphi.$$

Построение аналогично построению эпициклоиды.

§ 5. Астроида.

При $n = 4$ и, следовательно, при $R = 4r$ и $m = 3$ гипоциклоида обращается в астроида, ур-ия к-рой будут:

$$x = r(3 \cos \varphi + \cos 3\varphi);$$

$$y = r(3 \sin \varphi + \sin 3\varphi),$$

или:

$$x = 4r \cdot \cos^3 \varphi; \quad y = 4r \cdot \sin^3 \varphi,$$

или:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}.$$

Синусоидальные кривые.

§ 1. Синусоидальные кривые.

Синусоидальной кривой называется кривая, к-рая является графиком периодической ф-ии:

$$y = a \cdot \sin(kx + b).$$

К синусоидальным же кривым относится и кривая:

$$y = a \cdot \cos(kx + b),$$

так как:

$$\cos(kx + b) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + kx + b\right).$$

§ 2. Влияние параметров a , k и b на характер кривой.

Синусоида

$$y = a \cdot \sin(kx + b)$$

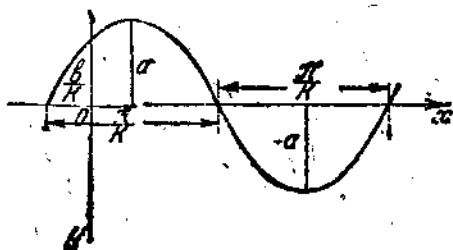
имеет вид черт. 56.

Как мы видим:

1) a влияет только на величину ординат: при изменении a все ординаты или увеличиваются, или уменьшаются в одном и том же отношении. Наибольшая ордината по абсолютной величине равна a .

2) k влияет только на величину отрезков, отсекаемых кривою на оси X , при чем при увеличении k кривая сжимается, а при уменьшении растягивается.

Т. к. каждые два смежных отрезка на оси X дают длину волны, то k , следовательно, влияет на длину волны.



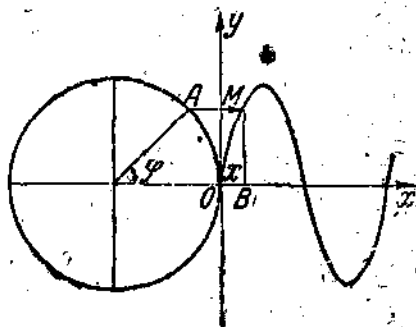
Черт. 56.

3) b влияет только на расположение всей системы точек кривой относительно оси Y , так что при изменении b мы кривую сдвигаем по направлению оси X .

§ 3. Построение синусоиды

$$y = a \cdot \sin kx.$$

Возьмем окружность радиуса a с центром на оси X , касающуюся оси ординат. Отложим дугу $\varphi = kx$ от точки O в направлении, противоположном движению часовой стрелки, а на оси абсцисс отложим абсциссу $OB = x$. Прямая, проходящая через конец дуги A параллельно оси X , пересечет перпендикуляр, восстановленный в точке B к оси X , в точке M , лежащей на синусоиде.



Черт. 57.

§ 4. Построение синусоиды.

$$y = a \cdot \sin(kx + b).$$

Чтобы построить эту синусоиду, строят сначала синусоиду

$$y = a \cdot \sin kx,$$

а затем начало координат передвигают на отрезок $\frac{b}{k}$ — вправо при положительном и влево при отрицательном значении b .

§ 5. Сложение синусоидальных величин.

Две синусоиды одной и той же частоты ω :

$$y = a_1 \cdot \sin(\omega t + p_1)$$

и

$$y = a_2 \cdot \sin(\omega t + p_2),$$

дают в сумме синусоиду той же частоты;

$$y = a \cdot \sin(\omega t + p),$$

где:

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cdot \cos(p_2 - p_1)},$$

а начальная фаза p определяется из след. соотношений:

$$a \cdot \cos p = a_1 \cdot \cos p_1 + a_2 \cdot \cos p_2,$$

или:

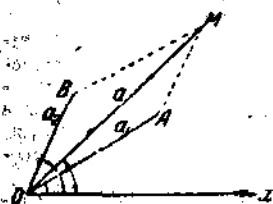
$$a \cdot \sin p = a_1 \cdot \sin p_1 + a_2 \cdot \sin p_2.$$

Если фазы одинаковы, то:

$$a = a_1 + a_2,$$

а если разность фаз равна π , то:

$$a = a_1 - a_2.$$



Черт. 58.

Построение результирующей синусоиды сводится к нахождению вспомогательного ее круга.

Из точки O прямой OX проведем две прямые: OA под углом p_1 и OB под углом p_2 и отложим на первой из них отрезок $OA = a_1$, а на второй отрезок $OB = a_2$. Диагональ OM параллелограмма, построенного на сторонах OA и OB , даст нам амплитуду a результирующей синусоиды, а $MOX = p$ ее наклон к оси OX —начальную ее фазу.

Спирали.

§ 1. Архимедова спираль.

Архимедова спираль (черт. 59) есть кривая, описываемая точкой, равномерно движущейся от полюса по радиусу-вектору, к-рый в свою очередь равномерно вращается около полюса.

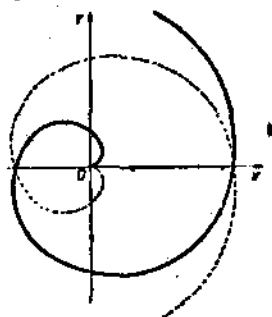
Ур-ие Архимедовой спирали:

$$\rho = a\varphi = \frac{\rho_0}{2\pi} \varphi,$$

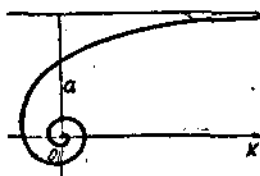
где ρ_0 —путь, проходимый точкой по радиусу-вектору за время его полного оборота около полюса.

§ 2. Гиперболическая спираль.

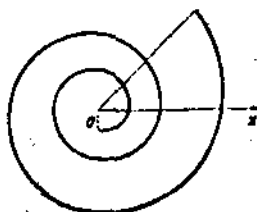
Гиперболическая спираль (черт. 60) есть кривая, к-рая асимптотно приближается к полюсу, делая около него бесконечное число оборотов.



Черт. 59.



Черт. 60.



Черт. 61.

Ур-ие гиперболической спирали:

$$\rho = \frac{a}{\varphi},$$

откуда видно, что гиперболическая спираль есть геометрическое место точек, радиусы-векторы к-рых обратно пропорциональны полярным углам.

Гиперболическая спираль имеет асимптоту, параллельную полярной оси и находящуюся от нее на расстоянии a .

§ 3. Логарифмическая спираль.

Логарифмическая спираль (черт. 61) есть кривая, к-рая асимптотно приближается к полюсу, делая вокруг него бесконечное число оборотов.

Развертываясь, логарифмическая спираль уходит в бесконечность.

Ур-ие логарифмической спирали:

$$\rho = e^{a\varphi},$$

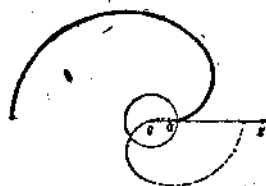
или:

$$\ln \rho = a\varphi.$$

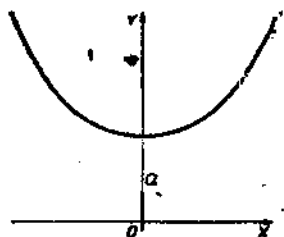
§ 4. Параболическая спираль.

Ур-ие (черт. 62):

$$(p - a)^2 = 4as\varphi.$$



Черт. 62.



Черт. 63.

Цепная линия.

Цепная линия (черт. 63) представляет собою кривую, по к-рой располагается тяжелая, гибкая и нерастяжимая нить, неподвижно подвешенная своими концами.

Ур-ие цепной линии:

$$y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) \quad (1)$$

где:

$$a = \frac{H}{P},$$

при чем H —сила натяжения в вершине, P —вес линейной единицы нити.

Разлагая $e^{\frac{x}{a}}$ и $e^{-\frac{x}{a}}$ в бесконечные ряды, мы ур-ие (1) можем переписать так:

$$y = a \left(1 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{x^4}{a^4} + \dots \right).$$

При малой изогнутости линии это ур-ие может быть заменено ур-ием параболы:

$$x^2 = 2a(y - a)$$

В гиперболических ф-ях ур-ие цепной линии имеет вид:

$$y = a \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a},$$

откуда:

$$x = a \cdot \operatorname{ar} \operatorname{ch} \frac{y}{a}.$$

Ординаты кривой вычисляются при помощи гиперболических ф-ий (см. табл. на стр. 53).

Прямая и кривая в пространстве.

Метод координат в пространстве.

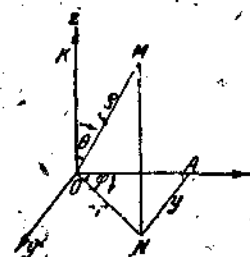
§ 1. Определение положения точки в пространстве.

Положение точки M в пространстве (черт. 64) можно определить:

1) абсциссой $x = OA$, ординатой $y = AN$ и аппликатой $z = NM$;

2) радиусом-вектором $\rho = OM$; углом $\varphi = \angle AON$ и углом $\theta = \angle KOM$ (сферические или полярные координаты), при чем $\rho > 0$; $0 \leq \varphi \leq \leq 2\pi$; $0 \leq \theta \leq \pi$;

3) радиусом-вектором $r = ON$; углом $\varphi = \angle AON$ и аппликатой $z = NM$ (цилиндрические координаты), при чем $r > 0$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.



Черт. 64.

координаты), при чем $r > 0$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

§ 2. Ф-лы перехода от одной системы координат к другой.

1) Переход от прямоугольных координат к полярным и обратно:

$$x = \rho \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi;$$

$$y = \rho \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi;$$

$$z = \rho \cdot \cos \theta,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$\cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

или:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z};$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

2) Переход от прямоугольных координат к цилиндрическим и обратно:

$$x = r \cdot \cos \varphi;$$

$$y = r \cdot \sin \varphi;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

или:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

§ 3. Преобразование координат.

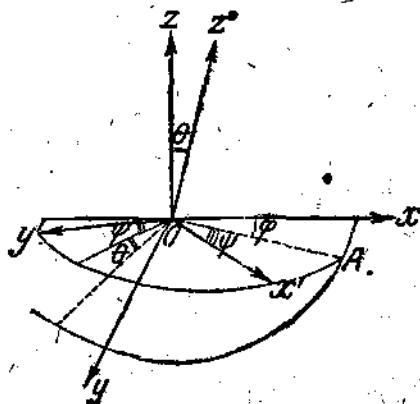
1) Перенесение начала.

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ — координаты точки по старой системе; x, y, z — по новой и a, b, c — координаты нового начала по старой системе:

$$\bar{x} = x + a; \bar{y} = y + b; \bar{z} = z + c.$$

2) Поворот осей.

Чтобы систему XYZ перевести в положение $X'Y'Z'$ (черт. 65), надо сделать три поворота: 1) поворачиваем систему XYZ около оси Z на угол φ так, чтобы ось OX совпала с линией пересечения OA плоскостей XOY и $X'OY'$; 2) полученную систему поворачиваем вокруг оси OA на угол θ так, чтобы ось Z совпала с осью Z' , и наконец 3) полученную систему поворачиваем около оси Z' на угол ψ так, чтобы ось OA совпала с осью X' .



Черт. 65.

Обозначая координаты точки по старой системе через $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, а по новой через x, y, z , будем иметь:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x(\cos \varphi \cdot \cos \psi - \sin \varphi \cdot \sin \psi \cdot \cos \theta) - \\ &- y(\cos \varphi \cdot \sin \psi + \sin \varphi \cdot \cos \psi \cdot \cos \theta) + z \cdot \sin \varphi \cdot \sin \theta; \\ \bar{y} &= x(\sin \varphi \cdot \cos \psi + \cos \varphi \cdot \sin \psi \cdot \cos \theta) + \\ &+ y(-\sin \varphi \cdot \sin \psi + \cos \varphi \cdot \cos \psi \cdot \cos \theta) - z \cdot \cos \varphi \cdot \sin \theta; \\ \bar{z} &= x \cdot \sin \psi \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \psi \cdot \sin \theta + z \cdot \cos \theta. \end{aligned}$$

Ф-лы преобразования можно брать в виде:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x \cdot \cos \alpha_1 + y \cdot \cos \alpha_2 + z \cdot \cos \alpha_3; \\ \bar{y} &= x \cdot \cos \beta_1 + y \cdot \cos \beta_2 + z \cdot \cos \beta_3; \\ \bar{z} &= x \cdot \cos \gamma_1 + y \cdot \cos \gamma_2 + z \cdot \cos \gamma_3, \end{aligned}$$

где $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ — углы оси OX' со старыми осями, $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ — углы оси OY' и $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ — углы оси OZ' со старыми осями.

Между этими девятью углами существуют соотношения:

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 &= 1. & \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2 + \\ &+ \cos \gamma_1 \cdot \cos \gamma_2 &= 0; \\ \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \gamma_2 &= 1. & \cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_3 + \cos \beta_2 \cdot \cos \beta_3 + \\ &+ \cos \gamma_2 \cdot \cos \gamma_3 &= 0; \\ \cos^2 \alpha_3 + \cos^2 \beta_3 + \cos^2 \gamma_3 &= 1. & \cos \alpha_3 \cdot \cos \alpha_1 + \cos \beta_3 \cdot \cos \beta_1 + \\ &+ \cos \gamma_3 \cdot \cos \gamma_1 &= 0. \end{aligned}$$

3) Общее преобразование.

При одновременном перенесении начала координат в точку (a, b, c) и повороте осей имеем:

$$\bar{x} = x \cdot \cos \alpha_1 + y \cdot \cos \alpha_2 + z \cdot \cos \alpha_3 + a;$$

$$\bar{y} = x \cdot \cos \beta_1 + y \cdot \cos \beta_2 + z \cdot \cos \beta_3 + b;$$

$$\bar{z} = x \cdot \cos \gamma_1 + y \cdot \cos \gamma_2 + z \cdot \cos \gamma_3 + c.$$

Прямая в пространстве.

§ 1. Длина d отрезка прямой по данным координатам его концов.

Длина d отрезка прямой по данным координатам его концов (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) определяется ф-лой:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2},$$

а расстояние d точки (x_1, y_1, z_1) от начала координат—ф-лой:

$$d = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

§ 2. Деление отрезка прямой в данном отношении.

Координаты точки $M(x, y, z)$, делящей отрезок прямой M_1M_2 , ограниченной точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ в отношении $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda = \frac{m}{n}$, определяются так:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda},$$

или:

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n}; \quad y = \frac{ny_1 + my_2}{m + n}; \quad z = \frac{nz_1 + mz_2}{m + n}.$$

Если точка M будет средина отрезка, то:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

§ 3. Направляющие косинусы прямой.

Если прямая образует с осями координат углы α, β, γ , то:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1;$$

$$\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}; \quad \cos \beta = \frac{y_2 - y_1}{d}; \quad \cos \gamma = \frac{z_2 - z_1}{d},$$

где

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

§ 4. Виды уравнений прямой.

1) Прямая в пространстве определяется как пересечение двух плоскостей и дается совокупностью двух ур-ний:

$$Ax + By + Cz + D = 0;$$

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0.$$

2) Определяя положение прямой пересечением плоскостей, проектирующих ее на плоскости XOZ и YOZ , будем иметь ур-ия ее в виде:

$$x = mz + a;$$

$$y = nz + b,$$

где a и b — координаты точки пересечения ее с плоскостью XOY .

3) Нормальные ур-ия прямой:

$$\frac{x - x_1}{\cos \alpha} = \frac{y - y_1}{\cos \beta} = \frac{z - z_1}{\cos \gamma},$$

где x_1, y_1, z_1 — координаты одной из точек прямой; α, β, γ — углы прямой с осями координат.

4) Канонические ур-ия прямой:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p},$$

где x_1, y_1, z_1 — координаты одной из точек прямой, m, n, p — числа, пропорциональные направляющим косинусам:

$$m : n : p = \cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma.$$

Чтобы канонические ур-ия прямой привести к нормальному виду, надо знаменатели его умножить на нормирующий множитель:

$$M = \pm \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Следовательно:

$$\cos \alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}; \cos \beta = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}; \cos \gamma = \frac{p}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Знак нормирующего множителя определяет направление прямой.

5) Ур-ия прямой, проходящей через точки $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

6) Ур-ия прямой, проходящей через начало координат:

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}.$$

7) Ур-ие прямой, параллельной плоскости XOY :

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{0}.$$

8) Ур-ие прямой, параллельной оси OX :

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{0} = \frac{z - z_1}{0}.$$

9) Ур-ие оси OX :

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}.$$

§ 5. Угол между двумя прямыми.

Если прямые даны ур-иями:

$$\frac{x-x_1}{\cos \alpha} = \frac{y-y_1}{\cos \beta} = \frac{z-z_1}{\cos \gamma};$$

$$\frac{x-x_2}{\cos \alpha_1} = \frac{y-y_2}{\cos \beta_1} = \frac{z-z_2}{\cos \gamma_1},$$

то угол между ними определяется ф-лой:

$$\cos \varphi = \cos \alpha \cdot \cos \alpha_1 + \cos \beta \cdot \cos \beta_1 + \cos \gamma \cdot \cos \gamma_1.$$

Если прямые даны ур-иями:

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p};$$

$$\frac{x-x_2}{m_1} = \frac{y-y_2}{n_1} = \frac{z-z_2}{p_1},$$

то:

$$\cos \varphi = \pm \frac{mm_1 + nn_1 + pp_1}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}}.$$

§ 6. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.

1) Прямые параллельны, если:

$$\cos \alpha = \cos \alpha_1, \cos \beta = \cos \beta_1, \cos \gamma = \cos \gamma_1,$$

или:

$$\frac{m}{m_1} = \frac{n}{n_1} = \frac{p}{p_1}.$$

2) Прямые взаимно перпендикулярны, если:

$$\cos \alpha \cdot \cos \alpha_1 + \cos \beta \cdot \cos \beta_1 + \cos \gamma \cdot \cos \gamma_1 = 0;$$

$$mm_1 + nn_1 + pp_1 = 0.$$

§ 7. Условия пересечения двух прямых.

Прямые, данные ур-иями:

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p};$$

$$\frac{x-x_2}{m_1} = \frac{y-y_2}{n_1} = \frac{z-z_2}{p_1},$$

пересекаются, если:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m & n & p \\ m_1 & n_1 & p_1 \end{vmatrix} = 0.$$

§ 8. Угол между прямой и плоскостью.

Если прямая и плоскость даны ур-иями:

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p};$$

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

(1)

(2)

то угол φ между ними определяется ф-лой:

$$\sin \varphi = \pm \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

§ 9. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

1) Прямая и плоскость параллельны, если:

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

2) Прямая и плоскость перпендикулярны, если:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

§ 10. Условия совпадения прямой с плоскостью.

Прямая (1) лежит в плоскости (2) (см. § 8), если

$$4x_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0;$$

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

Кривая в пространстве.

§ 1. Уравнения кривой в пространстве.

1) Кривая в пространстве определяется как пересечение двух поверхностей и дается совокупностью двух ур-ий:

$$f(x, y, z) = 0; F(x, y, z) = 0.$$

2) Определяя положение кривой пересечением цилиндрических поверхностей, образующие к-рых параллельны соответственно осям OZ и OY , будем иметь ур-ия в виде:

$$y = f_1(x); z = f_2(x).$$

3) Выражая текущие координаты, как ф-ии параметра t , получим ур-ия:

$$x = \varphi(t); y = \psi(t); z = \chi(t).$$

§ 2. Дифференциал дуги кривой.

1) В прямоугольных координатах:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx = \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} dy = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2} dz = \\ &= \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2} dt. \end{aligned}$$

2) В полярных координатах:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{\rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + d\rho^2} = \sqrt{\rho^2 + \rho^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta = \\ &= \sqrt{\rho^2 \left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2 + \rho^2 \sin^2 \theta + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2} d\varphi = \sqrt{1 + \rho^2 \left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2 + \rho^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right)^2} d\rho. \end{aligned}$$

§ 3. Уравнение касательной к кривой.

Ур-ие касательной к кривой в точке (x, y, z) , соответствующей значению параметра t , имеет вид:

$$\frac{X-x}{\varphi'(t)} = \frac{Y-y}{\psi'(t)} = \frac{Z-z}{\chi'(t)}, \text{ или: } \frac{X-x}{ds} = \frac{Y-y}{dy} = \frac{Z-z}{dz}.$$

§ 4. Направляющие косинусы касательной.

$$\cos \alpha = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \frac{dx}{ds};$$

$$\cos \beta = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \frac{dy}{ds};$$

$$\cos \gamma = \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \frac{dz}{ds}.$$

§ 5. Уравнение нормальной плоскости.

Нормальной плоскостью называется плоскость, перпендикулярная к касательной прямой и проходящая через точку касания. Ур-не ее к кривой в точке (x, y, z) , соответствующей значению параметра t , имеет вид:

$$(X-x)\varphi'(t) + (Y-y)\psi'(t) + (Z-z)\chi'(t) = 0;$$

или:

$$(X-x)dx + (Y-y)dy + (Z-z)dz = 0.$$

§ 6. Уравнение соприкасающейся плоскости (плоскости кривизны).

Соприкасающейся плоскостью называется предельное положение плоскости, проходящей через три бесконечно-близкие точки кривой. Ее ур-не:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \end{vmatrix} = 0$$

или в раскрытой форме:

$$(X-x)(dy d^2z - dz d^2y) + (Y-y)(dz d^2x - dx d^2z) + \\ + (Z-z)(dx d^2y - dy d^2x) = 0.$$

§ 7. Уравнение бинормали.

Бинормалью называется прямая, проведенная через точку кривой перпендикулярно соприкасающейся плоскости. Ур-не ее:

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} \frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds} \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \end{vmatrix}}$$

или в раскрытой форме:

$$\frac{X-x}{dy d^2z - dz d^2y} = \frac{Y-y}{dz d^2x - dx d^2z} = \frac{Z-z}{dx d^2y - dy d^2x}.$$

§ 8. Направляющие косинусы бинормали.

$$\cos \lambda = \frac{\begin{vmatrix} \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \end{vmatrix}^2}} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \end{vmatrix}}{ds};$$

$$\cos \mu = \frac{\begin{vmatrix} \frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds} \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \end{vmatrix}^2}} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds} \end{vmatrix}}{ds};$$

$$\cos \nu = \frac{\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \end{vmatrix}^2}} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \end{vmatrix}}{ds},$$

где ρ — радиус кривизны.

§ 9. Уравнения главной нормали.

Пересечение нормальной плоскости в точке (x, y, z) с соприкасающейся плоскостью в той же точке дает главную нормаль в этой точке. Ее уравнения:

$$\frac{X-x}{\left| \frac{ds}{ds} \frac{dx}{ds} \right|} = \frac{Y-y}{\left| \frac{ds}{ds} \frac{dy}{ds} \right|} = \frac{Z-z}{\left| \frac{ds}{ds} \frac{dz}{ds} \right|}$$

или в раскрытом виде:

$$\frac{X-x}{ds^2 \frac{dx}{ds} - dx \frac{ds^2}{ds}} = \frac{Y-y}{ds^2 \frac{dy}{ds} - dy \frac{ds^2}{ds}} = \frac{Z-z}{ds^2 \frac{dz}{ds} - dz \frac{ds^2}{ds}}.$$

§ 10. Направляющие косинусы главной нормали.

$$\cos l = \frac{\left| \frac{ds}{ds} \frac{dx}{ds} \right|}{\sqrt{\left| \frac{ds}{ds} \frac{dx}{ds} \right|^2 + \left| \frac{ds}{ds} \frac{dy}{ds} \right|^2 + \left| \frac{ds}{ds} \frac{dz}{ds} \right|^2}};$$

$$\cos m = \frac{\left| \frac{ds}{ds} \frac{dy}{ds} \right|}{\sqrt{\left| \frac{ds}{ds} \frac{dx}{ds} \right|^2 + \left| \frac{ds}{ds} \frac{dy}{ds} \right|^2 + \left| \frac{ds}{ds} \frac{dz}{ds} \right|^2}};$$

$$\cos n = \frac{\left| \frac{ds}{ds} \frac{dz}{ds} \right|}{\sqrt{\left| \frac{ds}{ds} \frac{dx}{ds} \right|^2 + \left| \frac{ds}{ds} \frac{dy}{ds} \right|^2 + \left| \frac{ds}{ds} \frac{dz}{ds} \right|^2}}.$$

§ 11. Кривизна кривой.

Радиус кривизны в точке (x, y, z) кривой определяется по формуле:

$$\rho = \frac{ds^3}{\sqrt{\left| \frac{dy}{ds} \frac{dz}{ds} \right|^2 + \left| \frac{dz}{ds} \frac{dx}{ds} \right|^2 + \left| \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} \right|^2}}$$

или в раскрытой форме:

$$\rho = \frac{ds^3}{\sqrt{(dy \frac{dz}{ds} - dz \frac{dy}{ds})^2 + (dz \frac{dx}{ds} - dx \frac{dz}{ds})^2 + (dx \frac{dy}{ds} - dy \frac{dx}{ds})^2}}.$$

Координаты центра круга кривизны в точке (x, y, z) кривой определяются по формулам:

$$\xi = x + \rho^2 \frac{d^2x}{ds^2}; \quad \eta = y + \rho^2 \frac{d^2y}{ds^2}; \quad \zeta = z + \rho^2 \frac{d^2z}{ds^2}.$$

§ 12. Кручение, или вторая кривизна.

Если на кривой взять две точки M и N , то угол ϕ между соприкасающимися плоскостями в точках M и N или равный ему угол между бинормальными в этих точках указывает на уклонение кривой от соприкасающейся плоскости в точке M на протяжении MN .

Кручением T кривой в точке M называется $\lim \frac{\phi}{MN}$ при бесконечном приближении N к M , а $\frac{1}{T}$ называется радиусом кручения и определяется по формуле:

$$\frac{1}{T} = r = \frac{\left| \frac{dy}{ds} \frac{dz}{ds} \right|^2 + \left| \frac{dz}{ds} \frac{dx}{ds} \right|^2 + \left| \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} \right|^2}{\left| \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} \frac{dz}{ds} \right|}.$$

§ 13. Формулы Серре-Френэ.

$$d(\cos \alpha) = \frac{\cos l}{p} ds; \quad d(\cos \lambda) = \frac{\cos l}{r} ds; \quad d(\cos l) = \left(-\frac{\cos \alpha}{p} - \frac{\cos \lambda}{r} \right) ds;$$

$$d(\cos \beta) = \frac{\cos m}{p} ds; \quad d(\cos \mu) = \frac{\cos m}{r} ds; \quad d(\cos m) = \left(-\frac{\cos \beta}{p} - \frac{\cos \mu}{r} \right) ds;$$

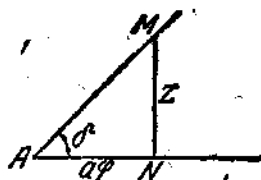
$$d(\cos \gamma) = \frac{\cos n}{p} ds; \quad d(\cos \nu) = \frac{\cos n}{r} ds; \quad d(\cos n) = \left(-\frac{\cos \gamma}{p} - \frac{\cos \nu}{r} \right) ds$$

(обозначения §§ 4, 8, 10, 11, 12).

§ 14. Винтовая линия.

Если мы возьмем угол $MAN = \delta$ (черт. 66) и будем навивать плоскость этого угла на прямой круглый цилиндр так, чтобы линия AN пошла по окружности основания цилиндра (черт. 67), то линия AM образует винтовую линию; ур-ня к-рой будут:

$$x = a \cdot \cos \varphi; \quad y = a \sin \varphi; \quad z = a \cdot \varphi \cdot \operatorname{tg} \delta.$$



Черт. 66.

Свойства винтовой линии:

1. Кратчайшее расстояние между двумя точками на поверхности цилиндра будет винтовая линия.

2. Касательная к винтовой линии образует постоянный угол с осью OZ , т. е. винтовая линия пересекает все образующие цилиндра под постоянным углом:

$$\cos \gamma = \frac{a \cdot \operatorname{tg} \delta}{\sqrt{a^2 \cdot \sin^2 \varphi + a^2 \cdot \cos^2 \varphi + a^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \delta}} = \sin \delta.$$

3. Винтовая линия—кривая постоянной кривизны, т. к.:

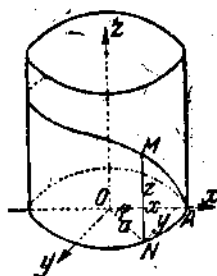
$$\rho = \frac{a}{\cos^2 \delta}.$$

4. Винтовая линия—кривая постоянного кручения, т. к.:

$$\tau = -\frac{2a}{\sin 2\delta}.$$

Длина дуги:

$$s = a\varphi \cdot \cos \delta.$$



Черт. 67.

Плоскости и поверхности.

Плоскости.

§ 1. Виды ур-ий плоскости и связи плоскостей.

1) Общее ур-ие:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

2) Ур-ие в отрезках на осях координат:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

где a, b, c — отрезки на осях OX, OY, OZ .

3) Нормальное ур-ие:

$$x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma - p = 0,$$

где α, β, γ — углы, образованные перпендикуляром, опущенным из начала координат на плоскость, с осями, p — длина этого перпендикуляра.

Чтобы общее ур-ие плоскости привести к нормальному виду, надо все члены его умножить на т. н. нормирующий множитель:

$$M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

при чем знак M обратен знаку D .

Параметры $a, b, c, p, \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ вычисляются по коэф-там общего ур-ия с помощью ф-л:

$$a = -\frac{D}{A}; \quad b = -\frac{D}{B}; \quad c = -\frac{D}{C}; \quad p = \mp \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \quad \cos \beta = \pm \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \quad \cos \gamma = \pm \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

4) Ур-ие плоскости, проходящей через данную точку (x_0, y_0, z_0) :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

5) Ур-ие связи плоскостей, проходящих через прямую, данную совокупностью ур-ий:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

имеет вид:

$$(Ax + By + Cz + D) + \lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0.$$

§ 2. Угол между двумя плоскостями.

Угол φ между двумя плоскостями, данными ур-иями:

$$x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma - p = 0,$$

$$x \cdot \cos \alpha_1 + y \cdot \cos \beta_1 + z \cdot \cos \gamma_1 - p_1 = 0$$

определяется по ф-ле:

$$\cos \varphi = \cos \alpha \cdot \cos \alpha_1 + \cos \beta \cdot \cos \beta_1 + \cos \gamma \cdot \cos \gamma_1.$$

Если ур-ия даны в виде:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\cos \varphi = \pm \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}.$$

§ 3. Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей.

1) Плоскости параллельны, если:

$$\cos \alpha = \cos \alpha_1; \quad \cos \beta = \cos \beta_1; \quad \cos \gamma = \cos \gamma_1$$

или:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}.$$

2) Плоскости взаимно перпендикулярны, если:

$$\cos \alpha \cdot \cos \alpha_1 + \cos \beta \cdot \cos \beta_1 + \cos \gamma \cdot \cos \gamma_1 = 0$$

или:

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0.$$

§ 4. Расстояние от данной точки до данной плоскости.

Чтобы найти расстояние от точки (x_1, y_1, z_1) до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, надо: 1) привести ур-е плоскости к нормальному виду; 2) взять левую часть полученного ур-я и заменить в ней текущие координаты координатами данной точки; полученное число и даст искомое расстояние d :

$$d = \pm \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Поверхности.

§ 1. Уравнения поверхности.

Поверхность дается ур-нем:

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

или:

$$Z = f(x, y). \quad (2)$$

§ 2. Уравнения касательной плоскости.

Ур-е касательной плоскости к поверхности в данной точке ее (x, y, z) будет:

1) если поверхность дана ур-нем (1):

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y-y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z-z) = 0;$$

2) ур-нем (2):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y-y) - (Z-z) = 0.$$

§ 3. Уравнения нормали.

1) Если поверхность дана ур-нем (1):

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}};$$

2) ур-нем (2):

$$\frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z-z}{-1}.$$

§ 4. Направляющие косинусы нормали.

1) Если поверхность дана ур-нем (1):

$$\cos \alpha = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}; \quad \cos \beta = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}};$$

$$\cos \gamma = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}};$$

2) ур-нем (2):

$$\cos \alpha = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}; \cos \beta = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}};$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}.$$

§ 5. Кривизна линий на поверхности.

1) Радиус кривизны ρ нормального сечения (кривая, по к-рой пересекает поверхность плоскость, проходящая через нормаль), проведенного через точку (x, y, z) поверхности (2), определяется по Ф-ле:

$$\rho = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \cos^2 \beta}.$$

где $\cos \alpha, \cos \beta$ — направляющие косинусы касательной к нормальному сечению в точке (x, y, z) .

Пользуясь обозначениями Монжа:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p; \frac{\partial f}{\partial y} = q; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = r; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = s; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = t,$$

$$\rho = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r \cdot \cos^2 \alpha + 2s \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta + t \cdot \cos^2 \beta}.$$

2) Радиус кривизны ρ' произвольной кривой, проведенной по поверхности (2) через точку (x, y, z) , определяется по Ф-ле:

$$\rho' = \rho \cdot \cos \theta \text{ (Ф-ла Менье),}$$

где θ — угол между главной нормалью к кривой в точке (x, y, z) и нормалью к поверхности в той же точке.

§ 6. Кривизна поверхности.

Два взаимно перпендикулярных нормальных сечения, — одно с наибольшей, а другое с наименьшей кривизной, называются главными сечениями.

Радиусы кривизны их R_1 и R_2 называются главными радиусами кривизны в данной точке поверхности.

1) Величины R_1 и R_2 определяются как корни ур-ня:

$$(rt - s^2)R^2 - [(1+q^2)r + (1+p^2)t - 2pqs]\sqrt{1+p^2+q^2}R + (1+p^2+q^2)^2 = 0$$

(обозначения § 5);

2) если $rt - s^2 > 0$, то R_1 и R_2 имеют одинаковые знаки; точка M поверхности эллиптическая (черт. 68);

3) если $rt - s^2 < 0$, то R_1 и R_2 имеют разные знаки; точка M поверхности гиперболическая (черт. 69);

4) если $rt - s^2 = 0$, то или R_1 , или R_2 равны бесконечности; точка M поверхности параболическая (черт. 70).



Черт. 68.



Черт. 69.



Черт. 70.

5) Сумма кривизн двух взаимно перпендикулярных нормальных сечений в данной точке поверхности есть величина постоянная, равная сумме кривизн главных сечений:

$$\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Величина

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{(1+q^2)r + (1+p^2)t - 2pqz}{(1+p^2+q^2)^2}$$

называется средней кривизной поверхности в данной точке.

6) Мерой кривизны поверхности в данной точке будет:

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2} \text{ (Гауссова кривизна).}$$

Гауссова кривизна в эллиптической точке положительна, в гиперболической отрицательна, в параболической равна нулю.

§ 7. Канонические уравнения поверхностей 2-го порядка.

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, — эллипсоид.

а) Если $a = b$, то:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \text{ — эллипсоид вращения;}$$

поверхность вращения эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ вокруг оси Z .

б) Если $a = b = c$, то:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \text{ — шар радиуса } a;$$

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ — однополостный гиперболоид;

если $a = b$, то:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

поверхность вращения гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ вокруг оси Z .

3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$, — двухполостный гиперболоид;

если $a = b$, то:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1;$$

поверхность вращения гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ вокруг оси Z .

4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

Конус, образующие которого являются асимптотами гиперболоидов: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$, т. наз. асимптотический конус,

5) $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$, — эллиптический параболоид;

а) если $p = q$, то

$$x^2 + y^2 = 2pz,$$

поверхность вращения параболы $x^2 = 2pz$ вокруг оси Z .

6) $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ — гиперболический параболоид.

7) $x^2 + y^2 = a^2$ — круговой цилиндр с осью, параллельной оси Z .

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ — эллиптический » » » » »

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ — гиперболический » » » » »

$y^2 = 2px$ — параболический » » » » »

§ 8. Цилиндрические поверхности.

Прямая линия, перемещаясь параллельно самой себе, образует поверхность, называемую цилиндрической.

Ур-не ее имеет вид:

$$y - bz = f(x - az),$$

где a и b — постоянные числа, f — произвольная ф-ия.

Дифференциальное ур-не цилиндрической поверхности:

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

§ 9. Конические поверхности.

Прямая линия, имеющая неподвижную точку (a, b, c) , двигаясь так, что какая-либо другая ее точка перемещается по данной кривой, образует поверхность, называемую конической.

Ур-не ее будет:

$$\frac{y-b}{z-c} = f\left(\frac{x-a}{z-c}\right),$$

где f — произвольная ф-ия.

Дифференциальное ур-не конической поверхности:

$$z - c = (x - a) \frac{\partial z}{\partial x} + (y - b) \frac{\partial z}{\partial y}.$$

§ 10. Коноидальные поверхности.

Поверхность, образованная прямыми, параллельными данной плоскости и пересекающими данную прямую и данную кривую, называется коноидальной.

Ур-не ее будет:

$$z = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

где f — произвольная ф-ия.

Дифференциальное ур-не коноидов:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

§ 11. Поверхности вращения.

Ур-не поверхностей вращения, если ось проходит через начало координат, будет:

$$ax + by + cz = f(x^2 + y^2 + z^2),$$

где a, b, c — постоянные числа, f — произвольная ф-ия.

Дифференциальное ур-не этой поверхности:

$$(cy - bz) \frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx) \frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay.$$

Если вращение будет происходить вокруг оси Z , то ур-ня примут соответственно вид:

$$z = f(x^2 + y^2);$$

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

§ 12. Развертывающиеся поверхности.

Геометрическое место касательных к пространственной кривой можно развернуть без складок и разрывов на плоскость; такая поверхность называется развертывающейся поверхностью. Дифференциальное ур-не ее будет:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0,$$

или, в обозначениях Монжа:

$$rt - s^2 = 0.$$

Вычисление длин дуг, площадей и объемов.

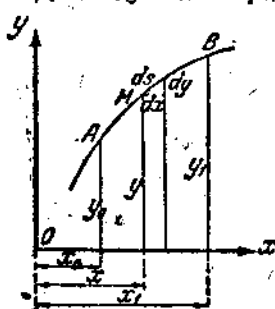
Вычисление длин дуг.

§ 1. Прямоугольные координаты.

Кривая дана ур-ием:

$$F(x, y) = 0.$$

Длина дуги AB определяется по ф-ле:



Черт. 71.

или;

$$s = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

$$s = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx;$$

$$s = \int_{y_a}^{y_b} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2} dy.$$

Ур-не кривой дано в виде:

$$x = \varphi(t); y = \psi(t),$$

тогда:

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

Пример 1. Определить длину дуги параболы $y = ax^2$ от точки $(0, 0)$ до точки (x, y) .

$$\frac{dy}{dx} = 2ax,$$

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + 4a^2 x^2} dx = \frac{1}{4a} \left\{ 2ax \sqrt{1 + 4a^2 x^2} + \ln(2ax + \sqrt{1 + 4a^2 x^2}) \right\}.$$

Пример 2. Определить длину ветви циклоиды

$$x = a(\varphi - \sin \varphi);$$

$$y = a(1 - \cos \varphi).$$

Находим dx и dy :

$$dx = a(1 - \cos \varphi) d\varphi; \quad dy = a \cdot \sin \varphi d\varphi.$$

Пределами интегрирования по φ будут $\varphi = 0$; $\varphi = 2\pi$.
Следовательно:

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos \varphi)^2 + a^2 \cdot \sin^2 \varphi} d\varphi = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = 4a \left[-\cos \frac{\varphi}{2} \right]_0^{2\pi} = 8a.$$

§ 2. Полярные координаты.

Кривая дана ур-ием:

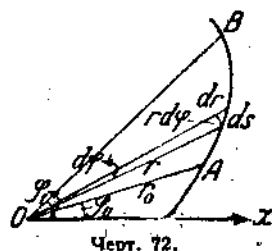
$$f(r, \varphi) = 0.$$

Длина дуги AB выражается ф-лой:

$$s = \int_A^B \sqrt{r^2 d\varphi^2 + dr^2},$$

или:

$$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi; \quad s = \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 + 1} dr.$$



Пример. Вычислить длину кардиоиды: $r = a(1 + \cos \varphi)$.

$$s = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1 + \cos \varphi)^2 + a^2 \cdot \sin^2 \varphi} d\varphi = 8a$$

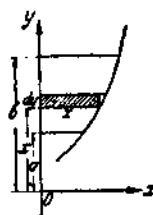
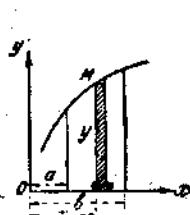
Вычисление площадей плоских фигур.

§ 1. Прямоугольные координаты (однократное интегрирование).

1) Площадь S , ограниченная кривой

$$F(x, y) = 0,$$

осью OX и двумя прямыми $x = a$, $x = b$ (черт. 73), равна:



$$S = \int_a^b y \cdot dx,$$

где y определяется из ур-ия данной кривой.

Площадь, находящаяся над осью OX , имеет знак $+$, под осью OX — знак $-$, поэтому, если искомая площадь расположена частью над осью OX , частью под ней, надо вычислять отдельно величину каждой части.

2) Площадь, ограниченная кривой

$$F(x, y) = 0,$$

осью OY и прямыми $y=a$, $y=b$ (черт. 74), выражается ф-лой:

$$S = \int_a^b x dy,$$

где x определяется из ур-ия данной кривой.

3) Площадь, заключенная между двумя кривыми

$$y=f(x); y=\varphi(x)$$

и прямыми $x=a$; $x=b$ (черт. 75), выражается ф-лой:

$$S = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)] dx.$$

4) Если кривая дана ур-иями:

$$x=\varphi(t); y=\psi(t),$$

то площадь, ограниченная этой кривой, осью OX и ординатами, соответствующими значениям параметра t_0 и t_1 , выражается ф-лой:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \psi(t) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Пример 1. Найти площадь, ограниченную параболой $y=ax^2$ и прямой $y=b$ (черт. 76).

Берем ф-лу площади в виде:

$$S = \int_a^b x dy.$$

Пределы интегрирования $y=0$ и $y=b$. Из ур-ия пара-

болы $x = \sqrt{\frac{y}{a}}$.

Следовательно:

$$S = 2 \int_0^b \sqrt{\frac{y}{a}} dy = \frac{2}{\sqrt{a}} \left[\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{4}{9} b \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} \right]$$

Т. к. $\sqrt{\frac{b}{a}}$ есть ордината точки M , то, следовательно, площадь AOM равна $\frac{2}{3}$, а

площадь $ONM = \frac{1}{3}$ площади прямоугольника $OAMN$.

Пример 2. Найти площадь, заключенную между двумя параболлами: $y^2=4ax$; $x^2=4ay$.

Абсциссу точки M мы найдем, решая совместно уравнения: $y^2=4ax$ и $x^2=4ay$; получим $x=4a$.

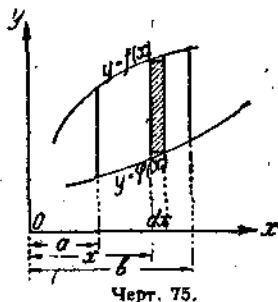
Пределы интегрировки $x=0$ и $x=4a$.

$$S = \int_0^{4a} \sqrt{4ax - \frac{x^2}{4a}} dx = \frac{16}{3} a^2.$$

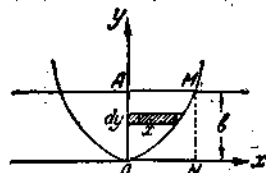
Пример 3. Вычислить площадь, ограниченную одной ветвью циклоиды

$$x=a(\varphi - \sin \varphi); y=a(1 - \cos \varphi)$$

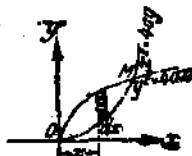
и осью OX .



Черт. 75.



Черт. 76.



Черт. 77.

Пределами интегрирования по φ будут $\varphi=0$; $\varphi=2\pi$, соответствующие значениям параметра $\varphi=0$; $\varphi=2\pi$.

$$S = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos \varphi) \cdot a(1 - \cos \varphi) d\varphi = 3\pi a^2,$$

т. е. утроенной площади производящего круга.

§ 2. Прямоугольные координаты (двукратное интегрирование).

Для вычисления площади, ограниченной кривыми:

$$y=f(x) \text{ и } y=\varphi(x)$$

и двумя ординатами $x=a$; $x=b$, пользуемся ф-лой:

$$S = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{f(x)} dy dx.$$

В зависимости от условий задачи можно изменить порядок интегрирования.

Пример. Вычислить площадь эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

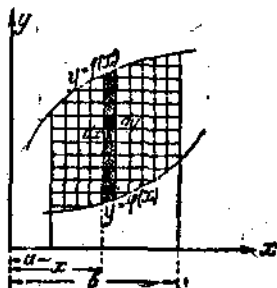
Пределами первой интегрирования будут: $y=0$ и $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$; пределами второй: $x=0$; $x=a$.

Площадь эллипса равна:

$$4 \int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy dx = 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2-x^2} dx = \pi ab.$$

Если бы мы изменили порядок интегрирования, то имели бы пределами первой интеграции: $x=0$; $x=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$, а пределами второй: $y=0$; $y=b$. Следовательно:

$$S = 4 \int_0^b \int_0^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}} dx dy.$$



Черт. 78.

§ 3. Полярные координаты (однократное интегрирование).

Площадь, ограниченная кривой

$$r=f(\varphi)$$

и двумя радиусами-векторами, соответствующими значениям аргумента $\varphi=\varphi_0$ и $\varphi=\varphi_1$, равна:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2 d\varphi.$$



Черт. 79.

Пример. Вычислить площадь лепестка $r^2 = a^2 \cdot \cos 2\varphi$.

Пределы интегрирования будут: $\varphi=0$; $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cdot \cos 2\varphi d\varphi = a^2.$$

§ 4. Полярные координаты (двукратное интегрирование).

Для вычисления площади, ограниченной кривой: $r = f(\varphi)$ и двумя радиусами-векторами, соответствующими значениям аргумента $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = \varphi_1$, применяем ф-лу:

$$S = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \int_{f(\varphi)}^{\varphi} r \cdot dr d\varphi.$$

В зависимости от условий задачи можно изменять порядок интегрирования.

Пример 6. Вычислить площадь кардиоиды: $r = a(1 - \cos \varphi)$.

Пределами первой интеграции будут: $r = 0$ и $r = a(1 - \cos \varphi)$; пределами второй: $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$. След.:

$$S = 2 \int_0^{\pi} \int_0^{a(1-\cos \varphi)} r \cdot dr \cdot d\varphi = a^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{3}{2} \pi a^2.$$

Если бы мы изменили порядок интеграции, то имели бы пределами первой интеграции $\varphi = 0$ и $\varphi = \arccos \frac{r-a}{a}$, а пределами второй $r = 0$ и $r = 2a$. Следовательно:

$$S = 2 \int_0^{2a} \int_0^{\arccos \frac{r-a}{a}} r \cdot d\varphi \cdot dr.$$

Вычисление площадей и поверхностей.

§ 1. Вычисление площади поверхности тела вращения.

Площадь поверхности, образуемая вращением дуги АВ кривой $y = f(x)$ вокруг оси ОХ, определяется по ф-ле:

$$S = 2\pi \int_A^B y ds,$$

или:

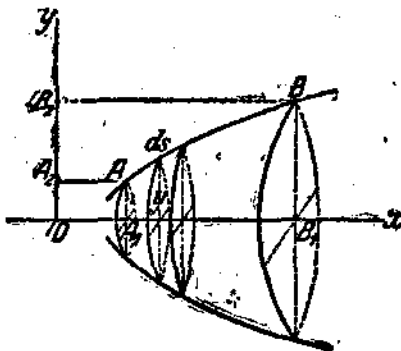
$$S = 2\pi \int_A^B y \sqrt{dx^2 + dy^2} = \\ = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$

где $OA_1 = x_0$, $OB_1 = x_1$.

Если дуга АВ кривой вращается около оси ОУ, то площадь поверхности вращения выразится ф-лой:

$$S = 2\pi \int_A^B x ds = 2\pi \int_A^B x \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\pi \int_{y_0}^{y_1} x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy,$$

где $OA_2 = y_0$, $OB_2 = y_1$.



Черт. 81.

Пример. Найти площадь поверхности, образованной вращением дуги параболы $y^2 = 2px$ от начала координат до точки, абсциссы которой p , вокруг оси OX . Пределы интегрирования будут: $x=0$; $x=p$.

Т. к. $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$, то:

$$S = 2\pi \int_0^p 2px \sqrt{1 + \frac{p^2}{y^2}} dx = \frac{2}{3} \pi p^3 (3\sqrt{3} - 1).$$

§ 2. Общий метод вычисления площади поверхности.

Поверхность дана ур-ием: $z = f(x, y)$.

Разобьем искомую площадь на элементы, параллельными плоскостями ZOY и ZOX и отстоящими друг от друга соответственно на dx и dy , на бесконечно-малые элементы, ортогональными проекциями которых на плоскость XOY будут прямоугольники с площадями $dx dy$; всю площадь проекции обозначим σ .

Обозначим площадь одного из элементов искомой площади через ds . Т. к. площадь $dx dy$ является ее проекцией на плоскость XOY , то:

$$ds = \frac{dx dy}{\cos \gamma},$$

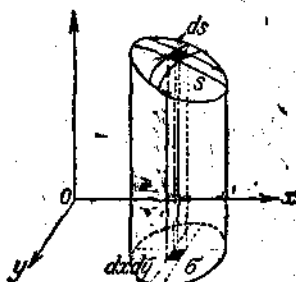
где γ — угол между касательной плоскостью, проведенной к данной поверхности в какой-либо точке элемента ds и плоскостью XOY , или, что то же, угол между нормалью к данной поверхности в какой-либо точке элемента ds и осью OZ .

Т. к.:

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

то:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$



Черт. 82.

Искомая площадь S найдется в виде двукратного интеграла, распространенного на область σ :

$$S = \iint_{(\sigma)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

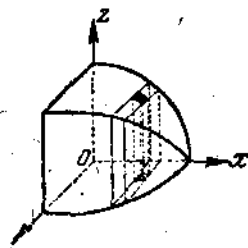
Пределы интегрирования устанавливаются так же, как при вычислении площади σ .

Если удобнее проектировать искомую площадь на плоскости XOZ или YOZ , то для вычисления площади соответственно имеем:

$$S = \iint_{(\sigma)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dx dz;$$

$$= \iint_{(\sigma)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz.$$

Пример. Найти площадь поверхности цилиндра $x^2 + z^2 = r^2$, вырезаемую из него цилиндром $x^2 + y^2 = r^2$. $1/4$ искомой площади проектируется на плоскость XOY в виде $1/4$ площади круга $x^2 + y^2 = r^2$. Пределами первой интегрирования будут: $y=0$, $y = \sqrt{r^2 - x^2}$; предельми второй: $x=0$, $x=r$.



Черт. 83.

Выражения $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ мы должны найти из ур-ня той поверхности, площадь части к-рой мы ищем, т. е. $x^2 + y^2 = r^2$:

$$2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

откуда:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}; \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0;$$

$$S = 8 \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2}} dy dx = 8 \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{dy dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = 8\pi r.$$

Вычисление объемов.

§ 1. Объем тела вращения.

Объем, полученный от вращения дуги АВ кривой $y = f(x)$ вокруг оси ОХ (черт. 81), равен:

$$V = \pi \int_{x_0}^{x_1} y^2 dx.$$

Если дуга кривой АВ вращается около оси ОУ, то:

$$V = \pi \int_{y_0}^{y_1} x^2 dy.$$

§ 2. Объем тела, площади поперечных сечений к-рого известны.

Предположим, что для тела, объем к-рого мы хотим определить, известны все его поперечные сечения плоскостями, перпендикулярными нек-рому направлению. Приняв это направление за ось ОХ, получим выражение для искомого объема в виде:

$$V = \int_a^b s(x) dx,$$

где a и b — абсциссы крайних сечений тела; $s(x)$ — площадь поперечного сечения с абсциссой x .

Пример. Определить объем тела, отсекаемого от прямого кругового цилиндра плоскостью, проведенной через диаметр основания (цилиндрической подковы).

Примем центр окружности основания цилиндра за начало координат и радиус ОА за ось ОХ; тогда ур-ие окружности будет: $x^2 + y^2 = r^2$ (черт. 84).

Поперечные сечения, перпендикулярные диаметру АВ, будут прямоугольные треугольники с равными углами α , при чем $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{r}$.

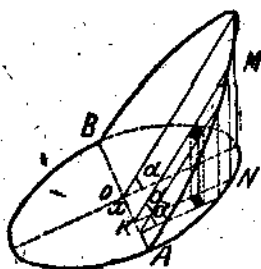
Площадь треугольника МНК, отстоящего от начала координат на расстоянии x , будет:

$$\frac{MN \cdot MK}{2} = \frac{KM^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{2} = \frac{KM^2 h}{2r} = \frac{(r^2 - x^2) h}{2r}.$$

Следовательно:

$$\frac{1}{2} V = \int_0^r \frac{(r^2 - x^2) h}{2r} dx = \frac{1}{3} r^2 h;$$

$$V = \frac{2}{3} r^2 h.$$



Черт. 84.

§ 3. Вычисление объема тела с помощью двукратного интегрирования.

Объем тела, ограниченного поверхностью $z = f(x, y)$, плоскостью XOY и цилиндрической поверхностью, проектирующей площадь S на плоскость XOY (черт. 82), как предел суммы объемов призм $z \cdot dx dy$, равен:

$$V = \iint_{(S)} z \, dy \, dx,$$

где z определяется из у-рия данной поверхности, а пределы устанавливаются, как при вычислении площади.

Пример. Найти объем, общий двум цилиндрам: $x^2 + z^2 = r^2$; $x^2 + y^2 = r^2$ (черт. 83).

Пределами первой интеграции будут: $y=0$, $y=\sqrt{r^2-x^2}$; пределами второй: $x=0$, $x=r$.

Т. к. $z = \sqrt{r^2 - x^2}$, то:

$$V = 8 \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2-x^2} \, dy \, dx = 8 \int_0^r (r^2 - x^2) \, dx = \frac{16}{3} r^3.$$

§ 4. Вычисление объема с помощью трехкратного интегрирования.

Для вычисления объема, ограниченного поверхностями, у-рия к-рых даны, пользуемся ф-лой:

$$V = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} dz \, dy \, dx.$$

В зависимости от условий задачи интегрирование можно производить в другом порядке.

Пример. Определить объем клина, вырезаемого из цилиндра $x^2 + y^2 = r^2$ плоскостями $z = \pi x$ и $z = 0$.

Суммируем элементы $dx \, dy \, dz$, сначала меняя z от $z=0$ до $z=\pi x$, затем суммируем полученные столбцы, меняя y от $y=y_0$ до $y=\sqrt{r^2-x^2}$, и наконец суммируем слои, меняя x от $x=0$ до $x=r$, и получаем:

$$V = 2 \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \int_0^{\pi x} dz \, dy \, dx = 2\pi \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} x \, dy \, dx = 2\pi \int_0^r x \sqrt{r^2-x^2} \, dx = \frac{2}{3} r^3 \pi.$$

Т. к. $\pi = \tan \alpha$ и $r\pi = h$, то:

$$V = \frac{2}{3} r^2 h.$$

Преобразование переменного под знаком кратного интеграла.

§ 1. Преобразование двукратного интеграла при переходе от прямоугольных координат к полярным.

Чтобы в двукратном интеграле от ф-ии $f(x, y)$, распространенном на площадь S , преобразовать прямоугольные координаты в полярные, надо: 1) в выражение ф-ии $f(x, y)$ подставить $x = r \cdot \cos \varphi$, $y = r \cdot \sin \varphi$; 2) заменить элемент площади $dy \, dx$ элементом $r \cdot dr \, d\varphi$; 3) установить пределы интеграции по r -и φ так, чтобы охватить ту же площадь; тогда:

$$\iint_{(S)} f(x, y) \, dy \, dx = \iint_{(S)} f(r \cdot \cos \varphi, r \cdot \sin \varphi) r \, dr \, d\varphi.$$

Пример. В интеграле:

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{ax-x^2}} \frac{a \, dy \, dx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

перейти от прямоугольных координат к полярным.

1) Подставляя в подынтегральную ф-ию $x = r \cdot \cos \varphi$, $y = r \cdot \sin \varphi$, получаем:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2-r^2 \cdot \cos^2 \varphi - r^2 \cdot \sin^2 \varphi}} = \frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}$$

2) Заменяем элемент $dy \, dx$ элементом $r \, dr \, d\varphi$.

3) Рассмотрим, на какую площадь был распространен данный интеграл.

Пределы интегрирования по y были $y=0$; $y=\sqrt{ax-x^2}$, т. е. от оси OX до кривой $y=\sqrt{ax-x^2}$.

Преобразуя ур-ие этой кривой, получим:

$$x^2 - ax + y^2 = 0$$

или:

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2;$$

это — окружность радиуса $\frac{a}{2}$ с центром в точке $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$

(черт. 85).

Пределы интегрирования по x были: $x=0$, $x=a$. Следовательно, интеграл был распространен на площадь, ограниченную полуокружностью и осью OX .

Чтобы перейти к пределам по r и φ , напишем ур-ие окружности в полярных координатах; подставив в ур-ие ее $x = r \cdot \cos \varphi$ и $y = r \cdot \sin \varphi$, получим:

$$r^2 \cdot \cos^2 \varphi - ar \cos \varphi + r^2 \cdot \sin^2 \varphi = 0,$$

откуда:

$$r = a \cdot \cos \varphi.$$

Меняя r от $r=0$ до $r=a \cdot \cos \varphi$ и φ от $\varphi=0$ до $\varphi=\frac{\pi}{2}$, мы распространим интеграл на ту же площадь.

Итак:

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{ax-x^2}} \frac{a \, dy \, dx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cdot \cos \varphi} \frac{a \, r \, dr \, d\varphi}{\sqrt{a^2-r^2}}.$$

§ 2. Преобразование трехкратного интеграла при переходе от прямоугольных координат к полярным.

Чтобы в трехкратном интеграле от ф-ии $f(x, y, z)$, распространенном на объем V , преобразовать прямоугольные координаты в полярные, надо:

1) в выражение ф-ии подставить:

$$x = \rho \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi; \quad y = \rho \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi; \quad z = \rho \cdot \cos \theta;$$

2) заменить элемент объема $dz \, dy \, dx$ элементом $\rho^2 \cdot \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \, d\rho$;

3) установить пределы интегрирования по θ , φ и ρ так, чтобы охватить тот же объем; тогда получим:

$$\begin{aligned} & \iiint_{(V)} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx = \\ & = \int \int \int_{(V)} f(\rho \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi, \rho \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi, \rho \cdot \cos \theta) \rho^2 \cdot \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \, d\rho. \end{aligned}$$

Пример. В интеграле

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} dz dy dx$$

перейти от прямоугольных координат к полярным.

1) Подставляем в подынтегральную ф-ию:

$$x = r \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi; \quad y = r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi; \quad z = r \cdot \cos \theta,$$

получаем:

$$\sqrt{a^2-x^2-y^2} = \sqrt{a^2-r^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \varphi - r^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \sin^2 \varphi} = \sqrt{a^2-r^2 \cdot \sin^2 \theta}.$$

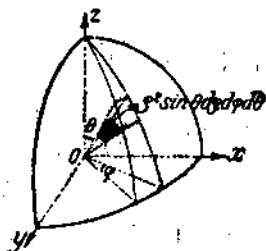
2) Заменяем элемент объема $dz dy dx$ элементом $r^2 \cdot \sin \theta dr d\theta d\varphi$.

3) Рассматриваем, на какой объем распространен данный интеграл. Пределы интегрирования по z были: $z=0$ и $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, т. е. от плоскости XOY до поверхности: $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

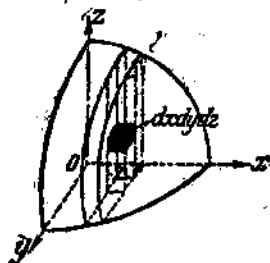
Преобразуя это ур-ие, получим: $x^2+y^2+z^2=a^2$; это—ур-ие поверхности шара с центром в начале координат и радиусом a .

Пределы интегрирования по y были: $y=0$ и $y=\sqrt{a^2-x^2}$, т. е. от оси OX до кривой $y=\sqrt{a^2-x^2}$.

Преобразуя это ур-ие, получим: $x^2+y^2=a^2$,—ур-ие окружности радиуса a с центром в начале координат. Пределы интегрирования по x были: $x=0$; $x=a$.



Черт. 87.



Черт. 88.

Следовательно, интеграция была распространена на $1/8$ шара радиуса a с центром в начале координат.

Определяем пределы интегрирования по r, θ, φ .

Ур-ие поверхности шара в полярных координатах будет:

$$r^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \varphi + r^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \sin^2 \varphi + r^2 \cdot \cos^2 \theta = a^2,$$

откуда:

$$r = a.$$

Ур-ие окружности в полярных координатах будет:

$$r^2 \cdot \cos^2 \varphi + r^2 \cdot \sin^2 \varphi = a^2,$$

откуда:

$$r = a.$$

Меняя r от $r=0$ до $r=a$; φ — от $\varphi=0$ до $\varphi=\frac{\pi}{2}$ и θ — от $\theta=0$ до $\theta=\frac{\pi}{2}$ (черт. 87 и 88), мы распространим интеграцию на тот же объем.

Т. к. $r=a$, то подынтегральная ф-ия будет:

$$\sqrt{a^2-r^2 \cdot \sin^2 \theta} = r \cdot \cos \theta.$$

Итак:

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} dz dy dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r \cdot \cos \theta \cdot r^2 \cdot \sin \theta dr d\varphi d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r^3 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta dr d\varphi d\theta = \frac{\pi a^4}{16}.$$

§ 3. Преобразование трехкратного интеграла при переходе от прямоугольных координат к цилиндрическим.

Чтобы в трехкратном интеграле от ф-ии $f(x, y, z)$, распространенном на объем V , преобразовать прямоугольные координаты в цилиндрические, надо: 1) в выражение ф-ии подставить $x = r \cdot \cos \varphi$, $y = r \cdot \sin \varphi$; 2) заменить элемент объема $dz dy dx$ элементом $rd\varphi dr dz$; 3) установить пределы интегрирования по r, z, φ так, чтобы охватить тот же объем.

Пример. В интеграле

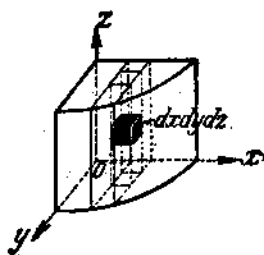
$$\int_0^b \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^z (x^2 + z^2) dz dy dx$$

перейти от прямоугольных координат к цилиндрическим.

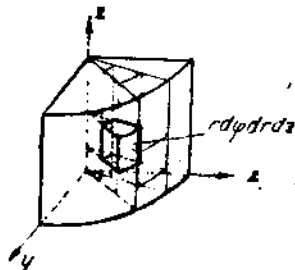
1) Подставляя в подынтегральную ф-ию $x = r \cdot \cos \varphi$, $y = r \cdot \sin \varphi$; получаем: $x^2 + z^2 = r^2 \cdot \cos^2 \varphi + z^2$.

2) Элемента объема $dz dy dx$ элементом $rd\varphi dr dz$.

3) Рассматриваем, на какой объем был распространен данный интеграл.



Черт. 89.



Черт. 90.

Пределы интегрирования по z были: $z=0$ и $z=b$, т. е. объем заключен между плоскостью XOY и плоскостью, ей параллельной и отстоящей от нее на b .

Пределы интегрирования по y были: $y=0$ и $y=\sqrt{a^2-x^2}$.

Преобразуя это ур-ие, получим: $x^2 + y^2 = a^2$, — ур-ие окружности радиуса a с центром в начале координат.

Пределы интегрирования по x были: $x=0$ и $x=a$.

Следовательно, интеграция была распространена на $1/4$ прямого кругового цилиндра, центр основания которого лежит в начале координат, ограниченного плоскостями $z=0$ и $z=b$ (Черт. 89).

Определим пределы интегрирования по r, φ, z .

Ур-ие окружности в цилиндрических координатах будет:

$$r^2 \cdot \cos^2 \varphi + r^2 \cdot \sin^2 \varphi = a^2$$

или:

$$r = a.$$

Меняя z в пределах от $z=0$ до $z=b$; r — от $r=0$ до $r=a$ и φ — от $\varphi=0$ до $\varphi=\frac{\pi}{2}$ (Черт. 90), мы распространим интеграцию на тот же объем.

Итак:

$$\int_0^b \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^z (x^2 + z^2) dz dy dx = \int_0^b \int_0^a \int_0^{\pi/2} (r^2 \cdot \cos^2 \varphi + z^2) r d\varphi dr dz.$$

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.

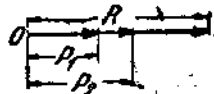
Статика.

§ 1. Силы, сходящиеся в одной точке в плоскости.

Сложение сил. Систему сил, приложенных к одной точке, можно заменить одной силой, эквивалентной данной системе. Эта сила называется равнодействующей R . Силы системы называются *слагаемыми* или *составляющими* силами, а нахождение равнодействующей — *сложением сил*. Сила, равная равнодействующей и прямо противоположно ей направленная, называется *уравновешивающей* данную систему сил.

Равнодействующая двух сил P_1 и P_2 , действующих вдоль одной и той же прямой в одну сторону, равна их сумме и действует в ту же сторону (черт. 1):

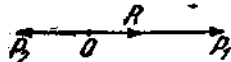
$$R = P_1 + P_2.$$



Черт. 1.

Равнодействующая двух сил P_1 и P_2 , действующих в противоположные стороны, равна их разности и направлена в сторону большей из них (черт. 2):

$$R = P_1 - P_2.$$

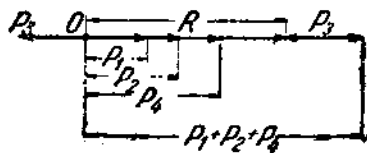


Черт. 2.

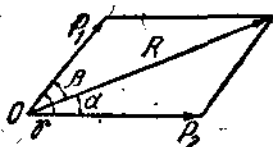
Равнодействующая системы многих сил, из которых одни направлены в одну сторону вдоль некоторой прямой, другие — в сторону противоположную, направлена вдоль той же прямой и равна алгебраической сумме их (черт. 3):

$$R = P_1 + P_2 - P_3 + P_4 = \Sigma P.$$

Если $\Sigma P > 0$, то равнодействующая направлена в положительную сторону, и наоборот.



Черт. 3.



Черт. 4.

Условие равновесия сил, направленных вдоль прямой:

$$\Sigma P = 0.$$

Равнодействующая двух сил P_1 и P_2 (черт. 4), сходящихся в одной точке под углом, равна по величине и направлению диагонали параллелограмма (параллелограмм сил):

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 \cdot \cos \gamma}.$$

$$\frac{P_1}{\sin \alpha} = \frac{P_2}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \gamma}.$$

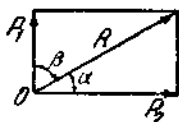
Для $\gamma = 90^\circ$ (черт. 5):

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2};$$

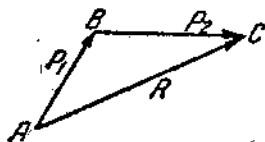
$$\cos \alpha = \frac{P_1}{R}, \quad \cos \beta = \frac{P_2}{R}.$$

Для $P_1 = P_2 = P$:

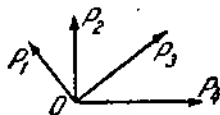
$$R = 2P \cdot \cos \frac{\gamma}{2}.$$



Черт. 5.



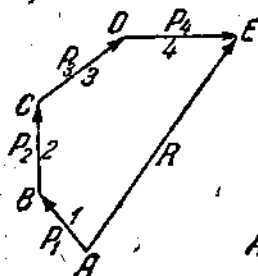
Черт. 6.



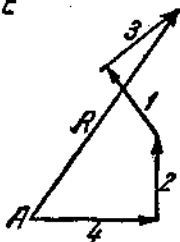
Черт. 7.

В графической статике равнодействующая находится построением треугольника сил. Из произвольной точки A (черт. 6) откладывается сила P_1 ; из ее конца B откладываем силу P_2 ; замыкающая сторона AC представляет R .

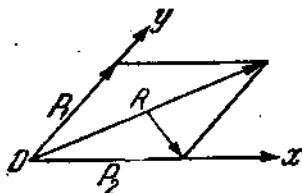
Равнодействующая многих сил (черт. 7) находится построением



Черт. 8.



Черт. 9.

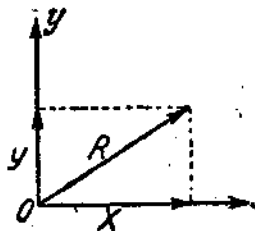


Черт. 10.

нием многоугольника сил. Из произвольной точки A (черт. 8) откладываем силу P_1 , из ее конца B —силу P_2 , из ее конца C —силу P_3 и т. д. Замыкающая сторона многоугольника AE дает R по величине и направлению. Результат не зависит от порядка, в котором производится построение (черт. 9).

Разложение сил. Разложить силу R —значит заменить ее эквивалентной системой двух или нескольких сил. На плоскости силу R можно разложить на две составляющие, имеющие данные направления ox и oy . Через начало силы R проводим заданные направления. Из конца силы R проводим прямые, параллельные ox и oy (черт. 10) и получаем две искомые силы P_1 и P_2 .

Если прямые ox и oy взаимно перпендикулярны (Декартовы оси координат), то получаем проекции силы R (черт. 11):



Черт. 11.

$$\text{пр}_x R = X = R \cdot \cos \alpha; \quad \text{пр}_y R = Y = R \cdot \cos \beta.$$

Аналогично равнодействующая R нескольких сил, сходящихся в одной точке, определяется сл. обр.: каждую из данных сил разлагают на составляющие по двум взаимно перпендикулярным направлениям координатных осей:

$$X_i = P_i \cdot \cos \alpha_i; \quad Y_i = P_i \cdot \cos \beta_i; \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

и составляют алгебраические суммы всех X_i и Y_i :

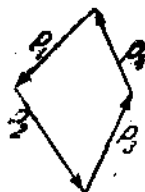
$$X = R \cdot \cos \alpha = \sum X_i; Y = R \cdot \cos \beta = \sum Y_i,$$

где α и β — углы, составляемые силой R с координатными осями. Величина и направление равнодействующей определяются из ф-л:

$$R = \sqrt{(\sum X_i)^2 + (\sum Y_i)^2};$$

$$\cos \alpha = \frac{\sum X_i}{R}; \cos \beta = \frac{\sum Y_i}{R}.$$

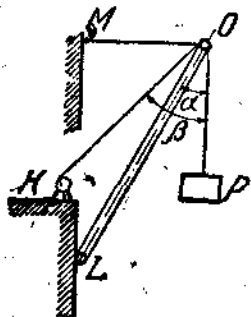
Для равновесия сил, сходящихся в одной точке и лежащих в плоскости, необходимо, чтобы $R = 0$. Графически это выражается тем, что многоугольник сил должен быть замкнут (черт. 12); аналитически — что $\sum X = 0$, $\sum Y = 0$.



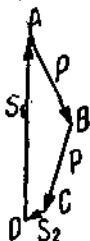
Черт. 12.

Пример. На черт. 13 дана схема крана. Груз P удерживается на канате, идущем через малый блок O к лебедке K . Найти силы в стержнях OL и OM . На точку O действуют силы: вес груза P , натяжение каната OK , равное P , и неизвестные силы S_1 и S_2 в стержнях OL и OM .

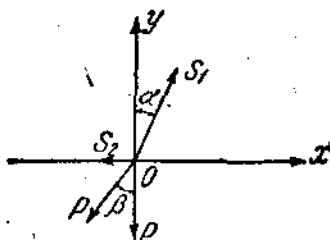
Графическое решение (черт. 14). Из произвольной точки A откладываем силу $P = AB$, из ее конца B — вторую известную силу BC — натяжение каната OK , равное P ; из ее конца C проводим прямую, параллельную силе S_2 ; из начала многоугольника A проводим прямую, параллельную другой искомой силе S_1 . Стороны замкнутого многоугольника сил CD и DA дают искомые силы S_2 и S_1 по величине и направлению.



Черт. 13.



Черт. 14.



Черт. 15.

Аналитическое решение (черт. 15). Находим проекции всех сил на координатные оси и пишем ур-ия равновесия:

$$\sum X = -P \cdot \sin \beta - S_2 + S_1 \cdot \sin \alpha = 0;$$

$$\sum Y = -P - P \cdot \cos \beta + S_1 \cdot \cos \alpha = 0.$$

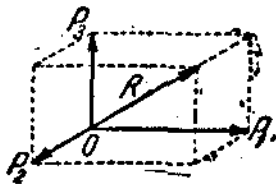
Отсюда находим S_1 и S_2 :

$$S_1 = \frac{P + P \cdot \cos \beta}{\cos \alpha}; S_2 = \frac{P \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} + \frac{P + P \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha}.$$

§ 2. Силы, сходящиеся в одной точке в пространстве.

Равнодействующая R трех сил P_1 , P_2 и P_3 (черт. 16), сходящихся в одной точке и лежащих в пространстве, равна по величине и направлению диагонали параллелепипеда, построенного на этих силах (параллелепипед сил).

Равнодействующая R нескольких сил, сходящихся в одной точке, графически находится построением многоугольника сил, к-рый в



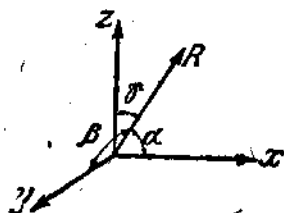
Черт. 16.

этом случае является пространственной фигурой. Аналитически равнодействующая R находится из ф-л:

$$R = \sqrt{(\sum X_i)^2 + (\sum Y_i)^2 + (\sum Z_i)^2} \quad (i=1, 2, 3 \dots n);$$

$$\cos \alpha = \frac{\sum X_i}{R}; \quad \cos \beta = \frac{\sum Y_i}{R}; \quad \cos \gamma = \frac{\sum Z_i}{R},$$

где α , β и γ — углы, составляемые силой R с координатными осями (черт. 17).



Черт. 17.

Для равновесия необходимо, чтобы $R=0$. Графически это выражается тем, что многоугольник сил замкнут. Аналитически $\sum X=0$; $\sum Y=0$; $\sum Z=0$.

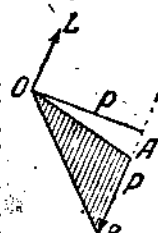
Силу R в пространстве можно разложить по трем направлениям, не лежащим в одной плоскости. Для этого надо построить параллелепипед сил, ребра к-рого направлены по заданным направлениям, а диагональ — данная сила R .

§ 3. Момент силы.

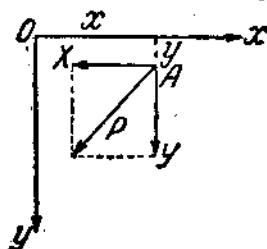
Моментом силы относительно точки O (центр моментов) называется произведение величины силы P на длину перпендикуляра (плеча), опущенного из центра O на линию действия силы (черт. 18):

$$M_o(P) = Pr.$$

Момент считается положительным, когда наблюдателю, стоящему в точке O , представляется, что сила P стремится вращать тело вокруг этой точки O слева направо, т. е. по часовой стрелке; при вращении в противоположную сторону момент считается отрицательным. Момент не изменяется при переносе точки приложения силы вдоль ее линии действия. Момент равен нулю, если линия действия силы проходит через центр моментов. Геометрический момент равен удвоенной площади треугольника, основание которого — сила P , а вершина — центр моментов O (черт. 18):



Черт. 18.



Черт. 19.

$$M_o(P) = 2 \Delta AOB$$

Момент изображается в виде вектора, равного Pr , приложенного в точке O и направленного перпендикулярно к плоскости AOB в ту сторону, чтобы с конца вектора видеть вращение слева направо (вектор OL на черт. 18). Момент равнодействующей R плоской системы сил равен алгебраической сумме моментов всех слагаемых сил относительно того же центра:

$$M_o(R) = M_o(P_1) + M_o(P_2) + \dots = \sum M_o(P).$$

Аналитически момент силы P (черт. 19) относительно начала координатных осей определяется по ф-ле:

$$M_o(P) = xY' - yX,$$

$$M_o(R) = \sum (x_i Y_i - y_i X_i) \quad (i=1, 2, 3 \dots n).$$

Единица момента в технических единицах: килограммо-метр (сокращенно кгм).

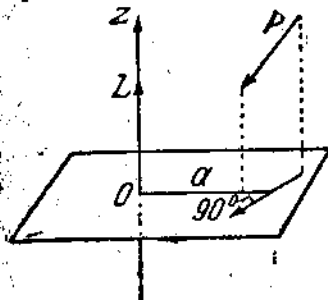
Моментом силы относительно оси называется произведение проекции силы на плоскость, перпендикулярную к оси, на расстояние этой проекции от точки пересечения оси с плоскостью (черт. 20);

$$M_x(P) = Pa \cdot \sin \alpha,$$

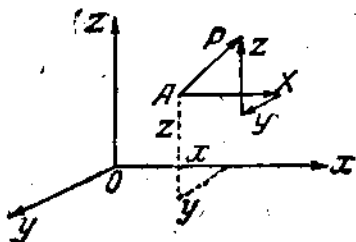
где α — угол между силой P и осью z -ов.

Момент силы относительно оси считается положительным при тех же условиях, что момент относительно центра.

Момент силы относительно оси равен нулю, если линия действия силы пересекает ось.



Черт. 20.



Черт. 21.

Аналитически моменты силы относительно координатных осей (черт. 21) определяются по ф-лам:

$$M_x(P) = yZ - zY; \quad M_y(P) = zX - xZ; \quad M_z(P) = xY - yX.$$

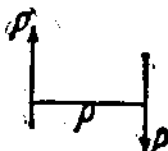
Момент силы относительно оси изображается вектором, равным $P \cdot a \cdot \sin \alpha$, направленным по оси в ту сторону, чтобы с конца вектора видеть вращение слева направо (вектор OL на черт. 20). Момент силы относительно оси равен проекции на ось момента силы относительно любой точки на оси. Момент силы относительно точки можно рассматривать как момент силы относительно оси, проходящей через данную точку перпендикулярно к плоскости, определяемой центром момента и линией действия силы. Момент равнодействующей R системы сил относительно оси равен алгебраической сумме моментов слагаемых сил относительно той же оси:

$$M_x(R) = M_x(P_1) + M_x(P_2) + \dots = \sum M_x(P_i).$$

§ 4. Пара сил.

Парой сил называется система двух равных параллельных сил, направленных в противоположные стороны. Расстояние между линиями действия сил называется плечом пары. Пара сил не имеет равнодействующей ($R = 0$). Момент пары сил (черт. 22) для любой точки в плоскости действия пары равен:

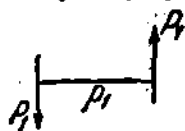
$$M = Pr.$$



Черт. 22.

Отсюда следует, что при задании момента пары сил нет надобности указывать точку, относительно которой берется момент (центр моментов), между тем как это необходимо для каждой другой системы сил. Момент

пары сил будет положительным или отрицательным, в зависимости от того, в какую сторону будет происходить вращение — слева направо или наоборот; напр. (черт. 23), момент пары отрицательный:



Черт. 23.

$$M_1 = -P_1 p_1.$$

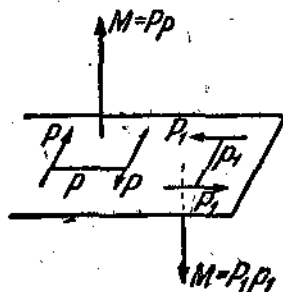
Единица измерения момента пары сил в технических единицах — кгм.

Момент пары изображается вектором, равным Pp и отложенным вдоль прямой, перпендикулярной к плоскости пары, в ту сторону, чтобы с конца вектора видеть вращение пары в положительную сторону, т. е. слева направо.

Точка приложения вектора пары произвольна. Этот вектор называют осевым или линейным моментом пары (черт. 24).

Две пары эквивалентны, если их векторы геометрически равны; другими словами, допускается любое перемещение пары сил, при котором вектор пары перемещается вдоль своего направления или параллельно себе. Величину сил и длину плеча можно изменять так, чтобы момент пары оставался неизменным.

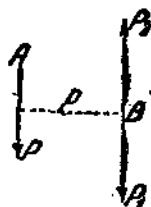
Пары сил можно складывать, при чем момент пары, полученной от сложения пар, лежащих в одной и той же плоскости, или в параллельных пло-



Черт. 24.



Черт. 25.



Черт. 26.

скостях, равен алгебраической сумме моментов складываемых пар. Момент пары, полученной от сложения пар, лежащих в пересекающихся плоскостях, равен геометрической сумме моментов складываемых пар (черт. 25):

$$\bar{M} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2.$$

Параллельный перенос силы. Силу можно перенести параллельно самой себе в любую точку на твердом теле, если при этом добавить пару с моментом, равным моменту данной силы относительно новой точки приложения. Сила P приложена в точке A ; в точке B прикладываем силы P_1 и P_2 , равные P , параллельные ей и взаимно уравновешивающиеся. В результате имеем систему сил, состоящую из силы $P_1 = P$, приложенной в точке B , и пары сил с моментом Pp (черт. 26).

§ 5. Силы, расположенные как угодно в плоскости.

Любую плоскую систему сил (черт. 27) можно заменить одной силой R и одной парой с моментом M . Для этого переносим все силы в центр приведения O (отмечены черточками на чертеже) и прибавляем соответственные пары. Сила R равна геометрической сумме всех данных сил и называется

главным вектором этих сил. Момент пары M равен алгебраической сумме моментов этих сил относительно точки O и называется главным моментом этих сил относительно центра O .

$$\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3; \quad M = M_1 + M_2 + M_3.$$

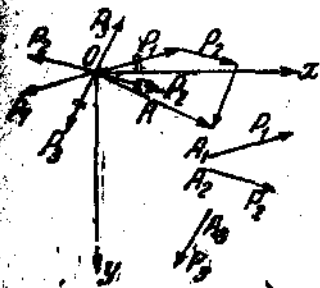
Аналитически R и M определяются по ф-лам:

$$R = \sqrt{(\sum X_i)^2 + (\sum Y_i)^2}; \quad \cos \alpha = \frac{\sum X_i}{R}; \quad \cos \beta = \frac{\sum Y_i}{R};$$

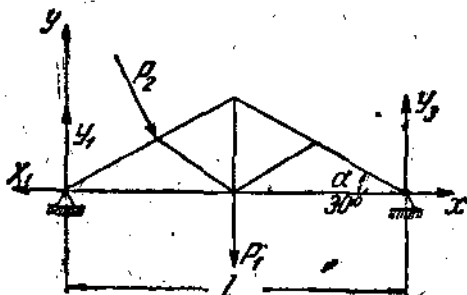
$$M = \sum (x_i Y_i - y_i X_i) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Для равновесия плоской системы сил необходимо, чтобы $R = 0$, $M = 0$. Аналитически эти условия выражаются ур-нями:

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum M = 0,$$



Черт. 27.



Черт. 28.

т. е. суммы проекций всех сил на два направления координатных осей и сумма моментов их относительно произвольной точки плоскости равны нулю. Эти ур-ия можно заменить ур-нями моментов относительно трех произвольных точек плоскости, не лежащих на одной прямой. Применение этих ур-ий см. «Способ Риттера»

Пример. Стропильная ферма веса $P_1 = 6$ т находится под давлением ветра $P_2 = 1$ т. Пролет фермы $l = 10$ м. Левая опора неподвижная, правая — подвижная. Найти опорные реакции (черт. 28).

Составляем ур-ия равновесия:

$$\sum X = -X_1 + P_2 \cdot \sin \alpha = 0;$$

$$\sum Y = Y_1 - P_1 - P_2 \cdot \cos \alpha + Y_2 = 0;$$

$$\sum M_0 = P_1 \frac{l}{2} + \frac{P_2 l}{4 \cos \alpha} - Y_2 l = 0.$$

Решая эти ур-ия, получаем:

$$X_1 = 0,5 \text{ т}; \quad Y_1 = 3,57 \text{ т}; \quad Y_2 = 3,29 \text{ т}.$$

§ 6. Силы, расположенные как угодно в пространстве.

Любую пространственную систему сил (черт. 29) можно заменить одной силой R и одной парой с моментом M . Сила R (главный вектор) равна геометрической сумме всех данных сил. Момент пары M (главный момент) равен геометрической сумме моментов этих сил относительно выбранного центра O .

$$\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \dots; \quad \vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \dots$$

Аналитически для определения R и M имеем ф-лы (черт. 30):

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2};$$

$$\cos \alpha = \frac{X}{R}; \cos \beta = \frac{Y}{R}; \cos \gamma = \frac{Z}{R},$$

где:

$$X = \sum X_i; Y = \sum Y_i; Z = \sum Z_i \quad (i = 1, 2, 3 \dots n);$$

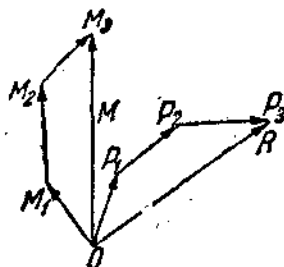
$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2};$$

$$\cos \alpha = \frac{M_x}{M}; \cos \beta = \frac{M_y}{M}; \cos \gamma = \frac{M_z}{M},$$

где:

$$M_x = \sum (y_i Z_i - z_i Y_i); M_y = \sum (z_i X_i - x_i Z_i);$$

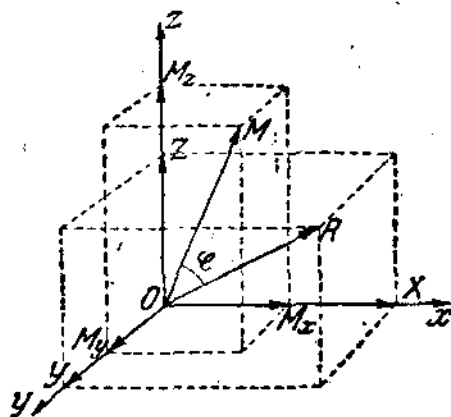
$$M_z = \sum (x_i Y_i - y_i X_i) \quad (i = 1, 2, 3 \dots n).$$



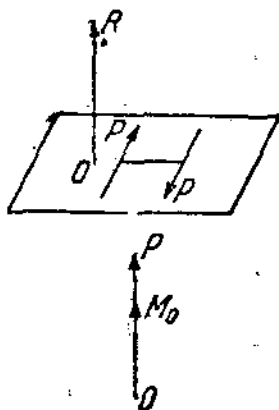
Черт. 29.

Величина и направление главного вектора R и проекции главного момента M на направление R ($M_0 = M \cdot \cos \varphi$) не зависят от выбора центра приведения O .

Винтовое усилие (динама) (черт. 31). Для каждой системы сил существует одна прямая—центральная ось, для к-рой плоскость пары перпендикулярна к главному вектору R , иначе говоря, любую систему сил, можно заменить одним главным вектором R и одним главным моментом M , направленными вдоль этой оси (винтовое усилие). Главный момент M относительно центральной оси имеет минимальное значение M_0 .



Черт. 30.



Черт. 31.

Для всякой системы сил величины

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2; R \cdot M_0 = M_x X + M_y Y + M_z Z$$

являются неизменными и называются инвариантами. Отношение главного момента M_0 к главному вектору R называется параметром винтового усилия ρ .

$$\rho = \frac{M_0}{R} = \frac{M_x X + M_y Y + M_z Z}{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Центральная ось определяется ур-иями:

$$\frac{M_x - (y_0 Z - z_0 Y)}{X} = \frac{M_y - (z_0 X - x_0 Z)}{Y} = \frac{M_z - (x_0 Y - y_0 X)}{Z},$$

где x_0, y_0, z_0 — координаты какой-либо точки центральной оси.

Различные случаи приведения системы сил к простейшему виду:

$$M_x X + M_y Y + M_z Z \geq 0.$$

Система сил приводится к двум перекрещивающимся силам (не лежащим в одной плоскости), а также к винтовому усилию.

$$M_x X + M_y Y + M_z Z = 0.$$

Система приводится к двум силам, лежащим в одной плоскости.

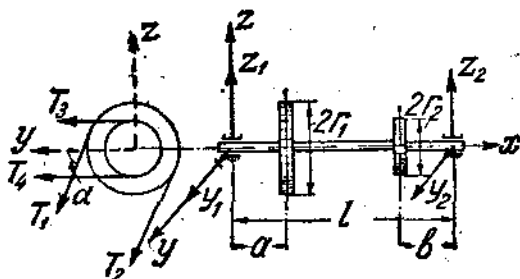
- 1) $X^2 + Y^2 + Z^2 > 0$
одна сила;
- 2) $X = Y = Z = 0$;
 $M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 > 0$
одна пара.

Для равновесия пространственной системы сил необходимо $R = 0$, $M = 0$. Аналитически эти условия выражаются ур-иями:

$$X = \sum X_i = 0; \quad Y = \sum Y_i = 0; \\ Z = \sum Z_i = 0;$$

$$M_x = \sum (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0; \\ M_y = \sum (z_i X_i - x_i Z_i) = 0; \\ M_z = \sum (x_i Y_i - y_i X_i) = 0;$$

$$i = (1, 2, 3 \dots n).$$



Черт. 32.

Пример. На валу трансмиссии находятся два шкива А и В для ременной передачи. Ветви ремня, надетого на шкив А, составляют с горизонтом $\angle \alpha$, их натяжения — T_1 и T_2 . Ветви шкива В горизонтальны. Натяжение верхней ветви T_3 . Найти натяжение T_4 нижней ветви шкива В и реакции в подшипниках.

Линейные размеры указаны на черт. 32.

Составляем ур-ия равновесия:

$$\sum X = 0;$$

$$\sum Y = Y_1 + Y_2 + T_3 + T_4 + T_1 \cdot \cos \alpha + T_2 \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\sum Z = Z_1 + Z_2 - T_1 \cdot \sin \alpha - T_2 \cdot \sin \alpha = 0;$$

$$M_x = -T_1 r_1 + T_3 r_1 - T_2 r_2 + T_4 r_2 = 0;$$

$$M_y = a T_1 \cdot \sin \alpha + a T_2 \cdot \sin \alpha - Z_2 l = 0;$$

$$M_z = a T_1 \cdot \cos \alpha + a T_2 \cdot \cos \alpha + (l - b) T_3 + (l - b) T_4 + H Y_2 = 0.$$

Решая эти ур-ия, получаем:

$$T_4 = T_3 - \frac{r_1}{r_2} (T_2 - T_1); \quad Z_2 = \frac{a}{l} (T_1 + T_2) \cdot \sin \alpha;$$

$$Y_2 = -\frac{a}{l} (T_1 + T_2) \cdot \cos \alpha - \frac{l - b}{l} (T_3 + T_4);$$

$$Y_1 = -Y_2 - (T_3 + T_4) - (T_1 + T_2) \cdot \cos \alpha;$$

$$Z_1 = -Z_2 + (T_1 + T_2) \cdot \sin \alpha.$$

§ 7. Параллельные силы.

Система параллельных сил (черт. 33) в пространстве приводится к одной силе R и к одной паре с моментом M .

Аналитически для определения R и M имеем ф-лы:
для R :

$$R = |\Sigma(\pm P_i)|,$$

так как для параллельных сил:

$$X = \Sigma X_i = 0, \quad Y = \Sigma Y_i = 0 \quad \text{и} \quad Z = \Sigma Z_i = \Sigma(\pm P_i);$$

для M :

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2},$$

и так как для параллельных сил

$$M_x = \Sigma(x_i Y_i - y_i X_i) = 0.$$

Параллельные силы ни в каком случае не приводятся к винтовому усилию.

Для равновесия системы параллельных сил в пространстве необходимо, чтобы

$$R = 0, \quad M = 0.$$

Аналитически эти условия выражаются ур-нями:

$$\Sigma(\pm P_i) = 0; \quad M_x = \Sigma(y_i Z_i - z_i Y_i) = 0; \quad M_y = \Sigma(z_i X_i - x_i Z_i) = 0, \\ (i = 1, 2, 3 \dots n).$$

Если система параллельных сил приводится к одной равнодействующей R , то координаты (x_c, y_c, z_c) точки ее приложения (центр параллельных сил) определяются по ф-лам:

$$x_c = \frac{\Sigma P_i x_i}{R}; \quad y_c = \frac{\Sigma P_i y_i}{R}; \quad z_c = \frac{\Sigma P_i z_i}{R}.$$

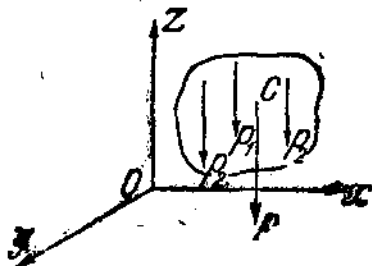
§ 8. Центр тяжести.

К отдельным элементам твердого тела, находящегося около поверхности земли, приложены силы тяжести, направленные к центру земли (черт. 34). Равнодействующая этих сил называется весом тела, точка ее приложения называется центром тяжести. Предполагая, что данное тело весьма мало по сравнению с земным радиусом, можно все эти силы считать параллельными и определять вес тела, как равнодействующую системы параллельных сил. Обозначая вес отдельной частицы тела p_i , ее координаты x_i, y_i, z_i , общий вес тела $P = \Sigma p_i$, для определения координат ц. т. C имеем:

$$x_c = \frac{\Sigma p_i x_i}{P}; \quad y_c = \frac{\Sigma p_i y_i}{P};$$

$$y_c = \frac{\Sigma p_i y_i}{P}; \quad z_c = \frac{\Sigma p_i z_i}{P};$$

$$z_c = \frac{\Sigma p_i z_i}{P}; \quad x_c = \frac{\Sigma p_i x_i}{P}.$$



Черт. 34.

Для однородных тел, у которых уд. в. γ не изменяется:

$$P = \gamma V, P = \gamma V,$$

где V_1 — объем отдельной частицы тела, V — объем всего тела, поэтому координаты ц. т. определяются ф-лами:

$$x_c V = \sum V_1 x_1; y_c V = \sum V_1 y_1; z_c V = \sum V_1 z_1;$$

или:

$$x_c V = \int x dV; y_c V = \int y dV; z_c V = \int z dV.$$

Здесь интегрирование распространяется на все элементы объема тела.

$$x_c V = \iiint x dV; y_c V = \iiint y dV; z_c V = \iiint z dV.$$

Для однородных материальных площадей, у которых уд. в. γ (вес единицы площади) не изменяется, имеем:

$$x_c F = \sum F_1 x_1; y_c F = \sum F_1 y_1; z_c F = \sum F_1 z_1$$

или:

$$x_c F = \int x dF; y_c F = \int y dF; z_c F = \int z dF,$$

при чем интегрирование распространяется на все элементы площади:

$$x_c F = \iint x dF; y_c F = \iint y dF; z_c F = \iint z dF.$$

Сумма произведений площади каждого элемента плоской фигуры на его расстояние до нек-рой оси, лежащей в плоскости этой фигуры, называется статическим моментом плоской фигуры относительно этой оси.

Для однородных материальных линий, у которых уд. в. γ (вес единицы длины) не изменяется, для определения координат ц. т. имеем:

$$x_c l = \sum l_1 x_1; y_c l = \sum l_1 y_1; z_c l = \sum l_1 z_1$$

или:

$$x_c l = \int x dl; y_c l = \int y dl; z_c l = \int z dl.$$

Координаты ц. т. однородных тел, площадей и линий не зависят от постоянного множителя γ , характеризующего вещество данного однородного тела, площади, линии.

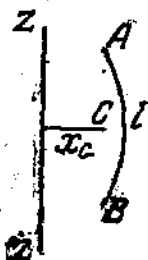
На этом основании ц. т. однородных тел, площадей, линий получает название ц. т. объема V , площади F , линии l . Если однородное тело, плоская фигура или линия имеют плоскость симметрии или ось симметрии, то ц. т. лежат в этой плоскости, — на этой оси. Если имеется центр симметрии, то ц. т. с ним совпадает.

Теорема Гюльдена. 1. Поверхность S , полученная от вращения плоской кривой около оси, лежащей в ее плоскости и не пересекающей кривую, равна длине этой кривой, умноженной на длину окружности, описанной центром тяжести кривой (черт. 35):

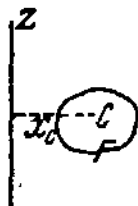
$$S = l \cdot 2\pi x_c.$$

2. Объем V , полученный от вращения плоской фигуры около оси, лежащей в ее плоскости и не пересекающей фигуры, равен площади фигуры, умноженной на длину окружности, описанной ц. т. плоской фигуры (черт. 36):

$$V = F \cdot 2\pi x_c.$$



Черт. 35.



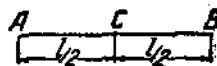
Черт. 36.

§ 9. Центры тяжести однородных линий.

1) Прямая. Ц. т. С находится в середине прямой (черт. 37).

2) Периметр треугольника. Ц. т. С лежит в центре круга, вписанного в тр-к, вершины к-рого находятся на серединах сторон данного тр-ка (черт. 38).

Расстояние y_c ц. т. С от стороны a равно:

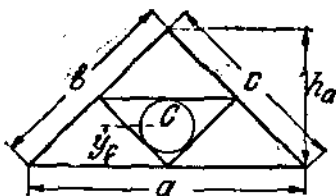


Черт. 37.

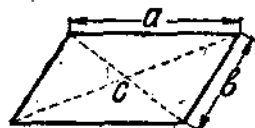
$$y_c = \frac{3a}{2} \cdot \frac{b+c}{a+b+c}.$$

3) Периметр параллелограмма. Ц. т. С лежит в пересечении диагоналей (черт. 39).

4) Дуга круга. Ц. т. С лежит на прямой, делящей пополам центральный угол, и на расстоянии от центра O, равном (черт. 40):



Черт. 38.



Черт. 39.

$$OC = x_c = r \cdot \frac{\text{хорда } AB}{\text{дуга } AB} \text{ (ф-ла Валлиса),}$$

или:

$$x_c = r \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

Для половины окружности:

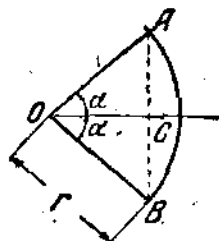
$$x_c = \frac{2r}{\pi} = 0,6366r.$$

Для четверти окружности:

$$x_c = \frac{2r\sqrt{2}}{\pi} = 0,9003r.$$

Для шестой части окружности:

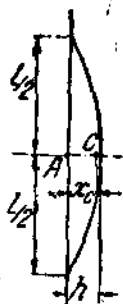
$$x_c = \frac{3r}{\pi} = 0,9549r.$$



Черт. 40.

5) Произвольная плоская кривая (черт. 41). Положение ц. т. С определяется:

$$AC = x_c \cong \frac{2}{3} h.$$



Черт. 41.

§ 10. Центры тяжести площадей и поверхностей.

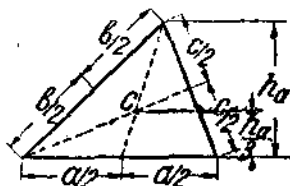
1) Площадь треугольника. Ц. т. С лежит в точке пересечения медиан. Расстояние С от одной из сторон равно $1/3$ соответственной высоты (черт. 42). Координаты С определяются ф-лами:

$$x_c = \frac{1}{3} (x_1 + x_2 + x_3); y_c = \frac{1}{3} (y_1 + y_2 + y_3),$$

где: $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$ — координаты вершин треугольника.

2) Площадь параллелограмма. Ц. т. С лежит на пересечении диагоналей.

3) Площадь трапеции. Ц. т. С лежит на прямой, соединяющей середины параллельных сторон. Расстояния h_a и h_b определяются (черт. 43):



Черт. 42.

$$h_a = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b}; h_b = \frac{h}{3} \cdot \frac{2a+b}{a+b}.$$

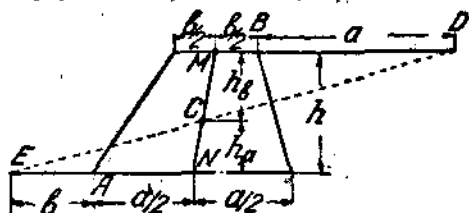
а) Построение: на продолжениях параллельных сторон откладываем $BD = a$, $AE = b$. Пересечение прямых DE и MN дает искомый центр тяжести C (черт. 43).

б) Разбиваем трапецию на два треугольника, имеющих центры тяжести C_1 и C_2 (черт. 44). Пересечение C_1C_2 с прямой MN дает C .

в) Через концы основания b проводим прямые, параллельные диагоналям трапеции, до пересечения в точке L .

C лежит на прямой LN (черт. 45), при чем:

$$NC = \frac{1}{3} LN.$$

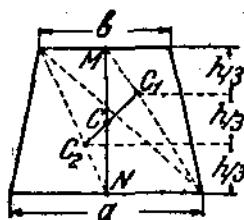


Черт. 43.

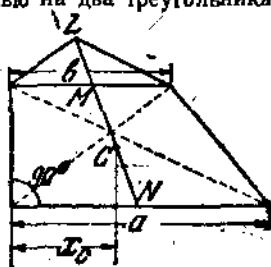
г) Для прямоугольной трапеции расстояние C от перпендикулярной стороны (черт. 45) равно:

$$x_c = \frac{1}{3} \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}.$$

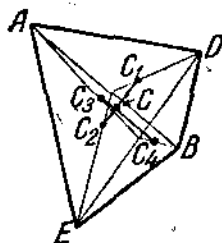
4) Площадь четырехугольника (черт. 46). Разбиваем площадь четырехугольника одной диагональю на два треугольника и находим их центры



Черт. 44.



Черт. 45.



Черт. 46.

тяжести C_1 и C_2 , затем другой диагональю—на два треугольника с центрами тяжести C_3 и C_4 . Пересечение прямых C_1C_2 и C_3C_4 дает искомый центр тяжести C . Т. к. прямые C_1C_2 и C_3C_4 параллельны соответственным диагоналям: $C_1C_2 \parallel ED$, $C_3C_4 \parallel AB$, то необходимо найти только C_1 и C_3 .

5) Площадь многоугольника. Разбиваем на ряд четырехугольников и применяем построение п. 4.

6) Круговой сектор (черт. 47). Ц. т. C лежит на прямой, делящей центральный угол пополам, и на расстоянии от центра O , равном:

$$OC = x_c = \frac{2}{3} r \frac{\text{хорда } AB}{\text{дуга } AB},$$

или:

$$x_c = \frac{2}{3} \frac{r \cdot \sin \alpha}{\alpha}; \quad x_c = \frac{r^2 S}{3F},$$

где S —длина хорды, F —площадь сектора.

Для площади полукруга:

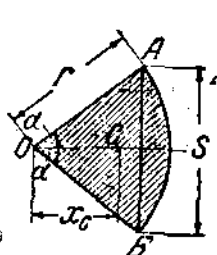
$$x_c = \frac{4r}{3\pi} = 0,4244r.$$

Для площади четверти круга (квадрант):

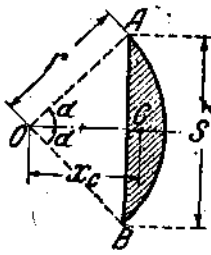
$$x_c = \frac{4\sqrt{2}r}{3\pi} = 0,6002r.$$

Для площади шестой части круга (секстант):

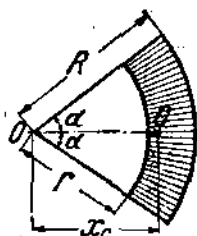
$$x_c = \frac{2r}{\pi} = 0,6366r.$$



Черт. 47.



Черт. 48.



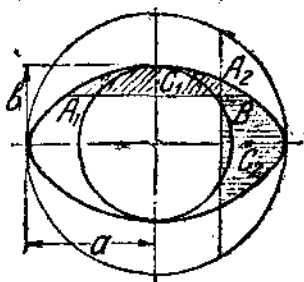
Черт. 49.

7) Площадь сегмента (черт. 48). Ц. т. С лежит на прямой, делящей центральный угол пополам, и на расстоянии от центра O , равном:

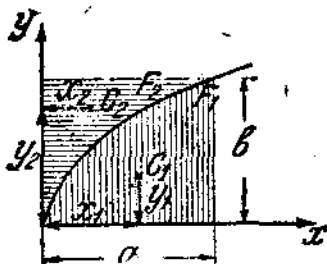
$$OS = x_c = \frac{S^2}{12F},$$

где S —длина хорды, F —площадь сегмента;

$$x_c = \frac{2}{3} \frac{r^3 \cdot \sin^3 \alpha}{F} = \frac{4}{3} r \frac{\sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}$$



Черт. 50.



Черт. 51.

8) Часть кругового кольца (черт. 49). Ц. т. С лежит на прямой, делящей центральный угол пополам, и на расстоянии от центра O , равном:

$$OC = x_c = \frac{2}{3} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

9) Эллиптический сегмент (черт. 50). Ц. т. С совпадает с центром тяжести кругового сегмента, который отсекается той же хордой во вписанном или описанном круге: вписанном,—если хорда перпендикулярна к малой оси, описанном,—если хорда перпендикулярна к большой оси.

10) Площадь параболы (черт. 51).

Для ц. т. C_1 площади F_1 имеем:

$$x_1 = \frac{3}{8} a; \quad y_1 = \frac{3}{8} b.$$

Для ц. т. C_2 площади F_2 имеем:

$$x_2 = \frac{3}{10} a; \quad y_2 = \frac{3}{4} b.$$

Координаты центров тяжести параболических треугольников (черт. 51).

Степень кривой	Очертание кривой	Большой параболический треугольник		Малый параболический треугольник	
		x	y	x	y
n	Парабола n -й степени	$\frac{n+1}{1+2n} a$	$\frac{n+1}{2(1+2)} b$	$\frac{n+1}{2(n+2l)} a$	$\frac{n+1}{n+2} b$
$n=1$	Прямая линия	$\frac{2}{3} a$	$\frac{1}{3} b$	$\frac{1}{3} a$	$\frac{2}{3} b$
$n=2$	Квадратная парабола	$\frac{3}{8} a$	$\frac{3}{8} b$	$\frac{3}{10} a$	$\frac{3}{4} b$
$n=3$	Кубическая парабола	$\frac{4}{7} a$	$\frac{2}{5} b$	$\frac{2}{7} a$	$\frac{4}{5} b$
$n=4$	Парабола 4-й степени	$\frac{5}{9} a$	$\frac{5}{12} b$	$\frac{5}{18} a$	$\frac{5}{6} b$

11) Произвольная площадь (черт. 52). Делим площадь при помощи параллельных прямых на четное число $2n$ полос одинаковой ширины b . По одной из ф-л Симпсона имеем для координат ц. т.:

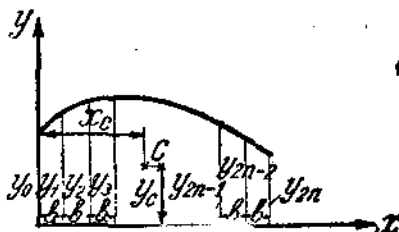
$$x_c = b \frac{0 \cdot y_0 + 1 \cdot 4y_1 + 2 \cdot 2y_2 + 3 \cdot 4y_3 + 4 \cdot 2y_4 + \dots + (2n-1) \cdot 4y_{2n-1} + 2y_{2n}}{y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 4y_{2n-1} + y_{2n}}$$

$$y_c = \frac{1}{2} \frac{y_0^2 + 4y_1^2 + 2y_2^2 + 4y_3^2 + \dots + 4y_{2n-1}^2 + y_{2n}^2}{y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 4y_{2n-1} + y_{2n}}$$

12) Боковая поверхность пирамиды или прямого конуса. Ц. т. C лежит на прямой, соединяющей вершину с ц. т. основания, на расстоянии высоты от основания.

13) Боковая поверхность прямого усеченного конуса. Ц. т. C лежит на оси конуса на расстоянии от большего основания, равном:

$$y_c = \frac{\lambda R + 2r}{3 R + r},$$



Черт. 52.

где R и r — радиусы оснований, λ — высота конуса.

14) Поверхность полушария. Ц. т. C лежит на середине радиуса, перпендикулярного к его основанию.

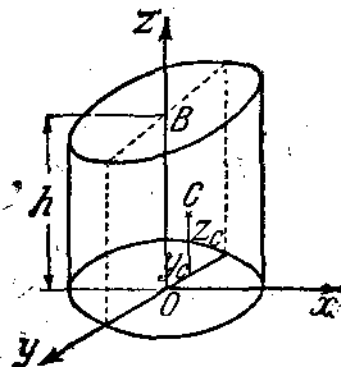
15) Поверхность сферического пояса. Ц. т. C лежит на середине высоты сферического пояса.

§ 11. Центры тяжести объемов.

1) Прямая призма и прямой цилиндр. Ц. т. C лежит на середине прямой, соединяющей ц. т. оснований.

2) Наклонно-усеченный круглый цилиндр (черт. 53). Положение ц. т. C определяется ф-ми:

$$x_c = 0; y_c = \frac{1}{4} \frac{R^2}{h} \operatorname{tg} \alpha; z_c = \frac{h}{2} + \frac{1}{8} \frac{R^2}{h} \operatorname{tg}^3 \alpha,$$



Черт. 53.

где R —радиус основания, h —длина оси цилиндра, α —угол наклона сечения B к плоскости основания. Плоскость $уoz$ —плоскость симметрии.

3) Усеченная пирамида. Обозначим через A и B площади оснований, h —высоту пирамиды. Расстояние ц. т. C от основания A равно:

$$y_c = \frac{h}{4} \frac{A + 2\sqrt{AB} + 3B}{A + \sqrt{AB} + B}.$$

4) Усеченный конус. R и r —радиусы оснований, h —высота конуса. Расстояние ц. т. C от основания R равно:

$$y_c = \frac{h}{4} \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}.$$

5) Шаровой сегмент. Ц. т. C лежит на расстоянии от центра шара O , равном:

$$x_c = \frac{3}{4} \frac{(2R - h)^2}{(3R - h)},$$

где R —радиус шара, h —высота сегмента;

$$x_c = \frac{\pi d^4}{64V},$$

где d —диаметр основания сегмента, V —объем сегмента.

Для полушара:

$$x_c = \frac{3}{8} R.$$

Для полого полушара:

$$x_c = \frac{3}{8} \frac{R^4 - r^4}{R^2 - r^2},$$

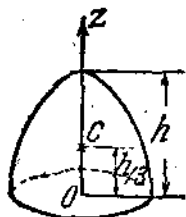
где R —наружный радиус, r —внутренний радиус.

6) Шаровой сектор. Расстояние ц. т. C от центра шара O равно:

$$x_c = \frac{3}{8} (2R - h),$$

где R —радиус шара, h —высота сегмента.

7) Параболоид вращения (черт. 54). Ц. т. C находится на расстоянии $\frac{1}{3}$ высоты от основания.

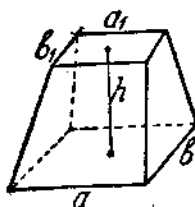


Черт. 54.

8) Трехосный эллипсоид. Положение ц. т. C октанта определяется ф-ми:

$$x_c = \frac{3}{8} a, y_c = \frac{3}{8} b; z_c = \frac{3}{8} c,$$

где a, b, c —полуоси эллипсоида.



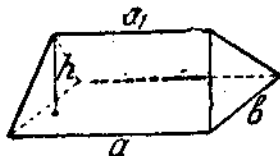
Черт. 55.

9) Обелиск (черт. 55). Расстояние ц. т. C от основания ab равно:

$$y^* = \frac{h}{2} \frac{ab + ab_1 + a_1b + 3a_1b_1}{2ab + ab_1 + a_1b + 2a_1b_1}.$$

10) Клин (черт. 56). Расстояние ц. т. C от основания ab равно:

$$y_c = \frac{h}{2} \frac{a + a_1}{2a + a_1}.$$



Черт. 56.

11) Тело произвольной формы. Расстояние ц. т. C от плоскости, ограничивающей тело или касательной к нему, определяется так: проводим параллельно этой плоскости ряд других плоскостей, пересекающих тело на четное число ($2n$) частей одинаковой толщины b и вставляем в ф-лу Симпсона (стр. 203 п. 11) вместо y эти площади.

§ 12. Моменты инерции и центробежные моменты масс.

Моментом инерции точки массы m относительно оси называется произведение $I = mr^2$, где r —расстояние точки от оси. Для системы материальных точек с массами $m_1, m_2, \dots, m_n$ и расстояниями от оси $r_1, r_2, \dots, r_n$:

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Для материального тела:

$$I = \int r^2 dm,$$

при чем интегрирование распространяется на все тело. Момент инерции во всех случаях положительный. Техническая единица момента инерции массы тела—кгм/сек.

Удобно представлять $I = Mr^2$, где M —масса всего тела, r —радиус инерции. Радиус инерции определяется по ф-ле:

$$r = \sqrt{\frac{I}{M}}.$$

Если система состоит из нескольких частей, то ее $I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$, где $I_1, I_2, \dots, I_n$ —моменты инерции отдельных частей относительно той же оси. Если отдельные части равны между собой и симметрично расположены, то $I_1 = I_2 = \dots = I_n = \frac{I}{n}$. Моменты инерции относительно прямоугольных координатных осей равны:

$$A = \sum m(y^2 + z^2); B = \sum m(x^2 + z^2); C = \sum m(x^2 + y^2).$$

Центробежные моменты или произведения инерции равны:

$$D = \sum m yz; E = \sum m xz; F = \sum m xy.$$

Во всех случаях

$$D < \frac{1}{2} A; E < \frac{1}{2} B; F < \frac{1}{2} C.$$

Центробежный момент m б. положительным, равным нулю и отрицательным.

Ось, проходящая через ц. т. C , называется центральной осью; момент инерции относительно нее называется центральным моментом инерции I_c .

Момент инерции I относительно произвольной оси, параллельной центральной, определяется по ф-ле (черт. 57):

$$I = I_c + Ma^2,$$

где M —масса всего тела, a —расстояние между осями. При параллельных осях наименьший момент инерции получается для той из них, к-рая проходит через ц. т. Если I_1 и I_2 —моменты инерции около двух параллельных осей, проходящих через две любые точки, то:

$$I_1 - I_2 = M(a^2 - b^2),$$



Черт. 57.

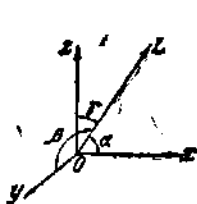
где a и b —расстояния соответствующих осей от центральной. Момент инерции относительно оси, проходящей через начало координат и составляющей с координатными осями углы α , β , γ , определяется по ф-ле (черт. 58):

$$I = A \cdot \cos^2 \alpha + B \cdot \cos^2 \beta + C \cdot \cos^2 \gamma - 2D \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma - 2E \cdot \cos \alpha \cdot \cos \gamma - 2F \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta.$$

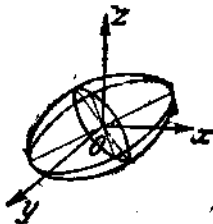
Геометрическое место точек, радиусы-векторы к-рых обратно пропорциональны корню квадратному из соответственного момента инерции $R = \frac{1}{\sqrt{I}}$, есть эллипсоид инерции (черт. 59).

Ур-ие эллипсоида инерции:

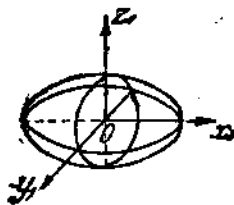
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Exz - 2Fxy = 1.$$



Черт. 58.



Черт. 59.



Черт. 60.

Каждой точке тела соответствует свой эллипсоид инерции. Если направить оси координат по осям эллипсоида инерции (черт. 60), то в ур-ии коэф-ты при произведениях координат окажутся равными нулю: $D=E=F=0$, и оно принимает вид:

$$Ax_i^2 + By_i^2 + Cz_i^2 = 1.$$

В каждой точке имеются три взаимно перпендикулярных направления (три оси), относительно к-рых центробежные моменты равны нулю. Эти оси называются главными осями инерции, а моменты инерции около этих осей называются главными моментами инерции.

Если тело имеет плоскость симметрии, то каждая прямая, к ней перпендикулярная, представляет главную ось инерции. Если тело имеет ось симметрии, то эта ось представляет одну из трех главных осей инерции для каждой из ее точек.

Эллипсоид инерции для ц. т. называется центральным эллипсоидом инерции, его оси—главными центральными осями инерции; соответствующие моменты инерции—главными центральными моментами инерции.

Наибольшей оси эллипсоида инерции соответствует наибольший момент инерции, и наоборот. Если два главных момента инерции для какой-нибудь

точки тела делаются равными, то эллипсоид инерции становится эллипсоидом вращения. Если все три главных момента инерции для какой-нибудь точки тела становятся равными, то эллипсоид инерции обращается в шар, а точка называется шаровой.

§ 13. Моменты инерции и центробежные моменты плоских фигур.

Момент инерции (черт. 61) плоской фигуры относительно оси, лежащей в этой же плоскости, называется экваториальным или осевым моментом инерции площади F относительно этой оси. Момент инерции относительно оси, перпендикулярной к плоскости фигуры, называется полярным моментом инерции I_p площади относительно полюса O , — точки пересечения этой оси с плоскостью. Если начало прямоугольной системы координат поместить в полюс, то между полярным и экваториальными моментами инерции существует зависимость:

$$I_p = I_z = I_x + I_y.$$

Единица измерения моментов инерции плоских фигур — см^4 . Центробежный момент площади:

$$I_{xy} = \int xy dF.$$

Здесь интегрирование распространяется на всю площадь. Момент инерции I относительно произвольной оси, параллельной центральной, равен:

$$I = I_c + Fa^2,$$

где F — площадь, a — расстояние между осями.

Если I_1 и I_2 — моменты инерции двух площадей относительно двух параллельных осей, проходящих через ц. т., то момент инерции соединенных площадей относительно новой параллельной оси, проходящей через общий их ц. т., определяется ф-лой:

$$I_c = I_1 + I_2 + \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2} a^2,$$

где F_1 и F_2 — площади, a — расстояние между центральными осями этих двух площадей (черт. 62).

Если I_{xy} относится к двум взаимно перпендикулярным осям, проходящим через ц. т., I'_{xy} — к двум взаимно перпендикулярным осям, параллельным первым и отстоящим от них на расстояниях a и b , то:

$$I'_{xy} = I_{xy} + F \cdot ab.$$

Момент инерции относительно оси, проходящей через начало координат и составляющей с осью x -ов угол α , определяется по ф-ле:

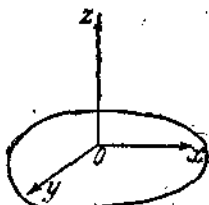
$$I_a = I_x \cdot \cos^2 \alpha + I_y \cdot \sin^2 \alpha - I_{xy} \cdot \sin 2\alpha.$$

Если система прямоугольных осей, для к-рой определены I_x , I_y и I_{xy} , поворачивается около начала координат на угол α (черт. 63), то для новых осей имеем:

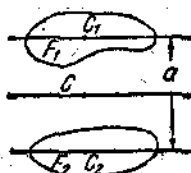
$$I_a = I_x \cdot \cos^2 \alpha + I_y \cdot \sin^2 \alpha - I_{xy} \cdot \sin 2\alpha;$$

$$I_b = I_x \cdot \sin^2 \alpha + I_y \cdot \cos^2 \alpha + I_{xy} \cdot \sin 2\alpha;$$

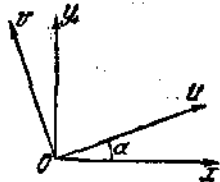
$$I_{ab} = \frac{1}{2} (I_x - I_y) \cdot \sin 2\alpha + I_{xy} \cdot \cos 2\alpha.$$



Черт. 61.



Черт. 62.



Черт. 63.

В частном случае при $\alpha = 45^\circ$:

$$I_a = \frac{1}{2} (I_x + I_y) - I_{xy};$$

$$I_b = \frac{1}{2} (I_x + I_y) + I_{xy};$$

$$I_{ab} = \frac{1}{2} (I_x - I_y).$$

Наибольшее и наименьшее значения I_a и I_b получают тогда, когда центральный момент обращается в нуль. Это имеет место при α_0 , удовлетворяющем ур-ню:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}.$$

Оси, относительно к-рых моменты инерции получают *max* и *min*, называются главными осями и обозначаются через A и B . Моменты инерции относительно этих осей называются главными моментами инерции и обозначаются I_a и I_b :

$$I_{\max} = I_a = \frac{1}{2} (I_x + I_y) + \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2};$$

$$I_{\min} = I_b = \frac{1}{2} (I_x + I_y) - \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2};$$

$$I_{ab} = 0.$$

Главные оси, проходящие через ц. т., называются главными центральными осями инерции. Всякая ось симметрии—главная ось. Если за оси координат принять главные оси инерции, то:

$$I_a = I_a \cdot \cos^2 \alpha + I_b \cdot \sin^2 \alpha;$$

$$I_b = I_a \cdot \sin^2 \alpha + I_b \cdot \cos^2 \alpha;$$

$$I_{ab} = \frac{1}{2} (I_a - I_b) \cdot \sin 2\alpha.$$

Если оси непрямоугольны и если для этих осей $I_{ab} = 0$, то оси называются сопряженными осями. Число таких осей бесконечно-большое. Взаимно перпендикулярные сопряженные оси—главные оси инерции. Геометрическое место точек, радиусы-векторы к-рых обратно пропорциональны корню квадратному из соответственного момента инерции $R = \frac{1}{\sqrt{I}}$, есть эллипс инерции.

Ур-не эллипса инерции:

$$I_x x^2 + I_y y^2 - 2I_{xy} xy = 1.$$

Эллипс инерции для центра тяжести называется центральным эллипсом.

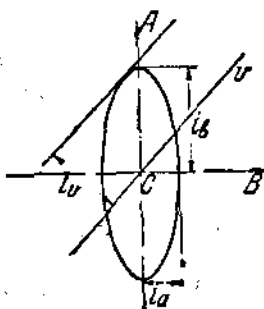
Длина l , определяемая из ур-ня $I = F l^2$, $l = \sqrt{\frac{I}{F}}$, где F —площадь, I —момент инерции, называется радиусом инерции.

Если за оси координат принять главные оси инерции A и B и построить эллипс инерции по полуосям, равным или пропорциональным главным радиусам инерции (черт. 64):

$$\text{для } A \quad l_b = \sqrt{\frac{I_b}{F}}; \text{ для } B \quad l_a = \sqrt{\frac{I_a}{F}};$$

то ур-не эллипса инерции имеет вид (ось x -ов совпадает с A):

$$\frac{x^2}{l_a^2} + \frac{y^2}{l_b^2} = 1.$$



Черт. 64.

Сопряженные диаметры эллипса инерции являются сопряженными осями инерции. Момент инерции относительно произвольного диаметра σ равен:

$$I_{\sigma} = F \cdot i_{\sigma}^2,$$

где i_{σ} — длина перпендикуляра между диаметром и параллельной касательной к эллипсу.

§ 14. Моменты инерции линий, поверхностей и тел.

Общие указания. Момент инерции относительно оси определяется по формуле:

$$I = \int r^2 dm,$$

где интегрирование распространяется на всю линию, поверхность или тело. Для однородных линий, поверхностей и тел

$$dm = \delta \cdot dl; \quad dm = \delta d \cdot F; \quad dm = \delta \cdot dV,$$

где δ — удельная плотность.

В соответствии с этим для вычисления моментов инерции имеем:

$$I = \delta \int r^2 dl;$$

$$I = \delta \iint r^2 dF;$$

$$I = \delta \iiint r^2 dV.$$

Пределы интегрирования выбираются так, чтобы суммирование распространялось на всю линию, поверхность и тело.

В дальнейшем мы будем обозначать через M общую массу; подстрочным значком у I будем указывать ось, относительно которой берется момент инерции. При $\delta = 1$ из моментов инерции материальных линий, поверхностей и тел получим соответственно моменты инерции геометрических линий, площадей и объемов.

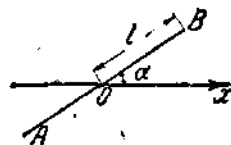
А. Моменты инерции линий.

1) Прямая линия. Для BO (черт. 65).

$$I_x = \delta \frac{1}{3} l^3 \cdot \sin^2 \alpha = \frac{M l^2 \cdot \sin^2 \alpha}{3} \quad (M = \delta l);$$

при $\alpha = 90^\circ$:

$$I_x = \delta \frac{l^3}{3}.$$



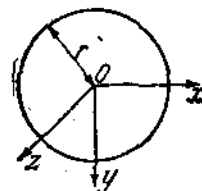
Черт. 65.

Для AB (черт. 65):

$$I_x = \delta \frac{2}{3} l^3 \cdot \sin^2 \alpha = \frac{M l^2 \cdot \sin^2 \alpha}{3} \quad (M = \delta 2l);$$

при $\alpha = 90^\circ$:

$$I_x = \delta \frac{2}{3} l^3.$$

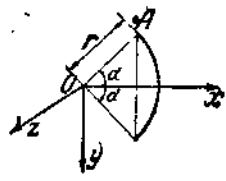


Черт. 66.

2) Окружность (черт. 66):

$$I_x = I_y = \delta 2\pi r^4 = M r^2,$$

$$I_x = I_y = \delta \pi r^4 = \frac{M r^4}{2} \quad (M = \delta 2\pi r).$$



Черт. 67.

3) Дуга круга (черт. 67):

$$I_x = \delta r^3 \alpha \left(1 - \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\alpha} \right) = \frac{1}{2} Mr^3 \left(1 - \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\alpha} \right);$$

$$I_y = \delta r^3 \alpha \left(1 + \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\alpha} \right) = \frac{1}{2} Mr^3 \left(1 + \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\alpha} \right) \quad (M = \delta 2r\alpha);$$

$$I_z = I_y = I_x + I_y = Mr^3.$$

Б. Моменты инерции площадей.

1) Площадь треугольника (черт. 68).

$$I_x = \delta \frac{1}{4} b h^3 = \frac{1}{3} M h^2;$$

$$I_y = \delta \frac{1}{36} b h^3 = \frac{1}{18} M h^2;$$

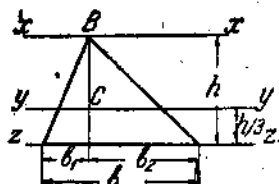
$$I_z = \delta \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{6} M h^2 \quad (M = \delta \frac{b h}{2});$$

Полярные моменты инерции:
относительно C:

$$I_p = \delta \frac{1}{36} b h^3 + \delta \frac{1}{12} (b_1^2 + b_2^2) h - \delta \frac{1}{18} b h (b_2 - b_1)^2;$$

относительно B:

$$I_p = \delta \frac{1}{4} h b^3 + \delta \frac{1}{12} (b_1^2 + b_2^2) h.$$



Черт. 68.

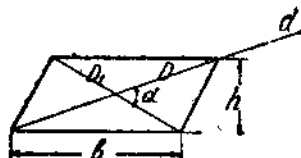
2) Площадь четырехугольника (черт. 69):

$$I = \delta \frac{1}{12} D (h_1^3 + h_2^3).$$

3) Площадь параллелограмма (черт. 70):

$$I_b = \delta \frac{b h^3}{3} = \frac{M h^3}{3} \quad (M = \delta b h);$$

$$I_d = \delta \frac{1}{48} D \cdot D_1^3 \cdot \sin^3 \alpha.$$



Черт. 70.

4) Площадь ромба (черт. 70):

$$I_b = \delta \frac{b h^3}{3} = \frac{M h^3}{3} \quad (M = \delta b h);$$

$$I_d = \delta \frac{1}{48} D \cdot D_1^3 \quad (\alpha = 90^\circ).$$

5) Площадь прямоугольника (черт. 71):

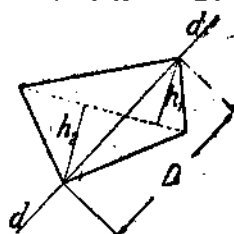
$$I_{x_0} = \delta \frac{b h^3}{12} = \frac{M h^3}{12}; \quad I_x = \delta \frac{b h^3}{3} = \frac{M h^3}{3};$$

$$I_{y_0} = \delta \frac{b^3 h}{12} = \frac{M b^3}{12}; \quad I_y = \delta \frac{b^3 h}{3} = \frac{M b^3}{3};$$

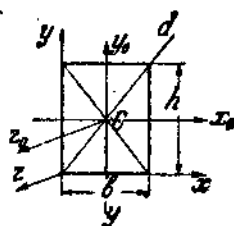
$$I_{x_0} = I_p = \delta \frac{1}{12} b h (b^2 + h^2) = \frac{M}{12} (b^2 + h^2);$$

$$I_x = I_p = \delta \frac{1}{3} b h (b^2 + h^2) = \frac{M}{3} (b^2 + h^2) \quad (M = \delta b h);$$

$$I_d = \delta \frac{1}{48} D^4 \cdot \sin^3 \varphi \quad (D_1 = D).$$



Черт. 69.



Черт. 71.

6) Площадь квадрата ($b = h = a$):

$$I_{x_0} = I_{y_0} = \delta \frac{a^4}{12} = \frac{Ma^2}{12}; \quad I_x = I_y = \delta \frac{a^4}{3} = \frac{Ma^2}{3};$$

$$I_{x_s} = \delta \frac{a^4}{6} = \frac{Ma^2}{6}; \quad I_x = \delta \frac{2a^4}{3} = \frac{2}{3} Ma^2 \quad (M = \delta a^2);$$

$$I_d = \delta \frac{1}{48} D^4 = \delta \frac{a^4}{12} \quad (\alpha = 90^\circ, D^2 = 2a^2).$$

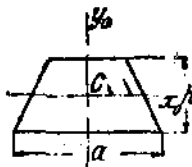
Для квадрата:

$$I_{x_0} = I_d.$$

7) Площадь трапеции (равнобедренная) (черт. 72):

$$I_{x_0} = \delta \frac{h^3}{36} \cdot \frac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)}; \quad I_x = \delta \frac{h^3}{12} (a+3b);$$

$$I_{y_0} = \delta \frac{h}{48} \cdot \frac{a^4 - b^4}{a+b}.$$



Черт. 72.

8) Площадь правильного многоугольника.

F —площадь, a —сторона, r —внутренний радиус, R —наружный радиус. Экваториальный момент инерции относительно оси, проходящей через центр O :

$$I_x = \frac{1}{24} \delta F (6R^2 - a^2) = \frac{1}{48} \delta F (12r^2 + a^2).$$

Полярный момент инерции относительно оси, проходящей через O :

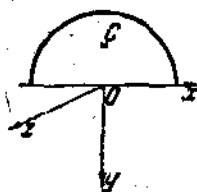
$$I_p = 2I_x.$$

9) Площадь круга:

$$I_x = I_p = \delta \frac{\pi r^4}{2} = \frac{Mr^2}{2};$$

$$I_x = I_y = \delta \frac{\pi r^4}{4} = \frac{Mr^2}{4} \quad (M = \delta \pi r^2).$$

10) Площадь полукруга (черт. 73):



Черт. 73.

$$I_x = I_y = \delta \frac{1}{8} \pi r^4 = \frac{1}{4} Mr^2;$$

$$I_z = I_p = \delta \frac{1}{4} \pi r^4 = \frac{1}{2} Mr^2 \quad (M = \delta \frac{\pi r^2}{2});$$

$$I_c = \delta 0,5025 r^4 = 0,3198 Mr^2.$$

11) Площадь четверти круга:

$$I_x = I_y = \delta \frac{1}{16} \pi r^4;$$

$$I_z = I_p = \delta \frac{1}{8} \pi r^4.$$

12) Площадь кругового кольца:

R —наружный радиус, r —внутренний радиус, ρ —средний радиус, a —ширина кольца. Экваториальный момент инерции относительно оси, проходящей через центр O :

$$I_x = I_y = \delta \frac{1}{4} \pi (R^4 - r^4) = \frac{1}{4} M(R^2 + r^2) \quad [M = \delta \pi (R^2 - r^2)],$$

или

$$I_x = I_y = \delta \rho a \left(\rho^2 + \frac{1}{4} a^2 \right).$$

Полярный момент инерции относительно оси, проходящей через O :

$$I_z = 2I_x = \delta \frac{\pi}{2} (R^4 - r^4) = \frac{M}{2} (R^2 + r^2).$$

13) Круговой сектор (обозначения см. стр. 210, черт. 67):

$$I_x = \delta \frac{1}{4} r^4 \alpha \left(1 - \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\alpha} \right) = \frac{1}{4} M r^2 \left(1 - \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\alpha} \right);$$

$$I_y = \delta \frac{1}{4} r^4 \alpha \left(1 + \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\alpha} \right) = \frac{1}{4} M r^2 \left(1 + \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\alpha} \right) \quad (M = \delta \alpha r^2);$$

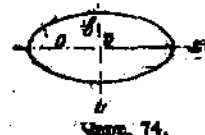
$$I_z = I_p = I_x + I_y = \frac{1}{2} M r^2.$$

14) Круговой сегмент (обозначения см. стр. 210, черт. 67):

$$I_x = \delta \frac{1}{4} F r^2 \left(1 - \frac{2}{3} \frac{\sin^3 \alpha \cdot \cos \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha} \right);$$

$$I_y = \delta \frac{1}{4} F r^2 \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\sin^3 \alpha \cdot \cos \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha} \right);$$

$$I_z = I_p = \delta \frac{1}{2} F r^2 \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\sin^3 \alpha \cdot \cos \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha} \right),$$



где F — площадь сегмента, определяемая по Фле:

$$F = r^2 (\alpha - \sin \alpha).$$

15) Площадь эллипса (черт. 74):

$$I_x = \delta \frac{1}{4} \pi a b^3 = \frac{1}{4} M b^2;$$

$$I_y = \delta \frac{1}{4} \pi a b^3 = \frac{1}{4} M a^2;$$

$$I_p = I_0 = \delta \frac{1}{4} \pi a b (a^2 + b^2) = \frac{1}{4} M (a^2 + b^2) \quad (M = \delta \pi a b).$$

Для половины и четверти эллипса получаются соответственно $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$ этих величин.

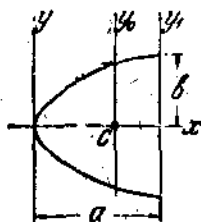
16) Площадь параболы (черт. 75):

$$I_x = \delta \frac{4}{15} a b^3 = \frac{1}{5} M b^2; \quad I_y = \delta \frac{4}{7} a^3 b = \frac{3}{7} M a^2;$$

$$I_{y_1} = \delta \frac{32}{105} a^3 b = \frac{8}{35} M a^2;$$

$$I_{y_0} = \delta \frac{16}{175} a^3 b = \frac{12}{175} M a^2 \quad (M = \delta \frac{4}{3} a b);$$

$$I_p = I_x + I_y$$



В. Моменты инерции тел.

1) Прямоугольный параллелепипед (черт. 76). Оси проходят через ц. т.

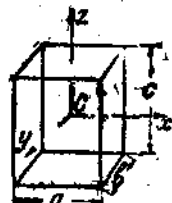
$$I_x = \delta \frac{1}{2} a b c (b^2 + c^2) = \frac{M}{12} (b^2 + c^2);$$

$$I_y = \delta \frac{1}{12} a b c (a^2 + c^2) = \frac{M}{12} (a^2 + c^2) \quad (M = \delta a b c).$$

$$I_z = \delta \frac{1}{12} a b c (a^2 + b^2) = \frac{M}{12} (a^2 + b^2);$$

Куб со стороной a :

$$I_x = I_y = I_z = \delta \frac{a^5}{6} = \frac{M a^2}{6} \quad (M = \delta a^3).$$



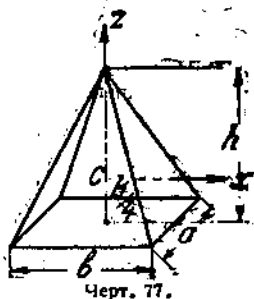
Черт. 76.

2) Прямоугольная пирамида (черт. 77). Основание—прямоугольник со сторонами a и b , высота— h . Для оси, совпадающей с высотой:

$$I_z = \delta \frac{1}{60} abh(a^2 + b^2) = \frac{1}{20} M(a^2 + b^2).$$

Для оси, проходящей через ц. т. параллельно основанию:

$$I_x = \delta \frac{1}{60} abh \left(\frac{3}{4} h^2 + b^2 \right) = \frac{1}{20} M \left(\frac{3}{4} h^2 + b^2 \right) \\ (M = \delta \frac{1}{3} abh).$$



3) Прямой круглый цилиндр (черт. 78):

$$I_z = \delta \frac{1}{2} \pi r^4 h = \frac{Mr^2}{2};$$

$$I_x = I_y = \delta \frac{1}{4} \pi r^2 h \left(r^2 + \frac{h^2}{3} \right) = \frac{M}{4} \left(r^2 + \frac{h^2}{3} \right) \quad (M = \delta \pi r^2 h).$$

4) Полый цилиндр.

R —наружный радиус, r —внутренний радиус; ρ —средний радиус

$\left[\rho = \frac{1}{2} (R + r) \right]$; $d = R - r$ —толщина.

$$I_z = \delta \frac{1}{2} \pi h (R^4 - r^4) = \frac{M}{2} (R^2 + r^2) \quad (M = \delta \pi h (R^2 - r^2)),$$

или:

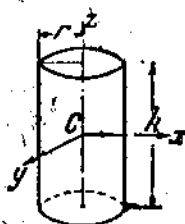
$$I_z = 2\pi h d \left(\rho^2 + \frac{1}{4} d^2 \right);$$

$$I_x = \frac{11}{4} M \left(R^2 + r^2 + \frac{1}{3} h^2 \right) = \frac{1}{8} M \left(4\rho^2 + d^2 + \frac{2}{3} h^2 \right).$$

5) Боковая поверхность цилиндра (черт. 78).

$$I_z = \delta 2\pi r^3 h = Mr^2;$$

$$I_x = \delta \pi r h \left(r^2 + \frac{1}{3} h^2 \right) = \frac{M}{2} \left(r^2 + \frac{1}{3} h^2 \right) \quad (M = d 2\pi r h).$$



Черт. 78.

6) Прямой круглый конус (черт. 79):

$$I_z = \delta \frac{1}{10} \pi r^4 h = \frac{3}{10} Mr^2;$$

$$I_x = \delta \frac{1}{20} \pi r^2 h \left(r^2 + \frac{1}{4} h^2 \right) = \frac{3}{20} M \left(r^2 + \frac{1}{4} h^2 \right) \quad (M = \delta \frac{1}{4} \pi r^2 h).$$

7) Боковая поверхность конуса:

$$I_z = \delta \frac{1}{2} \pi r^3 \sqrt{r^2 + h^2} = \frac{1}{2} Mr^2 \quad (M = \delta \pi r \sqrt{r^2 + h^2}).$$

8) Усеченный конус:

R и r —радиусы оснований, h —высота;

$$I_z = \delta \frac{1}{10} \pi h \frac{R^4 - r^4}{R - r}.$$

9) Боковая поверхность усеченного конуса:

$$I_z = \frac{1}{2} \pi S \frac{R^4 - r^4}{R - r},$$

где S —образующая, δ



Черт. 79.

10) Шер.

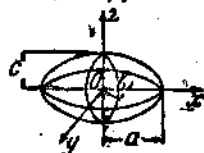
Для любого диаметра, принятого за ось:

$$I = \delta \frac{8}{15} \pi r^2 = \frac{2}{5} M r^2 \quad (M = \delta \frac{4}{3} \pi r^2).$$

11) Полный шар:

R —наружный радиус, r —внутренний радиус:

$$I = \delta \frac{8}{15} \pi (R^5 - r^5) = \frac{2}{5} M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3} \quad [M = \delta \frac{3}{4} \pi (R^3 - r^3)].$$



Черт. 80.

12) Полушар:

Начало координат в центре:

$$I_x = I_y = \delta \frac{4}{15} \pi r^2 = \frac{2}{5} M r^2 \quad (M = \frac{2}{3} \pi r^2).$$

13) Поверхность шара:

Для любого диаметра, принятого за ось:

$$I = \delta \frac{8}{3} \pi r^4 = \frac{2}{3} M r^2 \quad (M = \delta 4 \pi r^2).$$

14) Шаровой сегмент:

r —радиус шара; h —высота сегмента.

Для оси симметрии:

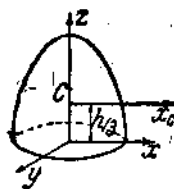
$$I = \delta \frac{1}{3} \pi h^2 (2r^2 - 1,5rh + 0,3h^2) = Mh \frac{2r^2 - 1,5rh - 0,3h^2}{3r - h}.$$

15) Шаровой сектор:

r —радиус шара; h —высота сегмента.

Для оси симметрии:

$$I = \delta \frac{2}{15} \pi r^2 h^2 (3r - h) = \frac{1}{5} M h (3r - h^2).$$



Черт. 81.

16) Эллипсоид (черт. 80):

a , b , c —полуоси эллипсоида. Моменты инерции относительно осей симметрии:

$$I_x = \delta \frac{4}{15} \pi abc (b^2 + c^2) = \frac{1}{5} M (b^2 + c^2) \quad (M = \delta \frac{4}{3} \pi abc);$$

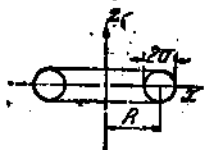
$$I_y = \delta \frac{4}{15} \pi abc (a^2 + c^2) = \frac{1}{5} M (a^2 + c^2);$$

$$I_z = \delta \frac{4}{15} \pi abc (a^2 + b^2) = \frac{1}{5} M (a^2 + b^2).$$

17) Параболоид вращения (черт. 81):

h —высота. Момент инерции относительно оси вращения:

$$I_z = \delta \frac{1}{6} \pi r^2 h = \frac{1}{5} M r^2.$$



Черт. 82.

Для оси, проходящей через центр тяжести перпендикулярно к оси вращения:

$$I_{x_c} = \delta \frac{1}{36} \pi r^2 h (3r^2 + h^2) = \frac{1}{6} M (r^2 + \frac{1}{3} h^2)$$

$$(M = \delta \frac{1}{2} \pi r^2 h).$$

18) Кольцо (черт. 82).

а) Сечение—прямоугольник; моменты инерции подсчитываются, как для полого цилиндра.

б) Сечение — круг радиуса a :

$$I_z = \delta \frac{1}{2} \pi^2 R a^2 (4R^2 + 3a^2) = M \left(R^2 + \frac{3}{4} a^2 \right);$$

$$I_x = \delta \pi^2 R a^2 \left(R^2 + \frac{5}{4} a^2 \right) = \frac{M}{2} \left(R^2 + \frac{5}{4} a^2 \right) \quad (M = \delta 2\pi^2 R a^2).$$

в) Сечение — эллипс с полуосями a и b :

$$I_z = \delta \frac{1}{2} \pi^2 R a b (4R^2 + 3a^2) = M \left(R^2 + \frac{3}{4} a^2 \right);$$

$$I_x = \delta \pi^2 R a b \left(R^2 + \frac{5}{4} a^2 \right) = \frac{M}{2} \left(R^2 + \frac{5}{4} a^2 \right) \quad (M = \delta 2\pi^2 R a b).$$

Ось эллипса $2b$ параллельна оси z -ов.

19) Момент инерции любого тела вращения относительно его оси.

Примем за ось вращения ось x . Ур-ие меридиана поверхности вращения $z = f(x)$. Объем элементарного слоя $= \pi x^2 dx$; момент инерции этого слоя $= \delta \frac{\pi x^4}{2} dx$. Момент инерции всего тела определяется по ф-ле:

$$I = \delta \frac{\pi}{2} \int [f(x)]^4 dx.$$

20) Момент инерции любой поверхности вращения относительно ее оси.

Примем за ось вращения ось x . Ур-ие меридиана имеет вид: $z = f(x)$. Боковая поверхность элементарного пояса равна:

$$2\pi x ds = 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx.$$

Момент инерции этого пояса:

$$\delta \cdot 2\pi x^3 ds = \delta \cdot 2\pi x^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx.$$

Момент инерции всей поверхности определяется по ф-ле:

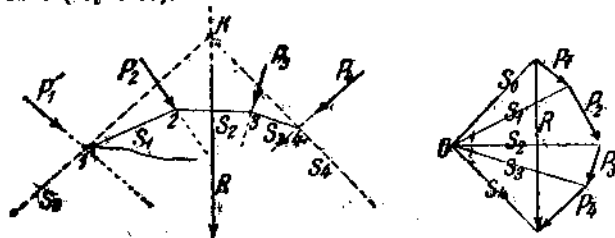
$$I = \delta \cdot 2\pi \int [f(x)]^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx.$$

§ 15. Основы графостатики.

Графическое сложение сил, лежащих в одной плоскости и приложенных в одной точке, производится при помощи силового мн-ка. Замыкающая силового мн-ка определяет величину и направление равнодействующей. Ее линия действия проходит через общую точку приложения. Условие равновесия такой системы сил — силовой мн-к замкнут (см. стр. 190 черт. 7—9).

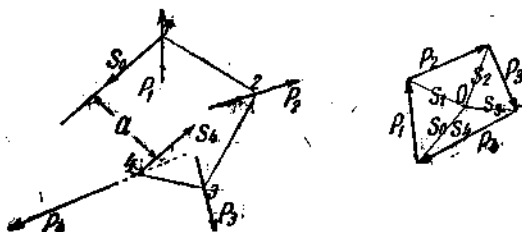
Графическое сложение произвольной плоской системы сил производится при помощи силового мн-ка (определение величины и направления равнодействующей) и веревочного мн-ка (определение положения равнодействующей). Строим силовой мн-к. Выбираем произвольную точку O , называемую полюсом, и соединяем вершины силового мн-ка с полюсом прямыми (лучи: S_0, S_1, S_2, S_3, S_4). Затем проводим параллельно этим лучам стороны веревочного мн-ка, к-рые пересекают линии действия заданных сил в точках 1, 2, 3, 4. Точка пересечения K крайних сторон (S_0 и S_4) веревочного мн-ка дает точку, через к-рую проходит линия действия равнодействующей R (черт. 83). При графическом сложении плоской системы сил могут представиться три случая.

1) Силовой мн-к и веревочный не замкнуты, — система сил приводится к одной силе (черт. 83).



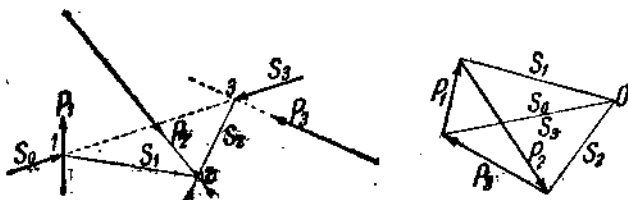
Черт. 83.

2) Силовой мн-к замкнут, крайние стороны веревочного мн-ка параллельны, — система сил приводится к паре сил (черт. 84).



Черт. 84.

Момент пары равен $S_0 a = S_1 a$, при чем S_0 измеряется на силовом мн-ке в масштабе сил, a измеряется в масштабе длин.



Черт. 85.

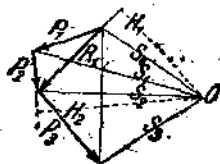
3) Силовой мн-к и веревочный мн-к замкнуты, — система сил находится в равновесии (черт. 85).

Совпадающие крайние стороны S_0 и S_2 называются замыкающим боком веревочного мн-ка.

А. Графическое определение момента силы (черт. 86).

Чтобы найти момент силы P_2 относительно точки m_1 , проведем через точку m_1 прямую, параллельную силе P_2 ; отрезок этой параллели между сторонами веревочного мн-ка, к-рые пересекаются на силе P_2 , равен y_2 . Произведение этого отрезка y_2 на перпендикулярное расстояние H_2 силы P_2 есть момент M_2 силы P_2 относительно точки m_1 : $M_2 = y_2 H_2$.

Этот прием относится и к равнодействующей нескольких сил, напр., для $\vec{R}_1 = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$. Момент этой силы R_1 относительно точки m_1 равен $M_1 = y_1 H_1$, где y_1 — отрезок параллели между сторонами веревочного мн-ка, к-рые пересекаются на силе R_1 , H_1 — полное расстояние силы R_1 .



Черт. 86.

Обычно H измеряется в масштабе сил, y — в масштабе длин. В случае параллельных сил получается значительное упрощение, т. к. для всех сил полное расстояние H одно и все отрезки y параллельны между собой.

П р и м е р. Определение опорных реакций, изгибающих моментов и перерезывающих (поперечных) сил в балке, свободной лежащей на двух опорах. Строим силовой мн-к, а затем веревочный. Пересечение крайних сторон веревочного мн-ка (S_2, S_1) определяет положение равнодействующей R . Для определения опорных реакций A и B проводим через точки пересечения вертикалей A и B с крайними сторонами веревочного мн-ка прямую ab , которая замыкает веревочный мн-к. Через полюс O проводим луч $S_1 ab$. Этот луч и определяет величины опорных реакций. Момент всех сил, лежащих влево от разреза $m-m$, относительно этого разреза называется изгибающим моментом и равен полному расстоянию H , умноженному на длину хорды y веревочного мн-ка: $M = H \cdot y$.

Изгибающий момент считается положительным, если сумма моментов всех левых сил вращает левую часть балки относительно центра тяжести рассматриваемого сечения по часовой стрелке. В противном случае изгибающий момент — отрицательный. Т. к. балка находится в равновесии, то момент M есть одновременно и момент правых сил, т. е. сил, лежащих вправо от сечения $m-m$, но с обратным знаком (подробнее см. «Сопротивление материалов»).

Алгебраическая сумма проекций всех левых сил относительно сечения $m-m$ на вертикаль называется поперечной силой Q ; при этом за положительное направление силы Q принимается направление снизу вверх, за отрицательное — обратное. Определение поперечных сил Q видно на чертеже (подробнее см. «Сопротивление материалов»).

Б. Графическое нахождение центров тяжести плоских фигур и определение статических моментов.

Для этой цели заданную фигуру разбивают на отдельные полоски одинаковой ширины и в ц. т. C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 прикладывают векторы, изображающие величины отдельных площадей в некотором условном масштабе F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 . Векторы параллельны той оси, относительно к-рой определяется статический момент. На черт. 87 векторы параллельны оси $x-x$. Статический момент всей фигуры относительно оси $x-x$ равен:

$$S_x = F_1 y_1 + F_2 y_2 + \dots + F_5 y_5 = \sum F y,$$

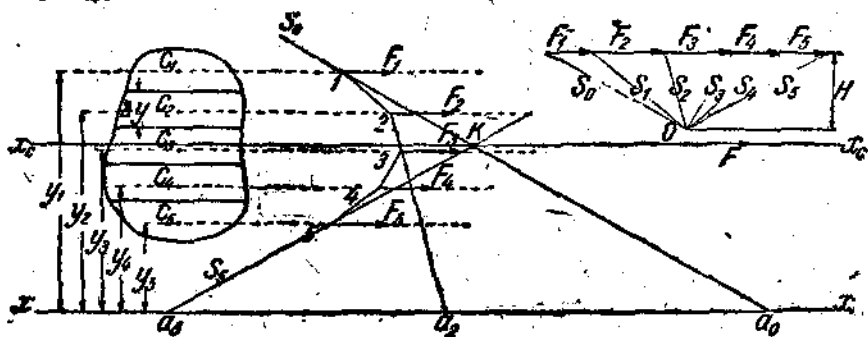
где $y_1, y_2, \dots, y_5$ — расстояния ц. т. от оси $x-x$. На основании свойств веревочного мн-ка (черт. 87):

$$S_x = H \cdot a_0 a_1.$$

Из того же чертежа легко определяются статические моменты отдельных частей фигуры. Напр., статический момент относительно той же оси $x-x$ двух верхних частей F_1 и F_2 равен: $S_x = H \cdot a_0 a_1$ (черт. 87).

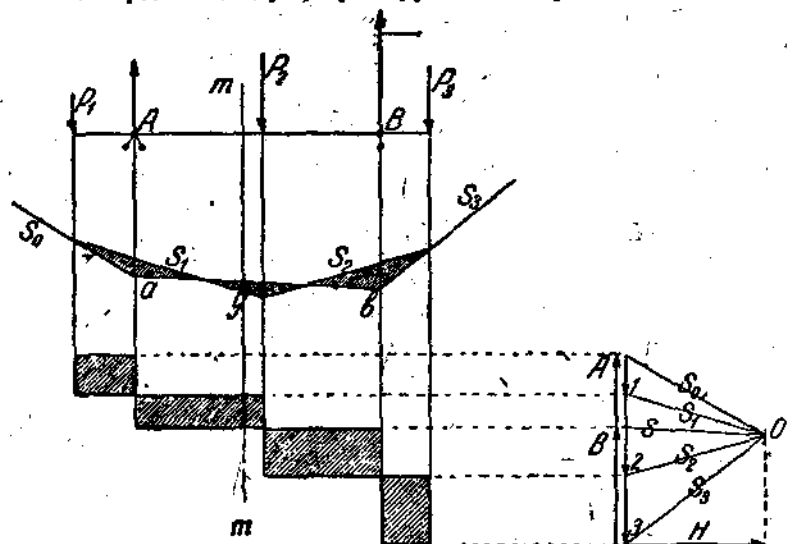
Для оси x_1-x_1 статический момент всей фигуры равен нулю, т. к. на этой оси в точке k пересекаются крайние лучи веревочного мн-ка. На этой

оси системы векторов, совпадающей с направлением равнодействующей F , лежит ц. т. всей фигуры. Если фигура имеет ось симметрии, ц. т. лежит в



Черт. 87.

пересечении этой оси с осью x_c — x_c . Если же фигура не имеет осей симметрии, то ц. т. фигуры определяется построением двух веревочных мн-ков, как точка пересечения двух результирующих векторов.



Черт. 88.

В. Графическое определение моментов инерции.

1) Способ Мора (черт. 87). Площадь заданной фигуры разбиваем на отдельные полоски одинаковой ширины Δy так, чтобы ц. т. каждой полоски $C_1, C_2, C_3, \dots$ можно было принять лежащим на прямой, делящей Δy пополам. В ц. т. прикладываем векторы F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 , изображающие величины площадей полосок в некоем условном масштабе. Векторы параллельны

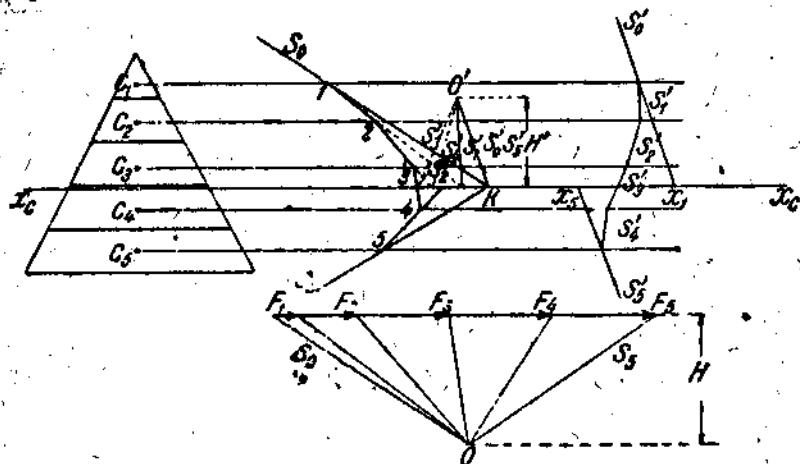
той оси, относительно к-рой определяется момент инерции (на черт. 87 параллельно оси $x-x$). Строим мн-к сил и веревочный мн-к. Момент инерции I_x данной фигуры относительно оси $x-x$ находится, как удвоенное произведение полюсного расстояния H на площадь F , к-рая образуется крайними сторонами веревочного мн-ка $1-k-a_1, a_1-5, 5-k$ веревочной кривой $1-2-3-4-5$ и осью $x-x$:

$$I_x = 2HF,$$

при чем H измеряется в масштабе площадей (сил), F —в квадратном масштабе длин. Для оси x_c-x_c , проходящей через ц. т. фигуры, момент инерции I_{x_c} определяется, как:

$$I_{x_c} = 2HF_c.$$

где H —полюсное расстояние, F_c —площадь, ограниченная крайними сторонами $1-k$ и $5-k$ и самой веревочной кривой $1-2-3-4-5$. Величина момента инерции I_x определяется тем точнее, чем уже выбраны отдельные полоски.



Черт. 89.

2) Способ Кульмана (черт. 89). Разбиваем площадь тр-ка на пять полосок одинаковой ширины, определяем их площади и положения ц. т. C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 , строим мн-к векторов F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 , изображающих площади отдельных полосок в нек-ром масштабе:

$$F_1 = \frac{f_1}{a}; F_2 = \frac{f_2}{a} \dots F_5 = \frac{f_5}{a},$$

где a —какая-нибудь линейная величина. Строим веревочный мн-к $S_1-1-2-3-4-5-S_5$, через точку k пересечения крайних сторон проведем прямую x_c-x_c ,—центральную горизонтальную ось, относительно к-рой будем определять момент инерции I_{x_c} тр-ка. Продолжаем стороны веревочного мн-ка до пересечения с осью x_c-x_c . Выбираем новый полюс O' и соединяем его с полученными точками пересечения лучами $S'_1, S'_2, S'_3, S'_4, S'_5$. Предполагая, что отрезки между этими лучами приложены в точках C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 , как нек-рые действительные векторы, строим новый веревочный мн-к, в к-ром крайние стороны S'_1 и S'_5 будут параллельны,

Продолжая их до пересечения с осью $x_c - x_c$ в точках x_1 и x_2 , получаем отрезок $a = x_1 x_2$. Искомый момент инерции определяется:

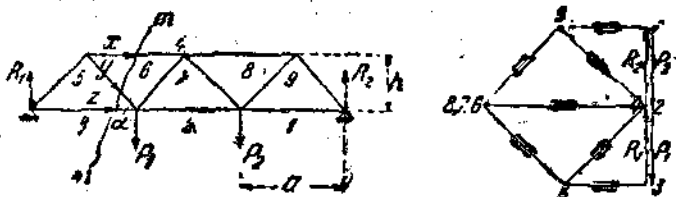
$$I_x = a \cdot H \cdot H' \cdot u,$$

при чем все величины, входящие в эту ф-лу, линейны и измеряются в масштабе чертежа.

Г. Графическое определение усилий в стержнях статически определимых плоских ферм для неподвижной нагрузки.

В дальнейшем предполагаем, что нагрузки, или внешние силы, приложены в узлах рассматриваемой фермы и что узлы представляют собою шарниры без трения. При этих условиях отдельные части статически определимой фермы только растягиваются или сжимаются, но не подвергаются сгибающим усилиям.

1) Способ Максвелла-Кремона (черт. 90). Ферма схематически чертится в надлежащем масштабе. Затем одним из способов, графическим или аналитическим, определяются опорные реакции R_1 и R_2 .



Черт. 90

Обозначаем арабскими цифрами—1, 2, 3, 4—внешние области между приложенными нагрузками и реакциями и цифрами 5, 6, 7, 8, 9—внутренние области между стержнями фермы. Строим мн-к внешних нагрузок, обходя их по часовой стрелке (P_1, P_1, R_1, R_2). Построение диаграммы Кремона начинают с узла, в котором сходится не более двух стержней,—в данном случае с узла в левой опорной точке. Через точку 4 на мн-ке сил проводим прямую, параллельную стержню 4-5, через точку 3 проводим прямую, параллельную стержню 5-3,—в пересечении получаем точку 5. Обходя построенный т. о. тр-к сил 3-4-5 по часовой стрелке, замечаем, что усилие в стержне 4-5 направлено к узлу,—стержень сжимается (сжатие); усилие в стержне 5-3 направлено от узла,—стержень растягивается (растяжение). Сжатие обозначается знаком — (минус), растяжение — знаком + (плюс). Для определения величины усилий измеряют в масштабе сил соответственные стороны диаграммы Кремона. Подобным образом определяются усилия и в остальных стержнях фермы.

Если на диаграмме Кремона некоторые стороны мн-ков сил обращаются в точки, то усилия в соответственных стержнях фермы равны нулю. Так, в нашем примере совпадают три точки: 6, 7, 8; усилия в стержнях 6-7 и 7-8 равны нулю. (Подробнее см. «Статика сооружений»).

2) Способ Риттера. Найденные из диаграммы Кремона усилия в стержнях фермы можно определить по способу Риттера (способ статических моментов). Одновременно этим способом можно проверить правильность построения диаграммы Кремона. Рассекаем ферму на две части так, чтобы сечение захватывало не более трех стержней, не сходящихся в одной точке (на черт. 90 сечение $m-m$). Рассматриваем равновесие одной какой-нибудь части, предполагая, что рассеченные стержни растянуты. Называя искомые

параллельны в стержнях x, y, z , составляем ур-ия моментов для точек, в к-рых пересекаются каждые два рассеченные стержня.

Для точки пересечения стержней x и y :

$$R_1 \frac{a}{2} - zh = 0; z = \frac{R_1 a}{2h} = \frac{Pa}{2h},$$

откуда:

$$z = \frac{R_1}{2h},$$

а т. к. $R_1 = P$, то:

$$z = \frac{Pa}{2h}.$$

Положительный результат показывает, что усилие z — растягивающее. Для точки пересечения стержней y и z :

$$R_1 a + xh = 0; x = -\frac{R_1 a}{h} = -\frac{Pa}{h}.$$

Отрицательный результат показывает, что усилие x — сжимающее.

Т. к. стержни x и y параллельны, то вместо третьего ур-ия моментов составляем ур-ие проекций на ось, перпендикулярную к стержням x и z :

$$R_1 - y_1 \cdot \cos \alpha = 0; y_1 = \frac{R_1}{\cos \alpha} = \frac{P}{\cos \alpha}.$$

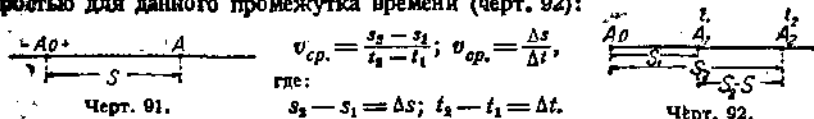
Положительный результат показывает, что усилие y — растягивающее. (подробнее см. «Статика сооружений»).

Кинематика и динамика.

§ 16. Прямолинейное движение.

1) Конечное уравнение движения. Движение точки вполне определено, если для каждого момента времени в процессе движения известно положение движущейся точки на прямой. Положение движущейся точки определяется ур-ием: $s = f(t)$, где s — путь, t — время (черт. 91). Дополнительно необходимо указать начальное положение точки A_0 , от к-рого отсчитывается путь, проходимый точкой.

2) Скорость (средняя в данный момент). Отношение пройденного пути к необходимому для этого промежутку времени называется средней скоростью для данного промежутка времени (черт. 92):



$$v_{cp.} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}; v_{cp.} = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

где:

$$s_2 - s_1 = \Delta s; t_2 - t_1 = \Delta t.$$

Предел средней скорости при $\Delta t \rightarrow 0$ называется скоростью в данный момент времени.

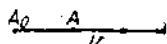
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (v_{cp.}) = v;$$

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right); v = \frac{ds}{dt}.$$

Средняя скорость $v_{cp.}$ в переменном движении зависит как от промежутка времени Δt , так и от момента времени t , определяющего этот промежуток. Скорость v в данный момент времени является ф-цией от t . Единица скорости — м/сек., км/ч. Из км/ч. можно получить м/сек. путем деления числа км/ч. на 3,6. Напр., $45 \text{ км/ч.} = \frac{45}{3,6} \text{ м/сек.} = 12,5 \text{ м/сек.}$

Вектор скорости в прямолинейном движении откладывается по прямой в сторону движения (черт. 93).

3) Ускорение (среднее и в данный момент). Отношение алгебраического приращения скорости к необходимому для этого промежутку времени называется средним ускорением прямолинейно движущейся точки для данного промежутка времени (черт. 94).



Черт. 93.

где:

$$j_{cp.} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}; j_{cp.} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

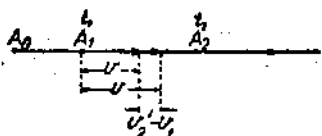
$$v_2 - v_1 = \Delta v; t_2 - t_1 = \Delta t.$$

Предел среднего ускорения при $\Delta t \rightarrow 0$ называется ускорением в данный момент времени.

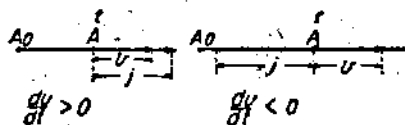
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (j_{cp.}) = j;$$

$$j = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right); j = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Среднее ускорение в переменном движении зависит как от промежутка времени Δt , так и от момента времени t , определяющего этот промежуток. Ускорение в данный момент времени является функцией от t . Единица ускорения — м/сек². Ускорение в прямолинейном движении изображается в виде вектора, направленного по прямой в сторону скорости, если скорость возрастает ($\frac{dv}{dt} > 0$, черт. 95) и в сторону прямо противоположную скорости, если скорость убывает ($\frac{dv}{dt} < 0$, черт. 95).



Черт. 94.



Черт. 95.

4) Нахождение пройденного пути и скорости по заданному ускорению. Скорость и пройденный путь определяются интегрированием дифференциальных ур-ий:

$$j = \frac{dv}{dt}; v = \frac{ds}{dt};$$

$$v = v_0 + \int j dt; s = s_0 + \int v dt,$$

где: s_0 — начальное положение, v_0 — начальная скорость.

Умножив обе части ур-ия $j = \frac{dv}{dt}$ на ds , получим: $j \cdot ds = v \cdot dv$, откуда после интегрирования:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} + \int j ds.$$

5) Основные зависимости в прямолинейном движении. а) Равномерное движение:

$$s = s_0 + vt, v = \text{Const.}, j = 0.$$

б) Равнопеременное движение:

$$s = s_0 + v_0 t \pm j \frac{t^2}{2}; v = v_0 \pm jt; j = \text{Const.}$$

знак + относится к равноускоренному движению, знак — к равнозамедленному движению.

б) Движение по произвольному закону. а) Дано: $s = f(t)$. Найти v и j .

$$v = \frac{ds}{dt}; j = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

б) Дано: $v = f(t)$. Найти s и j .

$$s = s_0 + \int v dt; j = \frac{dv}{dt}.$$

в) Дано: $v = f(s)$. Найти t и j .

$$t = \int \frac{ds}{v}; j = v \frac{dv}{ds}.$$

г) Дано: $j = f(t)$. Найти v и s .

$$v = v_0 + \int j dt; s = s_0 + \int v dt.$$

д) Дано: $j = f(s)$. Найти v и t .

$$v^2 = v_0^2 + 2 \int j ds; t = \int \frac{ds}{v}.$$

е) Дано: $j = f(v)$. Найти s и t .

$$s = s_0 + \int \frac{v dv}{f}; t = \int \frac{dv}{f}.$$

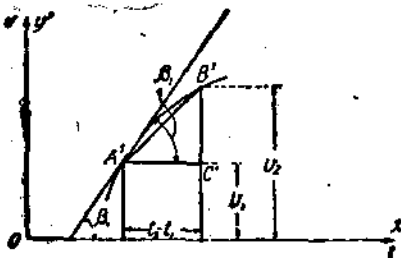
Во всех этих ф-лах s_0 — начальное положение, v_0 — начальная скорость.

7) Графический прием исследования прямолинейного движения. Откладывая по оси абсцисс время, а по оси ординат соответственные расстояния, проходящие точкой, получим кривую, к-рая изображает у-ние движения. Эта кривая называется графиком или диаграммой расстояний (s, t). Наклон касательной на графике (s, t черт. 96) определяет скорость:

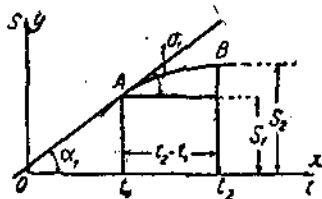
$$v = \text{tg } \alpha_1.$$

Если наносить значения v как ф-ии времени t в прямоугольных координатах, то получим кривую, к-рая называется графиком или диаграммой скоростей (v, t). Наклон касательной на графике (v, t) (черт. 97) определяет ускорение:

$$j = \text{tg } \beta_1.$$



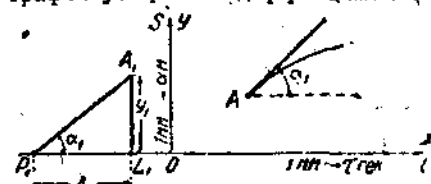
Черт. 97.



Черт. 96.

Если наносить значения J как ф-ии времени t в прямоугольных координатах, то получим кривую, к-рая называется графиком, или диаграммой, ускорений (J, t).

График скоростей есть дифференциальная кривая от кривой расстояний, график ускорений — дифференциальная кривая от кривой скорости. Пользуясь этим, по графику расстояний можно построить графики скоростей ускорений.



Черт. 98.

пересечения в точке A_1 . Построенный т. о. отрезок $L_1A_1 = y'$ и представляет величину, пропорциональную скорости, соответствующей точке A на графике (s, t). Определим масштаб скорости (за основную масштабную единицу в графических построениях принимают обычно 1 мм). Если при построении графика (s, t) примем масштаб: 1 мм — τ сек, 1 мм — a м, то время t и путь s , соответствующие точке A , определяются по ф-лам:

$$t = \tau \cdot x; s = a \cdot y,$$

откуда:

$$dt = \tau \cdot dx; ds = a \cdot dy,$$

или:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{a}{\tau} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Но:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha_1,$$

поэтому:

$$v = \frac{a}{\tau} \cdot \operatorname{tg} \alpha_1.$$

Из $\triangle A_1P_1L_1$:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{y'}{k}.$$

Следовательно:

$$v = \frac{a}{\tau \cdot k} y'.$$

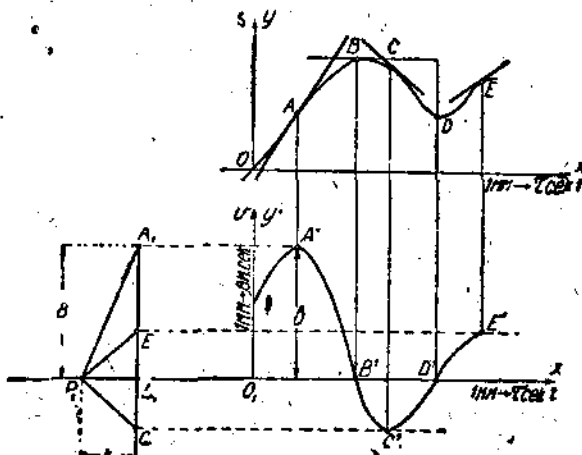
Величина скорости пропорциональна отрезку y' . Коэф-т пропорциональности $\frac{a}{\tau \cdot k}$ называется масштабом скорости и обозначается β :

$$\beta = \frac{a}{\tau \cdot k}.$$

Величина масштаба β зависит от величины отрезка k , длина к-рого определяется исключительно размерами площади, отведенной для чертежа. Для определения надлежащей длины отрезка k поступаем сл. обр.: через точку P_1 проводим прямые, параллельные касательным в точках перегиба кривой (s, t), т. к. в этих точках углы наклона касательных к оси абсцисс, а следовательно, и ординаты y' имеют наибольшие значения (черт. 99).

Пусть такой точкой перегиба с наибольшим углом наклона касательной будет точка A . За ординату соответственной точки A' на графике скорости (v, t) возьмем отрезок b мм и (в зависимости от размера площади чертежа) проведем на этом расстоянии прямую, параллельную оси абсцисс, до пере-

сечения в точке A_1 с прямой, проведенной из P_1 параллельно касательной в точке A . Опустив из точки A_1 перпендикуляр A_1L_1 на ось абсцисс, получим искомую величину k отрезка P_1L_1 , выражаемую в мм. Такой выбор



Черт. 99.

отрезка b , а вместе с ним и отрезка k позволяет утверждать, что скорости, соответствующие остальным точкам графика пути, изобразятся ординатами y' , меньшими по величине, чем отрезок b .

Напр., скорость, соответствующая точке B , будет изображаться ординатой B_1L_1 , точке C — ординатой C_1L_1 . Касательная в точке D параллельна оси Ox , скорость, соответствующая этой точке, равна нулю. Применяя этот прием к графику скорости, можно построить график ускорений.

На диаграмме (j, t) ускорение пропорционально ординате y'' :

$$j = \gamma y''.$$

Коэф-т пропорциональности γ называется масштабом ускорения (черт. 100) и равен:

$$\gamma = \frac{\beta}{k_1},$$

где β — масштаб скорости, k_1 имеет то же назначение, что и k при построении диаграммы (v, t) .

В) Дифференциальное ур-е прямолинейного движения. Приняв прямую за ось x -ов, имеем дифференциальное ур-е:

$$m \frac{dx}{dt} = X,$$

где m — масса материальной точки, x — ее координата, X — проекция

равнодействующей приложенных к точке сил. При интегрировании этого ур-я получаются две произвольные постоянные, к-рые определяются из начальных условий, т. е. по данным значениям координаты и скорости в начальный момент времени или в какой-либо др. момент.

Пример 1. Поезд идет по прямолинейному горизонтальному участку пути с постоянной скоростью v_0 . При торможении поезда развивается сопротивление движению, равное $0,1$ веса поезда. Найти движение заторможенного поезда.

При торможении поезда действуют три силы: сила тяжести P , реакция рельсов N и сопротивление $Q = 0,1P$ (черт. 101). Составляем дифференциальное уравнение движения в проекциях на ось x -ов:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -Q; \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = -0,1mg; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -0,1g.$$

Интеграл этого дифференциального уравнения:

$$x = -\frac{g t^2}{20} + C_1 t + C_2;$$

при $t = 0$ $x_0 = 0$, следовательно: $C_2 = 0$;

при $t = 0$ $\frac{dx}{dt} = v_0$, следовательно: $C_1 = v_0$;

$$x = v_0 t - \frac{g t^2}{20}; \quad v = v_0 - \frac{g t}{10}.$$

Черт. 101.

Эти уравнения определяют движение заторможенного поезда. Напр., время полной остановки найдем из $0 = v_0 - \frac{g t}{10}$, $t = \frac{10 v_0}{g}$;

путь, пройденный до остановки:

$$x = \frac{10 v_0^2}{g} - \frac{5 v_0^2}{g} = \frac{5 v_0^2}{g}.$$

Пример 2. Движение свободно падающего тела. Пренебрегая сопротивлением воздуха, имеем дифференциальное уравнение движения в проекциях на ось x -ов (черт. 102):

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = P; \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = mg; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = g.$$

Интеграл этого уравнения:

$$x = \frac{1}{2} g t^2 + C_1 t + C_2.$$

при $t = 0$ $x_0 = 0$; $C_2 = 0$;

при $t = 0$ $v_0 = 0$; $C_1 = 0$.

Следовательно: $x = \frac{g t^2}{2}$, $v = g t$.

Время падения с высоты h определяется: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$; скорость $v =$

$= \sqrt{2hg}$ (ф-ла Галилея).

Черт. 102.

Таблица высот h , соответствующей скорости (падениям маятника) v и для конечных скоростей v от 0 до 1000 м/сек.

$$h = v^2 : 2g; \quad g = 9,81 \text{ м/сек}^2.$$

v	h	v	h	v	h	v	h	v	h	v	h
1	0,05097	14	9,98981	27	37,1560	40	81,5494	53	143,170	66	222,018
2	0,20387	15	11,4679	28	39,9592	41	85,6779	54	148,624	67	228,797
3	0,45872	16	13,0479	29	42,8644	42	89,9083	55	154,179	68	235,678
4	0,81340	17	14,7299	30	45,8716	43	94,2408	56	159,837	69	242,661
5	1,27421	18	16,5138	31	48,9807	44	98,6748	57	165,606	70	249,745
6	1,83486	19	18,3996	32	52,1917	45	103,211	58	171,488	71	256,932
7	2,49745	20	20,3874	33	55,5046	46	107,849	59	177,421	72	264,220
8	3,26198	21	22,4771	34	58,9195	47	112,589	60	183,406	73	271,611
9	4,12844	22	24,6687	35	62,4363	48	117,431	61	189,653	74	279,103
10	5,09684	23	26,9623	36	66,0551	49	122,375	62	196,023	75	286,697
11	6,16718	24	29,3578	37	69,7757	50	127,421	63	202,594	76	294,393
12	7,33945	25	31,8552	38	73,5984	51	132,669	64	208,767	77	302,192
13	8,61366	26	34,4546	39	77,5229	52	137,819	65	215,341	78	310,092

Таблица высоты h (продолжение).

v	h	v	h	v	h	v	h	v	h	v	h
79	318,094	99	499,541	275	3 854,41	455	10 551,7	635	20 551,7	815	33 854,5
80	326 198	100	509,684	285	4 139 92	465	11 020,6	645	21 204 1	825	34 690,4
81	334,404	105	561,927	295	4 435,56	475	11 499,7	655	21 866,7	835	35 536,4
82	342,712	115	674,057	300	4 587,18	485	11 989,0	665	22 539,5	845	36 392,7
83	351,121	125	796,381	305	4 741,34	495	12 488,5	675	23 222,5	855	37 259,2
84	359,633	135	928,899	315	5 057,34	500	12 742,1	685	23 915,7	865	38 135,8
85	368,247	145	1 071,61	325	5 383,54	505	12 998,2	695	24 619,0	875	39 022,7
86	376,962	155	1 224,52	335	5 719,93	515	13 518,1	700	24 974,5	885	39 919,7
87	385,780	165	1 387,61	345	6 066,51	525	14 048,2	705	25 332,6	895	40 827,0
88	394,699	175	1 560,91	355	6 423,29	535	14 588,4	715	26 056,3	900	41 284,4
89	403,721	185	1 744,39	365	6 790,26	545	15 138,9	725	26 790,3	905	41 744,4
90	412,844	195	1 938,07	375	7 167,43	555	15 699,5	735	27 534,4	915	42 672,0
91	422,069	200	2 038,74	385	7 554,79	565	16 270,4	745	28 288,7	925	43 609,8
92	431,397	205	2 141,95	395	7 952,34	575	16 851,4	755	29 053,3	935	44 557,8
93	440,826	215	2 356,01	400	8 154,94	585	17 442,7	765	29 828,0	945	45 516,1
94	450,357	225	2 574,34	405	8 360,09	595	18 044,1	775	30 612,9	955	46 484,5
95	459,990	235	2 814,73	415	8 778,03	600	18 348,6	785	31 408,0	965	47 463,1
96	469,725	245	3 059,36	425	9 206,17	605	18 655,3	795	32 213,3	975	48 431,8
97	479,562	255	3 314,22	435	9 644,50	615	19 277,5	800	32 619,8	985	49 450,8
98	489,501	265	3 579,26	445	10 093,0	625	19 909,5	805	33 028,8	995	50 460,0
										1000	50 968,4

Таблица конечных скоростей v м/сек. для высоты, соответствующей скорости (падения или напора) h от 1 до 1000 м.

$$v = \sqrt{2gh}; \quad g = 9,81 \text{ м/сек}^2.$$

h	v	h	v	h	v	h	v	h	v	h	v
1	4,42945	35	26,2050	69	36,7938	110	46,4564	350	82,8673	680	115,506
2	6,26418	36	26,5767	70	37,0594	115	47,5005	360	84,0429	690	116,352
3	7,67202	37	26,9433	71	37,3232	120	48,5224	370	85,2021	700	117,192
4	8,85889	38	27,3049	72	37,5851	125	49,5227	380	86,3456	710	118,026
5	9,90454	39	27,6619	73	37,8452	130	50,5037	390	87,4746	720	118,855
6	10,8499	40	28,0143	74	38,1035	135	51,4655	400	88,5889	730	119,677
7	11,7192	41	28,3623	75	38,3601	140	52,4099	410	89,6895	740	120,494
8	12,5284	42	28,7061	76	38,6150	145	53,3376	420	90,7767	750	121,305
9	13,2883	43	29,0458	77	38,8682	150	54,2492	430	91,8510	760	122,111
10	14,0071	44	29,3816	78	39,1198	155	55,1462	440	92,9129	770	122,912
11	14,6908	45	29,7136	79	39,3698	160	56,0284	450	93,9627	780	123,708
12	15,3440	46	30,0420	80	39,6182	165	56,8973	460	95,0010	790	124,498
13	15,9706	47	30,3668	81	39,8650	170	57,7529	470	96,0281	800	125,284
14	16,5730	48	30,6881	82	40,1103	175	58,5961	480	97,0443	810	126,064
15	17,1553	49	31,0061	83	40,3542	180	59,4272	490	98,0500	820	126,840
16	17,7178	50	31,3209	84	40,5032	185	60,2470	500	99,0454	830	127,611
17	18,2630	51	31,6326	85	40,8375	190	61,0555	510	100,031	840	128,378
18	18,7925	52	31,9412	86	41,0770	195	61,8539	520	101,007	850	129,140
19	19,3075	53	32,2469	87	41,3151	200	62,6418	530	101,974	860	129,897
20	19,8091	54	32,5497	88	41,5519	210	64,1888	540	102,931	870	130,650
21	20,2983	55	32,8496	89	41,7873	220	65,6993	550	103,880	880	131,399
22	20,7759	56	33,1469	90	42,0214	230	67,1759	560	104,820	890	132,143
23	21,2428	57	33,4416	91	42,2542	240	68,6207	570	105,752	900	132,883
24	21,6998	58	33,7337	92	42,4858	250	70,0357	580	106,675	910	133,620
25	22,1472	59	34,0232	93	42,7160	260	71,4227	590	107,591	920	134,352
26	22,5858	60	34,3105	94	42,9451	270	72,7832	600	108,499	930	135,080
27	23,0161	61	34,5951	95	43,1729	280	74,1189	610	109,399	940	135,804
28	23,4384	62	34,8775	96	43,3995	290	75,4308	620	110,292	950	136,525
29	23,8535	63	35,1577	97	43,6250	300	76,7202	630	111,135	960	137,241
30	24,2611	64	35,4356	98	43,8493	310	77,9894	640	112,057	970	137,964
31	24,6621	65	35,7113	99	44,0724	320	79,2364	650	112,929	980	138,684
32	25,0667	66	35,9850	100	44,2945	330	80,4649	660	113,795	990	139,399
33	25,4452	67	36,2566	105	45,3883	340	81,6750	670	114,653	1000	140,071
34	25,8279	68	36,5262								

Пример 3. Падение тела в сопротивляющейся среде. Сопротивление воздуха $R = Ksv^2$, где K — нормальный коэф-т ($K = 0,08$), зависящий от формы тела, s — проекция тела на плоскость, перпендикулярную к направлению его движения, v — относительная скорость потока воздуха (черт. 102).

Дифференциальное ур-ие движения в проекциях на ось x -ов:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = P - R; \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - Ksv^2; \quad \frac{dv}{dt} = \frac{g}{w^2} (w^2 - v^2),$$

где $w^2 = \frac{mg}{Ks}$.

При $w > v$ $\frac{dv}{dt} > 0$, — движение ускоренное.

При $w < v$ $\frac{dv}{dt} < 0$, — движение замедленное.

Определяем v .

$$\ln \frac{w+v}{w-v} = 2 \frac{g}{w} t + C_1.$$

При $t = 0$ $v_0 = 0$, $C_1 = 0$, следовательно:

$$\ln \frac{w+v}{w-v} = 2 \frac{g}{w} t,$$

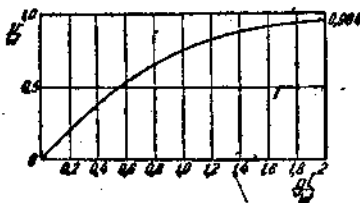
откуда:

$$v = w \frac{e^{\frac{gt}{w}} - 1}{e^{\frac{gt}{w}} + 1} = w \frac{e^{\frac{gt}{w}} - e^{-\frac{gt}{w}}}{e^{\frac{gt}{w}} + e^{-\frac{gt}{w}}},$$

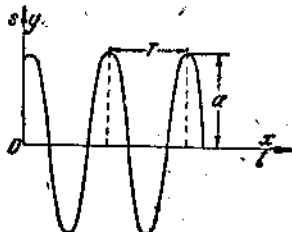
или в гиперболических ф-лах:

$$v = w \cdot \operatorname{th} h \left(\frac{gt}{w} \right).$$

Скорость v непрерывно растет, приближаясь асимптотически к предельному значению w при беспредельном возрастании времени t (черт. 103).



Черт. 103.



Черт. 104.

Пройденный путь в зависимости от времени определяется:

$$x = \frac{w^2}{g} \cdot \ln \cosh h \left(\frac{gt}{w} \right) + C_2.$$

При $t = 0$ $x_0 = 0$, $C_2 = 0$, следовательно:

$$x = \frac{w^2}{g} \cdot \ln \cosh h \left(\frac{gt}{w} \right).$$

Пример 4. Гармонические колебания. К точке массы m приложена сила, притягивающая ее к неподвижному центру пропорционально расстоянию. $P = -cx$. Начальные условия: при $t = 0$ $x = x_0$ и $v = v_0$.

Дифференциальное ур-ие движения точки:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -cx; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x, \quad \text{где } k^2 = \frac{c}{m}.$$

Интеграл этого ур-ия:

$$x = C_1 \cdot \cos kt + C_2 \cdot \sin kt.$$

При начальных данных $C_1 = x_0$, $C_2 = -\frac{v_0}{k}$

$$x = x_0 \cdot \cos kt + \frac{v_0}{k} \cdot \sin kt.$$

Движение периодическое (черт. 104).

Период колебания: $T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}$.

Частота колебаний $\lambda = \sqrt{\frac{m}{c}}$ — число колебаний в 2π см.

Амплитуда колебания: $a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}$.

Пример 5. Затухающее колебание. Кроме силы $P = cx$ к точке приложена сила сопротивления, являющаяся пропорциональна скорости v . Дифференциальное уравнение:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + cx + h \frac{dx}{dt} = 0;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x + 2\pi \frac{dx}{dt} = 0,$$

где:

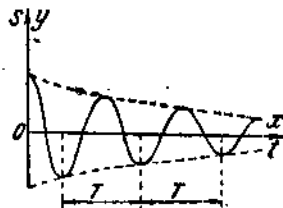
$$k^2 = \frac{c}{m}, \quad 2\pi = \frac{h}{m}.$$

а) $\pi < k$; $h^2 < 4cm$ (случай малого сопротивления):

$$x = \frac{v_0}{k} e^{-\pi t} \cdot \sin(\rho t),$$

где

$$\rho^2 = k^2 - \pi^2.$$



Черт. 105.

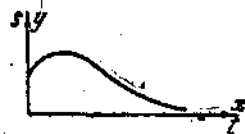
Движение периодическое (черт. 105). Амплитуды убывают в геометрической прогрессии, знаменатель которой равен $e^{-\frac{\pi t}{\rho}}$; период колебания $T = \frac{2\pi}{\rho} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - \pi^2}}$, т. е. период T растет с увеличением сопротивления.

Величина $\frac{\pi}{\rho}$ называется логарифмическим декрементом.

б) $\pi = k$, $x = v_0 t e^{-\pi t}$, движение имеет аperiodический характер (черт. 106).

в) $\pi > k$ (случай большого сопротивления):

$$x = \frac{v_0}{2\rho} e^{-\pi t} (e^{\rho t} - e^{-\rho t}) = \frac{v_0}{\rho} e^{-\pi t} \cdot \sinh(\rho t).$$



Черт. 106.

Движение аperiodическое.

Пример 6. Колебание с постоянным сопротивлением.

К точке А приложена сила $P = cx$ и сила сопротивления $F = \text{const}$. В случае

движения точки А в сторону положительных x -ов (черт. 107, I) дифференциальное уравнение:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -cx - F.$$

При движении в сторону отрицательных x -ов (черт. 107, II) дифференциальное уравнение:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -cx + F,$$

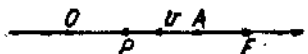
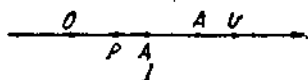
или:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2(x \pm n),$$

где

$$k^2 = \frac{c}{m}, \quad n = \frac{F}{mk^2}.$$

Знак + для случая I, знак — для случая II.



Черт. 107.

Движение периодическое. Период колебания $T = \frac{2\pi}{k}$. Амплитуды колебания убывают в арифметической прогрессии, разность которой $2\pi = \frac{2F}{mk^2}$. Движение заканчивается на $(l+1)$ размахе, где l — целое от деления x_0 на 2π .

Пример 7. Вынужденные колебания. К точке A кроме силы $P = cx$ приложена возмущающая сила $Q = \sin pt$, меняющаяся по периодическому закону.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + cx = Q \cdot \sin pt; \quad \frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = q \cdot \sin pt,$$

где:

$$k^2 = \frac{c}{m}; \quad q = \frac{Q}{m}.$$

Интеграл этого уравнения:

$$x = C_1 \cdot \cos kt + C_2 \cdot \sin kt + \frac{q}{k^2 - p^2} \cdot \sin pt.$$

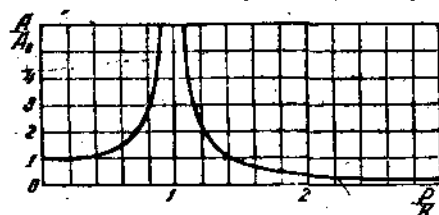
C_1 и C_2 — постоянные интегрирования (см. п. 4). Первые два члена — свободные колебания (см. п. 4), последний член — вынужденные колебания.

Вынужденные колебания не зависят от начальных данных. Период их равен периоду изменения возмущающей силы. Амплитуда вынужденных колебаний определяется формулой:

$$A = \frac{q}{k^2 - p^2} \quad \text{при } p < k; \quad (1)$$

$$A = \frac{q}{p^2 - k^2} \quad \text{при } p > k. \quad (2)$$

Формула (1) показывает, что при $0 < p < k$ (вынужденные колебания «малой» частоты) амплитуда A возрастает с увеличением p , при $p = k$ амплитуда обращается в бесконечность: $A = \infty$ (явление резонанса). На черт. 108 точки, лежащие влево от критического значения $\frac{p}{k} = 1$, при котором



Черт. 108.

имеет место резонанс, соответствуют вынужденным колебаниям малой частоты; лежащие справа — большой частоты; $A_0 = \frac{q}{k^2}$.

Формула (2) показывает, что при $p > k$ (вынужденные колебания большой частоты) амплитуда A убывает с увеличением p , при $p = \infty$ амплитуда обращается в нуль: $A = 0$. Т. о., если частота изменений возмущающей силы равна частоте свободных колебаний материальной точки ($p = k$), то возникают вынужденные колебания бесконечно-большой амплитуды.

Пример 8. Влияние сопротивления на вынужденные колебания. Полагаем силу сопротивления F пропорциональной скорости.

Дифференциальное уравнение движения:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + cx + h \frac{dx}{dt} = Q \cdot \sin pt;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2x = q \cdot \sin pt,$$

где:

$$k^2 = \frac{c}{m}; \quad 2n = \frac{h}{m}; \quad q = \frac{Q}{m}.$$

Интеграл этого уравнения: при $n < k$ (малое сопротивление):

$$x = ae^{-nt} \cdot \sin(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t + \beta) + A \cdot \sin(pt - \alpha); \quad (3)$$

при $n > k$ (большое сопротивление):

$$x = ae^{-nt} \cdot \sinh(\sqrt{n^2 - k^2} \cdot t + \beta) + A \cdot \sin(pt - \alpha). \quad (4)$$

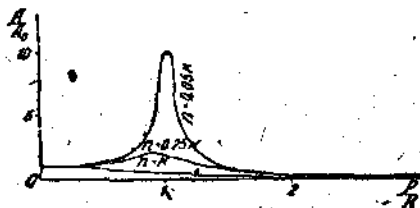
где: α и β — постоянные интегрирования; $A = \frac{q}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}$, $\operatorname{tg} \epsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}$.

Из ф-лы (3) видно, что движение точки A складывается из двух колебательных движений: затухающих (1-й член) и вынужденных (2-й член). Из ф-лы (4) видно, что на вынужденные колебания накладывается быстро затухающее апериодическое движение. Период вынужденных колебаний равен периоду изменений возмущающей силы. Сопротивление не оказывает влияния на период вынужденных колебаний. Сопротивление уменьшает амплитуду A вынужденных колебаний. Уменьшение амплитуды особенно заметно при значениях p , близких к k ; при $p = k$ в отсутствие сопротивления $A = \infty$, при сопротивлении $A = \frac{q}{2nk}$.

Наибольшее значение амплитуда имеет при $p = \sqrt{k^2 - 2n^2}$.

$$A_{\max} = \frac{q}{2n \sqrt{k^2 - n^2}}.$$

При малых значениях n величина $\sqrt{k^2 - 2n^2}$ весьма мало отличается от k . Напр., при $n = 0,05k$ имеем: $\sqrt{k^2 - 2n^2} = 0,9975k$. В этом случае $A = 10,0125A_0$; в этом ур-ии A_0 — значение амплитуды при $p = 0$. Т. о., при малых значениях n наблюдается резкое увеличение амплитуды (черт. 109); это соответствует значениям p , близким к k . При увеличении n величина амплитуды A убывает; так, напр., при $n = 0,25k$ $A = 2,066A_0$ (черт. 109). При $n > \frac{k}{\sqrt{2}}$ максимум амплитуды A перестает существовать. С изменением частоты p от 0 до ∞ амплитуда A убывает от A_0 до 0 и явление резонанса исчезает.



Черт. 109.

Таблица значений $\frac{A}{A_0}$, соответствующих различным значениям $\frac{p}{k}$, для случаев $n = 0$ (без сопротивления), $n = 0,05k$, $n = 0,25k$, $n = k$ (граница апериодичности).

$\frac{p}{k} \backslash \frac{n}{k}$	0	0,05	0,25	1	$\frac{p}{k} \backslash \frac{n}{k}$	0	0,05	0,25	1
0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,4	1,042	1,031	0,842	0,338
0,2	1,042	1,041	1,036	0,962	1,6	0,641	0,638	0,570	0,291
0,4	1,190	1,183	1,158	0,862	1,8	0,446	0,445	0,414	0,236
0,6	1,562	1,556	1,415	0,735	2,0	0,333	0,333	0,316	0,200
0,8	2,778	2,712	1,858	0,610	3	0,125	0,125	0,123	0,100
1,0	∞	10,0	2,0	0,500	10	0,0101	0,0101	0,0101	0,0099
1,2	2,273	2,193	1,344	0,410	∞	0	0	0	0

Из сравнения значений величин $\frac{A}{A_0}$ при $n=0$ и $n=0,05k$ следует, что при малых значениях коэф. та затухания n и при частотах p , не слишком близких к критическому значению $p = k$, уменьшение амплитуды A под влиянием сопротивления мало, поэтому при малых значениях n и при частотах p , далеких от резонанса, при вычислении амплитуды A можно пренебрегать сопротивлением и вычислять амплитуды вынужденных колебаний по формулам:

$$A = \frac{q}{k^2 - p^2} \quad (p < k); \quad A = \frac{q}{p^2 - k^2} \quad (p > k).$$

§ 17. Криволинейное движение.

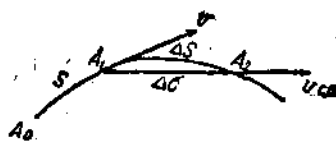
1) Уравнение движения по заданной траектории. Движение точки вполне определено, если для каждого момента времени в процессе движения известно положение движущейся точки на траектории. Положение точки определяется ур-ем $s=f(t)$, где s —путь, t —время (черт. 110). Дополнительно необходимо указать начальное положение точки A_0 , от которого отсчитывается путь, проходимый точкой.

2) Скорость (средняя и в данный момент). Средняя скорость определяется отношением:

$$v_{cp.} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

или:

$$v_{cp.} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$



Черт. 110.

Предел средней скорости при $\Delta t \rightarrow 0$ называется скоростью в данный момент времени:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (v_{cp.}) = v; v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right); v = \frac{ds}{dt}.$$

Обозначим Δs хорду $A_1 A_2$ (черт. 110), тогда:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta \sigma}{\Delta \sigma} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta \sigma} \right) \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \sigma}{\Delta t}.$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta \sigma} \right) = 1,$$

поэтому:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \sigma}{\Delta t} \right).$$

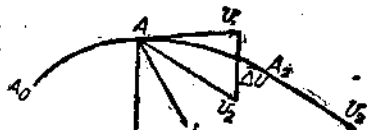
Как и в прямолинейном движении, средняя скорость $v_{cp.}$ криволинейного движения зависит от промежутка времени Δt и от момента t , определяющего этот промежуток. Скорость в данный момент времени является функцией t .

Вектор средней скорости $v_{cp.} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ откладывается по направлению хорды $A_1 A_2$ в сторону движения (черт. 110). Вектор скорости в данный момент времени v откладывается по касательной в рассматриваемой точке в сторону движения (черт. 110).

3) Ускорение (среднее и в данный момент). Отношение геометрического приращения скорости к необходимому для этого времени называется средним ускорением в криволинейном движении для данного промежутка времени:

$$j_{cp.} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}, \quad j_{cp.} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

$$\overline{v_2 - v_1} = \Delta v; \quad t_2 - t_1 = \Delta t;$$



Черт. 111.

Предел среднего ускорения при $\Delta t \rightarrow 0$ называется ускорением в данный момент времени:

$$j = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (j_{cp.}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right).$$

Иначе говоря, ускорение в криволинейном движении есть геометрическая производная вектора скорости.

Направление среднего ускорения $\bar{j}_{ср.}$ совпадает с направлением геометрического приращения скорости Δv (черт. 111). Ускорение в данный момент времени направлено в сторону вогнутости кривой и лежит между нормалью и касательной в соприкасающейся плоскости (черт. 111).

(Единица ускорения—см. стр. 222).

4) Касательное и нормальное ускорения. Проекция (составляющая) ускорения на касательную называется касательным, или тангенциальным, ускорением:

$$j_t = \frac{dv}{dt}.$$

Касательное ускорение характеризует изменение скорости по величине. Касательное ускорение имеет направление скорости, если $\frac{dv}{dt} > 0$, как на черт. 112, и прямо ей противоположно, если $\frac{dv}{dt} < 0$.

Проекция (составляющая) ускорения на нормаль называется нормальным, или центростремительным, ускорением:

$$j_n = \frac{v^2}{\rho},$$

где ρ —радиус кривизны в данной точке траектории. В другой форме $j_n = \omega v$, где ω —угловая скорость вращения вектора скорости v . Нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению. Нормальное ускорение j_n перпендикулярно к скорости v и направлено по нормали в сторону вогнутости кривой (черт. 112).

5) Выражение ускорения в криволинейном движении через касательное и нормальное. Ускорение в криволинейном движении есть геометрическая сумма из касательного и нормального ускорений (черт. 112):

$$\bar{j} = \bar{j}_t + \bar{j}_n.$$

Для вычисления величины ускорения в криволинейном движении найдем Φ -лу:

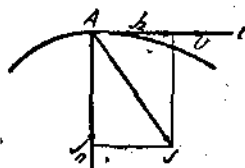
$$j = \sqrt{j_t^2 + j_n^2}; \quad j = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{\rho^2}}.$$

Направление определяется Φ -лой:

$$\operatorname{tg} (j, n) = \frac{j_t}{j_n}.$$

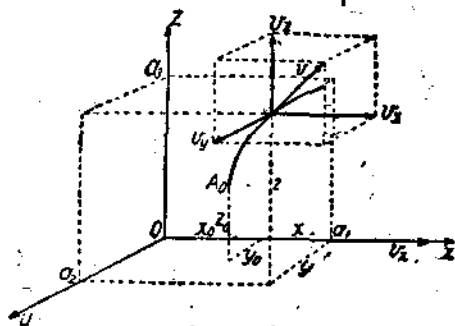
Таблица ускорений в различных случаях движения.

Наименование движения	Касательное ускорение $j_t = \frac{dv}{dt}$	Нормальное ускорение $j_n = \frac{v^2}{\rho}$	Полное ускорение $j = \sqrt{j_t^2 + j_n^2}$
1. Равномерное прямолинейное движение: $v = \text{Const. } \rho = \infty$.	$j_t = 0$	$j_n = 0$	$j = 0$
2. Равномерное криволинейное движение: $v = \text{Const.}$	$j_t = 0$	$j_n = \frac{v^2}{\rho}$	$j = j_n = \frac{v^2}{\rho}$
3. Переменное прямолинейное движение $\rho = \infty$	$j_t = \frac{dv}{dt}$	$j_n = 0$	$j = j_t = \frac{dv}{dt}$
4. Переменное криволинейное движение	$j_t = \frac{dv}{dt}$	$j_n = \frac{v^2}{\rho}$	$j = \sqrt{j_t^2 + j_n^2}$



Черт. 112.

Из этой таблицы видно, что: 1) в любом равномерном движении касательное ускорение всегда равно нулю; 2) в любом прямолинейном движении нормальное ускорение всегда равно нулю; 3) в равномерном криволинейном движении ускорение имеется, направлено по главной нормали к центру кривизны траектории и равно $\frac{v^2}{\rho}$; 4) ускорение равно нулю только в прямо-



Черт. 113.

линейном равномерном движении.

6) Уравнения движения в прямоугольных координатах. В прямоугольных координатах движение точки задается уравнениями:

$$x = f_1(t); y = f_2(t); z = f_3(t).$$

Дополнительно к этим уравнениям задается начальное положение точки A_0 координатами x_0, y_0, z_0 .

Каждое из этих ур-ий, взятое в отдельности, является ур-ем прямолинейного движе-

ния проекции точки на соответственную координатную ось. Напр., ур-е $y = f_2(t)$ является ур-ем движения точки a_2 по оси y -ов (черт. 113).

Ур-е траектории получается путем исключения времени t из ур-ий движения.

7) Вычисление величины и направления скорости в прямоугольных координатах. Величина скорости определяется по ф-ле:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

где v_x, v_y, v_z —проекции скорости на координатные оси:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; v_y = \frac{dy}{dt}; v_z = \frac{dz}{dt},$$

т. е. проекция скорости на координатную ось равна первой производной по времени от соответственной координаты. С другой стороны:

$$v_x = v \cdot \cos(v, x); v_y = v \cdot \cos(v, y); v_z = v \cdot \cos(v, z).$$

Отсюда направление скорости определяется по ф-лам;

$$\cos(v, x) = \frac{v_x}{v}; \cos(v, y) = \frac{v_y}{v}; \cos(v, z) = \frac{v_z}{v}.$$

$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}$ представляют скорости проекций точки A в их прямолинейных движениях по соответственным координатным осям. Напр., $v_x = \frac{dx}{dt}$ —скорость точки a_1 в ее прямолинейном движении по оси x -ов (черт. 113).

8) Вычисление величины и направления ускорения в прямоугольных координатах. Величина ускорения (черт. 114) определяется по ф-ле:

$$J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2 + J_z^2},$$

где J_x, J_y, J_z —проекции ускорения на координатные оси:

$$J_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; J_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; J_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

т. е. проекция ускорения на координатную ось равна первой производной по времени от проекции скорости на ту же ось или второй производной от соответственной координаты. С другой стороны:

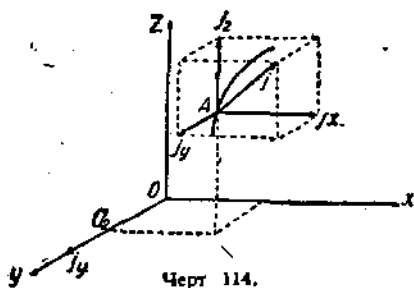
$$j_x = j \cdot \cos(j, x); j_y = j \cdot \cos(j, y); j_z = j \cdot \cos(j, z).$$

Отсюда направление ускорения определяется по ф-лам:

$$\cos(j, x) = \frac{j_x}{j}; \cos(j, y) = \frac{j_y}{j};$$

$$\cos(j, z) = \frac{j_z}{j}.$$

$j_x = \frac{dv_x}{dt}$, $j_y = \frac{dv_y}{dt}$ и $j_z = \frac{dv_z}{dt}$ представляют ускорения проекций точки A в ее прямолинейных движениях по соответственным координатным осям. Напр., $j_y = \frac{dv_y}{dt}$ —



Черт. 114.

ускорение точки A в ее прямолинейном движении по оси y -ов (черт. 114).

Пример. Даны координаты точки, движущейся в плоскости xoy :

$$x = 5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right);$$

$$y = 5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right),$$

где x и y — в м., а t — в сек. Требуется: 1) найти траекторию; 2) величину и направление вектора скорости; 3) касательное и нормальное ускорения; 4) величину и направление полного ускорения.

1) Для нахождения траектории исключаем время t из ур-ий движения:

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Это — ур-ние окружности радиуса $r = 5$ м с центром в начале координат.

2) Проекция скорости на оси координат:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -5 \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} t;$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 5 \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2} t.$$

На черт. 115 указано построение вектора скорости по проекциям (заметьте, что v_x отрицательно, а v_y положительно для угла $\varphi < 90^\circ$).

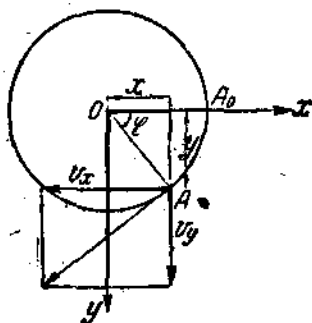
Величина и направление вектора скорости:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(5 \frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \sin^2 \frac{\pi}{2} t + \left(5 \frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \cos^2 \frac{\pi}{2} t} = 5 \frac{\pi}{2} \text{ м/сек.}$$

Т. к. скорость не зависит от времени, то заданное движение точки есть движение равномерное:

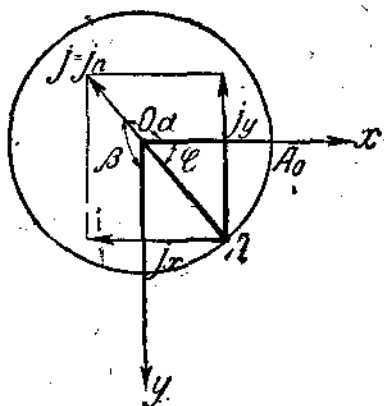
$$\cos \alpha = \cos(v, ox) = \frac{v_x}{v} = -\sin\left(\frac{\pi}{2} t\right);$$

$$\cos \beta = \cos(v, oy) = \frac{v_y}{v} = \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right).$$



Черт. 115.

3) Определяем проекции ускорения на оси (черт. 116):



Черт. 116.

По способу проекций на оси ox и oy для выяснения направления надо вычислить $\cos$ углов, образуемых ускорением с осями координат ox и oy . Обозначим:

$$\angle j, ox = \alpha; \quad \angle j, oy = \beta; \quad \angle \frac{\pi}{2} t = \varphi;$$

тогда:

$$\cos(j, ox) = \frac{j_x}{j} = -\cos \frac{\pi}{2} t; \quad \cos(j, oy) = \frac{j_y}{j} = -\sin \frac{\pi}{2} t;$$

или (черт. 116):

$$\cos \alpha = -\cos \varphi; \quad \cos \beta = -\sin \varphi; \quad \alpha = \pi - \varphi; \quad \beta = \frac{\pi}{2} + \varphi.$$

9) Уравнения движения, скорость и ускорение в полярных координатах на плоскости. В полярных координатах движение точки задается ур-ниями:

$$r = f_1(t); \quad \varphi = f_2(t).$$

Скорость определяется по ф-ле:

$$v = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r \frac{d\varphi}{dt}\right)^2},$$

где: $\frac{dr}{dt}$ — проекция скорости на радиус-вектор (радиальная скорость), $r \frac{d\varphi}{dt}$ — проекция скорости на перпендикуляр к радиусу-вектору (трансверсальная скорость (черт. 117).

Ускорение определяется по ф-ле:

$$j = \sqrt{j_r^2 + j_p^2},$$

где:

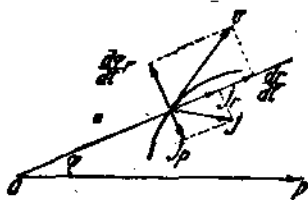
$$j_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, -$$

проекция ускорения на радиус-вектор (радиальная составляющая ускорения);

$$j_p = r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right), -$$

$$\begin{aligned} j_x &= \frac{dv_x}{dt} = -5 \frac{\pi^2}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{2} t; \\ j_y &= \frac{dv_y}{dt} = -5 \frac{\pi^2}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{2} t; \\ j &= \sqrt{j_x^2 + j_y^2} = \\ &= \sqrt{\left(5 \frac{\pi^2}{4}\right)^2 \left(\cos^2 \frac{\pi}{2} t + \sin^2 \frac{\pi}{2} t\right)} = \\ &= 5 \frac{\pi^2}{4} \text{ м/сек}^2. \\ j_t &= \frac{dv}{dt} = 0; \\ j_n &= \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{r} = 5 \frac{\pi^2}{4} \text{ м/сек}^2. \\ j &= \sqrt{j_t^2 + j_n^2} = j_n = 5 \frac{\pi^2}{4} \text{ м/сек}^2. \end{aligned}$$

4) Т. к. $j_t = 0$, то полное ускорение равно нормальному ускорению и направлено по радиусу траектории к центру.



Черт. 117.

проекция ускорения на перпендикуляр к радиусу-вектору (трансверсальная составляющая ускорения) (черт. 117).

10) Дифференциальные ур-ия криволинейного движения материальной точки в проекциях на прямоугольные оси координат. Для материальной точки, движущейся в пространстве, имеем три дифференциальных ур-ия:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X; m \frac{d^2y}{dt^2} = Y; m \frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

где m — масса материальной точки, x, y, z — ее координаты, X, Y, Z — проекции равнодействующей всех сил, приложенных к точке.

При помощи этих ур-ий можно определить, во-первых, силу, приложенную к точке, если заданы конечные ур-ия движения:

$$x = f_1(t); y = f_2(t); z = f_3(t),$$

и, во-вторых, характер движения, если задана сила, приложенная к точке или ее проекции X, Y, Z .

Первая группа вопросов решается дифференцированием, вторая — интегрированием. При интегрировании дифференциальных ур-ий появляются шесть произвольных постоянных, для определения к-рых необходимы начальные данные: 1) начальное положение точки, определяемое тремя координатами x_0, y_0, z_0 ; 2) начальная скорость v_0 точки или ее проекции v_x^0, v_y^0, v_z^0 .

11) Дифференциальные ур-ия движения материальной точки в проекциях на касательную, главную нормаль и бинормаль к траектории. В проекциях на эти три подвижных направления дифференциальные ур-ия движения материальной точки имеют вид:

$$m \frac{dv}{dt} = R_t; m \frac{v^2}{\rho} = R_n; 0 = R_b,$$

где: R_t — проекция на касательную равнодействующей всех сил, приложенных к точке, R_n — проекция на нормаль той же равнодействующей, R_b — ее проекция на бинормаль.

Пример. Материальная точка веса P , получив начальную скорость v_0 , движется по гладкой горизонтальной плоскости. Дано, что в процессе движения на материальную точку действует сила притяжения $R = kr$, где k — постоянный коэф-т, r — переменное расстояние движущейся точки от центра притяжения O , находящегося в плоскости движения точки. В начальный момент точка занимает положение A_0 на расстоянии $A_0O = a$ от центра O и начальная скорость v_0 перпендикулярна к A_0O . Найти траекторию движения данной материальной точки.

Ось ox направим по OA_0 . След., начальное положение точки будет иметь координатами:

$$x_0 = a \text{ и } y_0 = 0.$$

Ур-ия движения в проекциях на оси ox и oy :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

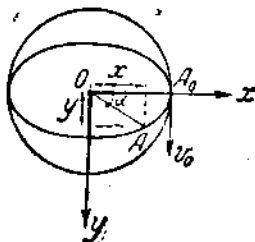
$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -ky.$$

или:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x. \quad (1)$$

или:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}y.$$



Черт. 118.

Общее решение этого линейного дифференциального уравнения второго порядка имеет такой вид:

$$x = A \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right). \quad (1)$$

Для определения постоянных используем начальные условия.

При

$$t=0, x=a \quad \frac{dx}{dt} = v_0 = 0.$$

Потому:

$$a = A \cdot \cos(0) + B \cdot \sin(0);$$

$$a = A \cdot 1 + 0;$$

$$A = a.$$

После этого уравнение (1) переписывается так:

$$x = a \cdot \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + B \cdot \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t. \quad (3)$$

Для определения постоянной B используем условие:

при

$$t=0 \quad \frac{dx}{dt} = 0.$$

Находим $\frac{dx}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt} = -a \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t +$$

$$+ B \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t.$$

$$\text{при } t=0 \quad \frac{dx}{dt} = 0,$$

потому:

$$= -a \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sin(0) + B \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \cos(0);$$

$$0 = 0 + B \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot 1,$$

откуда:

$$B = 0.$$

Окончательно имеем уравнение (1) в таком виде:

$$x = a \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right). \quad (5)$$

Общее решение этого линейного дифференциального уравнения второго порядка имеет такой вид:

$$y = C \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + D \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right). \quad (2)$$

Для определения постоянных используем начальные условия.

При

$$t=0, y=0 \quad \frac{dy}{dt} = V_0 = V_0.$$

Потому:

$$0 = C \cdot \cos(0) + D \cdot \sin(0),$$

$$0 = C \cdot 1 + D \cdot 0,$$

или:

$$C = 0.$$

После этого уравнение (2) переписывается так:

$$y = D \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right). \quad (4)$$

Для определения постоянной D используем условие:

$$\text{при } t=0 \quad \frac{dy}{dt} = v_0.$$

Находим $\frac{dy}{dt}$:

$$\frac{dy}{dt} = D \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t;$$

$$\text{при } t=0 \quad \frac{dy}{dt} = V_0.$$

потому:

$$v_0 = D \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \cos(0);$$

$$v_0 = D \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot 1,$$

откуда:

$$D = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Окончательно имеем уравнение (2) в таком виде:

$$y = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right). \quad (6)$$

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\left(v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}\right)^2}$$

Это уравнение — эллипс с полуосями a и $v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}$.

При разных начальных значениях v_0 будем получать различные формы эллипса.

При $v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} = a$ получим круг радиуса, равного a .

При $v_0 = 0$ получается колебательное движение по оси ox в пределах от $x = a$ до $x = -a$, при чем x изменяется по закону, выраженному ур-ем:

$$x = a \cdot \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right).$$

Пример. Материальная точка весом P , получив начальную скорость v_0 под углом α_0 к горизонту, движется в вертикальной плоскости xOz . Не принимая во внимание сопротивления воздуха, определить: 1) траекторию движения; 2) скорость тела для любого момента процесса движения. В процессе движения на точку действует только сила тяжести P . A —положение точки на траектории в какой-либо момент движения (черт. 119).

Дифференциальные ур-ия движения в проекциях на ось ox :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = R_x.$$

$$R_x = \text{пр}_{ox}(P) = 0,$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

Интеграл этого ур-ия:

$$x = C_1 t + C_2.$$

Произвольная постоянная $C_2 = 0$, т. к. при $t = 0$, $x_0 = 0$

$$C_1 = v_0 \cdot \cos \alpha_0,$$

т. к. при $t = 0$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cdot \cos \alpha_0.$$

Поэтому

$$x = t v_0 \cdot \cos \alpha_0.$$

Ур-ие движения в проекциях на ось oz .

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = R_z; R_z = -P = -mg;$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = -mg; \frac{d^2z}{dt^2} = -g.$$

Интеграл этого ур-ия:

$$z = C_3 t - \frac{g t^2}{2} + C_4.$$

При $t = 0$; $z = 0$; $C_4 = 0$.

При $t = 0$

$$\frac{dz}{dt} = v_0 \sin \alpha_0 = C_3.$$

Следовательно:

$$z = t v_0 \cdot \sin \alpha_0 - \frac{g t^2}{2}.$$

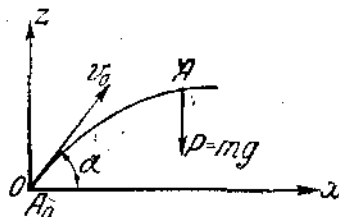
Т. о., координаты движущейся точки:

$$x = v_0 \cdot \cos \alpha_0 \cdot t;$$

$$z = v_0 \cdot \sin \alpha_0 \cdot t - \frac{g t^2}{2}.$$

Исключая время t , получим ур-ие траектории:

$$z = x \cdot \operatorname{tg} \alpha_0 - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha_0} x^2.$$



Черт. 119.

Это — уравнение параболы с вертикальной осью, находящейся на расстоянии $\frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha$ от оси Oz .

Для определения скорости составим уравнение движения точки в проекциях на касательную к траектории AT :

$$m\dot{t} = R\dot{t};$$

$$J_t = \frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{ds};$$

$$R_t = -P \cdot \sin \alpha = -mg \cdot \sin \alpha;$$

$$mv \frac{dv}{ds} = -mg \cdot \sin \alpha;$$

$$v dv = -g ds \cdot \sin \alpha.$$

Из черт. 120 $ds \cdot \sin \alpha = dz$, поэтому:

$$v dv = -g dz.$$

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = -g dz.$$

Интегрируем:

$$\frac{v^2}{2} = -gz + C.$$

При $t=0$; $z=0$; и $v=v_0$.

Следовательно:

$$C = \frac{v_0^2}{2},$$

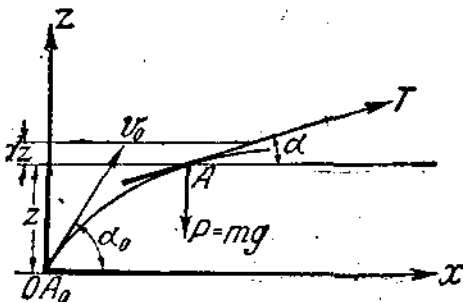
поэтому:

$$\frac{v^2}{2} = -gz + \frac{v_0^2}{2};$$

$$v^2 = v_0^2 - 2gz,$$

откуда величина скорости:

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gz}.$$



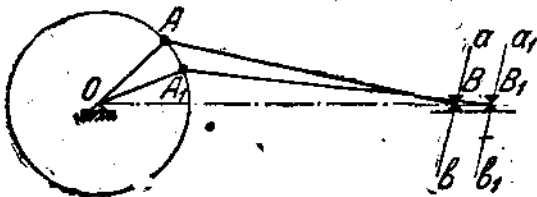
Черт. 120.

Т. е., скорость есть функция вертикального расстояния движущейся точки от уровня начального положения.

§ 18. Поступательное движение.

Движение твердого тела, в котором прямые, проходящие через каждые две точки тела, последовательно занимают параллельные положения, называется поступательным.

Примером поступательного движения могут служить: 1) движение ползуна B в кривошипном механизме (черт. 121); 2) движение звена AB в шарнирном параллелограмме (черт. 122).



Черт. 121.

При поступательном движении твердого тела траектории отдельных

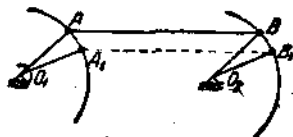
его точек—тождественные кривые (две кривые называются тождественными, если касательные в соответственных точках этих кривых параллельны и при наложении эти кривые совпадают).

1) Распределение скоростей в поступательном движении. Из определения поступательного движения следует, что скорости отдельных точек поступательно движущегося твердого тела геометрически равны (равны, параллельны и имеют одинаковое направление):

$$v_A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\overline{AA_1}}{\Delta t} \right);$$

$$v_B = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\overline{BB_1}}{\Delta t} \right);$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\overline{AA_1}}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\overline{BB_1}}{\Delta t} \right).$$



Черт. 122.

Следовательно:

$$\overline{v_A} = \overline{v_B} \quad (\text{черт. 123}).$$

2) Распределение ускорений в поступательном движении. Из геометрического равенства скоростей отдельных точек следует, что:

$$\overline{v_{A_1}} - \overline{v_A} = \overline{v_{B_1}} - \overline{v_B};$$

$$\overline{\Delta v_A} = \overline{\Delta v_B}.$$

Разделим на Δt и перейдем к пределу:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta v_A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta v_B}}{\Delta t},$$

или:

$$\overline{j_A} = \overline{j_B},$$

т. е. ускорения отдельных точек поступательно движущегося тела геометрически равны (черт. 123).

Т. о., при поступательном движении твердого тела: 1) движение его вполне определяется координатами одной из его точек; 2) траектории отдельных точек—тождественные кривые; 3) скорости отдельных точек геометрически равны; 4) ускорения отдельных точек геометрически равны.

Поступательное движение твердого тела вполне определяется движением одной из его точек:

$$x = f_1(t); y = f_2(t); z = f_3(t),$$

Эти ур-ня называются конечными ур-ями поступательного движения.

Дифференциальные ур-ия движения материальной системы.
Для каждой точки материальной системы имеем:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i + X'_i;$$

$$m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i + Y'_i;$$

$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i + Z'_i,$$

где: X_i, Y_i, Z_i —проекции равнодействующей всех внешних сил; X'_i, Y'_i, Z'_i —проекции равнодействующей внутренних сил. Давая значку i все значения $1, 2, 3, \dots, n$, получаем $3n$ дифференциальных ур-ий движения материальной системы.

Поступательное движение твердого тела вполне определяется движением любой точки. За такую точку берут ц. т. твердого тела. Суммируем дифференциальные ур-ия, отнесенные к каждой координатной оси i , замечая, что:

$$\Sigma X'_i = 0, \Sigma Y'_i = 0, \Sigma Z'_i = 0;$$

$$\Sigma m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = M \frac{d^2 x_c}{dt^2}; \quad \Sigma m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = M \frac{d^2 y_c}{dt^2};$$

$$\Sigma m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = M \frac{d^2 z_c}{dt^2},$$

где M —масса всего тела, x_c, y_c, z_c —координаты его ц. т., получаем:

$$M \frac{d^2 x_c}{dt^2} = \Sigma X_i;$$

$$M \frac{d^2 y_c}{dt^2} = \Sigma Y_i;$$

$$M \frac{d^2 z_c}{dt^2} = \Sigma Z_i.$$

Т. о., вопрос о дифференциальных ур-ях поступательного движения твердого тела сводится к задаче о движении одной точки (ц. т.), в к-рой сосредоточена масса всего тела.

Эти ур-ия показывают, что ц. т. твердого тела, способного перемещаться поступательно, движется, как свободная материальная точка, в к-рой сосредоточена масса всей системы и к к-рой приложены все внешние силы (закон движения ц. т.).

Внутренние силы не оказывают никакого влияния на движение ц. т. системы: они могут возникать и исчезать во время движения, несколько не изменяя его. Одними внутренними силами переместить ц. т. нельзя.

Частный случай. Равнодействующая всех внешних сил равна нулю:

$$\Sigma X_i = 0; \Sigma Y_i = 0; \Sigma Z_i = 0.$$

Дифференциальные ур-ия движения принимают вид:

$$M \frac{d^2 x_c}{dt^2} = 0; \quad M \frac{d^2 y_c}{dt^2} = 0; \quad M \frac{d^2 z_c}{dt^2} = 0;$$

$$\frac{d^2 x_c}{dt^2} = 0; \quad \frac{d^2 y_c}{dt^2} = 0; \quad \frac{d^2 z_c}{dt^2} = 0.$$

Следовательно, ускорение ц. т. равно нулю и он движется равномерно.

Кроме того движение прямолинейно. Интегрируя ур-е два раза, получаем:

$$x_c = at + a_1; \quad y_c = bt + b_1; \quad z_c = ct + c_1.$$

Постоянные интегрирования a, b, c представляют проекции начальной скорости ц. т.; a_1, b_1, c_1 — координаты начального положения ц. т. Исключая t , получим:

$$\frac{x_c - a_1}{a} = \frac{y_c - b_1}{b} = \frac{z_c - c_1}{c} \quad (\text{ур-е прямой}).$$

Т. о., в этом случае ц. т. системы движется равномерно и прямолинейно. Если при этом окажется, что в начальный момент ц. т. находился в покое (начальная скорость $= 0$), то ц. т. все время остается в покое:

$$a = b = c = 0$$

и

$$x_c = a_1; \quad y_c = b_1; \quad z_c = c_1.$$

Примеры. В безвоздушном пространстве ц. т. артиллерийского снаряда движется по параболе. При взрыве снаряда осколки его разлетаются в разные стороны, но ц. т. осколков продолжает двигаться по той же параболе, т. к. силы взрыва — силы внутренние и не могут изменить движения ц. т.

При движении паровоза по прямолинейному горизонтальному участку пути давление пара представляет внутреннюю силу, края не может переместить ц. т. паровоза. Внешней силой, обуславливающей движение паровоза, является сила трения между ведущими колесами паровоза и рельсами (внутренними силами переместить ц. т. нельзя).

Если при полете самолета вес его уравновешивается подъемной силой, а боковое сопротивление уравновешивается силой тяги двигателя, то ц. т. самолета движется равномерно и прямолинейно (равнодействующая внешних сил $= 0$).

3) Работа сил при поступательном движении твердого тела. Сумма работ всех сил, приложенных к твердому телу при поступательном перемещении его, равна работе равнодействующей при том же перемещении:

$$\sum P_i ds \cdot \cos(P_i, ds) = R ds \cdot \cos(R, ds).$$

4) Живая сила твердого тела при поступательном движении. Живая сила твердого тела в поступательном движении равна половине произведения массы всего тела на квадрат скорости.

Обычно считают массу сосредоточенной в ц. т. и берут его скорость v_c :

$$E = \sum \frac{mv^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sum m = \frac{Mv_c^2}{2}.$$

5) Ур-е живой силы при поступательном движении твердого тела. В дифференциальной форме имеем:

$$d \frac{Mv_c^2}{2} = R ds \cdot \cos \alpha,$$

т. е.: дифференциал живой силы твердого тела при поступательном движении равен элементарной работе равнодействующей всех приложенных сил,

в интегральной форме:

$$\frac{Mv_c^2}{2} - \frac{Mv_0^2}{2} = \int_0^s R ds \cdot \cos(R, ds),$$

т. е. изменение живой силы твердого тела при поступательном движении равно полной работе равнодействующей всех приложенных сил.

Пример. Поезд весом $P = 300$ т идет по горизонтальному участку пути с ускорением $j = 0,1389$ м/сек². Сопротивление составляет 0,01 его веса. Найти мощность паровой машины паровоза в момент $t = 3$ мин., если при $t = 0$ $v = 0$.

Обозначим силу тяги Q через Q . Напишем ур-е движ. в дифференциальной форме:

$$d \frac{Mv^2}{2} = Qds - 0,01 Pds,$$

откуда:

$$Qds = d \frac{Mv^2}{2} + 0,01 Pds;$$

$$Qds = Mv dv + 0,01 Pds;$$

$$Qds = \frac{P}{g} v dv + 0,01 Pds;$$

$$Qv = P_0 \left(\frac{1}{g} \cdot \frac{dv}{dt} + 0,01 \right);$$

$$N = \frac{P_0}{76} \left(\frac{1}{g} \cdot \frac{dv}{dt} + 0,01 \right),$$

где: $v = j \cdot t$, $\frac{dv}{dt} = j$.

Подставляя данные, получаем: $v = 25 \text{ м/сек.}$, $j = 0,1389 \text{ м/сек.}^2$.

Т. о.:

$$N = \frac{25 \cdot 3 \cdot 10^4}{76} \cdot \left(\frac{0,1389}{9,81} + 0,01 \right);$$

$$N = 2416 \text{ НР.}$$

§ 19. Элементарная работа силы.

Произведение силы P на бесконечно-малый элемент пути ds и на $\cos$ угла α между направлением силы и направлением элемента ds называется элементарной работой силы (черт. 124):

$$\text{Эл. раб.}_{ds} \cdot P = P \cdot ds \cdot \cos \alpha.$$

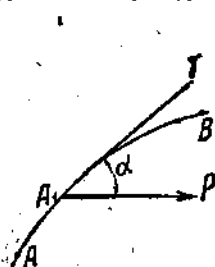
1) Основные теоремы об элементарной работе.

Теорема 1. Элементарная работа равнодействующей нескольких сил, приложенных к материальной точке, равна алгебраической сумме элементарных работ составляющих сил (черт. 125).

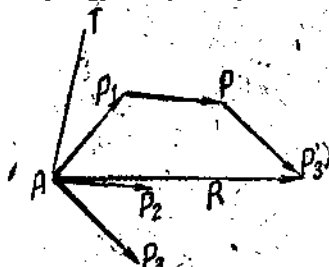
$$Pds \cdot \cos \alpha = P_1 ds \cdot \cos \alpha_1 + P_2 ds \cdot \cos \alpha_2 + \dots + P_n ds \cdot \cos \alpha_n,$$

или:

$$\text{эл. раб.}_{ds} \cdot R = \text{эл. раб.}_{ds} \cdot P_1 + \text{эл. раб.}_{ds} \cdot P_2 + \dots + \text{эл. раб.}_{ds} \cdot P_n.$$



Черт. 124.



Черт. 125.

Теорема 2. Элементарная работа силы на составном перемещении материальной точки равна алгебраической сумме элементарных работ этой силы на составляющих перемещениях (черт. 126).

$$Pds \cdot \cos \beta = P \cdot ds_1 \cdot \cos \beta_1 + P_1 ds_2 \cdot \cos \beta_2 + \dots + P ds_n \cdot \cos \beta_n$$

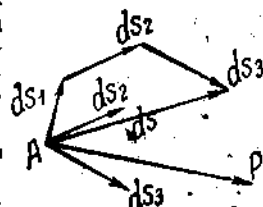
$$\text{эл. раб.}_{ds} \cdot P = \text{эл. раб.}_{ds_1} \cdot P + \text{эл. раб.}_{ds_2} \cdot P + \dots + \text{эл. раб.}_{ds_n} \cdot P.$$

2) Аналитическая форма элементарной работы:

$$\text{эл. ра б. } d_s P = X dx + Y dy + Z dz.$$

3) Работа переменной силы на криволинейном участке пути. Полной работой, или просто работой, переменной силы P на криволинейном участке пути $S = AB$ (черт. 124) называется сумма элементарных работ силы P , соответствующих всем бесконечно-малым последовательным перемещениям, из к-рых складывается конечный путь AB . Эта сумма выражается криволинейным интегралом вида:

$$\text{раб. }_{AB} P = \int_A^B P \cdot \cos \alpha ds,$$

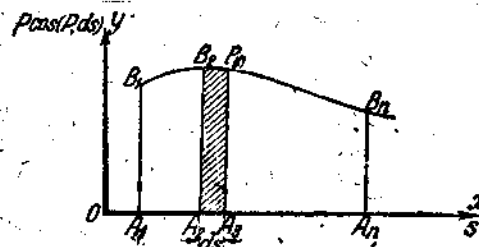


Черт. 123.

при чем пределы интегрирования выражаются в ф-ии от того переменного, по к-рому производится интегрирование.

Две теоремы, доказанные для элементарной работы силы, распространяются и на полную работу.

4) Графическое изображение работы силы. Вычисление работы часто производится графическим методом. Для этого в общем случае по оси абсцисс откладывают перемещения точки приложения силы, а по оси ординат проекции силы на соответственное перемещение. Т. о., получается ряд точек $B_1, B_2, \dots, B_n$, образующих непрерывную линию $B_1 B_2 \dots B_n$, называемую диаграммой сил.



Черт. 127.

Площадь $A_1 B_1 \dots B_n A_n$ ограниченная линией $B_1 B_2 \dots B_n$, двумя крайними ординатами и осью абсцисс, представляет работу переменной силы на участке пути, соответствующем $A_1 A_n$. Элементарная работа силы представится бесконечно-малой площадью $A_1 B_1 B_2 A_2$.

Этот способ имеет большое применение при определении работы газа в цилиндре двигателя. В этом случае диаграмма автоматически вычерчивается особым прибором, к-рый называется индикатором.

Единица измерения (размерность) работы сложная: зависит от единиц силы и единиц длины [раб.] = [сила] $\times$ [длина]. В системе CGS за единицу силы принимают 1 дину, за единицу длины 1 см, поэтому единица измерения работы в CGS:

$$[\text{раб.}] = [\text{дин}] \times [\text{см}] = 1 [\text{эрг}].$$

В технических единицах:

$$[\text{раб.}] = [\text{кг}] \times [\text{м}].$$

5) Работа силы тяжести при перемещении по произвольному пути. Ось OZ параллельна линии действия силы $P = mg$.

По аналитической ф-ле для элементарной работы

$$\begin{aligned} \text{эл. раб. } P &= X dx + Y dy + Z dz; \\ X &= 0; Y = 0; Z = -P. \end{aligned}$$

Следовательно: элементарная работа силы тяжести равна:

$$\text{эл. раб.}_{ds}P = -Pdz;$$

полная работа силы P :

$$\text{раб.}_{AB}P = \int_{z_1}^{z_2} -Pdz = -P(z_2 - z_1) = P(z_1 - z_2);$$

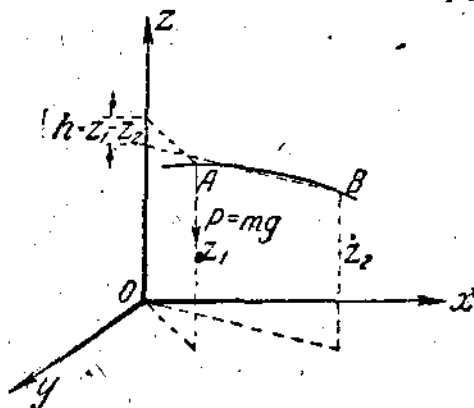
$$z_1 - z_2 = h \text{ (черт. 128);}$$

$$\text{раб.}_{AB}P = Ph = mgh.$$

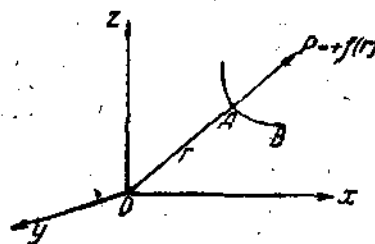
Т. о., работа силы тяжести на каком-нибудь пути равна произведению силы на разность высот по вертикали между начальной и конечной точками. Эта работа может быть > 0 или < 0 , в зависимости от того, происходит ли опускание или подъем: в первом случае $z_1 > z_2$, $h > 0$, во втором $z_1 < z_2$, $h < 0$.

Работа силы тяжести не зависит от формы пути, но зависит от начального и конечного положений точки приложения. Такие силы относятся к классу сил, имеющих потенциальную функцию.

б) работа центральной силы. Сила называется центральной, если линия ее действия проходит



Черт. 128.



Черт. 129.

через одну постоянную точку, называемую центром силы, а величина силы есть функция от расстояния ее точки приложения до центра силы. Примером таких сил могут служить: сила ньютоновского притяжения, междучастичные силы, силы электрические и магнитные, сила упругости и т. д.

Обозначив через r расстояние точки приложения силы P до центра силы, получим закон изменения центральной силы:

$$P = f(r).$$

На черт. 129 изображена отталкивательная сила. Элементарная работа этой силы найдется по Ф-ле:

$$\text{эл. р.}_{ds}P = \pm f(r)dr,$$

где знак $+$ для отталкивательной силы, знак $-$ для притягивающей силы.

Полная работа центральной силы P на пути AB будет:

$$\text{раб.}_{AB} P = \pm \int_{r_0}^r f(r) dr;$$

$$\text{раб.}_{AB} P = \pm [F(r) - F(r_0)].$$

Эта ф-ла показывает, что работа центральной силы не зависит от формы пути, но лишь от начального и конечного положений движущейся точки, следовательно, центральные силы также относятся к классу сил, имеющих потенциальную ф-ню.

§ 20. Мощность (производительность).

Отношение работы, к-рую производит сила P , ко времени, в к-рое эта работа произведена, называется мощностью. Мощностью в данный момент называется отношение элементарной работы к элементу времени:

$$\frac{\text{эл. работа}}{\text{эл. времени}} = \frac{P ds \cdot \cos(P, ds)}{dt} = P v \cdot \cos(P, v).$$

Средней мощностью называется отношение работы ко времени

$$\frac{\int_A^B P ds \cdot \cos(P, ds)}{t} = \frac{\text{работа}}{\text{время}}.$$

Размерность мощности в технических единицах: кгм/сек.

Для измерения мощности приняты также и особые единицы:

1) Лошадиные силы (HP), при чем:

$$1 \text{ HP} = 75 \text{ кгм/сек.}$$

2) Килловатты, при чем:

$$1 \text{ kW} = 102 \text{ кгм/сек}$$

$$1 \text{ kW} = 1,36 \text{ HP},$$

или:

$$1 \text{ HP} = 0,736 \text{ kW}.$$

§ 21. Вращение тела около неподвижной оси.

Движение твердого тела, в к-ром две точки, неизменно связанные с телом, остаются неподвижными, называется вращательным, а прямая, проходящая через эти две точки, называется геометрической осью вращения.

Угол φ , на к-рый тело поворачивается около своей оси за данный промежуток времени t , называется углом поворота.

Вращение твердого тела около неподвижной оси вполне определено, если для любого момента времени известно его положение, определяемое зависимостью между углом поворота φ и соответственным временем t . Эта зависимость между углом φ и временем t , выраженная в форме:

$$\varphi = f(t),$$

называется конечным уравнением вращения твердого тела около неподвижной оси

Отношение приращения угла поворота $\varphi_2 - \varphi_1$ к соответствующему промежутку времени $t_2 - t_1$ называется **средней угловой скоростью** ($\omega_{cp.}$):

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1} = \omega_{cp.}$$

или для бесконечно-малого промежутка времени Δt будем иметь:

$$\frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \omega_{cp.}$$

Предел средней угловой скорости при $\Delta t \rightarrow 0$ называется **угловой скоростью** в данный момент времени или просто **угловой скоростью** ω :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_{cp.} = \omega.$$

Для определения величины угловой скорости ω имеем ф-лу:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt},$$

т. е. угловая скорость = первой производной по времени от угла поворота.

Для различных значений t эта производная имеет различные значения, иначе говоря, угловая скорость есть ф-ия от времени. Только в равномерном вращении она постоянна.

Размерность угловой скорости будет: $\frac{\text{рад.}}{\text{сек}}$, а так как радиан — число отвлеченное, то:

$$[\omega] = \left[\frac{1}{\text{сек}} \right].$$

1) Изображение угловой скорости вектором. Угловая скорость изображается в виде вектора, направленного вдоль оси вращения в ту сторону, чтобы с конца его видеть вращение тела слева направо, т. е. в положительную сторону. Длина вектора определяется величиной угловой скорости. Точка его приложения на оси вращения произвольна (черт. 130).

2) Выражение угловой скорости через число оборотов в минуту. В технике равномерное вращение твердого тела обычно задается числом об./мин. и.

В этом случае угловая скорость определяется по ф-ле:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}.$$

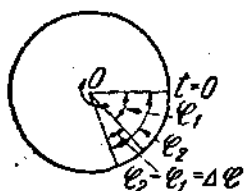
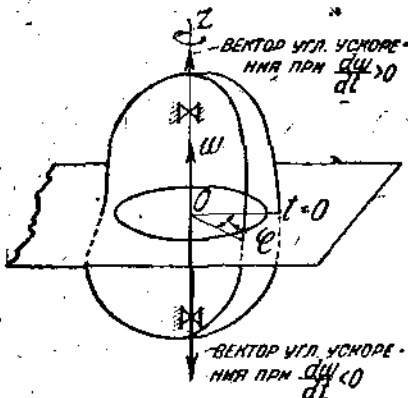
Приближенно можно считать:

$$\omega \approx 0,1 n.$$

Угловое ускорение.

Отношение приращения угловой скорости $\omega_2 - \omega_1$ к соответствующему промежутку времени $t_2 - t_1$ называется **средним угловым ускорением**: $\theta_{cp.}$:

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \theta_{cp.}$$



Черт. 130.

или для бесконечно-малого промежутка времени Δt будем иметь:

$$\frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \theta_{\text{ср.}}$$

Предел среднего углового ускорения при $\Delta t \rightarrow 0$ называется угловым ускорением в данный момент времени или просто угловым ускорением θ :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \theta_{\text{ср.}} = \theta.$$

Для определения величины углового ускорения θ имеем ф-лу:

$$\theta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) = \frac{d^2 \varphi}{dt^2},$$

т. е. угловое ускорение — первой производной по времени от угловой скорости или второй производной по времени от угла поворота.

Для различных значений t эта производная имеет различные значения, иначе говоря, угловое ускорение есть ф-ия от времени. Только в равнопеременном вращении угловое ускорение постоянно.

Единица измерения углового ускорения, или его размерность, — сложная:

$$[\theta] = \left[\frac{1}{\text{сек}^2} \right].$$

3) Изображение углового ускорения вектором. Угловое ускорение изображается в виде вектора, направленного по оси вращения в сторону угловой скорости, если угловая скорость возрастает ($\frac{d\omega}{dt} > 0$), и прямо противоположно угловой скорости, если она убывает ($\frac{d\omega}{dt} < 0$). Длина вектора определяется величиной углового ускорения (черт. 130).

4) Нахождение угла поворота φ и угловой скорости ω по заданному угловому ускорению θ . В том случае, когда вращение твердого тела около неподвижной оси задано угловым ускорением θ , выраженным в ф-ии от времени:

$$\theta = F(t),$$

угловая скорость ω и угол поворота φ определяют путем интегрирования ур-ний:

$$\frac{d\omega}{dt} = \theta; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega;$$

$$\omega = \omega_0 + \int \theta dt;$$

$$\varphi = \varphi_0 + \int \omega dt,$$

где ω_0 — начальная угловая скорость, φ_0 — угол, определяющий начальное положение тела.

Основные формулы.

а) Равномерное вращение:

$$\varphi = \omega t; \quad \omega = \text{Const.}, \quad \theta = 0;$$

$$\omega = \frac{\pi n}{30}$$

(n — число об/мин.).

б) Равнопеременное вращение:

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\theta t^2}{2}; \quad \omega = \omega_0 \pm \theta t; \quad \theta = \text{Const.};$$

+ равноускоренное вращение;
 — равнозамедленное вращение;

$$\varphi = 2\pi \cdot n_1$$

(n_1 — число оборотов за нек-рый промежуток времени).

в) Вращение по произвольному закону.

1) Дано $\varphi = f(t)$. Найти ω и θ .

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}; \quad \theta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

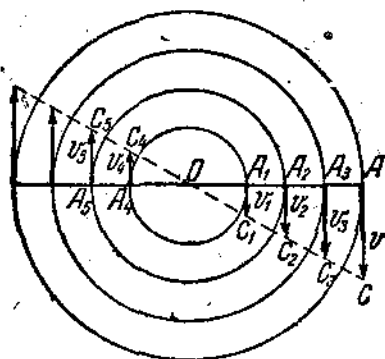
2) Дано $\omega = f(t)$. Найти φ и θ .

$$\varphi = \varphi_0 + \int \omega dt; \quad \theta = \frac{d\omega}{dt}.$$

3) Дано $\theta = f(t)$. Найти φ и ω .

$$\omega = \omega_0 + \int \theta dt; \quad \varphi = \varphi_0 + \int \omega dt.$$

б) Траектории отдельных точек твердого тела при вращении. При вращении твердого тела около неподвижной оси отдельные точки его описывают окружности, расположенные в плоскостях, перпендикулярных к оси вращения.



Черт. 131.

б) Распределение скоростей отдельных точек твердого тела при вращении около неподвижной оси. Линейные скорости отдельных точек твердого тела, вращающегося около неподвижной оси, изменяются прямо пропорционально расстоянию точки от оси вращения, при чем коэффициентом пропорциональности является угловая скорость:

$$v = \omega r.$$

Графически закон прямой пропорциональности изображается прямой линией, поэтому, зная скорость одной точки, лежащей на радиусе OA , напр.,

точки A , можно весьма простым способом найти скорость любой точки, лежащей на этом радиусе. Скорость v точки A строится в определенном масштабе, затем через точку O и конец этой скорости C проводится прямая. Отрезки $A_1C_1, A_2C_2, \dots, A_nC_n$, проведенные перпендикулярно к радиусу OA , представляют искомые скорости (черт. 131):

$$v_1, v_2, v_n, \dots$$

г) Распределение ускорений отдельных точек твердого тела при вращении около неподвижной оси. Нормальное ускорение a_n произвольной точки A твердого тела определяется по формуле:

$$a_n = \omega^2 \cdot r,$$

т. е. нормальное ускорение отдельных точек твердого тела изменяется прямо пропорционально расстоянию точки от оси вращения, при чем коэф-том пропорциональности является угловая скорость в квадрате (черт. 132).

Касательное ускорение j_t определяется по ф-ле:

$$j_t = \frac{dv}{dt} r = \theta \cdot r,$$

т. е. касательное ускорение отдельных точек твердого тела изменяется прямо пропорционально расстоянию точки от оси вращения, при чем коэф-том пропорциональности является угловое ускорение (черт. 132).

Полное ускорение j есть геометрическая сумма касательного ускорения j_t и нормального j_n :

$$\vec{j} = \vec{j}_t + \vec{j}_n.$$

Для определения величины полного ускорения пользуемся ф-лой:

$$j = \sqrt{j_t^2 + j_n^2}.$$

Подставляя

$$j_t = \theta r, j_n = \omega^2 r,$$

получаем:

$$j = r \sqrt{\theta^2 + \omega^4}.$$

т. е. полное ускорение отдельных точек твердого тела изменяется прямо пропорционально расстоянию точки от оси вращения, при чем коэф-том пропорциональности является (черт. 132):

$$\sqrt{\theta^2 + \omega^4}.$$

Угол α , между полным ускорением точки A и радиусом определяется по ф-ле:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{j_t}{j_n} = \frac{\theta r}{\omega^2 r},$$

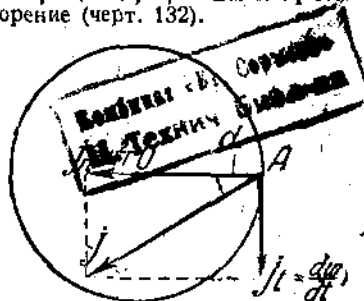
или:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\theta}{\omega^2}.$$

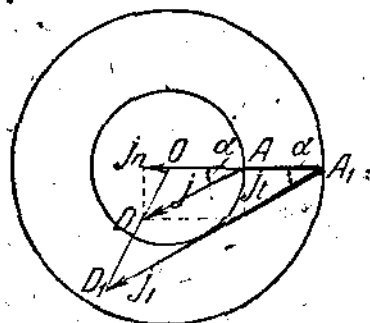
т. е. полное ускорение отдельных точек твердого тела составляет с соответственным радиусом постоянный угол α , т. к. для всех точек твердого тела коэф-ты пропорциональности θ и ω^2 одинаковы. Поэтому, зная полное ускорение одной точки, лежащей на радиусе OA , напр., точки A , можно простым графическим приемом найти полное ускорение любой точки, лежащей на этом радиусе. Полное ускорение точки A строится в определенном масштабе, затем через точку O и конец этого ускорения D проводится прямая. Отрезки $A_1D_1, A_2D_2, \dots, A_nD_n$, проведенные к радиусу OA под углом α , представляют искомые полные ускорения:

$$j_1, j_2, j_3, \dots \text{ (черт. 133).}$$

Т. о., при вращении твердого тела около неподвижной оси:



Черт. 132.



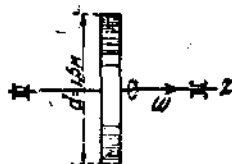
Черт. 133.

- 1) траектории отдельных точек тела — окружности, плоскости к-рых перпендикулярны к оси вращения;
 2) скорости отдельных точек тела прямо пропорциональны расстояниям от оси вращения и перпендикулярны к своим радиусам;
 3) ускорения отдельных точек тела, — нормальное, касательное и полное, — прямо пропорциональны расстояниям от оси вращения, при чем нормальное ускорение направлено по радиусу к центру, касательное — по касательной и полное ускорение составляет с радиусом постоянный угол α .

$$v = \omega \cdot r; \quad j_t = \frac{d\omega}{dt} \cdot r; \quad j_n = \omega^2 \cdot r;$$

$$j = \sqrt{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \omega^4} \cdot r; \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (j_t, j_n) = \frac{\theta}{\omega^2}.$$

Пример. Маховик диаметра $d = 1,5$ м начинает вращаться из состояния покоя равноускоренно. Через 6 с после начала движения он имеет угловую скорость $\omega = 12 \frac{1}{\text{сек}}$.



Черт. 134.

Найти: 1) число оборотов, сделанных за время вращения, n_1 ; 2) угловое ускорение θ для точек, лежащих на окружности маховика, в момент времени $t = 6$ с; 3) линейную скорость v ; 4) касательное ускорение j_t ; 5) нормальное ускорение j_n ; 6) полное ускорение j .

Число оборотов n_1 и угловое ускорение θ определяем из ур-и:

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\theta t^2}{2};$$

$$\omega = \omega_0 + \theta t,$$

Так как:

то:

$$\omega_0 = 0,$$

$$\varphi = \frac{\theta t^2}{2};$$

$$\omega = \theta t.$$

Определяем из второго ур-ия θ :

$$\theta = \frac{\omega}{t};$$

$$\theta = 2 \left[\frac{1}{\text{сек}^2} \right].$$

Найденное значение θ подставляем в первое ур-ие:

Записав, что

$$\varphi = 12\pi,$$

получим:

$$2\pi n_1 = 18.$$

Отсюда:

$$n_1 = \frac{18}{\pi} \approx 5,7 \text{ оборота.}$$

Линейную скорость v точки на окружности маховика найдем по ф-ле:

$$v = \omega \cdot r.$$

Т. к.

$$\omega = \theta t,$$

то:

$$v = \theta t \cdot \frac{d}{2};$$

$$v = 2 \cdot 6 \cdot 0,75 = 9 \text{ м/сек.}$$

Касательное ускорение j_t находим по формуле:

$$j_t = \frac{d\omega}{dt} r = \theta \cdot r; \quad j_t = 2 \cdot 0,75 = 1,5 \text{ м/сек}^2.$$

Нормальное ускорение j_n определяется формулой:

$$j_n = \omega^2 r;$$

$$j_n = (\theta t)^2 \cdot \frac{d}{2};$$

$$j_n = 4 \cdot 36 \cdot 0,75 = 108 \text{ м/сек}^2.$$

Для определения полного ускорения j используем формулу:

$$j = r \sqrt{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \omega^4};$$

$$j = \frac{d}{2} \sqrt{\theta^2 + (\theta t)^4};$$

$$j = 0,75 \cdot \sqrt{4 + 20736} \approx 108 \text{ м/сек}^2.$$

Направление полного ускорения j находим по формуле:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\theta}{\omega^3}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{144} = \frac{1}{72} = 0,014; \quad \alpha \approx 50' \text{ (черт. 135)}.$$

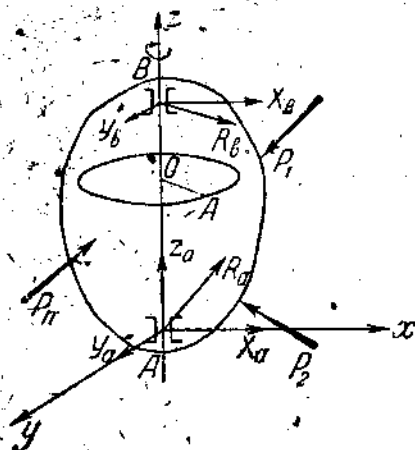
В) Дифференциальное уравнение вращения твердого тела около неподвижной оси. Применим начало Даламбера и составим уравнение моментов относительно оси z -ов (черт. 136):

$$\Sigma m_z(P) + \Sigma m_z(F_n) + \Sigma m_z(F_t) = 0,$$

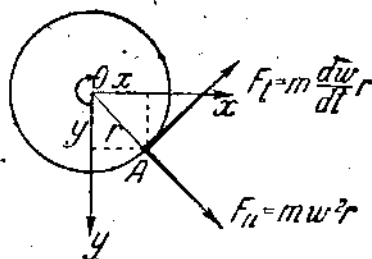
где: P — приложенная сила, $F_n = m\omega^2 r$ — центробежная сила инерции, $F_t = m \frac{d\omega}{dt} r$ — касательная сила инерции.

$$\Sigma m_z(F_n) = 0; \quad \Sigma m_z(F_t) = - \frac{d\omega}{dt} I_z,$$

$$\Sigma m_z(P) - \frac{d\omega}{dt} I_z = 0,$$



Черт. 136-а.



Черт. 136-б.

или:

$$\frac{d\omega}{dt} I_z = \Sigma m_z(P).$$

Обозначив $\Sigma m_z(P) = M_z$, получим:

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z.$$

Отсюда следует, что угловое ускорение изменяется прямо пропорционально вращающему моменту M_z и обратно пропорционально моменту инерции I_z :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{M_z}{I_z}.$$

О моментах инерции см. §§ 12, 13 и 14.

В частном случае, когда $M_z = 0$, угловое ускорение равно нулю:

$$\frac{d\omega}{dt} = 0$$

и вращение твердого тела осуществляется равномерно с постоянной угловой скоростью:

$$\omega = \text{Const.}$$

§ 22. Определение реакций в подшипниках тела, вращающегося около неподвижной оси.

Тело вращается около вертикальной оси. В нижней точке A имеет подпятник, в верхней B —подшипник. Выберем координатные оси так, чтобы ось z -ов падала по оси вращения, а начало координат поместим в точке A_1 . Обозначим X, Y, Z проекции приложенных к телу сил P ; X_a, Y_a, Z_a —составляющие реакции R_a подпятника (неподвижная точка); X_b, Y_b —составляющие реакции R_b подшипника (опорная точка). Для определения составляющих X_a, Y_a, Z_a, X_b, Y_b искомых реакций имеем уравнения (черт. 136-а):

$$\sum \text{пр.}_x(P) + \sum \text{пр.}_x(R) + \sum \text{пр.}_x(F_n) + \sum \text{пр.}_x(F_t) = 0;$$

$$\sum \text{пр.}_y(P) + \sum \text{пр.}_y(R) + \sum \text{пр.}_y(F_n) + \sum \text{пр.}_y(F_t) = 0;$$

$$\sum \text{пр.}_z(P) + \sum \text{пр.}_z(R) + \sum \text{пр.}_z(F_n) + \sum \text{пр.}_z(F_t) = 0;$$

$$\sum m_x(P) + \sum m_x(R) + \sum m_x(F_n) + \sum m_x(F_t) = 0;$$

$$\sum m_y(P) + \sum m_y(R) + \sum m_y(F_n) + \sum m_y(F_t) = 0;$$

$$\sum m_z(P) + \sum m_z(R) + \sum m_z(F_n) + \sum m_z(F_t) = 0.$$

Проекции и моменты приложенных сил по отношению к выбранным координатным осям:

$$\sum \text{пр.}_x P = X; \quad \sum \text{пр.}_y P = Y; \quad \sum \text{пр.}_z P = Z;$$

$$\sum m_x P = M_x; \quad \sum m_y P = M_y; \quad \sum m_z P = M_z.$$

Проекции и моменты реакций:

$$\sum \text{пр.}_x R = X_a + X_b; \quad \sum \text{пр.}_y R = Y_a + Y_b; \quad \sum \text{пр.}_z R = Z_a;$$

$$\sum m_x(R) = -Y_b l; \quad \sum m_y(R) = X_b l; \quad \sum m_z(R) = 0.$$

Проекции и моменты центробежных сил инерции (черт. 136-б):

$$\sum \text{пр.}_x F_n = \sum m \omega^2 x = \omega^2 \sum m x = \omega^2 M x_c;$$

$$\sum \text{пр.}_y F_n = \sum m \omega^2 y = \omega^2 \sum m y = \omega^2 M y_c;$$

$$\sum \text{пр.}_z F_n = 0;$$

$$\sum m_x(F_n) = -\sum m \omega^2 z y = -\omega^2 \sum m z y = -D \omega^2;$$

$$\sum m_y(F_n) = \sum m \omega^2 z x = \omega^2 \sum m z x = E \omega^2;$$

$$\sum m_z(F_n) = 0,$$

где: M —масса всего тела; x_c, y_c —координаты центра тяжести, D и E —центробежные моменты инерции.

Проекции и моменты касательных сил инерции (черт. 136-б):

$$\Sigma \text{пр.}_x F_t = \Sigma m \frac{d\omega}{dt} y = \frac{d\omega}{dt} \Sigma m y = \frac{d\omega}{dt} M y_c;$$

$$\Sigma \text{пр.}_y F_t = \Sigma m \frac{d\omega}{dt} x = \frac{d\omega}{dt} \Sigma m x = \frac{d\omega}{dt} M x_c;$$

$$\Sigma \text{пр.}_z F_t = 0;$$

$$\Sigma m_x F_t = \Sigma m \frac{d\omega}{dt} xz = \frac{d\omega}{dt} \Sigma m xz = E \frac{d\omega}{dt};$$

$$\Sigma m_y F_t = \Sigma m \frac{d\omega}{dt} yz = \frac{d\omega}{dt} \Sigma m yz = D \frac{d\omega}{dt};$$

$$\Sigma m_z F_t = - \Sigma m \frac{d\omega}{dt} (x^2 + y^2) = \frac{d\omega}{dt} \Sigma m (x^2 + y^2) = I_z \frac{d\omega}{dt},$$

где: M —масса тела, x_c , y_c —координаты ц. т., D и E —центробежные моменты инерции.

Т. о., ур-ия для определения реакций принимают вид:

$$X + X_a + X_b + M\omega^2 x_c + M \frac{d\omega}{dt} y_c = 0; \quad (1)$$

$$Y + Y_a + Y_b + M\omega^2 y_c + M \frac{d\omega}{dt} x_c = 0; \quad (2)$$

$$Z + Z_a = 0; \quad (3)$$

$$M_x - Y_b l - \omega^2 D + \frac{d\omega}{dt} E = 0; \quad (4)$$

$$M_y + X_b l + \omega^2 E + \frac{d\omega}{dt} D = 0. \quad (5)$$

Эти ур-ия показывают, что боковые реакции X_a , Y_a , X_b , Y_b зависят не только от приложенных к телу сил (статические давления), но также и от сил инерции (динамические давления); продольная реакция Z_a зависит исключительно от приложенных к телу сил (статические давления). Надо заметить, что динамические давления при неблагоприятных условиях могут быть во много раз больше статических, поэтому возникает вопрос о нахождении таких условий, при к-рых действие их обращается в нуль. Задачи этого рода носят название «задач об уравнивании сил инерции».

Условия уравнивания сил инерции при вращении тела около неподвижной оси,

Динамические члены в ур-иях, определяющих боковые реакции, обращаются в нуль при условии:

$$\omega^2 x_c + \frac{d\omega}{dt} y_c = 0; \quad \omega^2 y_c + \frac{d\omega}{dt} x_c = 0;$$

$$-D\omega^2 + E \frac{d\omega}{dt} = 0; \quad E\omega^2 + D \frac{d\omega}{dt} = 0.$$

В этом случае говорят, что силы инерции уравновешены. Здесь нет уравновешенной суммы моментов сил инерции относительно оси вращения.

Из первых ур-ий, решая относительно x_c , y_c :

$$x_c = 0; \quad y_c = 0.$$

Из последних двух, решая относительно D и E :

$$D = 0; \quad E = 0.$$

Отсюда условия уравнивания сил инерции:

- 1) ц. т. должен лежать на оси вращения ($x_c = 0$, $y_c = 0$);
- 2) ось вращения д. б. главной осью инерции ($D = 0$, $E = 0$).

Т. о., полное уравнивание сил инерции достигается при условии, что ось вращения совпадает с одной из главных центральных осей инерции тела. Такую ось называют свободной осью вращения.

Вследствие неизбежных погрешностей производства ось вращения не вполне точно совпадает с главной центральной осью инерции. Там, где требуется большая точность в уравнивании сил инерции (напр., паровые турбины), приходится исправлять погрешности присоединением в надлежащих местах к данному телу добавочных масс. Существуют приборы (Lawaszk-Heymann и др.), к-рые позволяют опытным путем определять эти добавочные массы.

Пример 1. Диск веса P турбины, вращающийся с угловой скоростью ω , насажен на вал с ошибкой, так что его ц. т. отстоит от оси вращения на расстоянии r_c . Найти реакции подшипников, если $AO = a$, $OB = b$ (ч. рт. 137).

Примем ось вращения за ось z -ю, плоскость диска за плоскость xoy и рассмотрим положение, когда ц. т. C лежит на одной вертикали с точкой O . Составляющие реакций в подшипниках A и B обозначим соответственно:

$$X_A Y_A \text{ и } X_B Y_B.$$

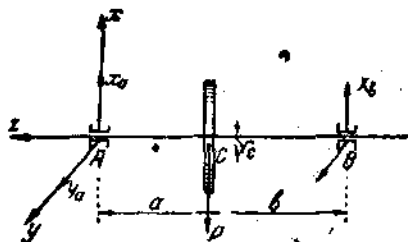
Напишем уравнения для определения этих реакций:

$$X_A + X_B - P - M\omega^2 r_c = 0;$$

$$Y_A + Y_B + M\omega^2 y_c = 0;$$

$$-Y_A a + Y_B b - \omega^2 D = 0;$$

$$X_A a - X_B b + \omega^2 E = 0.$$



Черт. 137.

Для выбранного положения ц. т.:

$$x_c = r_c, \quad y_c = 0.$$

Кроме того для принятой системы координат:

$$D = 0; \quad E = 0.$$

Т. о., получаем:

$$X_A + X_B - P - M\omega^2 r_c = 0; \quad -Y_A a + Y_B b = 0;$$

$$Y_A + Y_B = 0; \quad X_A a - X_B b = 0.$$

Решая совместно сначала 1-е и 4-е ур-ия, а затем 2-е и 3-е, получим:

$$X_A = \frac{Pb}{a+b} + \frac{M\omega^2 r_c \cdot b}{a+b};$$

$$X_B = \frac{Pa}{a+b} + \frac{M\omega^2 r_c \cdot a}{a+b};$$

$$Y_A = 0; \quad Y_B = 0.$$

При ином положении ц. т. C вне вертикали эти составляющие Y_A и Y_B не будут равняться нулю.

Вычисляем реакции для след. данных:

$$P = 5 \text{ кг}; \quad n = 25000 \text{ об./мин.};$$

$$a = 40 \text{ см}; \quad b = 50 \text{ см};$$

$$r_c = 0,25 \text{ мм};$$

$$X_A = \frac{5 \cdot 5}{9} + 870 \cdot \frac{5}{9} \approx 486 \text{ кг};$$

$$X_B = \frac{5 \cdot 4}{9} + 870 \cdot \frac{4}{9} \approx 380 \text{ кг}.$$

Сравнивая статическую часть реакции с динамической частью, видим, что:

$$\frac{X_{\text{дин.}}}{X_{\text{ст.}}} = \frac{870}{5} = 174,$$

т. е. динамическая часть в 174 раза больше статической.

Пример 2. Диск веса P турбины, вращающийся с угловой скоростью ω , насажен на вал с ошибкой, так что перпендикуляр к плоскости диска составляет с осью вращения $\angle \alpha$. Радиус диска r . Найти реакции подшипников, если $AO = a$, $OB = b$.

Примем ось вращения за ось z -ов. Начало координат O поместим в центре тяжести диска. Ось y -ов расположим в плоскости диска, ось x -ов — перпендикулярно к плоскости диска.

Составляющие реакций в подшипниках A и B обозначим соответственно:

$$X_A, Y_A \text{ и } X_B, Y_B.$$

Напишем ур-ия для определения этих реакций:

$$X_A + X_B - P + M\omega^2 x_0 = 0;$$

$$-Y_A + Y_B - \omega^2 D = 0;$$

$$-Y_A a + Y_B b + M\omega^2 y_0 = 0;$$

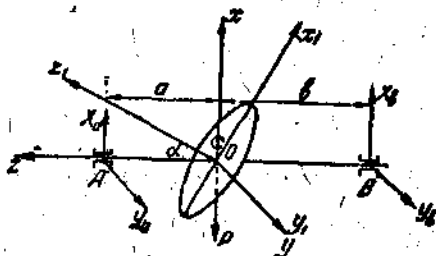
$$X_A a - X_B b + \omega^2 E = 0.$$

Т. к. центр тяжести лежит на оси вращения:

$$x_0 = y_0 = 0;$$

след.:

$$M\omega^2 x_0 = 0; M\omega^2 y_0 = 0.$$



Черт. 138.

Определим центробежные моменты инерции D и E . Для этого перейдем к новой системе координат Ox_1, y_1, z_1 , которую выберем сл. обр.: ось Oz_1 — перпендикулярно к плоскости диска, ось Ox_1 — в плоскости диска. Такой выбор новой системы координат равносителен повороту системы ox_0 на угол α около оси Oy .

Тогда для определения центробежных моментов инерции имеем:

$$D = \Sigma m x_0 y_0 = \Sigma m y_1 (x_1 \cdot \cos \alpha - x_1 \cdot \sin \alpha) = \cos \alpha \Sigma m y_1 x_1 - \sin \alpha \Sigma m y_1 x_1;$$

$$E = \Sigma m x_0 z_0 = \Sigma m (x_1 \cdot \cos \alpha + x_1 \cdot \sin \alpha) (x_1 \cdot \cos \alpha - x_1 \cdot \sin \alpha);$$

$$E = \cos^2 \alpha \Sigma m x_1^2 + \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \Sigma m x_1^2 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \Sigma m x_1^2 - \sin^2 \alpha \cdot \Sigma m x_1^2.$$

Т. к. новые координатные оси Ox, y, z являются главными осями инерции, то:

$$\Sigma m x_1 y_1 = 0; \Sigma m x_1 z_1 = 0; \Sigma m y_1 z_1 = 0,$$

след.:

$$D = 0;$$

$$E = \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \Sigma m (x_1^2 - y_1^2)$$

Или, вводя моменты инерции относительно координатных осей, получим:

$$E = -\frac{\sin 2\alpha}{2} (A - C).$$

Для диска

$$C = \frac{Mr^2}{2}; A = \frac{Mr^2}{4};$$

след.:

$$E = -\frac{\sin 2\alpha}{2} \cdot \frac{Mr^2}{4}.$$

Т. о., для определения реакций имеем ур-ия:

$$X_A + X_B - P = 0; -Y_A + Y_B = 0;$$

$$Y_A + Y_B = 0; X_A a - X_B b - \omega^2 \frac{2 \sin 2\alpha \cdot Mr^2}{8} = 0,$$

откуда:

$$X_A = \frac{Pb}{a+b} + \omega^2 \frac{Mr^2}{8} \cdot \sin 2\alpha \frac{1}{a+b}; X_B = \frac{P \cdot a}{a+b} - \omega^2 \frac{Mr^2}{8} \cdot \sin 2\alpha \frac{1}{a+b}$$

$$Y_A = 0, Y_B = 0.$$

Найденные для X_a и X_b выражения показывают, что динамическая часть реакции представляет пару, плоскость действия которой находит свое положение вместе с вращающимся диском.

Вычислим реакции для след. данных:

$$P = 5 \text{ кг}; n = 25 \text{ 000 об./мин.}; a = 40 \text{ см}; b = 50 \text{ см}; r = 30 \text{ см}; \varepsilon = 1,15^\circ;$$

$$X_a = \frac{5 \cdot 5}{9} + 1841 \approx 1843,8 \text{ кг.}$$

$$X_b = \frac{5 \cdot 4}{9} - 1841 \approx -1838,8 \text{ кг.}$$

Сравнивая статическую часть реакции с динамической, найдем отношение:

$$\frac{X_a^{\text{дин.}}}{X_a^{\text{ст.}}} = \frac{1841 \cdot 9}{25} \approx 583.$$

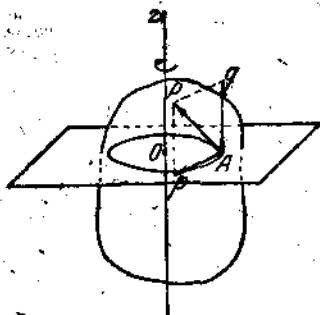
т. е. динамическая часть в 583 раза больше статической.

§ 23. Живая сила твердого тела при вращении около неподвижной оси.

Определяется по ф-ле:

$$E = \Sigma \frac{mv^2}{2} = \Sigma \frac{m\omega^2 r^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2},$$

т. е. ж. с. твердого тела, вращающегося около неподвижной оси, равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на угловую скорость в квадрате.



Черт. 139.

1) Работа сил при вращении тела около неподвижной оси. Тело вращается около оси z в положительном направлении. В точке A приложена сила P . Элементарная работа этой силы определяется по ф-ле:

$$\text{эл. раб.}_{AB} P = M_x(P) \cdot d\varphi,$$

т. е. элементарная работа силы, приложенной в какой-либо точке твердого тела, вращающегося около неподвижной оси, равна моменту силы относительно оси вращения, умноженному на бесконечно-малый угол поворота.

Полная работа силы при повороте тела на нек-рый угол найдется по ф-ле:

$$\text{раб.}_{AB} P = \int M_x(P) d\varphi.$$

При постоянном моменте силы P

$$M_x(P) = \text{Const.}$$

имеем для определения полной работы:

$$\text{раб.}_{AB} P = M_x(P) \cdot \varphi,$$

т. е. полная работа силы, дающей постоянный момент относительно оси вращения, равна этому моменту, умноженному на угол поворота.

2) Связь между вращающим моментом, числом НР и числом об./мин. тела. Обозначим вращающий момент, выраженный в кгм, через M_x , число НР — N , число об./мин. — n .

Тогда:

$$N = \frac{M_{\text{кп}}}{75 \cdot 30},$$

откуда, определяя сначала число HP N , а затем вращающий момент M_z , получаем две ф-лы:

$$N = 0,0014 M_{\text{кп}}; M_z = 716,197 \frac{N}{\text{н}}.$$

3) Уравнение живой силы для тела, вращающегося около неподвижной оси. В дифференциальной форме имеем:

$$d \frac{I_z \omega^2}{2} = M_z d\varphi,$$

т. е. дифференциал живой силы твердого тела, вращающегося около неподвижной оси, равен элементарной работе приложенных к телу сил.

В интегральной форме имеем:

$$\frac{I_z \omega^2}{2} - \frac{I_z \omega_0^2}{2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_z d\varphi,$$

т. е. изменение живой силы тела, вращающегося около неподвижной оси, при повороте на конечный угол равно полной работе приложенных к телу сил.

Пример. Маховику, вращающемуся около неподвижной горизонтальной оси, сообщена угловая скорость ω_0 . Сделав λ оборотов, маховик останавливается. Зная вес маховика P , его радиус инерции k и радиус r поперечного сечения втулки, найти коэф-т трения f на оси.

Для определения коэф-та трения f воспользуемся ур-нем живой силы:

$$\frac{I_z \omega^2}{2} - \frac{I_z \omega_0^2}{2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_z d\varphi.$$

Найдем изменение живой силы маховика. Т. к. после определенного числа оборотов маховик останавливается, его конечная угловая скорость равна нулю, поэтому в левой части имеем:

$$-\frac{I_z \omega_0^2}{2}.$$

или, вводя выражение момента инерции:

$$I_z = MR^2,$$

получим окончательно:

$$-\frac{MR^2 \omega_0^2}{2}.$$

Определяем работу силы трения $F_{\text{тр}}$ в подшипниках. Т. к. сила трения постоянна:

$$F_{\text{тр}} = fP,$$

то полная работа силы трения в подшипниках при вращении маховика найдется по ф-ле:

$$\text{раб. } F_{\text{тр}} = m_0(F_{\text{тр}}) \cdot \varphi.$$

Так как

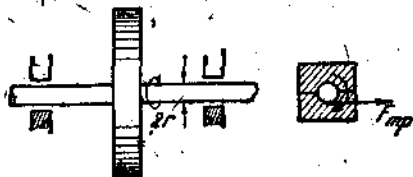
$$\varphi = 2\pi\lambda,$$

то:

$$\text{раб. } F_{\text{тр}} = -f \cdot P \cdot r \cdot 2\pi\lambda.$$

Т. о., ур-е живой силы принимает вид:

$$-\frac{MR^2 \omega_0^2}{2} = -f \cdot P \cdot r \cdot 2\pi\lambda;$$



Черт. 140.

$$\frac{M R \omega^2}{2} = f \cdot M \cdot g r \cdot 2 \pi n_1,$$

откуда:

$$f = \frac{r \omega^2}{4 \pi n_1 g}$$

§ 24. Физический маятник.

Физический маятник—тело, могущее вращаться около любой горизонтальной оси, не проходящей через ц. т.

O —точка подвеса; O_1 —центр качания; C —ц. т.; φ —угол отклонения; I_0 —момент инерции относительно оси, проходящей через точку O ; $OO_1 = l$ —приведенная длина физического маятника; $I = \frac{I_0}{Ma}$, где a —расстояние ц. т. C до точки подвеса O (черт. 141).

Дифференциальное ур-е физического маятника:

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -Mga \cdot \sin \varphi.$$

Период колебания физического маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{Mga}} \text{ для } \varphi < 5^\circ.$$

Для любых углов отклонения можно применять формулу:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{Mga} \cdot \frac{1}{(1 + \sqrt{\cos \varphi})^2}}.$$

Черт. 141.

Ошибка в 0,01% для $\varphi < 45^\circ$ и 1% для $45^\circ < \varphi < 80^\circ$.

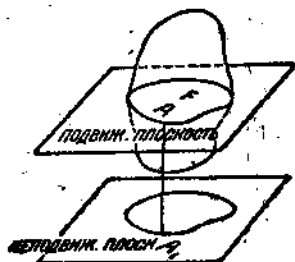
Формулы периода колебания физического маятника можно пользоваться для опытного определения моментов инерции тел. Обозначим n число колебаний маятника в минуту; тогда:

$$T = \frac{60}{n}, \quad I_0 = \frac{T^2 \cdot Mga}{4\pi^2} = \frac{60^2 \cdot Mga}{4\pi^2 n^2}; \quad I_0 = 902,45 \frac{Ma}{n^2}.$$

§ 25. Плоскопараллельное движение твердого тела.

Движение твердого тела называется плоскопараллельным тогда, когда расстояние каждой точки тела от нек-рой неподвижной плоскости в процессе движения не меняется.

Все точки тела, находящиеся на одной в той же прямой, перпендикулярной к указанной плоскости, имеют одинаковые кинематические элементы движения, т. е. тождественные и параллельно расположенные траектории, геометрически равные скорости и геометрически равные ускорения (черт. 142). Вследствие этого положение твердого тела при плоскопараллельном движении определяется в любой момент движения положением его сечения, движущегося параллельно неподвижной плоскости (черт. 142). Неподвижную плоскость можно перенести так, чтобы она находилась непосредственно под подвижной плоскостью, в к-рой лежит рассматриваемое сечение движущегося тела (черт. 143).



Черт. 142.

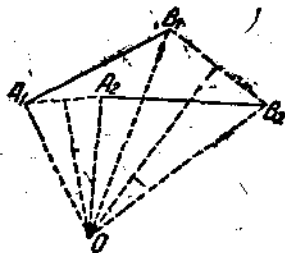
Положение подвижной плоскости относительно неподвижной плоскости вполне определяется положением двух точек A и B подвижной плоскости, или, что то же, положением отрезка AB .

Т. о., изучение кинематики плоскопараллельного движения твердого тела сводится к изучению движения отрезка прямой по плоскости.

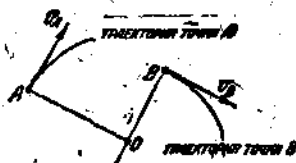
1) **Центр конечного перемещения.** Теорема Шаля. Перемещение отрезка прямой по плоскости из одного заданного положения в любое другое заданное положение м. б. получено путем вращения вокруг нек-рой точки плоскости. Отрезок AB требуется переместить из положения A_1B_1 в положение A_2B_2 (черт. 144).

Соединяем точку A_1 с A_2 и B_1 с B_2 , и в серединах полученных прямых восстанавливаем перпендикуляры. Эти перпендикуляры пересекутся в точке O .

Точка O называется центром конечного перемещения.



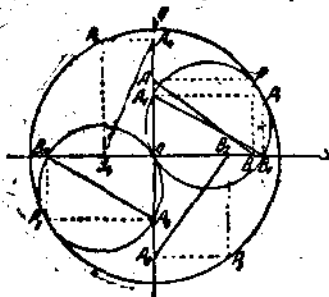
Черт. 144.



Черт. 145.

Всякое бесконечно-малое перемещение плоской фигуры в ее плоскости м. б. получено вращением ее на бесконечно-малый угол около нек-рой точки P . Эта точка называется

мгновенным центром или полюсом. Мгновенный центр определяется, как пересечение нормалей к траекториям двух точек или перпендикуляров к направлениям скоростей двух точек (черт. 145). Геометрическое место мгновенных центров на неподвижной плоскости образует неподвижную центроиду, или полюдию. Геометрическое место мгновенных центров на плоскости самой фигуры образует подвижную центроиду, или полюдию. При движении плоской фигуры подвижная центроида катится по неподвижной без скольжения, при чем касание обеих центроид в каждый момент движения происходит в мгновенном центре (теорема Пуансо).



Черт. 146.

Пример. Круги Кардана (черт. 146). Движение прямолинейного отрезка AB , скользящего своими концами по сторонам прямого угла xOy , A, B заменено качением круга радиуса $\frac{AB}{2}$ с центром в середине отрезка AB (подвижная половина) по кругу радиуса AB с центром в вершине угла xOy (неподвижная половина).

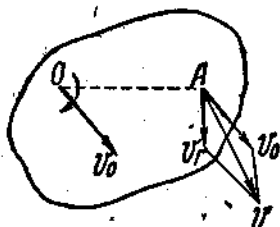
Плоское движение можно рассматривать, как составное из поступательного движения и из вращения около нек-рого полюса O . Поступательная часть движения определяется ур-ниями движения полюса O :

$$x_0 = f_1(t); \quad y_0 = f_2(t).$$

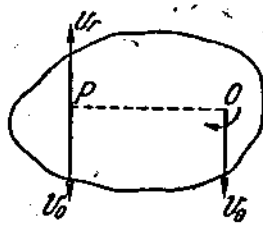
Вращательная часть вокруг полюса O определяется ур-нием:

$$\varphi = f_3(t).$$

Вращательная часть движения не зависит от выбора полюса O . Угловая скорость $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ и угловое ускорение $\theta = \frac{d\omega}{dt}$ — общие для всех полюсов.



Черт. 147.



Черт. 148.

2) **Скорости точек плоской фигуры.** Скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса O и вращательной скорости данной точки вокруг этого полюса (черт. 147):

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_r,$$

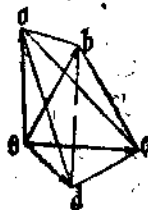
где $v_r = \omega \cdot OA$.

3) **Мгновенный центр скоростей.** В каждый момент времени существует точка плоской фигуры, скорость которой в этот момент равна нулю. Эта точка P (черт. 148) называется мгновенным центром скоростей. Для ее определения на перпендикуляре к скорости полюса откладывают отрезок $OP \leq \frac{v_0}{\omega}$ в ту сторону, чтобы из P видеть скорость v , направленной в сторону вращения плоской фигуры. Если за полюс принять точку P , то скорости отдельных точек пропорциональны их мгновенным радиусам.



Черт. 149.

4) **План скоростей.** v_A, v_B, v_C, v_D — скорости точек A, B, C, D движущейся плоской фигуры (черт. 149). Из произвольной точки O проводим прямые Oa, Ob, Oc, Od , геометрически равные скоростям v_A, v_B, v_C, v_D , и соединяем точки a, b, c, d прямыми. Это построение называется «планом скоростей» (черт. 150).



Черт. 150.

Отрезок ab геометрически равен вращательной скорости точки B вокруг точки A :

$$\overline{ab} = \overline{v_{Ab}}.$$

Точно так же:

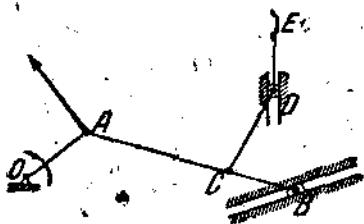
$$\overline{bc} = \overline{v_{bc}}; \overline{ac} = \overline{v_{ac}}; \overline{bd} = \overline{v_{bd}} \text{ и т. д.};$$

$$\frac{ab}{AB} = \frac{bc}{BC} = \frac{ac}{AC} = \dots = \omega,$$

где ω — угловая скорость плоской фигуры.

Для построения плана скоростей необходимо знать величину и направление скорости одной точки и направление скорости другой точки плоской фигуры.

Пример. Кулики Гакворта. O — вал, OA — кривошип, AB — шатун, B — ползун, скользящий вдоль прямолинейной кулисы, CD — тяга, передающая движение посредством ползуна D и вертикального штока DE ползуну E . Дана скорость v_A точки A . Найти скорость ползунка E (Черт. 151-а).



Черт. 151-а.



Черт. 151-б.

Проведем $Oa \neq v_A$ (геометрически); $Oa \neq v_A$; $ab \perp AB$. Делим ab в отношении $\frac{AC}{CB}$, получая точку c . Проведем $Cl \parallel oa$ и $cd \perp CD$, — получаем точку d . Лучи Ob , Od , Oe (Черт. 151-б) определяют величину и направление скоростей точек B , C , D механизма. Луч Oe представляет скорость точки E по величине и по направлению.

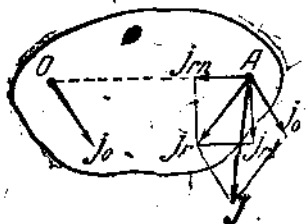
5) Ускорения точек плоской фигуры. Ускорение любой точки плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения полюса O и ускорения во вращательном движении около полюса (Черт. 152):

$$\vec{J} = \vec{J}_0 + \vec{J}_r,$$

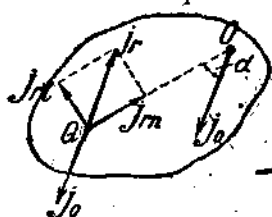
где $\vec{J}_r = \vec{J}_{rt} + \vec{J}_{rn}$;

$\vec{J}_{rt} = \theta \cdot OA$, — касательное ускорение;

$\vec{J}_{rn} = \omega^2 \cdot OA$, — нормальное ускорение.



Черт. 152.



Черт. 153.

6) Мгновенный центр ускорений. В каждый момент времени существует точка, ускорение которой в этот момент равно нулю. Эта точка Q (Черт. 153).

называется мгновенным центром ускорений. Для ее определения откладываем от точки O под углом α $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\theta}{\omega^2}$ к ускорению j_0 отрезок:

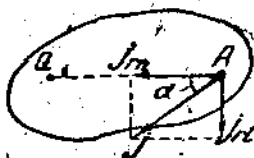
$$OQ = \frac{j_0}{\sqrt{\theta^2 + \omega^4}},$$

при чем угол α откладываем от ускорения j_0 в сторону вращения часовой стрелки, если $\alpha > 0$ (черт. 153), и в обратную, если $\alpha < 0$.

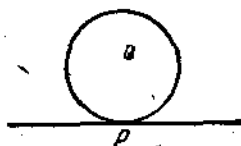
Если за полюс принять точку Q , то ускорения точек пропорциональны их расстояниям от точки Q (черт. 154):

$$j_{\pi} = \theta \cdot OQ; j_{\pi} = \omega^2 \cdot OQ; j = OQ \sqrt{\theta^2 + \omega^4}.$$

Мгновенный центр скоростей и мгновенный центр ускорений, вообще говоря, не совпадают.



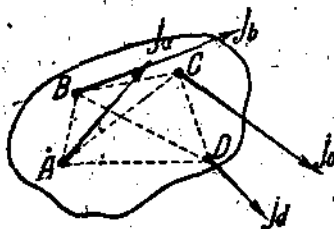
Черт. 154.



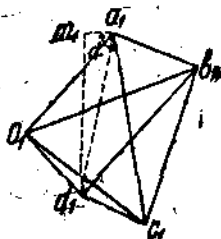
Черт. 155.

Пример. Диск катится равномерно, без скольжения, по прямой. Центр этого диска — мгновенный центр ускорений Q , точка касания с прямой — мгновенный центр скоростей P (черт. 155).

7) План ускорений. j_a, j_b, j_c, j_d — ускорения точек A, B, C, D движущейся плоской фигуры (черт. 156-а). Из произвольной точки O проводим прямые Oa_1, Ob_1, Oc_1, Od_1 , геометрически равные ускорениям j_a, j_b, j_c, j_d и соединяем точки a_1, b_1, c_1, d_1 прямыми. Это построение называется планом ускорений



Черт. 156-а.



Черт. 156-б.

черт. 156-б). Отрезок a_1d_1 геометрически равен ускорению точки D во вращательном движении около точки A :

$$\overline{a_1d_1} = \overline{j_{ad}}.$$

Разложив отрезок a_1d_1 на составляющие: a_1m_1 — параллельно AD и m_1d_1 — перпендикулярно AD , имеем:

$$a_1m_1 = AD \cdot \omega^2;$$

$$m_1d_1 = AD \cdot \theta_1,$$

нормальную и касательную составляющие ускорения j_{ad} .

Отсюда:

$$a_1 d_1 = AD \sqrt{\omega^2 + \theta^2},$$

где ω — угловая скорость, θ — угловое ускорение плоской фигуры, при чем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\theta}{\omega},$$

где $\alpha = \angle m_1 a_1 d$.

Точно так же:

$$a_1 b_1 = AB \sqrt{\omega^2 + \theta^2}; \quad a_1 c_1 = AC \sqrt{\omega^2 + \theta^2} \text{ и т. д.}$$

Отрезки $a_1 d_1$, $a_1 b_1$, $a_1 c_1$ и т. д. составляют с направлениями отрезков AD , AB , AC углы, равные $180 - \alpha$. Из плана скоростей (черт. 150-б) $ad = AD \cdot \omega$, следовательно:

$$a_1 m_1 = AD \cdot \omega^2 = \frac{ad^2}{AD}.$$

Отсюда план ускорений можно построить, если заданы величина и направление ускорения одной точки, направление ускорения другой и кроме того план скоростей.

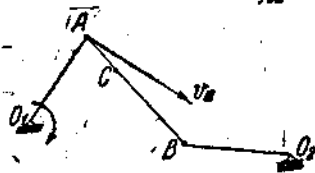
Пример. Кривоштыль $O_1 A$ и $O_2 B$, вращающиеся около неподвижных осей O_1 и O_2 , соединены шатуном AB . Найти ускорение точки C шатуна ($AC = \frac{1}{3} AB$) для положения механизма, указанного на черт. 157. Точка A движется равномерно со скоростью v_a . Строим план скоростей (черт. 158).

Ускорение точки A :

$$j_a = \frac{v_a^2}{O_1 A}.$$

Для точки B известна только нормальная составляющая:

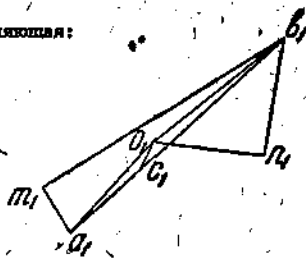
$$j_{ba} = \frac{v_b^2}{O_2 B}.$$



Черт. 157.



Черт. 158.



Черт. 159.

Строим план ускорений (черт. 159). Из произвольной точки O , проводим отрезок $O_1 a_1$, изображающий в масштабе ускорения j_a , параллельно AO_1 . Затем проводим $O_1 b_1 = \frac{v_b^2}{O_2 B}$ параллельно BO_2 . Проводим прямую $a_1 b_1$ перпендикулярно $O_1 b_1$. На этой перпендикуляре лежит вершина b , плана ускорений. Нормальную составляющую j_{ba} ускорения точки B находим по формуле:

$$j_{ba} = \frac{v_{ab}^2}{AB}.$$

Направление этой составляющей — от B к A . На плане ускорений от точки a , откладываем отрезок $a_1 m_1 = j_{ba}$ параллельно AB , затем через точку m_1 проводим прямую, перпендикулярную к отрезку $a_1 m_1$, — в пересечении $a_1 m_1$ и $b_1 a_1$ получаем искомую точку b , плана ускорения (черт. 159).

Отрезок $O_1 b$ изображает ускорение точки B . Отложив на прямой $a_1 b_1$ отрезок $a_1 c_1 = \frac{1}{3} a_1 b_1$, находим точку c_1 . Отрезок $O_1 c_1$ изображает ускорение точки C шатуна AB .

В) Дифференциальные ур-ия плоского движения.

$$M \frac{d^2 x_c}{dt^2} = \Sigma X; \quad M \frac{d^2 y_c}{dt^2} = \Sigma Y; \quad I_z \frac{d^2 \omega}{dt^2} = \Sigma M_z,$$

где M —масса всего тела, I_z —центральный момент инерции относительно оси, перпендикулярной к неподвижной плоскости, x_c, y_c —координаты центра тяжести.

Живая сила в плоском движении равна живой силе поступательного движения вместе с ц. т. и вращательного около ц. т. (теорема Кенинга):

$$E = \frac{M v_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2},$$

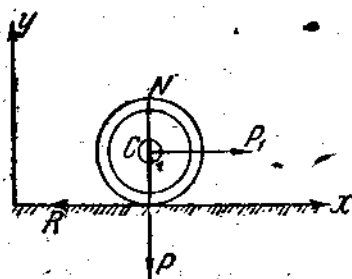
где v_c —скорость центра тяжести, ω —угловая скорость вращения около центра тяжести.

Пример. Движение колесного ската. P —вес колесного ската, a —радиус колеса, I —радиус инерции ската относительно его оси, P_1 —горизонтальная сила, приложенная к скату, R —сила трения (черт. 160). При каких условиях скат будет катиться без скольжения или будет иметь место скольжение колес по рельсам?

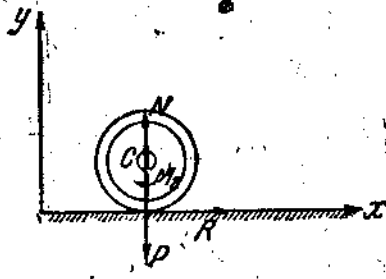
Дифференциальные ур-ия движения ската:

$$M \frac{d^2 x_c}{dt^2} = P_1 - R; \quad M \frac{d^2 y_c}{dt^2} = N - P; \quad M a \frac{d\omega}{dt} = R a.$$

$y_c = a$, поэтому из второго ур-ия $N = P$.



Черт. 160.



Черт. 161.

Положим, что имеет место чистое качение; тогда точка касания колеса с рельсом будет мгновенным центром скоростей в движении колеса:

$$v_c = \frac{dx_c}{dt} = a\omega,$$

откуда:

$$\frac{d^2 x_c}{dt^2} = a \frac{d\omega}{dt}.$$

Ур-ие первое принимает вид:

$$M a \frac{d\omega}{dt} = P_1 - R.$$

Исключая $\frac{d\omega}{dt}$ из этого ур-ия и третьего, имеем:

$$P_1 a - R (a^2 + a^2) = 0;$$

$$R = \frac{a}{a + a^2} P_1.$$

Такова сила трения R при чистом качении. Но $R < fN$ или $R < fP$, где f —коэф-т трения скольжения; отсюда:

$$P_1 \frac{a}{a + a^2} < fP;$$

$$P_1 < \frac{a + a^2}{a} fP.$$

Если сила P не превосходит найденной предельной величины, имеет место чистое качение, в противном случае — качение со скольжением. Для $P = 1000$ кг, $r = 0,35a$, $f = 0,24$. Предельная величина силы $P = 675$ кг.

Так же рассматривается вопрос, если к катушке приложен вращающий момент M_z (ведущие колеса паровоза, черт. 161).

Дифференциальные уравнения движения катушки:

$$M \frac{d^2 v_c}{dt^2} = R; \quad M r^2 \frac{d\omega}{dt} = M_z - R a,$$

при чем $P = N$.

При чистом качении $\frac{d^2 x_c}{dt^2} = a \frac{d\omega}{dt}$; поэтому, исключая из обоих уравнений $\frac{d\omega}{dt}$, имеем:

$$M_z a - R(r^2 + a^2) = 0; \quad R = \frac{a}{r^2 + a^2} M_z.$$

А так как

$$R < fP,$$

то:

$$\frac{a}{r^2 + a^2} M_z < fP,$$

откуда:

$$M_z < \frac{r^2 + a^2}{a} fP.$$

Если M_z превышает найденную предельную величину, имеем скольжение колес: буксование.

При указанных выше данных $M_z = 186$ кгм.

§ 26. Вращение твердого тела около неподвижной точки.

При вращении твердого тела около неподвижной точки всякое положение тела можно получить из любого др. положения вращением около оси, проходящей через неподвижную точку (теорема Д'Аламбера). Эта ось называется мгновенной осью. Ее можно найти, если кроме неподвижной точки известна др. точка, скорость которой равна нулю. Мгновенная ось, перемещаясь непрерывно, описывает два конуса:



Черт. 162.

один — в неподвижном пространстве, — аксоид неподвижный; другой — в самом движущемся теле, — аксоид подвижный (черт. 162). В каждый момент времени оба аксоида имеют общую касательную, которая и является мгновенной осью. При вращении тела

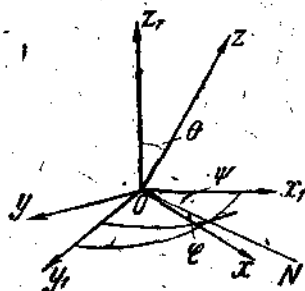
около неподвижной точки подвижный аксоид катится без скольжения по неподвижному.

Для определения положения тела пользуются углами Эйлера (черт. 163). Берем две системы прямоугольных координат: $oxyz$, связанных неизменно с телом, (подвижные координатные оси), и $ox_1y_1z_1$ — неподвижные. Положение системы координат определяется тремя углами Эйлера. oN — пересечение плоскостей xoy и x_1oy_1 (черт. 163).

1) ϕ — угол между ox и oN ; лежит в плоскости x_1oy_1 ; отсчитывается от ox_1 к oN ; его изменению соответствует вращение тела около оси oz (угол прецессии).

2) θ — угол между ox_1 и oz ; отсчитывается от оси ox_1 ; его изменению соответствует вращение около оси oN (угол нутации).

3) ψ — угол между oN и ox ; лежит в плоскости xoy ; отсчитывается от



Черт. 163.

ОН к Ох; его изменению соответствует вращение около оси ОZ (угол собственного вращения). Конечные ур-ия вращения тела около неподвижной точки:

$$\varphi = f_1(t); \psi = f_2(t); \theta = f_3(t).$$

1) Угловая скорость вращения.

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2},$$

где:

$$p = \text{пр. } \omega = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi + \frac{d\theta}{dt} \cdot \cos \varphi;$$

$$q = \text{пр. } \omega = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi - \frac{d\theta}{dt} \cdot \sin \varphi;$$

$$r = \text{пр. } \omega = \frac{d\psi}{dt} \cdot \cos \theta + \frac{d\theta}{dt};$$

$$\cos(\omega, x) = \frac{p}{\omega}; \cos(\omega, y) = \frac{q}{\omega}; \cos(\omega, z) = \frac{r}{\omega}.$$

2) Скорости отдельных точек тела в проекциях на подвижные оси определяются по ф-лам:

$$v_x = qz - ry; v_y = rx - pz; v_z = py - qz.$$

3) Ускорение отдельных точек тела в проекциях на подвижные координатные оси определяется по ф-лам:

$$j_x = \frac{dq}{dt} z - \frac{dr}{dt} y + p(px + qy + rz) - \omega^2 x;$$

$$j_y = \frac{dr}{dt} x - \frac{dp}{dt} z + q(px + qy + rz) - \omega^2 y;$$

$$j_z = \frac{dp}{dt} y - \frac{dq}{dt} x + r(px + qy + rz) - \omega^2 z,$$

где:

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2.$$

4) Дифференциальные ур-ия вращения твердого тела около неподвижной точки (динамические ур-ия Эйлера):

$$A \frac{dp}{dt} - (B - C)qr = M_x;$$

$$B \frac{dq}{dt} - (C - A)rp = M_y;$$

$$C \frac{dr}{dt} - (A - B)pq = M_z.$$

Здесь подвижные оси направлены по главным осям инерции. А, В, С — моменты инерции относительно этих осей, M_x, M_y, M_z — моменты сил относительно тех же осей.

5) Живая сила вращающегося тела при таком выборе координат:

$$E = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2).$$

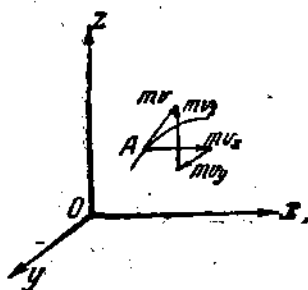
6) Моменты количества движения относительно тех же осей:

$$Ap; Bq; Cr.$$

§ 27. Ур-ия проекций количества движения.

Произведение массы точки на ее скорость называется количеством движения mv . Количество движения изображают в виде вектора, совпадающего по направлению с вектором скорости.

Проекции количества движения на координатные оси (черт. 164):



Черт. 164.

$$\text{пр.}_x mv = mv_x = m \frac{dx}{dt};$$

$$\text{пр.}_y mv = mv_y = m \frac{dy}{dt};$$

$$\text{пр.}_z mv = mv_z = m \frac{dz}{dt}.$$



Черт. 165.

Геометрическая сумма количеств движений отдельных точек представляет количество движения системы (черт. 165):

$$\bar{Q} = \bar{m_1 v_1} + \bar{m_2 v_2} + \bar{m_3 v_3} + \dots$$

Проекции на координатные оси:

$$\sum m \frac{dx}{dt}; \quad \sum m \frac{dy}{dt}; \quad \sum m \frac{dz}{dt}.$$

Ур-ия проекций количеств движения:

$$\frac{d}{dt} \sum m \frac{dx}{dt} = \sum X;$$

$$\frac{d}{dt} \sum m \frac{dy}{dt} = \sum Y;$$

$$\frac{d}{dt} \sum m \frac{dz}{dt} = \sum Z.$$

Производная по времени от проекции количества движения системы на ось равна проекции равнодействующей внешних сил на ту же ось.

Вторая форма:

$$d \sum mv_x = \sum X dt;$$

$$d \sum mv_y = \sum Y dt;$$

$$d \sum mv_z = \sum Z dt;$$

или после интегрирования:

$$\sum mv_x - \sum mv_x^0 = \sum \int X dt$$

$$\sum mv_y - \sum mv_y^0 = \sum \int Y dt$$

$$\sum mv_z - \sum mv_z^0 = \sum \int Z dt.$$

Изменение количества движения системы по направлению координатной оси равно сумме полных импульсов внешних сил по тому же направлению.

Пример. Определение скорости передачи давления. К концу А стержня АВ (черт. 166) приложена продольная сжимающая сила, к-рая на единицу площади торца дает давление p . Определить скорость v передачи давления.

За время t давление передалось до поперечного сечения С; тогда АС — vt . Разобьем АС на весьма малые элементы Δx . От действия сил p каждый последовательный элемент будет сжиматься на величину $= i \Delta x$, где i — относительное изменение длины:

$$i = \frac{p}{E} = \frac{\text{напряжение}}{\text{модуль нормальной упругости}} \quad (\text{закон Гука}).$$

В процессе передачи давления от А к С элементы Δx будут уменьшаться и при уменьшении одного из них все предыдущие элементы получат скорость $i \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Когда давление распространится до сечения С, вся часть АС получит скорость $i \frac{\Delta x}{\Delta t}$; $i \frac{\Delta x}{\Delta t}$ — искомая скорость v .

Применим ур-ие количества движения в проекции на ось x -ов.

$$\frac{d}{dt} \Sigma m v_x = \Sigma X.$$

В данном случае: $\Sigma X = pF$, где F — площадь поперечного сечения стержня АВ;

где γ — удельная плотность;

$$m = F(\omega) \cdot \gamma,$$

$$v_x = i \frac{\Delta x}{\Delta t} = v;$$

$$\frac{d}{dt} (\gamma F \omega \Delta t F) = pF;$$

$$\gamma v^2 = p,$$

откуда искомая скорость:

$$v = \sqrt{\frac{p}{\gamma}} = \sqrt{\frac{E}{\gamma}}.$$

Скорость распространения продольных звуковых колебаний.

Название материала	E	Уд. вес.	γ (уд. плотность)	v м/сек.
Железо	$2 \cdot 10^6$	7,8	$7,94 \cdot 10^{-8}$	5 000
Чугун	$1 \cdot 10^6$	7,2	$7,34 \cdot 10^{-8}$	3 700
Медь красная	$1 \cdot 10^6$	8,8	$8,97 \cdot 10^{-8}$	3 300
Сосна сухая вдоль волокон	$1,1 \cdot 10^6$	0,5	$0,51 \cdot 10^{-8}$	4 650

§ 28. Уравнения моментов количества движения.

Моментом количества движения материальной точки относительно центра O называется произведение количества движения на длину перпендикуляра, опущенного из центра моментов на направление количества движения (черт. 167).

$$\text{мом}_O (mv) = mv \cdot d.$$

Вектор момента количества движения L , перпендикулярен к плоскости, проходящей через O и mv , приложен в точке O и откладывается в ту сторону, чтобы с конца его видеть количество движения направленным в положительную сторону (черт. 167).

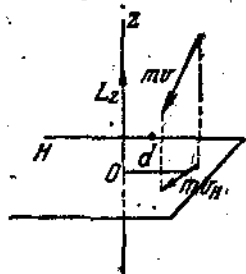
Моментом количества движения материальной точки относительно оси называется момент проекции количества движения на плоскость, перпендикулярную к оси, взятый относительно точки пересечения оси с плоскостью (черт. 168):

$$\text{мом}_O (mv) = \text{мом}_O (mv_H) = mv_H \cdot d.$$



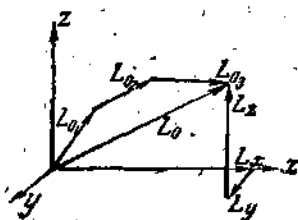
Черт. 167.

Моментом количества движения материальной системы относительно точки называется геометрическая сумма моментов количеств движений отдельных точек (черт. 168):



Черт. 168.

$$L_0 = L_{01} + L_{02} + L_{03} + \dots$$



Черт. 169.

Проекция момента количества движения на координатные оси:

$$\text{пр.}_x L_0 = L_x = \sum m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right);$$

$$\text{пр.}_y L_0 = L_y = \sum m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right);$$

$$\text{пр.}_z L_0 = L_z = \sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right).$$

Ур-ния моментов количества движения.

$$\frac{d}{dt} L_x = \sum (yZ - zY); \quad \frac{d}{dt} L_y = \sum (zX - xZ); \quad \frac{d}{dt} L_z = \sum (xY - yX).$$

Производная по времени от момента количества движения материальной системы относительно оси равна моменту внешних сил относительно той же оси.

§ 29. Силовая функция.

В тех случаях, когда работа, совершаемая силами при перемещении материальной точки из одного положения в другое, не зависит от формы пути, а зависит лишь от начального и конечного положений точки, силы имеют потенциальную, или силовую, ф-ию.

Независимость работы от формы пути представляет механический признак существования силовой ф-ии. Аналитически этот признак выражается в том, что проекции силы на координатные оси равны частным производным по соответственным переменным от нек-рой ф-ии координат, определяющих положение точки. Эта ф-ия называется силовой или потенциальной и обозначается U .

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

При этих значениях проекций силы аналитическое выражение элементарной работы принимает вид:

$$\text{Эл. раб.}_d P = X dx + Y dy + Z dz.$$

$$\text{Эл. раб.}_d P = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz.$$

Правая часть этого равенства представляет полный дифференциал функции U при выполнении след. условий:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \cdot \partial x};$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \cdot \partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \cdot \partial y};$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \cdot \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \cdot \partial z};$$

которые могут быть переписаны в форме:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x};$$

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y};$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}.$$

Таким образом:

$$\text{Эл. раб. } dA P = dU,$$

т. е. элементарная работа силы поля равна полному дифференциалу силовой ф-ии.

Полная работа силы P определяется по ф-ле:

$$\text{раб. }_{AB} P = \int_{(A)}^{(B)} dU = U - U_0,$$

где U_0 — значение силовой ф-ии в точке A , U — ее значение в точке B .

Т. о., полная работа силы поля при перемещении точки из A и B равна разности значений силовой ф-ии в конечной и начальной точках и не зависит от формы пути, по которому совершается перемещение точки (черт. 170).

1) Поверхности уровня. Поверхность, во всех точках которой силовая ф-ия сохраняет одно и то же постоянное значение, называется поверхностью уровня.

Ур-ие поверхности уровня:

$$U(x, y, z) = C,$$

или:

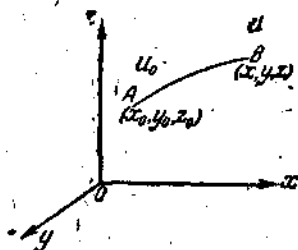
$$U = C,$$

где C представляет нек-рую постоянную. Непрерывно изменяя C , мы получим ряд поверхностей уровня, при чем через каждую точку поля, в которой силовая ф-ия определена, проходит одна из поверхностей уровня.

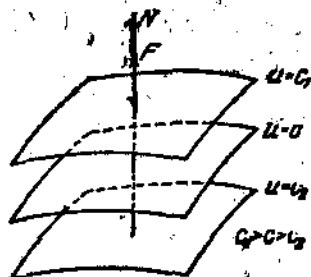
Основные теоремы. Теорема 1. Сила поля нормальна к поверхности уровня во всех ее точках.

Теорема 2. Сила поля направлена по нормали в сторону возрастания силовой ф-ии (черт. 171).

Теорема 3. Производная от силовой ф-ии по какому-нибудь направлению равна проекции силы поля на это направление:



Черт. 170.



Черт. 171.

$$dU = P \cdot ds \cdot \cos(P, ds),$$

$$\frac{dU}{ds} = P \cdot \cos(P, ds).$$

2) Силловые линии и их дифференциальные ур-ия. Линия, направление к-рой в каждой точке совпадает с направлением силы поля, называется **силовой**.

Обозначим через dx, dy, dz проекции на координатные оси элемента силовой линии ds , — тогда направление элемента MT образует с осями координат углы, косинусы к-рых будут:

$$\frac{dx}{ds}; \frac{dy}{ds}; \frac{dz}{ds}.$$

Направляющие косинусы силы P будут:

$$\frac{X}{P}; \frac{Y}{P}; \frac{Z}{P}.$$

По определению силовой линии имеем:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{X}{P}; \frac{dy}{ds} = \frac{Y}{P}; \frac{dz}{ds} = \frac{Z}{P},$$

откуда:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}.$$

Это и есть дифференциальные ур-ия силовых линий.

Если вместо X, Y, Z подставить их выражения через силовую ф-ию, то эти ур-ия примут вид:

$$\frac{dx}{\frac{\partial U}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial U}{\partial z}}.$$

Силовые линии пересекают поверхности уровня ортогонально.

Пример. Вода, налитая в прямоугольный бак, движется вместе с баком в горизонтальном направлении с данным постоянным ускорением f . Найти вид свободной поверхности воды в баке в процессе движения.

Относительно бака вода находится в равновесии, при чем на каждую частицу воды действуют: сила тяжести mg и сила инерции mj ; направление сил указано на черт. 173. Координатные оси $хоу$ связаны с баком. Выражение дифференциала силовой ф-ии:

$$dU = Xdx + Ydy + Zdz,$$

в данном примере имеет вид:

$$dU = -mjdx - mgdy,$$

т. к.

$$X = -mj; Y = -mg; Z = 0,$$

Интегрируя, получаем:

$$U = -m j x - m g y + C_1.$$

Ур-ие поверхности уровня:

$$-m j x - m g y + C_1 = C_2; m j x + m g y = C_1 - C_2.$$

Положая:

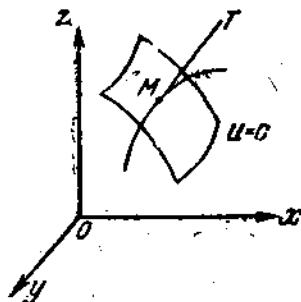
$$C_1 - C_2 = C,$$

имеем:

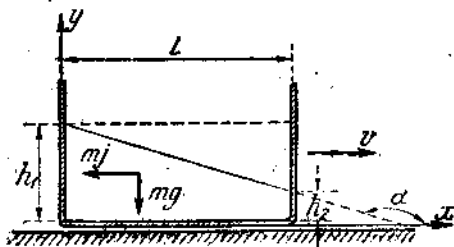
$$jx + gy = \frac{C}{m},$$

откуда:

$$y = -\frac{j}{g}x + \frac{C}{m}.$$



Черт. 172.



Черт. 173.

Свободная поверхность воды в равновесии относительно бака есть одна из поверхностей уровня, поэтому свободная поверхность есть наклонная плоскость, перпендикулярная к плоскости чертежа.

Угол α наклона плоскости к горизонту определяется по ф-ле:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{j}{g}.$$

Свободный член ур-ня $\frac{c}{m}$ находим из условия, что при $x=0$ $y=h_1$ (черт. 173):

$$h_1 = -\frac{j}{g} + \frac{c}{m};$$

$$\frac{c}{m} = h_1.$$

Т. о., ур-не свободной поверхности воды имеет вид:

$$y = -\frac{j}{g}x + h_1. \quad (1)$$

Зная объем W налитой воды и размеры бака (длина l , ширина b), можно определить глубину воды в любом месте бака.

Из черт. 173:

$$\frac{h_1 + h_2}{2} \cdot l \cdot b = W;$$

$$h_1 = \frac{2W}{bl} - h_2.$$

Из ур-ня (1) при $x=l$ и $y=h_2$ имеем:

$$h_2 = -\frac{j}{g}l + h_1.$$

Поэтому:

$$h_1 = \frac{2W}{l \cdot b} + \frac{j}{g}l - h_1.$$

откуда:

$$h_1 = \frac{W}{l \cdot b} + \frac{j}{g}l.$$

Т. о., ур-не (1) принимает вид:

$$y = -\frac{j}{g}x + \frac{W}{l \cdot b} + \frac{j}{2g}l,$$

или:

$$y = \frac{j}{g} \left(\frac{l}{2} - x \right) + \frac{W}{l \cdot b}.$$

§ 30. Сложение движений, скоростей и ускорений.

Точка движется по траектории, к-рая перемещается в пространстве. В этом случае действительное (абсолютное) движение точки по отношению к неподвижной системе сравнения находится путем сложения движения точки по траектории с движением той точки траектории, с к-рей она совпадает в данный момент. Движение точки по траектории называется относительным; движение самой траектории — переносным; движение по отношению к неподвижной системе сравнения — сложным (абсолютным).

Абсолютная скорость v_a равна геометрической сумме относительной скорости v_r и переносной v_e (черт. 174, правило параллелограмма):

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e.$$

Если число движений больше двух, то скорость сложного движения находится по правилу многоугольника (черт. 175).



Черт. 174.

То же относится и к ускорениям, если траектория перемещается поступательно (переносное движение—поступательное):

$$\vec{J}_a = \vec{J}_r + \vec{J}_e.$$

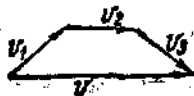
Если же траектория имеет вращательное движение, то абсолютное ускорение J_a складывается геометрически из ускорений относительного J_r , переносного J_e и поворотного J_k :

$$\vec{J}_a = \vec{J}_r + \vec{J}_e + \vec{J}_k.$$

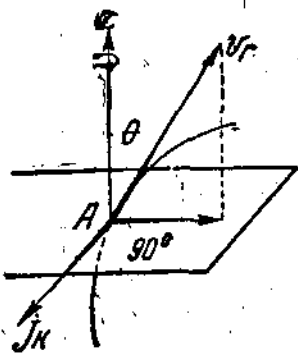
Поворотное ускорение, или ускорение Кориолиса, равно по величине:

$$J_k = 2v_r \omega \cdot \sin \theta,$$

где v_r —относительная скорость, ω —угловая скорость вращения траектории, θ —угол между v_r и ω .



Черт. 175.



Черт. 176.

По направлению ускорение Кориолиса перпендикулярно относительной скорости v_r и оси вращения.

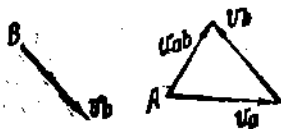
Правило построения (черт. 176). Относительную скорость v_r проектируем на плоскость, перпендикулярную к оси вращения, и поворачиваем проекцию на прямой угол около оси z -ов в сторону переносного вращения.

Ускорение Кориолиса обращается в нуль в трех случаях:

- 1) $\omega = 0$ —траектория перемещается поступательно;
- 2) $v_r = 0$ —точка находится в относительном покое;
- 3) $\sin \varphi = 0$ —относительная скорость параллельна оси вращения;

1) Определение относительной скорости. Относительная скорость v_r равна геометрической разности между абсолютной скоростью v_a и переносной v_e :

$$\vec{v}_r = \vec{v}_a - \vec{v}_e.$$



Черт. 177.

Относительная скорость движения точки А по отношению к др. движущейся точке В равна геометрической разности их скоростей (черт. 177):

$$\vec{v}_{ab} = \vec{v}_a - \vec{v}_b.$$

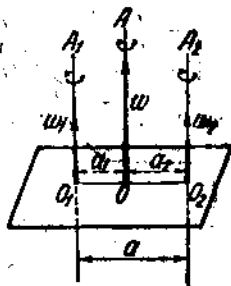
2) Сложение угловых скоростей. Два вращения с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 , направленными в одну сторону около параллельных осей O_1 и O_2 , взаимно удаленных на расстоянии a , дают вращение около новой оси O , лежащей с O_1A_1 и O_2A_2 в одной плоскости и им параллельной. Угловая скорость нового вращения $\omega = \omega_1 + \omega_2$. Положение оси O определяется (черт. 178) ф-лами:

$$a_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} a; \quad a_2 = \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} a.$$

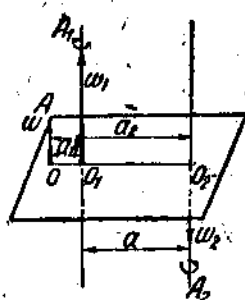
Для случая, когда вращения происходят в разные стороны, угловая скорость нового вращения равна: $\omega = \omega_1 - \omega_2$ и направлена в сторону большей угловой скорости (на черт. 179 $\omega_1 > \omega_2$). Ось O лежит за большей угловой скоростью и положение оси определяется ф-лами:

$$a_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} a; \quad a_2 = \frac{\omega_1}{\omega_1 - \omega_2} a.$$

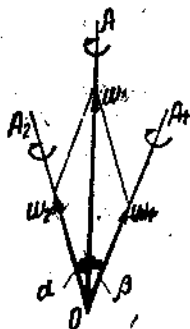
Если при этом угловые скорости окажутся равными: $\omega_1 = \omega_2$ (пара вращений), то в результате получается поступательное движение перпендикулярно к плоскости, проходящей через оси O_1 и O_2 со скоростью $v = \omega \cdot a$.



Черт. 178.



Черт. 179.

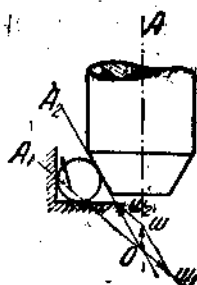


Черт. 180.

Сложение двух вращений с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 около взаимно пересекающихся осей OA_1 и OA_2 (черт. 180) дает вращение около оси OA , совпадающей с диагональю параллелограмма, построенного на складываемых угловых скоростях. Угловая скорость нового вращения $\omega = \omega_1 + \omega_2$ (по правилу параллелограмма):

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \cos(\alpha + \beta)};$$

$$\frac{\omega_1}{\sin \alpha} = \frac{\omega_2}{\sin \beta} = \frac{\omega}{\sin(\alpha + \beta)}.$$



Черт. 181.

Пример. Шариковый подшипник (черт. 181). При вращении цапфы с угловой скоростью ω шарик должны катиться как по цапфе, так и по опорному кольцу. В этом случае ω должна быть составлена из вращения шарика с угловой скоростью ω_1 и из вращения цапфы относительно шариков с угловой скоростью ω_2 . Поэтому три оси вращения OA , OA_1 и OA_2 должны пересекаться в одной точке и три угловые скорости ω , ω_1 и ω_2 таковы, что $\omega = \omega_1 + \omega_2$.

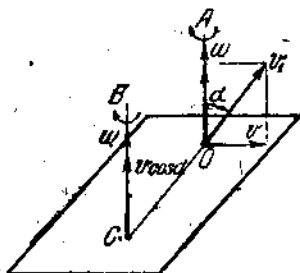
Любое число угловых скоростей складывается по правилу мн-ка.

Сложение вращения с угловой скоростью ω и поступательного движения перпендикулярно к оси вращения O со скоростью v дает вращение с той же угловой скоростью ω около оси CB , параллельной OA и удаленной от нее на расстояние $OC = \frac{v}{\omega}$ (черт. 182).

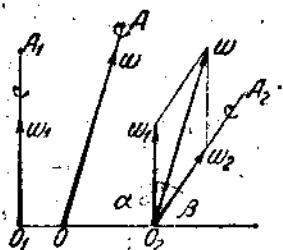
Сложение вращения с угловой скоростью ω и поступательного движения под углом α к оси вращения OA со скоростью v дает винтовое движение

около оси CB , параллельной OA и удвоенный от нее на расстояние $OC = \frac{v \cdot \sin \alpha}{\omega}$, при чем угловая скорость та же ω , а скорость перемещения вдоль оси равна $v \cdot \cos \alpha$ (черт. 182).

Сложение вращений с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 около пересекающихся осей O_1A_1 и O_2A_2 (черт. 183) дает винтовое движение около



Черт. 182.



Черт. 183.

оси OA , параллельной диагонали параллелограмма, построенного на угловых скоростях ω_1 и ω_2 . Угловая скорость сложного движения: $\omega = \omega_1 \cdot \cos \alpha + \omega_2 \cdot \cos \beta$.

Положение оси OA определяется из:

$$\frac{O_1O}{O_2O} = \frac{\tan \alpha}{\tan \beta}.$$

Скорость v поступательного движения вдоль оси OA равна:

$$v = \omega_1 \cdot O_1O_2 \cdot \sin \alpha.$$

Вращения (угловые скорости и пары вращений) складываются как силы и пары сил.

§ 31. Начало возможных перемещений (начало Лагранжа).

Начало Лагранжа представляет общий метод решения задач на равновесие.

Возможными перемещениями называются те бесконечно-малые перемещения, с помощью которых можно переместить точки системы из одного положения в другое, смежное, не нарушая цельности связи. Возможной работой называется работа силы на возможном перемещении:

$$P \cdot \delta s \cdot \cos(P, \delta s),$$

где δs — возможное перемещение.

Начало Лагранжа заключается в следующем. Для равновесия системы необходимо и достаточно, чтобы сумма возможных работ, приложенных к системе сил, при любом возможном перемещении равнялась нулю:

$$\sum P_i \delta s_i \cdot \cos(P_i, \delta s_i) = 0,$$

или:

$$\sum (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) = 0.$$

Каждое из этих уравнений называется уравнением возможных работ.

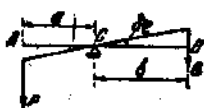
Пример 1. Рычаг (черт. 184). Возможным перемещением является поворот рычага около точки C на угол $\delta\varphi$. Ур-ие возможных работ имеет вид:

$$P \cdot a \cdot \delta\varphi - Qb \cdot \delta\varphi = 0,$$

куда:

$$P \cdot a = Q \cdot b,$$

т. е. силы обратно пропорциональны плечам.



Черт. 184.



Черт. 185.

Пример 2. Дифференциальный винтовой пресс (черт. 185). R — радиус рукоятки, P — сила, ее вращающая, H — шаг одного винта, h — шаг другого. Найти силу прессы Q . Возможное перемещение — поворот винта на угол $\delta\varphi$; перемещение доски прессы — δz . Ур-ие возможных работ:

$$P \cdot R \cdot \delta\varphi - Q \cdot \delta z = 0.$$

Но:

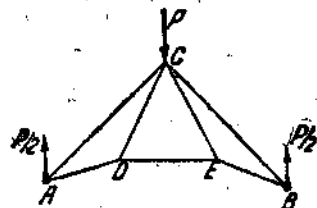
$$\delta z = \frac{H-h}{2\pi} \delta\varphi,$$

поэтому:

$$P \cdot R \cdot \delta\varphi - Q \cdot \frac{H-h}{2\pi} \delta\varphi = 0,$$

откуда:

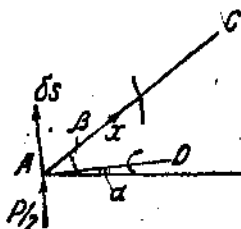
$$Q = \frac{2\pi RP}{H-h}.$$



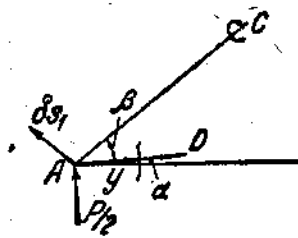
Черт. 186.

При H мало отличном от h сила прессы очень велика.

Пример 3. Определение усилий в стержнях стропильной фермы (черт. 186). Стержни AC и BC находятся под действием равномерно распределенной нагрузки P . Нагрузку на каждый стержень разлагаем на две равные $\frac{P}{2}$ и приложенные в концах. В результате имеем след. силы: в точках A и B силы $\frac{P}{2}$ направлены вверх, в точке C — силу P , направленную вниз (черт. 186).



Черт. 187.



Черт. 188.

Для определения реакции x стержня AC разрежем его и сообщим точке A возможное перемещение δz , вращая стержень AD около точки D на бесконечно-малый угол (черт. 187); $\delta z \perp AD$. Ур-ие возможных работ для сил, приложенных в точке A , имеет вид:

$$\frac{P}{2} \cdot \cos \alpha \delta z + x \cdot \sin \beta \delta z = 0;$$

$$x = -\frac{P \cos \alpha}{2 \sin \beta} \quad (\text{сжатие}).$$

Определим реакцию y стержня AD . Разрежем его и сообщим точке A возможное перемещение δz_1 , вращая стержень AB около точки B на бесконечно-малый угол (черт. 188) $\delta z_1 \perp AB$.

$$\frac{P}{2} \cdot \cos(\alpha + \beta) \Delta z_1 - y \cdot \sin \beta \Delta z_1 = 0;$$

$$y = \frac{P \cos(\alpha + \beta)}{2 \sin \beta}.$$

Далее разрезаем брусок DE и определяем реакцию Z этого бруска, вращая на бесконечно-малый угол ΔADC около точки C .

§ 32. Силы инерции. Начало Д'Аламбера.

Сила, равная численно произведению массы на ускорение и направленная в сторону, противоположную ускорению, называется силой инерции. Обозначим ее F . В криволинейном движении силу инерции F раскладывают на две составляющие по направлению касательной к траектории и главной нормали (черт. 189):

$$F_t = m j_t = m \frac{dv}{dt}$$

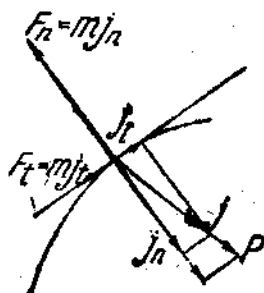
(касательная сила инерции направлена противоположно j_t);

$$F_n = m j_n = m \frac{v^2}{\rho}$$

(центробежная сила инерции направлена противоположно j_n).

Во вращении

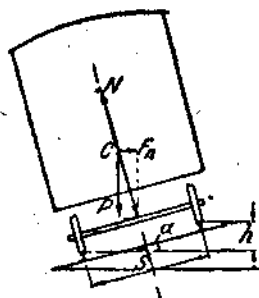
$$F_t = m \frac{d\omega}{dt} r; \quad F_n = m \omega^2 r.$$



Черт. 189.

Силы инерции не действуют на движущуюся точку, но действуют на связи. Совокупность приложенных к материальной системе сил и сил инерции всегда находится в равновесии с реакциями связей (начало Д'Аламбера).

Начало Д'Аламбера позволяет задачу о движении материальной системы свести к задаче о равновесии той же системы.



Черт. 190.

Пример 1. Возвышение наружного рельса на кривых участках пути (черт. 190). Рассматриваем вагон как материальную точку, предполагая массу M вагона сосредоточенной в ц. т. C . По началу Д'Аламбера: сила тяжести $P = Mg$, центробежная сила инерции $F_n = \frac{Mv^2}{R}$ и реакции рельсов N находятся в равновесии. Пишем условия равновесия, взяв проекции на горизонтальную и вертикальную оси:

$$\Sigma X = \frac{Mv^2}{R} - N \cdot \sin \alpha = 0;$$

$$\Sigma Y = -Mg + N \cdot \cos \alpha = 0,$$

откуда:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2}{gR}.$$

Следовательно, искомое возвышение наружного рельса:

$$h = \frac{gv^2}{gR \sqrt{1 + \frac{v^4}{g^2 R^2}}},$$

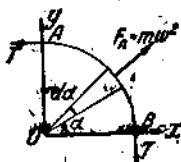
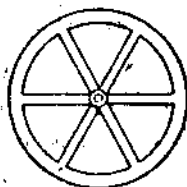
или, пренебрегая членом $\frac{v^4}{g^2 R^2}$:

$$h = \frac{v^2}{gR},$$

где: g — расстояние между рельсами, R — радиус кривой, v — скорость движения.

Пример 2. Маховик вращается с постоянной угловой скоростью ω . Пренебрегая влиянием спиц и рассматривая маховик как кольцо радиуса R , найти предельную окружную скорость v .

Рассекаем маховик в точках A и B и



Черт. 191.

где γ — уд. вес, $g = 9,8 \text{ м/сек}^2$, F — площадь поперечного сечения кольца;

Но:

$$\Sigma F_n \cdot \cos \alpha - T = 0;$$

$$B F_n \cdot \cos \alpha = \int R \omega^2 dm \cos \alpha.$$

$$dm = \frac{\gamma}{g} \cdot F \cdot R \cdot d\alpha,$$

$$\Sigma F_n \cdot \cos \alpha = R^2 \omega^2 \frac{\gamma}{g} F \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha d\alpha,$$

так как:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha d\alpha = 1,$$

$$\Sigma F_n \cdot \cos \alpha = R^2 \omega^2 \frac{\gamma}{g} F.$$

Таким образом:

$$T = R^2 \omega^2 \frac{\gamma}{g} F;$$

$$\frac{T}{F} = R^2 \omega^2 \frac{\gamma}{g}.$$

$\frac{T}{F}$ — растягивающее напряжение σ ,

$R\omega$ — окружная скорость v , поэтому:

$$\sigma = \frac{\gamma}{g} v^2.$$

Когда напряжение σ превышает допустимое для данного материала напряжение $\sigma_{\text{доп.}}$, наступает опасность разрыва маховика. Отсюда предельная окружная скорость v маховика определяется по формуле:

$$v = \sqrt{\frac{g}{\gamma} \sigma_{\text{доп.}}}.$$

Для чугуна $\gamma = 7,25 \text{ г/см}^3$; $\sigma_{\text{доп.}} = 70 \text{ кг/см}^2$; поэтому предельная окружная скорость:

$$v = 30,8 \text{ м/сек.}$$

При помощи метода возможных перемещений начало Д'Аламбера можно выразить в след. форме:

$$\Sigma \left[\left(X - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \delta z \right] = 0.$$

Это ур-е представляет общее ур-е механики.

§ 33. Динамический прием исследования относительного движения (теорема Кориолиса).

1) Переносное движение поступательное. В этом случае относительное движение материальной точки происходит, как абсолютное, под дей-

ствием приложенных сил и силы инерции в переносном движении (переносная сила инерции):

$$\overline{m\mathbf{j}} = \overline{P} - \overline{m\mathbf{j}_e},$$

где: $\mathbf{j}$ — ускорение в относительном движении, $m\mathbf{j}_e$ — переносная сила инерции, P — приложенная сила.

В проекциях на прямоугольные оси координат:

$$m \frac{d^2 x_r}{dt^2} = X - \text{пр.}_x m \mathbf{j}_e;$$

$$m \frac{d^2 y_r}{dt^2} = Y - \text{пр.}_y m \mathbf{j}_e;$$

$$m \frac{d^2 z_r}{dt^2} = Z - \text{пр.}_z m \mathbf{j}_e.$$

Т. о., относительное движение материальной точки происходит, как движение абсолютное, под действием приложенных сил и переносной силы инерции.

2) Переносное движение вращательное. В этом случае к приложенным силам помимо переносной силы инерции надо прибавить Кориолисову силу инерции:

$$\overline{m\mathbf{j}} = \overline{P} - \overline{m\mathbf{j}_{et}} - \overline{m\mathbf{j}_{nt}} - \overline{m\mathbf{j}_k},$$

где $\mathbf{j}$ и P имеют прежнее значение (п. 1); $m\mathbf{j}_{et}$ — касательная составляющая переносной силы инерции; $m\mathbf{j}_{en}$ — ее центробежная составляющая; $m\mathbf{j}_k$ — Кориолисова сила инерции.

В координатных осях:

$$m \frac{d^2 x_r}{dt^2} = X - \text{пр.}_x m \mathbf{j}_{et} - \text{пр.}_x m \mathbf{j}_{nt} - \text{пр.}_x m \mathbf{j}_k;$$

$$m \frac{d^2 y_r}{dt^2} = Y - \text{пр.}_y m \mathbf{j}_{et} - \text{пр.}_y m \mathbf{j}_{nt} - \text{пр.}_y m \mathbf{j}_k;$$

$$m \frac{d^2 z_r}{dt^2} = Z - \text{пр.}_z m \mathbf{j}_{et} - \text{пр.}_z m \mathbf{j}_{nt} - \text{пр.}_z m \mathbf{j}_k.$$

Т. о., относительное движение материальной точки происходит, как движение абсолютное, под действием приложенных сил и трех сил инерции: центробежной, касательной и Кориолисовой.

§ 34. Уравнения Лагранжа 2-го рода.

Переменные величины, определяющие положение данной системы, называются параметрами системы, если их столько, сколько необходимо для определения положения системы (при вращении тела около оси — один параметр, — угол поворота, при вращении со скольжением вдоль оси — два параметра, — угол поворота и расстояние от какой-нибудь точки, лежащей на оси). Число параметров называется числом степеней свободы. Параметры, как величины, определяющие положение системы, называются также обобщенными координатами q_1, q_2, q_3 . Для каждой координаты q_i имеем ур-ие:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \Phi_i (i = 1, 2, \dots, n)$$

(ур-ия Лагранжа), где T — живая сила системы; Φ_i — обобщенная сила; Φ_i имеет размерность силы, если q_i выражает длину, Φ_i — размерность момента, если q_i представляет угол, и т. д.; $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$.

§ 35. Удар.

При ударе двух тел имеет значение только относительная скорость обоих тел, поэтому одно из тел можно рассматривать, как находящееся в покое, и наблюдать относительное движение другого, ударяющего, тела. Прямая, перпендикулярная к общей касательной плоскости в точке соприкосновения соударяющихся тел, называется линией или нормалью удара. Удар называется центральным, если линия удара проходит через ц. т. обоих тел; в каждом другом случае удар называется внецентренным. Удар называется прямым, если скорость ударяющего тела по своему направлению совпадает с линией удара; если же это не имеет места, удар называется косым.

При ударе различают два периода. Первый период начинается касанием обоих тел. В этот период происходит деформация; к концу этого периода точки прикосновения обоих тел имеют одинаковую скорость. После этого начинается второй период, во время которого деформация исчезает — вполне или только частью. Этот период длится до момента расхождения обоих тел. Сила удара действует в продолжение очень короткого промежутка времени. За время первого периода она растет от нуля до весьма больших размеров и падает во время второго периода до нуля. В процессе движения имеют место ур-ия проекции количества движения:

$$\Sigma m(v_x - v_x^0) = \Sigma \int X dt;$$

$$\Sigma m(v_y - v_y^0) = \Sigma \int Y dt;$$

$$\Sigma m(v_z - v_z^0) = \Sigma \int Z dt.$$

По сравнению с ударными силами можно на время удара пренебречь силами неударного характера, напр., вес тела.

Импульс силы $P = \int P dt$, равный потерянному количеству движения каждого из ударившихся тел, $m_1(u_1 - v_1)$ или $m_2(v_2 - u_2)$, является мерой удара.

К исследованию действий удара применяется начало Д'Аламбера, с тем изменением, что вместо сил инерции вводятся потерянные количества движения:

$$\Sigma m(v_x^0 - v_x); \quad \Sigma m(v_y^0 - v_y); \quad \Sigma m(v_z^0 - v_z).$$

1) Прямой центральный удар. m_1 и m_2 — массы соударяющихся тел; v_1 и v_2 — скорости перед началом удара; u_1 и u_2 — скорости к концу удара (черт. 192).



Черт. 192.

На основании ур-ия проекций количества движения, составленного по отношению к линии удара:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2.$$

Отношение относительных скоростей до и после удара, равное $\frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1} = k$, называется коэф-том удара. Величина k зависит от упругих свойств соударяющихся тел и относительной скорости $v_2 - v_1$; для общего случая $0 \leq k \leq 1$. Предельные значения: $k = 0$ для совершенно неупругого удара, $k = 1$ для вполне упругого удара.

2) Неупругий удар. $k=0$, поэтому $u_1 = u_2 = v$.

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Потеря живой силы:

$$E = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2.$$

Это выражение можно представить в виде:

$$E = \frac{m_1 (v_1 - v)^2}{2} + \frac{m_2 (v_2 - v)^2}{2},$$

что выражает теорему Карно: потеря живой силы при ударе двух тел равна живой силе, соответствующей потерянными скоростям.

3) Упругий удар. $k=1$. Потеря живой силы $E=0$.

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2};$$

$$u_2 = \frac{(m_2 - m_1) v_2 + 2 m_1 v_1}{m_1 + m_2},$$

при $m_1 = m_2$, $v_1 = u_2$, $v_2 = u_1$, т. е. соударяющиеся тела обмениваются скоростями.

4) Не вполне упругий удар. $0 < k < 1$.

$$u_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_2 (v_1 - v_2) k}{m_1 + m_2}$$

$$u_2 = \frac{m_2 v_1 + m_1 v_2 + m_1 (v_1 - v_2) k}{m_1 + m_2}.$$

Потеря живой силы:

$$E = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1' - v_2')^2 (1 - k^2),$$

или:

$$E = \frac{1-k}{1+k} \left[\frac{m_1 (v_1 - v_1')^2}{2} + \frac{m_2 (v_2 - v_2')^2}{2} \right].$$



Черт. 193.

Коэф-т удара k определяется из ур-ня $k^2 = h_1/h$; k , где h_1 — высота, до к-рой отскакивает шарик при падении с высоты h на горизонтальную неподвижную плоскость (Черт. 193). Величина k^2 в большой степени зависит от скорости, с к-рой шарик ударяется, т. е. от высоты h . В среднем при $v = 2,8$ м/сек. имеем: для слоновой кости $k = \frac{8}{9}$, для стали и пробки $k = \frac{5}{9}$, для стекла $k = \frac{15}{16}$, для дерева $k = \frac{1}{2}$.

Пример 1. Паровой молот веса $Q = 6$ т падает на наковальню со скоростью $v_0 = 5$ м/сек. Вес наковальни вместе с отковываемым куском железа $P = 100$ т. Найти работу деформации и работу, пошедшую на сотрясение фундамента.

Работа деформации определяется:

$$E = \frac{Q \cdot P}{2g(P+Q)} \cdot v_0^2 = 1200 \text{ ккал.}$$

Начальная живая сила:

$$E_0 = \frac{Q v_0^2}{2g} = 7650 \text{ ккал.}$$

Работа, пошедшая на сотрясение фундамента:

$$E_1 = E_0 - E = 450 \text{ ккал.}$$

Пример 2. Баба веса $Q = 1$ т падает на сваю с высоты $H = 1$ м. Вес сваи $P = 0,4$ т. Отказ сваи, деленный на число ударов в последнем залого, $k = 0,01$ м. Найти сопротивление грунта и допускаемую нагрузку на сваю при коэф-те запаса $= 6$.

Скорость бабы перед началом удара:

$$v = \sqrt{2gH}.$$

Скорость бабы со своей массой Q перед ударом:

$$v = \frac{Q \cdot v}{P + Q} = \frac{Q \sqrt{2gH}}{P + Q}.$$

Приобретенная живая сила равна:

$$\frac{P + Q}{2g} v^2 = \frac{Q^2 H}{P + Q}.$$

и поглощается работой сопротивления грунта, равной Wh , поэтому:

$$W = \frac{Q^2}{P + Q} \cdot \frac{H}{h} = 71,4 \text{ м.}$$

Допускаемое давление на сваю: $\frac{W}{b} = 11,9 \text{ м.}$ Обычно опытным путем определяют

высоту H_0 , до которой удар бабы не вызывает углубления сваи в грунт. Принимают, что часть живой силы бабы, равная $Q \cdot H_0$, идет на работу деформации сваи и на упругое изменение грунта, а на работу преодоления сопротивления грунта продвиганию сваи идет разность $QH - QH_0$, откуда:

$$W = \frac{Q(H - H_0)}{h}.$$

Отношение $\frac{H - H_0}{H} = \eta$ называется коэф-том полезного действия при забивке сваи. В Америке принимают $\eta = 0,4$, запас прочности равным 6, поэтому допускаемое давление на сваю равно:

$$W = 0,4 \cdot \frac{Q \cdot H}{6h}.$$

б) Прямой внецентренный удар. 1) Тело 2 может свободно двигаться. Ф-лы, выведенные для центрального удара, применяются и в том случае, если п

ним вместо массы m_2 вставить приведенную массу m_2' , определяемую из уравнения: $I_B m_2' = I_C m_2$, где I_C — момент инерции тела 2 относительно оси вращения, проходящей через ц. т. С, I_B — момент инерции того же тела относительно параллельной оси, проходящей через точку соприкосновения В (черт. 194).

После удара движение тела 2 состоит из поступательного со скоростью u_0 и вращательного около оси, проходящей через ц. т. с угловой скоростью ω . Применяя начало Д'Аламбера, имеем:

$$m_1(v_1 - u) \cdot a = I_C \omega,$$

где u — скорость точки В, в которой произошел удар, и вместе с тем скорость тела 1 после удара (черт. 194).

$$u = u_1 + \omega \cdot a.$$

u_1 и ω определяются из условий:

$$I_C \frac{du_0}{dt} = P \cdot a; \quad m_1 \frac{du_1}{dt} = P,$$

где P — сила, действующая на тело 2 в точке В вследствие удара, поэтому:

$$I_C \frac{d\omega}{dt} = m_1 \frac{du_1}{dt} \cdot a,$$

откуда, интегрируя:

$$I_C \omega = m_1 u_1 a.$$

Определим u из ур-ий:

$$u = u_0 + \omega a;$$

$$I_C \omega = m_1 u_0 a.$$

Итак:

$$I_C u - I_C u_0 = m_1 u_0 a^2;$$

$$I_C u = (I_C + m_1 a^2) u_0.$$

Так как:

$$I_C + m_1 a^2 = I_B;$$

то:

$$I_C u = I_B u_0, \quad u_0 = \frac{I_C}{I_B} u.$$

Далее:

$$m_1(v_1 - u) \cdot a = I_C \omega;$$

$$m_1(v_1 - u) \cdot a = m_2 u_0 a;$$

$$m_1(v_1 - u) = m_2 \frac{I_C}{I_B} u,$$

но

$$I_C m_2 = I_B m_1,$$

поэтому:

$$m_1(v_1 - u) = m_2' u,$$

откуда:

$$u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2'}.$$

Для u_0 и ω имеем:

$$u_0 = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2'} \cdot \frac{I_C}{I_B}; \quad \omega = \frac{m_1 m_2 a v_1}{(m_1 + m_2') I_B}.$$

Скорость любой точки M тела 2 определяется по ф-ле: $v = u_0 + \omega \cdot r$, где r — расстояние точки от ц. т. C (черт. 194). Точка, для которой $v = 0$, называется центром удара; через эту точку проходит мгновенная ось вращения тела 2.

Потеря живой силы:

$$E = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 m_2'}{m_1 + m_2'} v_1^2.$$

Если удар является внецентральным и для тела 1, то вместо массы m_1 тела 1 надо во всех ф-лах поставить приведенную массу m_1' , к-рая определяется так же, как и для тела 2.

2) Тело 2 имеет неподвижную ось. Если ось вращения находится в центре удара, что имеет место в том случае, когда произведение расстояний ц. т. от оси вращения и места удара равно квадрату радиуса инерции тела 2, то мгновенная ось вращения совпадает с неподвижной осью и поэтому ось не испытывает никакого действия удара. Во всяком др. случае давление на ось определяется из уравн. (черт. 195):

$$P_x + n_x + n_x' + M \bar{\omega} y_c = 0;$$

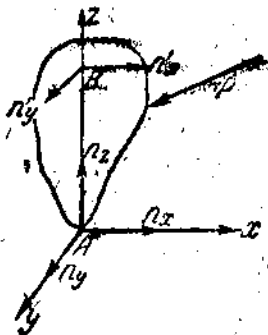
$$P_y + n_y + n_y' - M \bar{\omega} x_c = 0;$$

$$P_z + n_z = 0;$$

$$m_x(P) - n_x' a + E \bar{\omega} = 0;$$

$$m_y(P) + n_y' a + D \bar{\omega} = 0;$$

$$m_z(P) - I_z \bar{\omega} = 0,$$



Черт. 195.

где P_x, P_y, P_z — проекции импульса ударной силы на координатные оси ($P_x = \int X dt$ и т. д.), $m_x(P), m_y(P), m_z(P)$ — моменты импульсов; $p_x, p_y, p_z, p'_x, p'_y$ — проекции импульсивных реакций в опорных точках (A — подпятник, B — подшипник), $\bar{\omega} = \omega - \omega_0$ — потерянная угловая скорость; M — масса тела, x_c, y_c — координаты ц. т., E и D — центробежные моменты инерции.

Условия, при к-рых действие удара не передается на ось (черт. 196):

- 1) Удар д. б. направлен перпендикулярно к плоскости, проходящей через ось вращения и ц. т.:

$$P_z = 0; y_c = 0.$$

- 2) Ось вращения д. б. одной из главных осей инерции для точки O пересечения неподвижной оси с плоскостью удара:

$$E = D = 0.$$

- 3) Сила удара должна действовать по прямой, отстоящей от оси вращения на расстоянии, равном $l = \frac{I_z}{Mx_c}$, где x_c — расстояние ц. т. от оси вращения. При выполнении этих условий ось проходит через центр удара. Отсюда: чем ближе ось вращения к ц. т., тем сильнее передаются на нее удары и, наоборот, чем ближе ось вращения к центру удара, тем меньше передаются на нее удары.

- б) Удар при вращении двух тел. На двух валах, расположенных по одной оси, закреплены два маховика. Один маховик вращается с угловой скоростью ω_1 , другой находится в покое; $\omega_2 = 0$. Валы соединены муфтой. Угловая скорость вращения обоих валов после соединения определяется по ф-ле:

$$\omega = \omega_1 \frac{I_1}{I_1 + I_2},$$

где I_1 и I_2 — моменты инерции маховиков.

Потеря живой силы:

$$E = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 - \frac{1}{2} (I_1 + I_2) \omega^2 = \frac{1}{2} \omega_1^2 \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2}.$$

§ 36. Гироскопический эффект.

Гироскопом называется тело вращения в динамическом смысле, вращающееся около своей оси симметрии.

Под телом вращения в динамическом смысле разумеется твердое тело, для к-рого центральный эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения.

Если ось, около к-рой вращается гироскоп, сама поворачивается в пространстве, появляется нек-рая пара сил, стремящаяся изменить направление оси. Эта пара называется гироскопической; ее момент называют гироскопическим.

Определим гироскопический момент для тонкого диска радиуса R , вращающегося с постоянной угловой скоростью ω около оси Ox , к-рая в свою очередь вращается с угловой скоростью ω_0 около оси $Oz \perp Ox$.

Элемент массы диска (черт. 197):

$$dm = \delta \cdot d\varphi \cdot r \cdot dr.$$

Для каждого элемента массы силы инерции, зависящие от нормальных ускорений относительного и переносного движения, имеют вид:

$$dF_m = dm \Omega^2 r;$$

$$dF_{\text{от}} = dm \omega^2 r \cdot \sin \varphi.$$

Эти силы инерции лежат в плоскости диска и попарно взаимно уравновешиваются.

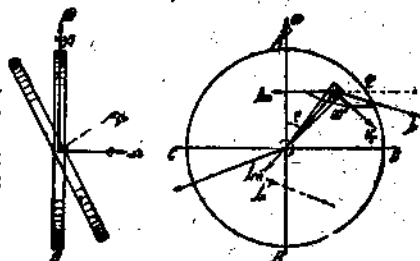
Сила инерции, соответствующая Кориолисову ускорению, имеет вид:

$$dF_h = dm \cdot j_h;$$

но:

$$j_h = 2\Omega r \cdot \omega \cdot \cos \varphi;$$

$$dF_h = dm \cdot 2\Omega \omega \cdot r \cdot \cos \varphi.$$



Черт. 197.

Для всех элементов массы в полудиске *CAD* Кориолисовы силы инерции будут направлены перпендикулярно к плоскости диска за чертеж, а в полудиске *CBD* будут иметь противоположное направление—из-за чертежа. Кроме того для элементов, симметрично расположенных относительно диаметра *CD*, эти силы равны и противоположны (черт. 208).

Суммируя Кориолисовы силы инерции для указанных полудисков, получим пару, момент-к-рой *L* определяется сл. обр.:

$$dL = dF_h \cdot 2r \cdot \cos \varphi;$$

$$dL = dm 4\omega \cdot \Omega r^2 \cdot \cos^2 \varphi;$$

$$dL = 4\omega \Omega \cdot r^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot dr \cdot d\varphi,$$

откуда:

$$L = 4\omega \Omega \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot dr \cdot d\varphi;$$

$$L = \frac{8\omega \Omega R^3 \pi}{2}.$$

Т. к.:

$$\frac{8\pi R^3}{2} = I_x,$$

то:

$$L = I_x \omega \Omega.$$

Плоскость действия гироскопической пары перпендикулярна к плоскости диска; вектор-пары направлен по диаметру *CD* в направлении от *O* к *D*.

Если оси вращения образуют между собой угол γ , то:

$$L = I_x \omega \Omega \cdot \sin \gamma.$$

Отсюда основная теорема.

Если какое-либо тело вращения в динамическом смысле вращается около своей оси симметрии с угловой скоростью Ω , а самая ось симметрии вращается с угловой скоростью ω около другой оси, составляющей с первой угол γ , то появляется пара сил с моментом, равным: $L = I_x \omega \Omega \cdot \sin \gamma$, к-рая стремится повернуть ось вращения Ω к оси ω в такое параллельное положение, при к-ром оба вращения совершались бы в одну и ту же сторону.

Движение гироскопа под действием этого момента называется прецессийным.

Пример 1. Рассмотрим движение ската колес на кривой. Обозначим: вес ската — P ; радиус кривизны ската — R ; радиус кривизны пути — R ; скорость движения центра тяжести C — v м/сек.

Величина гироскопического момента L найдется по формуле:

$$L = J \omega$$

В данном случае:

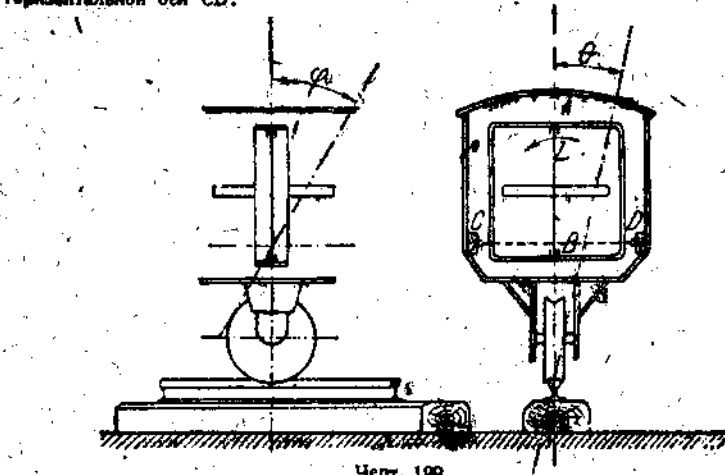
$$J = \frac{P}{g} R^2; \quad \omega = \frac{v}{R}; \quad \omega = \frac{v}{R}$$

поэтому:

$$L = \frac{P R v^2}{g}$$

Этот момент вызывает дополнительную нагрузку на внешний рельс и разгружает внутренний рельс (черт. 198).

Пример 2. Выясним основной принцип того устройства, при помощи которого поддерживается равновесие ж. д. (черт. 199). Внутри вагона установлен гироскоп, ось которого AB укреплена в раме, край сама может вращаться около горизонтальной оси CD .



Черт. 199.

Если вагон начинает наклоняться вправо под действием какой-нибудь силы, чтобы восстановить нарушенное равновесие, достаточно сообщить раме гироскопа вращение около оси CD в направлении, указанном на чертеже стрелкой. При этом появляется гироскопический момент L , направленный обратно моменту, опрокидывающему вагон. При достаточно большой величине момента L равновесие вагона будет восстановлено. При опрокидывании вагона влево восстановление равновесия достигается вращением рамы гироскопа в обратном направлении. В существующих системах однорельсовой ж. д. вращение рамы гироскопа регулируется автоматически.

§ 37. Трение.

При соприкосновении двух тел всегда возникает трение. Величина трения между двумя телами пропорциональна силе, с которой оба тела давят друг на друга: $R = f \cdot N$ (формула Кулона и Морена); f называется коэф-том трения и является числом отвлеченным. Величина этого коэф-та зависит от свойств поверхностей соприкосновения (шероховатость, смазка и т. д.), от скорости движения, от удельного давления (величина давления на единицу

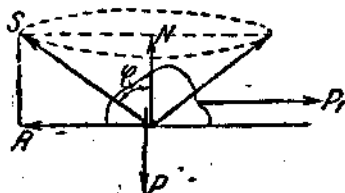
поверхности), от темп-ры и имеет наибольшее значение в начале движения, — т. е. трение покоя, и убывает по мере того, как скорость увеличивается. В зависимости от вида движения, рассматривают два рода трения: трение первого рода — трение скольжения (цилиндрический поршень) и трение второго рода — трение качения (шариковый подшипник, колеса). Трение качения значительно меньше трения скольжения. Трение всегда направлено в сторону, противоположную относительной скорости движущегося тела. Хотя трение возникает только тогда, когда происходит движение, определяющее направление трения, однако трение надо учитывать и при равновесии несвободного тела.

Иногда рассматривают силу трения R и нормальную реакцию N , как одну общую силу. Общая опорная реакция $\vec{S} = \vec{N} + \vec{R}$ составляет с нормалью некоторый угол φ , определяемый из:

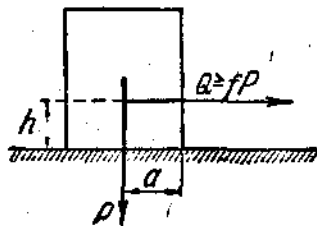
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{N} = f.$$

Этот угол φ называется углом трения. Отличают угол трения в покое и в движении.

Все предельные положения S вокруг нормали образуют конус трения (черт. 200).



Черт. 200.



Черт. 201.

Пример 1. Призма весом P стоит на горизонтальной плоскости (черт. 201). Определить крайнее положение горизонтальной силы, действующей на призму и вызывающей движение призмы, а не опрокидывание ее. Горизонтальная сила Q должна быть: $Q > fP$. Чтобы не было опрокидывания, необходимо, чтобы $Pf \cdot h < P \cdot a$. Отсюда искомое положение силы Q определяется условием:

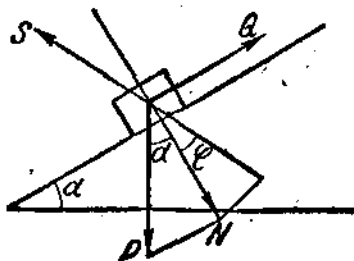
$$fP < a, h < \frac{a}{f}.$$

Пример 2. Наклонная плоскость (черт. 2 2). Равномерное движение вверх:

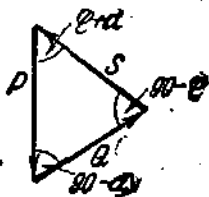
$$Q = P \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi};$$

при равномерном движении вниз:

$$Q = P \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi}.$$



Черт. 202.



При обильной смазке трущихся поверхностей коэф-т трения, по данным проф. Н. П. Петрова, прямо пропорционален: 1) коэф-ту внутреннего трения соответствующей жидкой смазки при данной темп-ре; 2) относительной скорости трущихся частей. Обратно пропорционален: 1) относительной средней толщине находящегося между трущимися поверхностями слоя смазки; 2) давлению (удельному) на единицу площади трущихся поверхно-

Коэффициенты трения при скольжении.

— означает: волокна лежат параллельно. + означает: волокна взаимно перекрещиваются. ! означает: дерево касается своим торцом	Коэффициенты трения					
	покоя			движения		
	сухие	смазанные водой	смазанные	сухие	смазанные водой	смазанные
Дуб по дубу =	0,62	—	0,11	0,48	—	0,075
» » +	0,54	0,71	—	0,34	0,25	—
» »	0,43	—	—	0,19	—	—
» ясени буку, ели =	0,53	—	—	0,38	—	0,15—0,10
» раковистый известняк	0,63	—	—	0,38	—	—
» камень, гравий	0,60—0,48	—	—	—	—	—
Дерево по металлу	0,60	0,35	0,11	0,40	0,24	0,10
Твердое дерево по полированному металлу или граниту	—	0,5	—	0,30	0,10	0,06
Сталь по стали (высокое давл., до 1000 кг/см ²)	0,25—0,15	—	0,12—0,11	{ 0,09 при 0,07 »	v = 3 м/сек v = 27 »	—
Сталь по фосфористой бронзе *: плоская поверхность	0,11	—	0,098	0,105	—	0,092
Цилиндрические поверхности	0,169	—	0,16—0,12	0,162	—	0,15—0,12
Сталь по шероховатому песчанику	—	—	—	0,29	—	—
Сталь по льду	0,027	—	—	0,014	—	—
Железо по дубу =	—	0,65	0,11	0,5—0,4	0,28	0,08
» » мягк. дереву	—	—	—	{ 0,65—0,50 0,21 при 0,11 »	v = 4,5 м/сек v = 22 »	—
» » стали	—	—	—	—	—	—
» » железу	0,13	—	0,11	—	—	0,10—0,08
» » чугу и и бронзе	0,19	—	—	0,18—0,17	—	0,08—0,07
» » песчанику	—	—	—	0,46—0,40	—	—
» » раковистому известняку	0,49—0,42	—	—	0,29—0,24	—	—
» » камню и гравию	0,49—0,42	—	—	—	—	—
» » чугу по дубу	—	0,65	—	0,5—0,3	0,22	0,19
» » мягкому дереву	—	—	—	0,5—0,4	—	—
» » стали	0,33	—	—	{ 0,27 при 0,13 »	v = 2,2 м/сек v = 20 »	—
» » чугу по	—	—	0,16	—	0,31	0,10—0,08
» » бронзе	—	—	—	0,20—0,15	—	0,08—0,07
» » груб. песчанику	—	—	—	0,24—0,21	—	—
Бронза по дубу	0,62	—	—	0,30	—	—
» » бронзе	—	—	0,11	0,20	0,10	0,06
Кирпич по раковистому известняку	0,67	—	—	0,65—0,60	—	—
Грубый известняк по такому же или со свежим раствором	0,75	—	—	0,67	—	—
Раковистый известняк по такому же	0,70	—	—	0,38	—	—
Бутовая кладка по бетону	0,76	—	—	—	—	—
То же по растит. земле, сух.	0,65	0,30	—	—	—	—
Кожа по дубу	0,6—0,5	—	—	0,5—0,3	—	—
» » чугу по	0,5—0,3	0,6—0,4	0,12	0,16	0,36	0,15
Пеньковый канат по грубому дереву	0,8—0,5	—	—	0,5	—	—
Пеньковый канат по гладкому дереву	0,33	—	—	—	—	—

* Высокое давление, — до 600 кг/см².

стей. Толщина слоя смазки обратно пропорциональна квадратному корню из удельного давления между трущимися поверхностями при постоянной темп-ре. Темп-ра слоя смазки зависит от качества смазывающего материала, от скорости, от давления, от теплопроводности тел, окружающих слой смазки, и от темп-ры окружающего воздуха.

Т. о., сопротивление R не возрастает в таком же соотношении, как N .

Коэффициенты скользкого трения для ж.-д. вагонов в зависимости от скорости.

$v =$	10	30	50	70	90 км/ч
A . . .	0,25	0,18	0,15	0,13	0,12
B . . .	0,10	0,07	0,06	0,05	0,04
C . . .	0,27	0,20	0,16	0,13	0,10
D . . .	0,17	0,12	0,10	0,09	0,08
E . . .	0,20	0,14	0,12	0,10	0,09

A — железные ободья по сухим железным рельсам; B — стальные ободья по стальным рельсам; C — чугунные тормозные колодки по стальным ободьям; D и E — тормозные колодки из литой стали по стальным ободьям; D — мокрые поверхности соприкосновения; E — среднее значение для всего времени торможения.

Коэффициенты трения при скольжении для различных мостовых.

		Прессованному асфальту		Литому асфальту		Макадаму		Граниту		Твердому дереву		Мягкому дереву	
Кожа по	1	0,68	0,60	0,79	—	0,76	—	0,71	—	0,75	0,60	0,84	—
	2	0,74	—	0,95	—	0,80	—	0,83	—	0,92	—	0,91	—
	3	0,55	—	0,57	—	0,53	—	0,53	—	0,55	—	0,60	—
Резина по	1	0,67	0,62	0,89	—	0,88	—	0,70	—	0,93	0,76	0,83	—
	2	0,76	—	0,94	—	0,83	—	0,87	—	1,00	—	0,90	—
	3	0,45	—	0,50	—	0,44	—	0,50	—	0,46	—	0,60	—
Железо по	1	0,35	0,30	0,42	0,38	0,39	—	0,35	0,27	0,60	0,54	0,52	0,41
	2	0,45	0,40	0,45	0,38	0,36	—	0,35	0,27	0,53	0,50	0,37	0,51
	3	0,40	0,35	—	—	—	—	—	—	0,42	0,38	—	—

1, 2, 3 обозначают состояние мостовой, а именно: 1 — сухое и чистое, 2 — мокрое и нечистое, 3 — покрытое скользким илом.

Коэффициенты общего трения для телег по дорогам.

1. Для железных шин:

Гладкая дорога из гранитных плит	0,006
Рельсы городских дорог в среднем	0,006 до 0,008
Хорошая асфальтовая мостовая	0,010
Отличная булыжная мостовая	0,015
Шоссированная обыкновенным щебнем дорога в хорошем состоянии	0,018
Хорошая деревянная мостовая	0,018
Хорошая булыжная мостовая	0,020
Шоссированная дорога в хорошем состоянии	0,023
» » покрытая пылью	0,028
Плохая булыжная мостовая	0,033
Шоссированная дорога, покрытая грязью	0,036
Грунтовые дороги очень хорошие	0,045
Шоссированный путь плохо построенный	0,050
Грунтовые дороги разные	0,080 до 0,160
Сыпучий песок	0,15 до 0,30

2. Для резиновых шин:

Существенное значение имеют конструкция резиновой шины и качество материала. Опыты над автомобилями по шоссированным дорогам при скоростях до 25 км/час дают $f = 0,021$ до 0,035.

3. Коэф-ты трения деревянных полозьев по гладкому каменному или деревянному пути:

Без смазки	0,38
При смазке сухим мылом	0,15
" " салом	0,107
Деревянные полозья по снегу и льду	0,035
" обитые железом, по снегу и льду	0,02

Коэффициенты трения для особых случаев.

1) Для кривошипного механизма (общий коэф-т трения) в среднем $f = 0,05$.

2) Железные бандажы по сухим железным рельсам, по Поаре:

(вес вагонов от 3 400 до 8 400 кг):

Скорость v в км в час:	16,56	26,28	31,68	51,48	72,00	79,20
Коэффициент трения $f =$	0,209	0,206	0,171	0,145	0,135	0,112

3) Чугунные тормозные колодки по стальным бандажам, по Гальтону:

Скорость v в км в час: $v = 0$	8,05	16,09	40,03	72,36	96,48
Коэффициент трения $f = 0,330$	0,273	0,242	0,168	0,127	0,074

Если v — скорость (постоянная) движения поезда в км в час, то по новейшим опытам Вихерта для скользящего трения между тормозными колодками литой стали и стальными бандажамы получается:

$$f = \beta \frac{1 + 0,0112v}{1 + 0,06v},$$

где в случае сухих трущихся поверхностей $\beta = 0,45$, а в случае мокрых $\beta = 0,25$. Если поезд, имеющий скорость v , должен быть остановлен, то для всего времени торможения можно принимать один средний коэф-т трения f' . Для различных скоростей v имеем нижеследующие коэф-ты трения, при чем для f' приняты невыгодные условия (мокрые рельсы):

Скорость v в км в час	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Поверхн. трения сухие $f =$	0,450	0,313	0,250	0,215	0,192	0,176	0,164	0,154	0,147	0,141
Поверхн. трения мокрые $f =$	0,250	0,174	0,139	0,119	0,107	0,098	0,091	0,086	0,082	0,078
Сред. значение $f' =$	.	0,201	0,164	0,142	0,128	0,117	0,109	0,103	0,098	0,093

4) Стальные бандажы по стальным рельсам, по Гальтону:

Скорость v в км в час: $v = 0$	10,93	21,8	43,9	63,8	87,6	96,4
Коэффициент трения $f = 0,242$	0,068	0,072	0,07	0,057	0,038	0,02

5) Тормоза по Л. Клейну.

Для скоростей от 1 до 30 м/сек величина f приблизительно постоянная при давлениях 0,5 до 10 кг/см².

Значение для f .

Дерево вдоль волокон, тормозные ободья чисто обработаны.

	Бук	Дуб	Тополь	Ульм	Ива
Чугун	0,29—0,37	0,30—0,34	0,35—0,40	0,36—0,37	0,46—0,47
Сварочн. железо	0,54	0,51—0,40	0,65—0,60	0,60—0,49	0,63—0,60

Для чугуна большие значения относятся к случаю, когда затормаживаемый диск очищается бензином, а меньшие—когда диск только начисто обтирается; для железа—наоборот.

Для необработанного сварочного железа f колеблется; оно значительно ниже, чем для гладких дисков.

б) Гидравлические подъемные машины, по опытам Ланга:

а) Биска или бакаут (гуаяковое дерево) по бронзе:

f постоянно при медленном и переменном направлении движения и при давлениях от 2 до 100 atm.

Золотники при непрерывной жирной смазке	$f = 0,06$
» смоченные водой через многочисленные смазочные канавки ..	$f = 0,10$
» работают насухо и шумят	f до 0,30

б) Сальники с пеньковой, хлопчатобумажной набивкой или кожаным манжетом: f постоянно в промежутках от 1 до 50 atm давления и не зависит от высоты набивки.

а. Хлопчатая бумага или пенька, сплетенная или не сплетенная, пропитанная горячим салом, поршень гладкий, сальник нажат сильно, — настолько что набивка обладает еще *некою упругостью*, размеры общепригодны: даже после нескольких месяцев работы можно принимать. $f = 0,06$ до 0,11

б. Тот же материал при трудности выполнения самой набивки (тяжелый сальник, неудобное расположение и др.) $f =$ до 0,25

г. Кожаные манжеты:

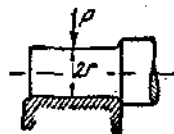
мягкая кожа, хорошее выполнение	$f = 0,03$ до 0,07
твердая кожа	$f = 0,10$ до 0,13
плохие условия работы (шероховатый поршень, грязная вода и т. п.)	$f =$ до 0,20

Дальнейшие данные см. «Пetalи машин. Сальники».

7) Точильные камни. Коэф-т трения между крупнозернистым песчанником и чугуном $f = 0,21$ до 0,24, сталью $f = 0,29$, железом $f = 0,41$ до 0,46 в зависимости от состояния поверхности точильного камня: мелкозернистый камень дает в среднем для чугуна $f = 0,72$, стали $f = 0,94$, железа $f = 1,0$.

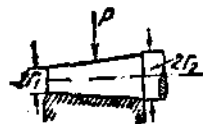
Трение цапф.

Несущая цапфа. Опорное давление P перпендикулярно к оси вращения. Вращающий момент трения для цапфы $M = fPr$, где r —радиус цапфы, f —коэф-т трения скольжения (черт. 203). Окружность, описанная из центра цапфы радиусом $\rho = fR$, представляет круг трения.



Черт. 203.

Если сила, приложенная к цапфе, проходит внутри круга трения или касается его, имеет место равновесие. При равномерном вращении цапфы сила, приложенная к цапфе, касается круга трения. Для конических цапф надо брать средний радиус $r_m = \frac{r_1 + r_2}{2}$ (черт. 204).



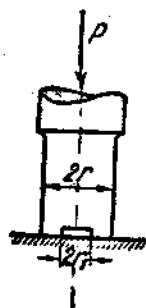
Черт. 204.

Тоуэр нашел, что влияние системы смазки на величину f выражается для бронзового подшипника $d = 102$ мм, $l = 152$ мм сл. обр. (скорость на окружности 0,8 м/сек):

Масляная ванна	$P_m = 18,5$ кг/см ² , $f = 0,001$	39
Смазка фитилем	$P_m = 17,1$ кг/см ² , $f = 0,009$	80
Трушая подушка	$P_m = 19,1$ кг/см ² , $f = 0,009$	00

Коэффициенты f для разных сортов масел.
(Диам. 100 мм, $l = 70$ мм, в масляной ванне.)

Наименование масел			Репное масло				Минеральное прозрачное жидкое				
			Сырое	Сырое, взятое из сма- зочн. корб- бок	Сырое филь- трован- ное	Очи- щенное	Аме- рикан- ское	Рус- ское	Цинко- дровое непроз- рачное густое	Мешан- ное для двигат. внутр. сгора- ния	
Давление в кг/см²	10	скорость в м/сек	0,5	0,01068	0,05341	0,01373	0,00748	0,00304	0,00763	0,08027	0,00702
			1,0	0,01297	0,02518	0,01572	0,01373	0,00763	0,01251	0,06791	0,00916
			2,0	0,01862	0,05722	0,02289	0,01434	0,00961	0,01572	0,05921	0,01389
	25		0,5	0,00599	—	0,00849	0,00635	0,00458	0,00625	0,04094	0,00586
			1,0	0,00617	0,02139	0,00959	0,00782	0,00532	0,00819	0,03617	0,00752
			2,0	0,00965	0,03727	0,01375	0,01075	0,00611	0,00996	0,03122	0,00947
	40		0,5	0,00497	—	0,00676	0,00554	0,00378	0,00493	0,03083	0,00481
			1,0	0,00565	—	0,00784	0,00642	0,00390	0,00573	0,02590	0,00619
			2,0	0,00676	—	0,01031	0,00802	0,00451	0,00760	0,02109	0,00714



Черт. 205.

Пятая цапфа (пятя). Опорное давление P направлено по оси. В предположении, что опорное давление равномерно распределяется по опорной площади, вращающий момент сил трения для сплошной круговой пятя (черт. 205):

$$M = \frac{2}{3} f P r,$$

где r — радиус цапфы, f — коэф-т трения для кольцевой пятя (черт. 205):

$$M = \frac{2}{3} f P \frac{r^2 - r_1^2}{r^2 - r_1},$$

где: r и r_1 — внешний и внутренний радиусы опорного кольца, f — коэф-т трения.

Трение качения (трение второго рода). Когда тело (колесо, цилиндр) катится без скольжения по поддерживающей его поверхности, то возникает сопротивление, к-рое называется трением качения. Величина этого сопротивления задается моментом, к-рый необходим для его преодоления (черт. 206):

$$M = P \cdot f_1,$$

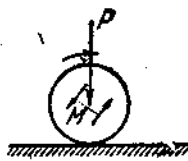
где P — нормальное давление, f_1 — коэф-т трения при качении; его единица измерения — единица длины.

Если каток приводится в движение горизонтальной силой Q , приложенной в центре тяжести катка (черт. 207), то:

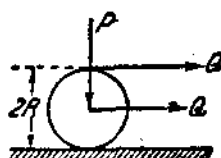
$$Q \cdot R = M = P \cdot f_1.$$

Если сила Q_1 приложена на окружности (черт. 207), то:

$$Q_1 \cdot 2R = M = P \cdot f_1.$$



Черт. 206.

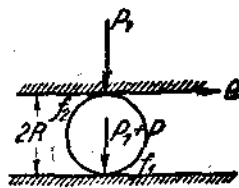


Черт. 207.

Если груз P , перекачивается по валу (черт. 208), то:

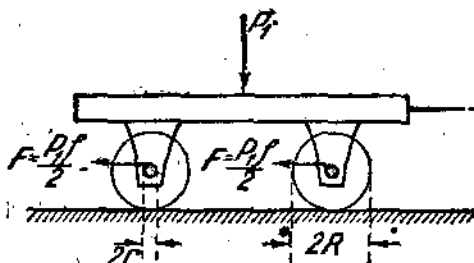
$$Q \cdot 2R = M = (P_1 + P)f_1 + P \cdot r f_2,$$

где P_1 —вес перемещаемого груза; P —вес катка; Q —горизонтальная сила, перемещающая груз (сила тяги); f_1 —коэф-т трения между грузом и катком; f_2 —коэф-т трения между катком и поверхностью, по к-рой он перемещается.



Черт. 208.

Пр и м е р. Тележка катится по горизонтальной плоскости под действием горизонтальной силы Q (черт. 209). Кроме трения качения имеется еще трение в шейке оси.



Черт. 209.

f —коэф-т трения в шейке оси; r —радиус шайфы; P —вес колеса; P_1 —вес груза, толкающегося на этих колесах; f_1 —коэф-т трения качения.

$$QR = P_1 \cdot r \cdot f + (P_1 + P)f_1.$$

Отсюда определяется необходимая сила тяги Q .

Величина трения при качении. Бакаут по бакауту $f_1 = 0,047$ см; вяз по бакауту $f_1 = 0,081$ см; железо по железу или стали $f_1 = 0,005$ см; катки на шариках в машино-

строении $f_1 = 0,005$ до $0,001$ см. Опыты Саксонской St. E. В. с полированными стальными катками между стальными пластинами (подвижные опоры мостов):

Диаметр катков 22,5 см; нагрузка 850 кг/см образующей, по к-рой происходит качение	Поверхности соприкосновения были:		
	совершенно чисты см	смазаны графитом см	загрязнены графитом и песком см
1. Веса малые перемещение, — 2 мм в обе стороны от поло- жения покоя	0,0065	0,0070	—
2. Большие перемещения, 3 см: первый ход	{ наибол. знач. 0,022	{ средн. знач. 0,036	{ средн. знач. 0,089
второй ход (обратный) . . .	{ 0,009 средн. знач.	{ 0,002 средн. знач.	{ 0,173 наибол. знач.

В состоянии покоя, при к-ром произошло, видимому, остающееся изменение формы, коэффициент $f_1 = 0,0065$ см не изменялся при изменении нагрузки от 375 до 850 кг/см; в другом положении коэф-т трения увеличивался с увеличением нагрузки от $f_1 = 0,0094$ см до $f_1 = 0,0181$ см. При перемещении железобетонной плиты для проезжей части весом в 50 т (на каждой стороне 12 полированных стальных катков диаметром в 5 см между двумя железными балками сечения № 14) была измерена потребная сила тяги и определена в 1100 кг; отсюда расчетом определяется $f_1 = 0,041$ см.

Общее сопротивление движению вагонов (на прямом пути).

1. Железнодорожные вагоны на нормальной колее (целые поезда):

$$f = 0,0025 + 0,6 \cdot 10^{-4} v.$$

v —скорость в км/ч; f включает сопротивление воздуха и влияние толчков в стыках рельсов.

2. Железнодорожные вагоны при:

$$\begin{aligned} \text{колес} &= 1000 \text{ мм: } f = 0,0026 + 0,3 \cdot 10^{-6} \cdot v^2, \\ &= 750 \text{ мм: } f = 0,0027 + 0,2 \cdot 10^{-6} \cdot v^2, \\ &= 600 \text{ мм: } f = 0,0028 + 0,2 \cdot 10^{-6} \cdot v^2. \end{aligned}$$

3. Вагонетки для транспортирования грузов—на транспорте (рельсов.): $f = 0,009$ при наличии шариковых подшипников и непрерывной смазки; $f = 0,015$ без этих устройств, но в хорошем состоянии; $f = 0,021$ —при плохом состоянии вагонетки.

4. Повозки с железными шинами для обыкновенных дорог: плохая дорога—0,15; сухая полная грунтовая дорога—0,05; щебенчатая дорога в дождливую погоду—0,05; очень хорошая щебенчатая дорога—0,02; плохая мостовая—0,04; хорошая мостовая—0,02; очень хорошая ровная мостовая—0,013; асфальтовая дорога—0,010. Дальнейшие цифры см. «Железные дороги», «Обыкновенные дороги», «Гидротехника».

Коэф-ты трения f шаровых подшипников. Идеальный коэф-т трения f не зависит от числа оборотов и темп-ры в широких пределах, но, напротив того, уменьшается с увеличением нагрузки.

Опыты Штрибска показали, что конструкция подшипника имеет большое влияние на величину f . Для подшипника, у которого $r = 3,5$ см, $D_0 = 10,2$ см, $d = \frac{1}{8}$ дюйма = 2,225 см (кольцевые желоба из стали, чисто шлифованные, рабочая поверхность кольцевого желоба в сечении представляет дугу круга, радиус которого = $\frac{3}{2}$ диам. шарика; конструкция очень хороша для больших нагрузок), имеем величину f :

Нагрузка P в кг	Число об/мин.		
	65	385	780
380	0,0033	0,0035	0,0037
850	0,0020	0,0021	0,0022
1 100	0,0017	0,0018	0,0019
1 580	0,0016	0,0016	0,0017
2 050	0,0015	0,0015	0,0015
3 000	0,0015	0,0013	0,0013
4 900	—	—	0,0011

Трение гибких тел.

Если гибкое тело (ремень, канат, тормозная лента) перекинута через неподвижный шкив, то для поднятия груза P и преодоления сопротивления, обуславливаемого силами P и Q трения гибкого тела, необходимо (черт. 210):

$$Q = P e^{f\alpha},$$

где: e —основание натуральных логарифмов, f —коэф-т трения, α —угол обхвата.

Если сила Q должна препятствовать опусканию груза P , то:

$$Q = \frac{P}{e^{f\alpha}}.$$

Сила на окружности, передаваемая от трения и равная сопротивлению трения между гибким телом и шкивом, равна:

$$Q - P = Q \frac{e^{f\alpha} - 1}{e^{f\alpha}} = P(e^{f\alpha} - 1).$$

В зависимости от того, будет ли между гибким телом и шкивом происходить относительное движение или такого движения не будет, для коэф-та f принимается величина для движения или для покоя.



Черт. 210.

Коэффициенты трения рибских тал.

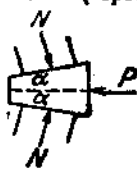
Отношение угла обхвата $\frac{\alpha}{2\pi}$	Кожаные ремни по шкивам из:				Пеньковые канаты				железные тормозные ленты по чугу., стальсам $f_0 = f = 0,18$
	дерева	чугуна			по железным канатам $f_0 = 0,25$	по деревянным канатам $f_0 = 0,4$	по шероховатому дереву $f_0 = 0,5$	по гладкому дереву $f_0 = 0,33$	
	состояние ремня								
	слабо смазан.	сильно смазан.	слабо смазан.	сырой					
	$f_0 = 0,47$	$f_0 = 0,12$	$f_0 = 0,28$	$f_0 = 0,38$					
0,1	1,34	1,02	1,19	1,27	1,17	1,29	1,37	1,23	1,12
0,2	1,81	1,16	1,42	1,61	1,37	1,65	1,87	1,51	1,25
0,3	2,43	1,25	1,69	2,05	1,60	2,13	2,57	1,86	1,40
0,4	3,26	1,35	2,02	2,60	1,87	2,73	3,51	2,29	1,51
0,425	3,51	1,38	2,11	2,76	1,95	2,91	3,80	2,41	1,62
0,45	3,78	1,40	2,21	2,93	2,03	3,10	4,11	2,54	1,66
0,475	4,07	1,43	2,31	3,11	2,11	3,30	4,45	2,68	1,71
0,5	4,38	1,46	2,41	3,30	2,19	3,51	4,81	2,82	1,76
0,525	4,71	1,49	2,52	3,50	2,28	3,74	5,20	2,97	1,81
0,55	5,03	1,51	2,63	3,72	2,37	3,98	5,63	3,13	1,86
0,6	5,38	1,57	2,81	4,10	2,57	4,52	6,59	3,47	1,97
0,7	7,90	1,66	3,43	5,32	3,00	6,81	9,00	4,27	2,21
0,8	10,6	1,83	4,09	6,75	3,51	7,47	12,34	5,25	2,47
0,9	14,3	1,97	4,87	8,57	4,11	9,60	16,90	6,46	2,77
1,0	19,2	2,12	6,81	10,9	4,81	12,35	23,14	7,95	3,10
1,5	—	—	—	—	10,55	43,38	111,16	22,42	5,45
2,0	—	—	—	—	23,14	152,4	535,47	63,23	9,60
2,5	—	—	—	—	50,75	535,5	2576,0	178,5	16,9
3,0	—	—	—	—	111,3	1881	12392	602,9	29,8
3,5	—	—	—	—	244,2	6611	59610	1418	52,4

Таблица для δ° .

$\frac{\alpha}{2\pi}$	f									
	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	
0,1	1,06	1,1	1,13	1,17	1,21	1,25	1,29	1,33		1,37
0,2	1,13	1,21	1,29	1,37	1,46	1,55	1,65	1,76		1,87
0,3	1,21	1,32	1,45	1,60	1,76	1,93	2,13	2,34		2,57
0,4	1,29	1,45	1,65	1,87	2,12	2,41	2,73	3,10		3,51
0,425	1,31	1,49	1,70	1,95	2,23	2,55	2,91	3,33		3,80
0,45	1,33	1,53	1,76	2,03	2,34	2,69	3,10	3,57		4,11
0,475	1,35	1,56	1,82	2,11	2,45	2,84	3,30	3,83		4,45
0,5	1,37	1,60	1,87	2,19	2,57	3,00	3,51	4,11		4,81
0,525	1,39	1,64	1,93	2,28	2,69	3,17	3,74	4,41		5,20
0,55	1,41	1,68	2,00	2,37	2,82	3,36	3,98	4,74		5,63
0,6	1,45	1,76	2,13	2,57	3,10	3,74	4,52	5,45		6,59
0,7	1,52	1,93	2,41	3,00	3,74	4,66	5,81	7,24		9,02
0,8	1,65	2,13	2,73	3,51	4,52	5,81	7,47	9,60		12,35
0,9	1,76	2,34	3,10	4,11	5,45	7,24	9,60	12,74		16,90
1,0	1,87	2,57	3,51	4,81	6,59	9,02	12,35	16,90		23,14
1,5	2,57	4,11	6,59	10,55	16,90	27,08	43,38	69,49		111,32
2,0	3,51	6,59	12,35	23,14	43,38	81,31	152,40	285,68		535,49
2,5	4,81	10,55	23,14	50,75	111,32	244,15	535,49	1174,5		2575,9
3,0	6,59	16,90	43,38	111,32	285,68	733,14	1881,5	4828,5		12391
3,5	9,02	27,08	81,31	244,15	733,14	2199,90	6610,7	19851		59608
4,0	12,35	43,38	152,40	535,49	1881,5	6610,7	23227	81610		286744

Влияние трения в простых машинах.

Клин (черт. 211).



Черт. 211.

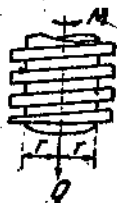
Без трения: $P = 2N \cdot \sin \alpha$.С трением (коэф-т трения $f = \tan \varphi$).

Выводение клина:

$$P = 2N (\sin \alpha + f \cdot \cos \alpha) = 2N \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi}.$$

Удерживание против выталкивания клина:

$$P = 2N (\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha) = 2N \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi}.$$

Самозащемление, когда $\tan \alpha \leq f$, т. е. $\alpha \leq \varphi$; $P \leq 0$.Выбивание клина: $P = 2N (f \cdot \cos \alpha - \sin \alpha)$.

Черт. 212.

Винт с прямоугольной нарезкой (черт. 212).

Без трения: $M = Q \cdot r \cdot \tan \varphi$.С трением (коэф-т трения $f = \tan \varphi$).Поднятие груза $M = Q \cdot r \cdot \tan(\alpha + \varphi)$.При опускании груза $M = Q \cdot r \cdot \tan(\alpha - \varphi)$; вследствие этого:при $\alpha < \varphi$ требуется приложение усилия;» $\alpha > \varphi$ груз движется самостоятельно вниз;» $\alpha \leq \varphi$ винт является самозащемляющимся.

Коэффициент полезного действия винта.

При подъеме:

$$\eta = \frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha + \varphi)};$$

При опускании:

$$\eta = \frac{\tan(\alpha - \varphi)}{\tan \alpha}.$$

Винт с треугольной (остроугольной) нарезкой (черт. 213).

Здесь действует трение клинчатого жолоба; коэф-т трения приближенно: $f_k = \frac{f}{\sin \beta} = \frac{f}{\cos \varphi} = \tan \varphi_k$.Ф-лы, приведенные для винта с прямоугольной нарезкой, применимы и для винтов с треугольной нарезкой, но в них φ надо заменить φ_k . В винтах с прямоугольной нарезкой трение меньше, чем в винтах с треугольной нарезкой, поэтому первые применяются

в подъемных устройствах, а вторые в закрепляющих устройствах (болты).

Черт. 213.



Черт. 214.

Зажимные клещи (черт. 214) (телеграфные клещи).

Условие для зажима: $h \leq 2f \cdot a$. Если $nh \leq 2f \cdot a$, то имеется n-кратный запас надежности. Если трение происходит только в одной из поверхностей, соприкасающихся между костью и стержнем (скоблом), то $h \leq f \cdot a$ и соответственно $nh \leq f \cdot a$.

ГИДРО-АЭРОДИНАМИКА.

Кинематика жидкого тела.

Стационарное, или установившееся, движение жидкости определяется условием независимости от времени скорости движения:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

в каждой точке пространства, занятого текущей жидкостью, и аналитически характеризуется ур-нями:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0. \quad (1)$$

Обычно понятие об установившемся движении дополняют требованием неизменности с течением времени в каждой точке пространства давления p и плотности ρ , т. е. дополняют равенство (1) еще двумя:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0 \text{ и } \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Угловые скорости вращения жидкой частицы вокруг трех направлений, параллельных осям координат, представляют проекции на оси координат вектора мгновенной угловой скорости вращения частицы (черт. 1):

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2},$$

где:

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right), \quad (2)$$

а выражения:

$$\epsilon_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \right), \quad \epsilon_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \right), \quad \epsilon_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \quad (3)$$

дают полускорости сжатия углов частицы.

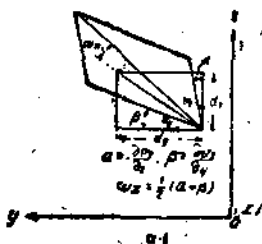
Вектор мгновенной угловой скорости вращения ω называется «вектор-вихрь», а его проекции ω_x , ω_y и ω_z — «компоненты вихря».

Потенциальное движение жидкости определяется равенством нулю компонентов вихрей: $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$, т. е. выражает условие безвихревого движения. Это последнее приводит ур-не (2) к равенствам:

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial z}; \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y},$$

выражающим условие интегрируемости дифференциального трехчлена:

$$v_x dx + v_y dy + v_z dz = d\varphi, \quad (4)$$



Черт. 1.

где φ является нек-рой ф-ией от координат и называется ф-ией потенциала скорости, или, просто, потенциалом скорости. Как следствие ф-лы (4), получим:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (5)$$

т. е. проекции скорости на координатные оси представляются производными потенциала скорости по соответствующим осям. Последнее свойство потенциала скорости сохраняется и для выражения проекций скорости на любое направление. Так, напр.:

$$v_s = \frac{\partial \varphi}{\partial s}; \quad v_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n}; \quad v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \text{ и т. д.,}$$

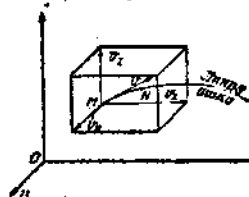
где s —дуга, n —нормаль, r —радиус-вектор.

Течение жидкости, проекции скоростей к-рого м. б. выражены через ф-ию потенциала скорости φ при посредстве ф-л (4) и (5), называется потенциальным.

Линия тока есть кривая, во всех своих точках касательная к векторам скоростей в данный момент времени.

Дифференциальное ур-ние линии тока, как это следует из черт. 2, будет иметь вид:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}. \quad (6)$$



Черт. 2.

В случае установившегося движения линии тока совпадают с траекториями движения жидких частиц.

Плоское движение определяется условием параллельности скоростей во всех точках потока какой-либо плоскости, называемой направляющей плоскостью. Если за направляющую плоскость взять координатную плоскость (xy), то условием этого плоского потока будет:

$$v_z = 0.$$

Плоское потенциальное движение определяется условиями:

$$v_z = 0, \quad \omega_x = 0, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = 0.$$

Плоско-параллельное движение есть частный случай плоского движения, когда скорости помимо параллельности направляющей плоскости еще параллельны заданному направлению или какой-либо из осей координат, напр., оси x ; тогда:

$$v_z = 0, \quad v_y = 0, \quad v_x = \pm v.$$

Плоско-параллельное потенциальное движение определяется:

$$v_z = 0; \quad \omega_x = \omega_y = \omega_z = 0; \quad v_y = 0; \quad v_x = \pm v.$$

Дифференциальное ур-ие линии тока в плоском движении получится из ур-ий (6), принимая за направляющую плоскость координатную плоскость (xy) и принимая, что $v_z = 0$:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}, \quad (7)$$

или:

$$v_x dy - v_y dx = 0. \quad (8)$$

Присоединяя сюда ур-ие неразрывности в форме:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \text{ или: } \frac{\partial}{\partial x}(v_x) = \frac{\partial}{\partial y}(-v_y),$$

обнаруживаем, что ур-ие (8) есть полный дифференциал не-рой ф-ии координат, скажем, $\psi(x, y)$, т. е. что:

$$v_x dy - v_y dx = d\psi. \quad (8')$$

Отсюда следует, что:

$$\begin{aligned} 1) \psi(x, y) &= \text{Const} = a; \\ 2) v_x &= \frac{\partial \psi}{\partial y}; v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{aligned} \quad (9)$$

Ф-ия ψ называется ф-ией линии тока плоского потока. Давая постоянному a различные значения, получим в направляющей плоскости потока семейство линий тока. Линия тока, соответствующая значению $a = 0$, т. е. $\psi(x, y) = 0$, называется нулевой линией тока.

В случае потенциального плоского потока с потенциалом скорости $\varphi(x, y) = \text{Const} = b$, ур-ия (9) необходимо слить с ур-иями (5), т. е. иметь условие:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (10)$$

где φ и ψ удовлетворяют ур-ию Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \text{ или } \Delta \varphi = 0; \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \text{ или } \Delta \psi = 0. \quad (11)$$

Итак, движение плоского потенциального потока м. б. изображено в направляющей плоскости двумя семействами кривых: $\psi(x, y) = a$ и $\varphi(x, y) = b$, т. е. семейством линий тока и семейством эквипотенциальных линий.

Кривые этих семейств ортогональны друг другу, т. к. удовлетворяют условию:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0$$

и образуют т. н. изотермическую сеть.

Переход от одной эквипотенциальной линии к другой по линии тока (на черт. 3—из точки М в точку N) равен:

$$d\varphi = v \cdot ds, \quad (11')$$

где ds —дуга MN, а выражение $v \cdot ds$ представляет циркуляцию по элементу ds контура линии тока.

Переход от одной линии тока к другой по эквипотенциальной линии равен:

$$d\psi = v \cdot ds, \quad (11'')$$

где ds есть дуга ML; выражение $v \cdot ds$ представляет расход жидкости через площадь $ds \cdot l = ds$, т. е. между двумя смежными линиями тока:

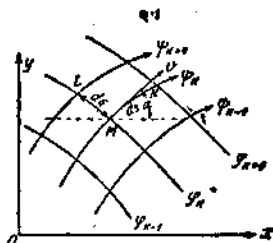
$$d\psi = dQ,$$

или, принимая во внимание равенство (8'), получим:

$$Q = \int_{\psi_1}^{\psi_2} (v_x dy - v_y dx) = \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi = \psi_2 - \psi_1.$$

Составив выражение скорости v через ψ и φ , а именно:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2}.$$



Черт. 3.

легко убедиться, что величины скоростей потока в каждой точке останутся одинаковыми, даже если взять $\varphi = \text{Const}$ за линии тока, а $\psi = \text{Const}$ — за эквипотенциальные линии, и лишь направление их изменится под прямыми углами. Эта взаимная перестановка значений φ и ψ позволяет от изучения одного потока, без особых выводов, переходить к потоку, обращенному на 90° относительно первого.

Имея значение φ -ни φ , можно определить ψ , пользуясь ур-ниями (10):

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial x} dy, \quad \psi = \int -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial x} dy\right) \quad (12)$$

и обратно:

$$d\varphi = v_x dx + v_y dy = \frac{\partial\psi}{\partial y} dx - \frac{\partial\psi}{\partial x} dy, \quad \varphi = \int \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} dy - \frac{\partial\psi}{\partial x} dx\right) \quad (13)$$

Определяя из равенств (11') и (11'') скорость v , получим:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d\psi}{ds} \quad (14)$$

Если принять условие, чтобы $d\varphi = d\psi$, то $ds = ds$, т. е. системой двух семейств ψ и φ взаимно ортогональных кривых плоскость (xy) разбивается на квадратики, образуя т. наз. квадратную сеть. Но для этого достаточно, чтобы φ -ни ψ и ψ -ни φ удовлетворяли ур-нию Лапласа:

$$\Delta_2\psi = 0 \text{ и } \Delta_2\varphi = 0.$$

Но, будучи достаточным, оно не является необходимым условием изотермичности. В самом деле: пусть имеется нек-рое семейство кривых $\Phi(x, y) = C$, при чем $\Delta_2\Phi \neq 0$. Чтобы семейство кривых $\Phi = C$ было изотермическим, должна существовать такая φ -ния F , чтобы

$$F[\Phi(x, y)] = \varphi(x, y)$$

удовлетворяла ур-нию Лапласа $\Delta_2\varphi = 0$. Продифференцировав последнее равенство, будем иметь:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{d^2F}{d\Phi^2} \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 \right] + \frac{dF}{d\Phi} \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \right) = 0,$$

откуда:

$$\frac{\frac{d^2F}{d\Phi^2}}{\frac{dF}{d\Phi}} = -\frac{\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2} = -k.$$

Левая часть этого выражения есть φ -ния только Φ . След., правая часть $(-k)$ — тоже φ -ния Φ . Итак, условие:

$$k = \frac{\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2} = f(\Phi)$$

и есть признак изотермичности семейства кривых $\Phi(x, y) = C$. Если этот признак соблюден, то φ -ния F найдется из ур-ния:

$$\frac{d^2F}{d\Phi^2} + k \frac{dF}{d\Phi} = 0.$$

Интегрируем, вводя постоянные A и B :

$$F = A \cdot \int e^{-\int k d\Phi} \cdot d\Phi + B.$$

Циркуляцией скорости по элементу контура $ds = MN$ называется выражение:

$$ci(ds) = v \cdot ds \cdot \cos \theta. \quad (16)$$

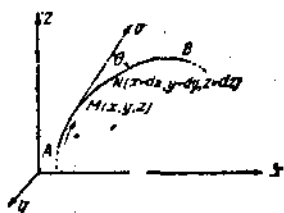
Обозначая углы касательной в точке M с осями через α, β, γ , а векторы скорости — через $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ (черт. 4), получим:

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds}; \quad \cos \alpha_1 = \frac{v_x}{v};$$

$$\cos \beta = \frac{dy}{ds}; \quad \cos \beta_1 = \frac{v_y}{v};$$

$$\cos \gamma = \frac{dz}{ds}; \quad \cos \gamma_1 = \frac{v_z}{v};$$

$$\begin{aligned} ci(ds) &= v \cdot ds \cdot \cos \theta = v ds (\cos \alpha \cdot \cos \alpha_1 + \\ &+ \cos \beta \cdot \cos \beta_1 + \cos \gamma \cdot \cos \gamma_1) = \\ &= v_x dx + v_y dy + v_z dz. \end{aligned} \quad (17)$$



Черт. 4.

Установив положительное направление отсчета циркуляции по контуру AB от точки A к точке B , можем написать, что:

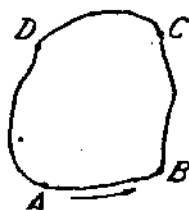
$$ci(AB) = \int_A^B v \cdot ds \cdot \cos \theta = \int_A^B (v_x dx + v_y dy + v_z dz). \quad (18)$$

Циркуляция в обратном направлении, от точки B к точке A :

$$ci(BA) = \int_B^A v \cdot (-ds) \cdot \cos (180^\circ - \theta) = - \int_A^B v \cdot ds \cdot \cos \theta = -ci(AB).$$

Следовательно:

$$ci(AB) + ci(BA) = 0.$$



Черт. 5.

Циркуляция по составному контуру равна алгебраической сумме циркуляций по контурам, его составляющим (черт. 5), т. е.:

$$ci(ABCD) = ci(AB) + ci(BC) + ci(CD) + ci(DA).$$

Циркуляция по контуру, взятому в потенциальном потоке, исчисляется из ур-ния:

$$\begin{aligned} ci(AB) &= \int_A^B (v_x dx + v_y dy + v_z dz) = \int_A^B \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right) = \\ &= \int_A^B d\varphi = \varphi_B - \varphi_A. \end{aligned}$$

В случае замкнутого контура: $\varphi_B = \varphi_A$, если φ есть ф-ия однозначная и циркуляция по замкнутому контуру обращается в нуль:

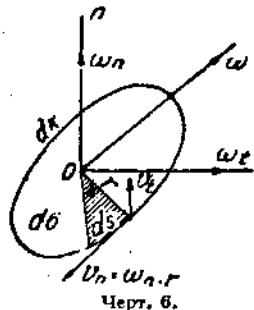
$$\oint d\varphi = 0.$$

Циркуляция по замкнутому бесконечно-малому плоскому контуру в общем случае движения исчисляется только от нормальной к плоскости кон-

тура составляющей мгновенной угловой скорости вращения; ибо, представляя проекции общей скорости движения каждой частицы разложенными по теореме Гельмгольца на три скорости движения, — поступательного, деформации и вращения, — в виде:

$$v_x = v_{x0} + \frac{\partial \phi}{\partial x} + (\omega_y z - \omega_z y)$$

и т. д. для v_y и v_z [ф-ла (22)], обнаруживаем, что поступательное движение, как имеющее потенциал скоростей линейного вида: $\phi = v_{x0} \cdot x_0 + v_{y0} \cdot y_0 + v_{z0} \cdot z$, равно как и движение деформации, суть движения потенциальные, для к-рых циркуляция скорости по замкнутому контуру обратится в нуль, тогда как линейные скорости частиц, вызываемые вращением вектора ω (разложенного на ω_n по нормали и ω_t , который находится в плоскости контура), будут лежать в плоскости контура только от проекции на нормаль к плоскости угловой скорости вращения $\omega_n = \omega \cdot \cos(\omega, n)$, а след., исчисляемая циркуляция от линейных скоростей этого вращения будет единственной отличной от нуля (черт. 6).



Черт. 6.

Исчисляя циркуляцию по элементу ds контура dK , получим:

$$\begin{aligned} c(dK) &= v_n \cdot ds \cdot \cos \theta = \omega_n \cdot r \cdot ds \cdot \cos \theta = \omega_n \cdot r \cdot ds \cdot \sin(90^\circ - \theta) = \\ &= \omega_n \cdot 2ds = 2\omega_n \cdot ds, \end{aligned}$$

где, через ds обозначена площадь заштрихованного тр-ка.

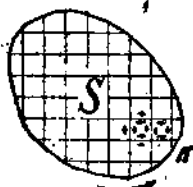
Циркуляция по всему бесконечно-малому контуру dK получится, если принять ω_n постоянным во всей площади контура:

$$\Gamma_{dK} = 2\omega_n \int ds = 2\omega_n \cdot ds = 2\omega_n \cdot \cos(n, \omega) ds, \quad (19)$$

где ds — площадь всего контура dK .

Для исчисления циркуляции по конечному плоскому контуру K разобьем его двумя системами взаимно перпендикулярных прямых на элементарные прямоугольники.

Циркуляция по всему контуру K равна сумме циркуляций по всем прямоугольникам, ибо для внутренних смежных сторон этих прямоугольников циркуляции входят по два раза с обратными знаками, что наглядно подтверждают стрелы на черт. 7. След.:



Черт. 7.

$$\begin{aligned} \Gamma_K &= \iint_S 2\omega \cdot \cos(n, \omega) ds = 2 \iint_S [\cos(\omega, x) \cdot \cos(n, x) + \cos(\omega, y) \cdot \cos(n, y) + \\ &+ \cos(\omega, z) \cdot \cos(n, z)] \omega ds = 2 \iint_S [\omega_x \cdot \cos(n, x) + \omega_y \cdot \cos(n, y) + \\ &+ \omega_z \cdot \cos(n, z)] ds = \iint_S \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \cdot \cos(n, x) + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \cdot \cos(n, y) + \right. \\ &\left. + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \cdot \cos(n, z) \right] \cdot ds. \quad (20) \end{aligned}$$

С другой стороны, исчислить циркуляцию по контуру K можно было, исходя из основного определения циркуляции:

$$\Gamma_K = \int_K (v_x dx + v_y dy + v_z dz) = \int_K (v_x \cdot \cos(x, dK) + v_y \cdot \cos(y, dK) + v_z \cdot \cos(z, dK)) = \int_K v \cdot \cos(v, dK) dK = \int_K v_n \cdot dK. \quad (21)$$

Объединение равенством правых частей равенств (20) и (21) представляет собою интегральный закон Стокса, дающий общую ф-лу преобразования линейного интеграла в интеграл по площади.

Разложение общего движения жидкой частицы на три движения: поступательное движение, деформацию и вращение (теорема Гельмгольца).

Выделим в текущей жидкости бесконечно-малый объем в виде шара с центром C_0 и проследим движение относительно неподвижных осей (xyz) частицы C (черт. 8). В центре C_0 возьмем систему осей (ξ, η, ζ), параллельных осям (xyz). Обозначим координаты C_0 и C относительно обеих систем через:

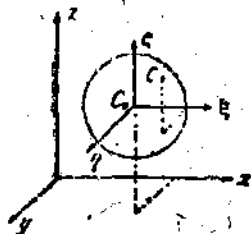
$$C_0(x_0, y_0, z_0) \text{ и } C(x, y, z) = C(x_0 + \xi, y_0 + \eta, z_0 + \zeta),$$

а проекцию скоростей на ось x в тех же точках через:

$$V_{x_0}(x_0, y_0, z_0) \text{ и } V_x(x_0 + \xi, y_0 + \eta, z_0 + \zeta).$$

Разлагая в ряд Тейлора последнюю скорость и откидывая бесконечно-малые выше второго порядка, получим:

$$V_x = V_{x_0} + \frac{\partial v_x}{\partial \xi} \xi + \frac{\partial v_x}{\partial \eta} \eta + \frac{\partial v_x}{\partial \zeta} \zeta.$$



Черт. 8.

Выражая $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ и $\frac{\partial v_x}{\partial z}$ через соотношения, данные в равенствах (2) и (3), будем иметь:

$$V_x = V_{x_0} + \frac{\partial v_x}{\partial \xi} \xi + \omega_z \cdot \eta + \omega_y \zeta + \omega_x \eta - \omega_z \zeta.$$

Вводим вспомогательную ф-ию Φ :

$$\Phi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial \xi} \xi^2 + \frac{\partial v_y}{\partial \eta} \eta^2 + \frac{\partial v_z}{\partial \zeta} \zeta^2 + 2\omega_z \eta \zeta + 2\omega_y \xi \zeta + 2\omega_x \xi \eta \right).$$

Тогда, составив выражение $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}$, не трудно убедиться, что:

$$V_x = V_{x_0} + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + (\omega_y \zeta - \omega_z \eta)$$

и аналогично:

$$V_y = V_{y_0} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + (\omega_z \xi - \omega_x \zeta);$$

$$V_z = V_{z_0} + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} + (\omega_x \eta - \omega_y \xi). \quad (22)$$

Итак: движение жидкой частицы (такоже и бесконечно-малого объема) можно представить слагающимися из:

- 1) поступательного движения со скоростью v_0 , к-рою обладает его центр;
- 2) из движения, именуемого движением деформации, с потенциалом Φ его скорости, и
- 3) из вращения около центра с угловой скоростью ω .

Ф-ия Φ представляет собою поверхность второго порядка с центром в начале координат C_0 . Относя ее к главным осям поверхности второго порядка, необходимо потребовать, чтобы $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$, и, след.:

$$\Phi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial \xi} \xi^2 + \frac{\partial v_y}{\partial \eta} \eta^2 + \frac{\partial v_z}{\partial \zeta} \zeta^2 \right).$$

Условие равенства нулю полускоростей сжатия указывает, что по главным осям поверхности второго порядка радиусы-векторы частицы не перекашиваются в течение бесконечно-малого времени, т. е. не подвергаются угловым деформациям, а допускают лишь вдоль себя линейные деформации. Эти радиусы-векторы частицы называются ее осями деформации.

Уравнение непрерывности, неразрывности или сплошности движения — чаще всего обосновывается на постулате о постоянстве массы какого-либо взятого объема во время движения жидкости. Обозначая через W объем и через ρ плотность, выражение массы жидкости в выделенном объеме получим:

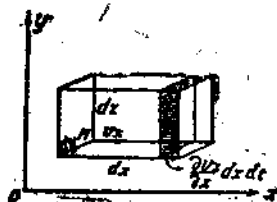
$$M = W \cdot \rho.$$

Постулируя постоянство массы, можем записать:

$$M = W \cdot \rho = \text{Const, или: } \frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} (W \cdot \rho) = 0; \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{W} \cdot \frac{dW}{dt} = 0. \quad (23)$$

Развертывая механический смысл второго члена последнего равенства согласно обозначению на черт. 9, легко видеть, что он представляет собою относительное изменение объема в единицу времени и м. б. записан так:

$$\frac{1}{W} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \cdot W \cdot dt.$$



Черт. 9.

Внося последнее выражение в равенство (23), мы получим ур-не, к-рое и именуется ур-нем неразрывности. Развертывая первый член равенства, мы получим сл. выражение:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} v_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} v_y + \frac{\partial \rho}{\partial z} v_z \right).$$

Внося его в равенство (23), получим ур-не неразрывности в самом общем виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \cdot v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot v_z) = 0. \quad (24)$$

Для жидкости несжимаемой ур-не неразрывности упрощается до такой формы:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (25)$$

т. е. указывает, что объем ее при всех перемещениях и деформациях в условиях неразрывности не может изменяться.

Пограничные условия движения вносятся в гидромеханические задачи для получения законченного решения конкретных задач и имеют значение дополнительных условий, характеризующих механические явления на поверхностях, ограничивающих движение жидких масс. Эти пограничные условия иной раз задаются, а иной раз являются искомыми. Ограничивающие движение жидкого тела поверхности различаются двух видов: 1) твердые, не деформируемые поверхности, неподвижные и движущиеся, называемые стенками, 2) поверхности раздела, — свободные поверхности, отделяющие жидкость одной природы или одного состояния от других.

Механическое различие в характере двух видов границ, — стенок и свободных поверхностей, — сводится гл. обр. к тому, что стенки отмечаются своим положением в пространстве, свободные же поверхности предопределяются давлениями, на них непосредственно действующими.

Пограничные условия определяются двумя видами: 1) динамические, касающиеся сил, и 2) кинематические, относящиеся к состоянию скоростей.

Динамические пограничные условия на основании принципа равенства действия и противодействия изображают равенство между давлением внешней среды или стенки P и давлением, отвечающим жидкости у самой поверхности p , т. е. равенство:

$$p = -P.$$

Для случая свободной поверхности этим уравнением устанавливается давление p на поверхности жидкости по задаваемому давлению среды или смежной жидкости. Для случая стенки условие это служит для определения давления на стенку по давлениям, к-рые проявляются в самой жидкости.

Кинематические условия получают свой вид в зависимости от того, подвижна или неподвижна стенка. Если стенка задана своим уравнением:

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

то оно должно удовлетворяться и в смежное с данным время $t + dt$, т. е. должно существовать одновременно равенство:

$$f(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) = 0.$$

Считая f -ию непрерывной, мы разлагаем последнюю по ф-ле Тейлора, т. обр.:

$$f + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \dots = 0.$$

Принимая во внимание, что $f = 0$, получим:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0,$$

или по разделении всех членов на dt и замене отношений приращений координат точек поверхности к приращению времени соответствующими слагающими по осям скорости, получим:

$$U_x \frac{\partial f}{\partial x} + U_y \frac{\partial f}{\partial y} + U_z \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (26)$$

Внося в последнее равенство вместо $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ выражение их через косинусы углов нормали к поверхности:

$$\cos(n, x) = \frac{1}{N} \frac{\partial f}{\partial x};$$

$$\cos(n, y) = \frac{1}{N} \frac{\partial f}{\partial y};$$

$$\cos(n, z) = \frac{1}{N} \frac{\partial f}{\partial z};$$

где:

$$N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2},$$

и замечая, что:

$$u_x = u \cdot \cos(u, x);$$

$$u_y = u \cdot \cos(u, y);$$

$$u_z = u \cdot \cos(u, z),$$

после выполнения преобразований получим:

$$N \cdot u [\cos(n, x) \cdot \cos(u, x) + \cos(n, y) \cdot \cos(u, y) + \cos(n, z) \cdot \cos(u, z)] + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Производя соответствующую замену, дающую возможность ввести в ф-лу проекции скорости u на нормаль $u_n = u \cdot \cos(\alpha, n)$, окончательно найдем зависимость:

$$u_n = -\frac{1}{N} \frac{\partial f}{\partial n}.$$

После этого пограничные условия непрерывности движения позволяют ввести в это ур-ие вместо нормальной скорости u_n поверхности равную ей нормальную скорость v_n прилегающих частей жидкости, т. е. выразить кинематическое пограничное условие равенством:

$$v_n = u_n = -\frac{1}{N} \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}. \quad (27)$$

В случае стенки неподвижной $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, а след., и пограничное кинематическое условие выражается более простым соотношением:

$$v_n = 0, \quad (28)$$

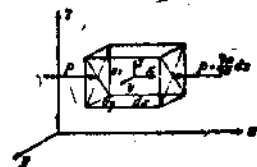
т. е. указывает на отсутствие у частиц жидкости нормальной к стенке слагающей скорости.

Можно доказать (доказательство Томсона), что к стенке прилегают или составляют свободную поверхность всегда одни и те же частицы жидкости.

Кроме условий пограничных, т. е. предельных в пространстве, на движение жидкости непосредственно отзываются и предельные условия во времени, т. е. так наз. начальные условия. Начальные условия имеют определяющее значение лишь в период, когда движение не приняло установившихся форм. При установившемся движении, к-рое в большинстве случаев и рассматривается в гидромеханике, начальные условия не имеют значения.

Динамика жидкого тела.

Дифференциальные ур-ия движения жидкости в ф-ле Эйлера. На выделенный объем жидкости (черт. 10) действуют силы давлений и массовые силы. Составляя уравнение проекций всех действующих сил на координатные оси вместе с силами инерции, получим сл. ур-ия:



Черт. 10.

$$\rho dx dy dz X - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz = \rho dx dy dz \frac{dv_x}{dt};$$

$$\rho dx dy dz Y - \frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz = \rho dx dy dz \frac{dv_y}{dt};$$

$$\rho dx dy dz Z - \frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz = \rho dx dy dz \frac{dv_z}{dt}.$$

Относя их к единице массы, получим:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{dv_x}{dt} \\ Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{dv_y}{dt} \\ Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{dv_z}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Раскрывая правые части ур-ия, приводим их к виду:

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}; \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}; \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{aligned}$$

Дифференциальные ур-ия движения жидкости в форме Ламба-Громеко. Если к последним ур-иям в правых частях прибавить и вычесть одновременно количества: $\pm v_y \frac{\partial v_x}{\partial x}$ и $\pm v_z \frac{\partial v_x}{\partial x}$ и ввести обозначение $dP = \frac{dp}{\rho}$, то после соответствующей группировки членов получим ур-ие сл. вида:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \frac{\partial v_x}{\partial t} &= 2(\omega_y v_z - \omega_z v_y) \\ Y - \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \frac{\partial v_y}{\partial t} &= 2(\omega_z v_x - \omega_x v_z) \\ Z - \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \frac{\partial v_z}{\partial t} &= 2(\omega_x v_y - \omega_y v_x) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Интеграл дифференциальных ур-ий движения для случая установившегося движения получится, если в ур-ии Ламба считать, что:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0,$$

а затем левые части ур-ия умножить соответственно на dx , dy и dz , а правые — на равные им величины $v_x dt$, $v_y dt$ и $v_z dt$ и сложить все три ур-ия. Эти операции приведут к сл. дифференциальному равенству:

$$(X dx + Y dy + Z dz) - d \left(P - \frac{v^2}{2} \right) = 0.$$

Интегрируя его, мы и получим интеграл Бернули:

$$U - P - \frac{v^2}{2} = \text{Const}, \quad (31)$$

который будет действителен лишь по линии тока одной и той же частицы, — по траектории одной и той же частицы, т. к. интегрирование было проведено по траектории. Принимая, что движущаяся жидкость находится под влиянием лишь сил тяжести и несжимаема, легко перевести последнее равенство в ур-ие Бернули:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \text{Const} = H \text{ (напор)}.$$

Интегрирование дифференциальных ур-ий в случае потенциального движения будет проведено, если считать, что:

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0 \text{ и } v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

* Если сделать предположение о наличии потенциала для массовых сил, т. е. если

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, Y = \frac{\partial U}{\partial y}, Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

то последнее дифференциальное ур-ие получит вид:

$$d \left[U - P - \frac{v^2}{2} \right] = 0.$$

После этого ур-ия Ламба, получая вид:

$$X = \frac{\partial}{\partial x} \left[P + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 \right];$$

$$Y = \frac{\partial}{\partial y} \left[P + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 \right];$$

$$Z = \frac{\partial}{\partial z} \left[P + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 \right].$$

След., для возможности потенциального движения проекции на оси внешней массовой силы должны являться производными по координатам одной и той же ф-ии, к-рая может отличаться от выражения, стоящего в скобках, лишь добавком, независимым от координат, но допускающим явную зависимость от времени. Принимая во внимание, что обычно массовые силы удовлетворяют этому условию, и обозначая силовую или потенциальную ф-ию через U , получим равенство:

$$dU = d \left[P + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} \right].$$

Интегрируя его, получим так наз. интеграл Лагранжа-Коши для не установившегося безвихревого движения жидкости:

$$U = P + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + f(t). \quad (32)$$

Если потенциальное движение является одновременно и установившимся, т. е.:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

то выражение:

$$U - P - \frac{v^2}{2} = \text{const} \quad (33)$$

является постоянным для всей массы движущейся жидкости и представляет в этом последнем случае т. наз. интеграл Бернулли-Эйлера.

Ур-ие неразрывности для потенциального движения приобретает сл. форму:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = 0,$$

или:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \Delta_s \varphi = 0,$$

а для несжимаемой жидкости обращается в т. наз. ур-ие Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

или:

$$\Delta_s \varphi = 0.$$

Всякая ф-ия, удовлетворяющая ур-ию Лапласа, называется гармонической.

Ур-ие неразрывности в полярной форме для плоского потока будет иметь сл. вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0,$$

а для трехразмерного потока:

$$r^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cdot \sin \theta \right)}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varphi^2} = 0,$$



Черт. 11.

где r , θ и ϕ имеют значения согласно черт. 11.

Ур-не неразрывности для симметричного относительно оси X потока (черт. 12):

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0.$$

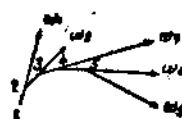


Черт. 12.

Вихревое движение.

Физическое понятие о вихре обосновывается на совокупности жидких частиц, совместно вращающихся около общей оси вращения, к-рая м. б. неподвижной или перемещающейся, прямолинейной или изогнутой, деформирующейся или сохраняющей свою форму, при чем совокупность частиц, составляющих вихрь, как бы отделена от всей остальной массы жидкости нек-рой поверхностью раздела. Механическое понятие о вихре сводится к характеристике вихря двумя основными представлениями: об оси вращения и об угловой скорости вращения. Переменность оси вращения во времени и в пространстве определяется т. наз. вихревой линией (черт. 13).

Чтобы построить вихревую линию, нужно через некоторую точку 1 жидкости в определенный момент времени провести ось вихря и на ней отложить угловую скорость вращения ω ; на этом векторе выбираем точку 2 на бесконечно-малом расстоянии от точки 1 и при точке 2 мысленно строим по положению и по величине вектор ω_2 для того же момента времени; на последнем векторе избираем точку 3 — также на бесконечно-малом расстоянии от точки 2 — и при ней выстраиваем вектор ω_3 и т. д. Получаемая для данного момента времени линия 1-2-3..., или, точнее, ее предел, и представляет собою проходящую через точку 1 кривую, называемую вихревой линией. След., вихревая линия есть кривая на всем своем протяжении, касательная к векторам угловых скоростей вращения в один и тот же момент времени.



Черт. 13.

Исходя из этого, не трудно получить дифференциальное ур-не вихревой линии:

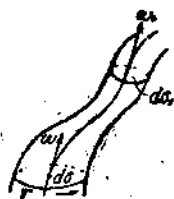
$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}. \quad (34)$$

Угловые скорости вращения вихря определяются через угловые скорости вращения каждой жидкой частицы, входящей в объем вихря, при чем направление вращения берется по правилу штопора, т. е. обратно движению часовой стрелки:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \right); \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial z} \right); \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Если через все точки бесконечно-малого замкнутого контура, окружающего вихревую линию, провести вихревые линии, то выделяемая совокуп.

ность жидких частиц именуется вихревой нитью, вихревым шнуром или просто вихрем (черт. 14).



Черт. 14.

Произведение из площади поперечного сечения $d\sigma$ на угловую скорость вращения ω центральной вихревой линии, называемой осью вихря, характеризует собою интенсивность вихря:

$$\omega \cdot d\sigma = \text{Const.}$$

В интересах сопоставления с мерой циркуляции по контуру, получаемому в поперечном сечении вихря, интенсивностью вихря, вихревым моментом, или напряжением вихря, называют двойное произведение:

$$\Gamma = 2\omega \cdot d\sigma. \quad (35)$$

Если ур-ния (35) продифференцировать первое по x , второе по y , а третье по z и в результате сложить, то получится обязательное для вихревого движения условие;

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = 0. \quad (37)$$

Все вышесказанное относится к вихрям с бесконечно-малыми размерами поперечных сечений, в естественных же условиях, когда вихри дают конечное значение сечения, их напряжением называют произведение $2\omega_m \sigma$, содержащее множителем ω_m — среднее значение угловой скорости для всего сечения вихря конечных размеров.

Внутренняя полость вихря, или ядро вихря, наделяется одинаковыми угловыми скоростями вращения, т. е. принимается, так сказать, вращающимся как сплошное не деформирующееся тело. Наружная поверхность вихря является поверхностью раздела не потенциальной и потенциальной областей потока, на к-рой сохраняются одинаковые значения скоростей (а, след., и давлений) на взаимно соприкасающихся поверхностях обеих частей потока, и является поверхностью разрыва лишь в отношении законов изменения этих количеств.

Теорема Стокса о циркуляции скорости по замкнутому контуру, охватывающему вихревые области. Как показано на черт. 15, исчисление циркуляции по контуру K проводится путем применения интегрального закона Стокса по замкнутым контурам, не содержащим внутри вихревых областей. Ясно, что для каждого из двух контуров, полученных путем соединения промежуточными линиями вихревых областей друг с другом, а также и с контуром K , циркуляция будет равна нулю в условиях конечности их числа. При суммировании циркуляции на соединительных линиях, входящие в сумму по два раза в различные обходы с разными знаками, м. б. взаимно сокращены и, след., циркуляция по наружному контуру K сведется к нулю:



Черт. 15.

$$\Gamma_K - \Gamma_{K_1} - \Gamma_{K_2} - \Gamma_{K_3} - \dots = 0.$$

Отсюда:

$$\Gamma_K = \Gamma_{K_1} + \Gamma_{K_2} + \Gamma_{K_3} + \dots \quad (38)$$

Т. о., циркуляция по всякому замкнутому контуру, к-рый может скатием обратиться в точку, не выходя из пределов контура (односвязная область), равна сумме напряжений всех вихревых шнуров, проходящих внутри контура.

Как следствие из теоремы Стокса м. б. сформулировано сл. положение: если циркуляция скорости по всякому замкнутому контуру, проводимому

в жидкости, равна нулю, то движение жидкости обладает потенциалом скоростей.

Теорема Томсона о влиянии времени на циркуляцию скорости по контуру, проводимому через одни и те же частицы жидкости.

Теорема Томсона дает выражение для производной по времени от циркуляции скорости по контуру, проводимому через одни и те же частицы жидкости, и утверждает, что эта производная будет равна нулю:

$$\frac{d}{dt}(\Gamma_K) = 0, \quad (39)$$

если силы, под действием которых происходит движение, обладают потенциалом.

Из теоремы Томсона, как непосредственное ее следствие, вытекает теорема Лагранжа: если в начальный момент движения совершенной жидкости, подверженной действию потенциальных сил, существовал потенциал скоростей (т. е. движение было безвихревым), то он будет существовать и во все последующие моменты движения.

Теоремы Гельмгольца о вихрях. Первая теорема: напряжение вихревой трубки по всей ее длине одинаково:

$$\Gamma = 2\omega ds = 2\omega_1 ds_1 = 2\omega_2 ds_2 = \dots = \text{Const.} \quad (40)$$

Как следствие из нее вытекает утверждение, что вихревая трубка не может заканчиваться внутри жидкости острием, а может или замыкаться сама на себя, образуя вихревые кольца, или опираться на твердые стенки или свободную поверхность.

Вторая теорема: если действующие на жидкость внешние силы обладают потенциалом, то жидкая масса, составляющая вихревую трубку в какой-либо момент времени, сохраняется в форме вихревой трубки и во все последующие моменты времени. Короче говоря: вихревая трубка всегда остается вихревой трубкой.

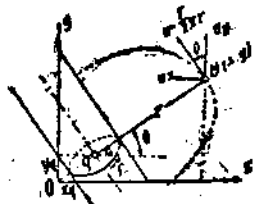
Третья теорема: при действии на жидкость лишь потенциальных сил напряжение вихревой трубки во все время движения сохраняется постоянным.

Вторая и третья теоремы Гельмгольца в совокупности составляют т. наз. принцип сохранения вихря, или устойчивости вихревой трубки.

Скорости вихревого влияния в плоском потоке.

Представим себе одиночный прямолинейный вихрь в потенциальном потоке, — так, как это изображено на черт. 16. В таких условиях вихрь, сохраняющий в себе лишь круговое вращение, представляется трубкой с круговыми сечениями по всей его линии. Выберем окружающий вихрь контур K , проходящий через некоторую точку M жидкости, в виде круга радиуса r , равного расстоянию точки M от центра вращения вихря. Касательная скорость и вращения точки M вокруг центра O должна быть признана одинаковой с такой же скоростью во всех прочих точках контура K ввиду полной симметрии влияния вихря в направлении всех радиусов. В таком случае циркуляция Γ по контуру K выражается произведением: $\Gamma_K = 2\pi r \cdot u$, и по теореме Стокса эта циркуляция равна напряжению вихря, выражающемуся при радиусе r его кругового сечения и скорости u_0 на поверхности вихря, произведением:

$$\Gamma = 2\pi r_0 \cdot u_0.$$



Черт. 16.

Из полученного равенства находим:

$$\omega r = \omega_0 r_0 = \dots = \text{Const.}$$

Исчисляя на тех же основаниях проекции скоростей вихревого вращения на оси координат, получим:

$$u_x = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y - y_0}{r^3}; \quad u_y = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{x - x_0}{r^3}. \quad (41)$$

Поле скоростей вокруг вихря, возбужденное им самим, имеет потенциал скоростей такого вида:

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \arctg \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta. \quad (42)$$

Распределение скоростей и давления вокруг одиночного вихря.

На черт. 17 изображено распределение скоростей внутри ядра вихря и в наружной потенциальной области. Внутри ядра вихря изменение скоростей следует прямолинейному закону, а в наружной потенциальной области убывает по закону гиперболы.

Распределение давления в наружной потенциальной области получится при интегрировании дифференциального уравнения кругового движения жидкости:

$$dp = \rho u^2 \frac{dr}{r}. \quad (43)$$

В пределах от любого q (большого r_0) до $r = \infty$ и замечая, что $u_\infty = 0$:

$$p = p_\infty - \rho \frac{u^2}{2}.$$

В частности для границы вихревой трубки получится:

$$p_0 = p_\infty - \rho \frac{u_0^2}{2}.$$



Черт. 17.

Распределение давления внутри вихревого ядра также получится интегрированием дифференциального уравнения кругового движения жидкости, считая это движение, как вращение твердого тела, в пределах от любого r (меньшего r_0) до $r = r_0$:

$$p = p_0 - \rho \frac{u_0^2}{2} + \rho \frac{u^2}{2},$$

или:

$$p = p_\infty - \rho \frac{u_0^2}{2} + \rho \frac{u^2}{2}.$$

В частности на границе вихревой трубки получим:

$$p_0 = p_\infty - \rho \frac{u_0^2}{2}.$$

Для центра вихря при r равном 0 (и след., u равном 0) будем иметь:

$$p = p_\infty - \rho \frac{u_0^2}{2}. \quad (44)$$

Эта ф-ла показывает, что в принятых предположениях падение давления по радиусу в пределах ядра самой трубки равно падению давления во внешней области от бесконечности до границы трубки (черт. 18).

Количество движения, сообщаемое в определенном направлении парю вихрей одинаковой интенсивности Γ , выражается ф-лой:

$$M = \Gamma \cdot \rho \cdot l,$$

где l — расстояние между центрами вихрей.

Скорости вихревого вращения в трехразмерном потоке исчисляются по ф-лам Гельмгольца:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{\omega_y (y - \bar{y}) - \omega_z (x - \bar{x})}{r^3} dv \\ u_y &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{\omega_x (z - \bar{z}) - \omega_z (x - \bar{x})}{r^3} dv \\ u_z &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{\omega_y (x - \bar{x}) - \omega_x (y - \bar{y})}{r^3} dv \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

где: x, y, z — координаты любой точки пространства вне вихря, $\bar{x}, \bar{y}$ и $\bar{z}$ — координаты точки пространства, занятого вихрями, r — расстояние между ними, dv — элемент вихревого объема.

В случае одиночного вихря в форме бесконечно-тонкой вихревой нити с напряжением $\Gamma = 2\omega ds$, поперечным сечением ds и длиной dl ф-лы преобразуются в следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{1}{r^3} [(y - \bar{y}) d\bar{x} - (z - \bar{z}) d\bar{y}] \\ u_y &= \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{1}{r^3} [(z - \bar{z}) d\bar{x} - (x - \bar{x}) d\bar{z}] \\ u_z &= \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{1}{r^3} [(x - \bar{x}) d\bar{y} - (y - \bar{y}) d\bar{x}] \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Здесь интегралы должны исчисляться по всей длине вводимого в исследование вихря.

Из ф-л 45 можно получить путем представления, что вращение с угловыми скоростями $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ каждого вихревого элемента происходит по законам вращения твердого тела, как если бы точка $P(x, y, z)$ была соединена с вихревым элементом твердой связью, сл. ф-лы:

$$u_x = \int \frac{\omega_y}{2\pi r^3} dv; \quad u_y = \int \frac{\omega_x}{2\pi r^3} dv; \quad u_z = \int \frac{\omega_z}{2\pi r^3} dv,$$

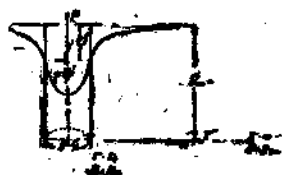
где:

$$W_x = \omega_z (y - \bar{y}) - \omega_y (z - \bar{z});$$

$$W_y = \omega_x (z - \bar{z}) - \omega_z (x - \bar{x});$$

$$W_z = \omega_y (x - \bar{x}) - \omega_x (y - \bar{y});$$

т. е. скорость u представляет собой геометрическую сумму векторов $\frac{W}{2\pi r^3} dv$, приложенных в точке P .



Черт. 18.

Т. о., можно сказать, что участие каждого элемента объема вихря в скорости и какой-либо точки P жидкой массы равно скорости W , которую приобрела бы эта точка от вращения $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ элемента dv , если бы она была в твердом с ним соединении, умноженной на $\frac{dv}{2\pi r^2}$, где r — расстояние точки P от элемента dv . Скорость W вращения, к-рое точка P получила бы от элемента dl длины оси вихря, если бы она находилась в жесткой с ним связи, направленная перпендикулярно к плоскости, проходящей через элемент dl и точку P , м. б. написана в форме $\omega \cdot r \cdot \sin \alpha$, если α есть угол, составляемый прямой, соединяющей между собой точку P и элемент dl вихря, с направлением этого элемента. След., учитывая, что $\omega = \frac{\Gamma \cdot dl}{2\pi dv}$, мы можем написать, что:

$$du = \frac{W}{2\pi r^2} dv = \frac{\omega \cdot r \cdot \sin \alpha}{2\pi r^2} dv = \frac{\Gamma \cdot dl \cdot \sin \alpha}{4\pi r^2}. \quad (47)$$

Итак, геометрическая сумма в точке P таких векторов, отвечающих всем последовательным элементам вихря dl , и определяет собою скорость точки P , вызываемую присутствием вихря. Эта ф-ла носит название ф-лы Бю-Савара.

В случае прямолинейного вихря ф-ла (47), согласно обозначениям черт. 19, м. б. представлена путем замены r и dl через выражения: $r = \frac{h}{\sin \alpha}$ и $dl = \frac{h}{\sin^2 \alpha} d\alpha$:

$$du = \frac{\Gamma}{4\pi h} \cdot \sin \alpha d\alpha. \quad (48)$$

Полная скорость вихревого влияния на точку P в пределах углов α_1 до α_2 получится интегрированием равенства (48):

$$\alpha = \frac{\Gamma}{4\pi h} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\Gamma}{4\pi h} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1). \quad (49)$$

Для бесконечного вихревого шнура имеем: $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = \pi$:

$$U = \frac{\Gamma}{2h}.$$

Черт. 19.

Сопротивление тел в потенциальном потоке.

В случае не установившегося движения сила воздействия потока на погруженный в нее шар выражается:

$$P = \frac{2}{3} \pi r_0^3 \rho \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

где: $P_x = -\frac{2}{3} \pi r_0^3 \rho X$; $P_y = -\frac{2}{3} \pi r_0^3 \rho Y$; $P_z = -\frac{2}{3} \pi r_0^3 \rho Z$, где через r_0 обозначен радиус шара, через X, Y и Z — ускорения массовых сил, а знак — (минус) для проекций силы на координатные оси указывает, что давление со стороны шара противоположно ускорениям массовых сил.

Если движение установившееся, то X, Y и Z обращаются в нуль и, след., P также равно нулю, т. е. давление на шар равно нулю. Т. о., установившееся невихревое движение идеальной жидкости не встречает никакого сопротивления со стороны погруженного в нее неподвижного шара и, обратно-

шар не встречает сопротивления своему равномерному прямолинейному движению в покоящейся жидкости со стороны этой жидкости в предположении неотрывного потенциального обтекания жидкостью этого шара.

В этом последнем случае Φ -ия потенциала скорости имеет вид:

$$\varphi = -v_{\infty} \cdot r \cdot \cos \theta \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{r} \right)^3 \right] = -v_{\infty} \cdot x \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{r} \right)^3 \right],$$

где: v_{∞} — скорость потока в бесконечной дали от шара и направлена в отрицательную сторону оси x .

Скорость у поверхности шара, направленная по касательной, исчисляется по Φ -ле:

$$v_{\theta} = -\frac{3}{2} v_{\infty} \cdot \sin \theta, \quad (49)$$

где v_{∞} есть скорость потока в бесконечности.

Точки на поверхности тел, имеющие нулевую скорость, называются критическими точками.

Бесконечно-длинный цилиндр также не встречает со стороны покоящейся жидкости никакого сопротивления перемещению его в поперечном направлении в предположении неотрывного потенциального обтекания цилиндра жидкостью. Потенциальное поступательное течение вокруг бесконечно-длинного круглого цилиндра радиуса r_0 характеризуется следующей Φ -ией потенциала скорости:

$$\varphi = -v_{\infty} \cdot r \cdot \cos \theta \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) = -v_{\infty} \cdot x \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right),$$

а скорость в любой точке потока определяется по Φ -лам;

1) нормальная (по радиусу):

$$v_r = -v_{\infty} \cdot \cos \theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right);$$

2) тангенциальная (по касательной):

$$v_{\theta} = v_{\infty} \cdot \sin \theta \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right).$$

Значение скоростей на поверхности цилиндра, направленных по касательной, определяется по Φ -ле:

$$v_{\theta} = 2 v_{\infty} \cdot \sin \theta. \quad (50)$$

Бесконечно-длинный цилиндр в циркуляционном потоке не испытывает никакого сопротивления со стороны этого потока. Φ -ия потенциала скорости для этого потока имеет вид:

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \arctg \frac{y}{x}.$$

В случае поступательного потока, соединенного с циркуляцией, бесконечно-длинный цилиндр испытывает со стороны такого потока на единицу своей длины силу воздействия, направленную перпендикулярно к поступательному потоку и по величине определяемой Φ -лой подъемной силы, данной Жуковским:

$$P = \Gamma \cdot \rho v_{\infty} \quad (51)$$

где Γ есть циркуляция. Направление действия этой силы можно определить

т. о.: вектор скорости v_∞ надо повернуть на прямой угол в сторону, обратную циркуляции. Поступательно-циркуляционный поток характеризуется сл. выражением потенциальной ф-ии скоростей:

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta - v_\infty \cdot r_0 \cdot \cos \theta \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right);$$

$$v_r = -v_\infty \cdot \cos \theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right);$$

$$v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \theta + v_\infty \cdot \sin \theta \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right).$$

Положение критических точек на цилиндре определяется из ф-лы:

$$\frac{\Gamma}{2\pi r_0} + 2v_\infty \cdot \sin \theta_{кр.} = 0;$$

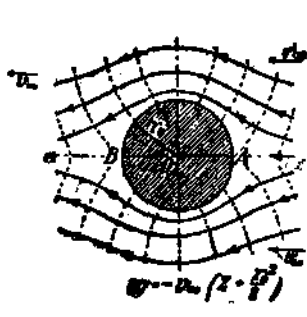
$$\sin \theta_{кр.} = -\frac{\Gamma}{4\pi r_0 v_\infty}. \quad (52)$$

Пользуясь ур-нями (12), можно определить ф-ию тока для разобранных течений.

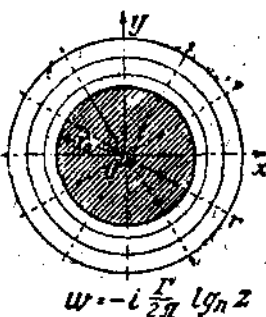
1) Ф-ия линий токов для поступательного потока;

$$\psi = -v_\infty y \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \quad (53)$$

изображена на черт. 20.



Черт. 20.



Черт. 21.



Черт. 22.

2) Та же ф-ия для циркуляционного потока:

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \lg n r \quad (54)$$

изображена на черт. 21.

3) Ф-ия линий токов для поступательного потока, соединенного с циркуляцией:

$$\psi = -v_\infty y \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \lg n r \quad (55)$$

изображена на черт. 22.

Имея для какого-либо вида потока форму потенциальной ϕ -ии φ и ψ -ии ψ , можно составить выражение объединяющего обе ϕ -ии комплекса w , условно именуемого комплексным потенциалом:

$$w = F(x + iy) = F(z) = \varphi + i\psi,$$

обладающего свойством, что:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Комплексный потенциал w имеет вид для обтекания цилиндра:

1) поступательным потоком: $w = -v_{\infty} \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right);$

2) циркуляционным потоком: $w = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \lg z;$

3) поступательно-циркуляционным потоком:

$$w = -v_{\infty} \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \lg z.$$

Если скорость поступательного потока вдали от тела (в бесконечности) направлена наклонно к обеим осям, давая в бесконечности слагающие по осям $v_{\infty x}$ и $v_{\infty y}$, то для такого случая:

$$w = v_{\infty x} \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right) - i v_{\infty y} \left(z - \frac{r_0^2}{z} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \lg z.$$

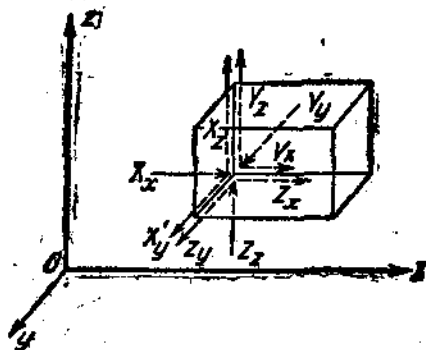
Гидродинамика вязкой жидкости.

Дифференциальные ур-ия движения вязкой жидкости (ур-ия Навье-Стокса). На выделенный на черт. 23 элементарный параллелепипед действуют силы: массовые, с проекциями ускорений на оси q_x, q_y, q_z , и давления на грани, с проекциями $X_x, X_y, X_z; Y_x, Y_y, Y_z; Z_x, Z_y, Z_z$. Вводя силы инерции и составляя ур-ия проекций на оси всех сил, приведенных к единице объема, получим:

$$\rho \frac{dv_x}{dt} = \rho q_x - \frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_x}{\partial y} - \frac{\partial Z_x}{\partial z};$$

$$\rho \frac{dv_y}{dt} = \rho q_y - \frac{\partial X_y}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{\partial Z_y}{\partial z};$$

$$\rho \frac{dv_z}{dt} = \rho q_z - \frac{\partial X_z}{\partial x} - \frac{\partial Y_z}{\partial y} - \frac{\partial Z_z}{\partial z}.$$



Черт. 23.

При сопоставлении этих ур-ий с ур-иями моментов всех действующих сил относительно трех осей можно произвести значительные упрощения. В самом деле, ур-ия моментов дают:

$$Y_z = Z_y = r_{\xi}; \quad Z_x = X_z = r_{\eta}; \quad X_y = Y_x = r_{\zeta}.$$

Вместе с тем разложим нормальные составляющие силы гидромеханиче-

ских давлений каждую на две составляющие: одна p , отвечающая давлению в идеальной жидкости, и вторая s , возникающая вследствие вязкости, т. е.:

$$X_x = p_x + s_x = f_x;$$

$$Y_y = p_y + s_y = f_y;$$

$$Z_z = p_z + s_z = f_z.$$

получим эти ур-ня в сл. виде:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{dv_x}{dt} &= \rho q_x - \frac{\partial p_x}{\partial x} - \frac{\partial s_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\ \rho \frac{dv_y}{dt} &= \rho q_y - \frac{\partial p_y}{\partial y} - \frac{\partial s_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \\ \rho \frac{dv_z}{dt} &= \rho q_z - \frac{\partial p_z}{\partial z} - \frac{\partial s_z}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Используя гипотезу Ньютона-Максвелла о том, что гидромеханические давления и силы гидравлических сопротивлений непосредственно друг от друга не зависят, можем принять, что:

$$p_n = p_x = p_y = p_z = p; \quad (57)$$

$$s_n = s_x \cdot \cos^2(n, x) + s_y \cdot \cos^2(n, y) + s_z \cdot \cos^2(n, z) + 2\tau_{xy} \cdot \cos(n, y) \cdot \cos(n, x) + 2\tau_{yz} \cdot \cos(n, z) \cdot \cos(n, y) + 2\tau_{xz} \cdot \cos(n, x) \cdot \cos(n, z). \quad (58)$$

Параллельно с этим условие скоростей м. б. записано так:

$$\begin{aligned} \theta_n &= \theta_x \cdot \cos^2(n, x) + \theta_y \cdot \cos^2(n, y) + \theta_z \cdot \cos^2(n, z) + \\ &+ 2\alpha_{xy} \cdot \cos(n, y) \cdot \cos(n, x) + 2\alpha_{yz} \cdot \cos(n, z) \cdot \cos(n, y) + \\ &+ 2\alpha_{xz} \cdot \cos(n, x) \cdot \cos(n, z), \end{aligned} \quad (59)$$

где $\theta_n = \frac{\partial v_n}{\partial n}$; $\theta_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}$; $\theta_y = \frac{\partial v_y}{\partial y}$; $\theta_z = \frac{\partial v_z}{\partial z}$, а α_{xy} , α_{yz} , α_{xz} имеют значения, данные в фл-ах (3).

Используя далее закон Ньютона о внутреннем трении в жидкостях о том, что единичная сила трения $\tau = \pm \mu \frac{\partial v}{\partial n}$, и учитывая, что скорости $2\alpha_{xy}$, $2\alpha_{yz}$, $2\alpha_{xz}$ — сдвигивания двугранных углов элементарного объема — и являются скоростями относительного скольжения жидкости вдоль соответствующих граней элемента, напишем, что:

$$\tau_{xy} = -\mu 2\alpha_{xy}, \quad \tau_{yz} = -\mu 2\alpha_{yz}, \quad \tau_{xz} = -\mu 2\alpha_{xz}. \quad (60)$$

Умножив все члены ур-ня (59) на 2μ , сложив его почленно с ур-нем (58) и введя предварительно обозначения косинусов через a , b , c , получим:

$$(s_x + 2\mu\theta_n) = (s_x + 2\mu\theta_x)a^2 + (s_y + 2\mu\theta_y)b^2 + (s_z + 2\mu\theta_z)c^2.$$

Это равенство должно соблюдаться при всяком наклоне нормали n к осям. В силу условия, что $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, можем получить, что:

$$(s_x + 2\mu\theta_x) = (s_x + 2\mu\theta_x)a^2 + (s_x + 2\mu\theta_x)b^2 + (s_x + 2\mu\theta_x)c^2.$$

Почленным вычитанием обоих равенств приходим к выражениям:

$$\begin{aligned} (s_x + 2\mu\theta_n) - (s_x + 2\mu\theta_x) &= \\ = [(s_y + 2\mu\theta_y) - (s_x + 2\mu\theta_x)]b^2 + [(s_z + 2\mu\theta_z) - (s_x + 2\mu\theta_x)]c^2. \end{aligned}$$

Условие произвольности выбора двух из трех косинусов, в данном случае b и c , сводит левую часть равенства к нулю, т. е. указывает, что:

$$s_n + 2\mu\theta_n = s_x + 2\mu\theta_x = s_y + 2\mu\theta_y = s_z + 2\mu\theta_z = k.$$

След., величина $s_n + 2\mu\theta_n$ инвариантна, т. е. одинакова для всякого направления оси проекций.

Наконец, используя предложение Стокса считать нормальные силы гидравлических сопротивлений при изотропной деформации равными нулю, т. е.:

$s_x = s_y = s_z = s_n = 0$, находим при условии $\theta_x = \theta_y = \theta_z = \frac{1}{3}\theta$, что $k = \frac{2}{3}\mu\theta$ и след.:

$$\left. \begin{aligned} s_x &= -2\mu\theta_x + \frac{2}{3}\mu\theta; \\ s_y &= -2\mu\theta_y + \frac{2}{3}\mu\theta; \\ s_z &= -2\mu\theta_z + \frac{2}{3}\mu\theta. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Внося полученные выражения из равенств (57), (60) и (61) в ур-ня (56) получим:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{dv_x}{dt} &= \rho q_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta_2 v_x + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \rho \frac{dv_y}{dt} &= \rho q_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta_2 v_y + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \rho \frac{dv_z}{dt} &= \rho q_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta_2 v_z + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial \theta}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

где $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ и $\theta = \theta_x + \theta_y + \theta_z = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$.

Для ур-ня (62) на ρ и обозначая $\frac{\mu}{\rho} = \nu$ — кинематический коэф-т трения, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= q_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta_2 v_x + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{dv_y}{dt} &= q_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta_2 v_y + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \frac{dv_z}{dt} &= q_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta_2 v_z + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial \theta}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

В случае жидкости несжимаемой, $\rho = \text{const}$ и $\theta = 0$ ур-ня (63) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= q_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta_2 v_x \\ \frac{dv_y}{dt} &= q_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta_2 v_y \\ \frac{dv_z}{dt} &= q_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta_2 v_z \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Проводя интегрирование последних ур-ий при предположении установившегося движения и существования потенциала Φ для массовых сил сп-

сбom, указанным при получении равенства (32), придем к дифференциальному выражению:

$$d\left[U - P - \frac{v^2}{2}\right] = v[\Delta_1 v_x dx + \Delta_2 v_y dy + \Delta_3 v_z dz].$$

Правая часть ур-ня представляет собою обращающуюся в теплоту часть механической энергии на рассматриваемой части траектории; обозначим ее через dR ; тогда получим:

$$d\left[U - P - \frac{v^2}{2} - R\right] = 0.$$

Отсюда:

$$U - P - \frac{v^2}{2} - R = \text{Const}$$

вдоль всей линии тока. Это—обобщенный на вязкую жидкость интеграл Д. Бернулли.

ГИДРАВЛИКА.

Гидравлика изучает законы равновесия и движения жидкостей. Жидкости разделяются на идеальные (иначе—совершенные) и на реальные (несовершенные). Идеальными жидкостями называются такие абсолютно подвижные жидкости, к-рые не изменяют своего объема от действия сжимающих сил. Реальные жидкости этим свойством не обладают. Все существующие жидкости—реальные.

Физические свойства реальных жидкостей.

Коэф-т объемного сжатия для воды при обыкновенной темп-ре по Amagat:

$$\beta_p = 0,0000475 \left(\text{ок. } \frac{1}{20\,000} \right).$$

Плотность жидкости ρ есть масса единицы объема. Обозначая γ вес единицы объема, получим: $\gamma = \rho \cdot g$, где g —ускорение силы тяжести.

В обычных случаях гидравлики силы сцепления между частицами жидкости (поверхностное натяжение) не имеют практического значения и можно считать, что как в идеальной, так и в реальной жидкости не м. б. растягивающих усилий.

Иное отношение жидкостей к сопротивлению касательным усилиям (вязкость). При движении идеальных жидкостей сил трения нет, в реальных по поверхности соприкосновения ее слоев развивается сила трения. Если жидкость находится в покое, то сил трения нет. Следовательно, при равновесии (покое) жидкостей свойства идеальных и реальных жидкостей можно считать одинаковыми, при движении же они различны, как отмечено выше.

Гидростатика.

В гидростатике изучаются законы равновесия жидкостей и их практическое применение.

Гидростатическим давлением в данной точке (иначе—единичное давление) называется:

$$p = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left(\frac{P}{\omega} \right), \quad (1)$$

где ω —площадь, на к-рую действует сила P .

Средним гидростатическим давлением называется:

$$p_{\text{ср.}} = \frac{P}{\omega}. \quad (2)$$

§ 1. Свойства гидростатического давления.

а) Гидростатическое давление p перпендикулярно к площадке ω и направлено по внутренней нормали.

б) Гидростатическое давление в данной точке одинаково по всем направлениям и не зависит от положения площадки ω в пространстве:

$$p_n = p_x = p_y = p_z, \quad (3)$$

где p_x , p_y и p_z — давления по трем координатным осям, а $p_n = p$.

Дифференциальные ур-ия равновесия жидкости (Л. Эйлер, 1755 г.):

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= X \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= Y \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= Z \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

В этих ур-иях ρ — плотность; X , Y и Z — проекции объемных сил ед. массы на оси координат.

Из ур-ий (4) вытекает:

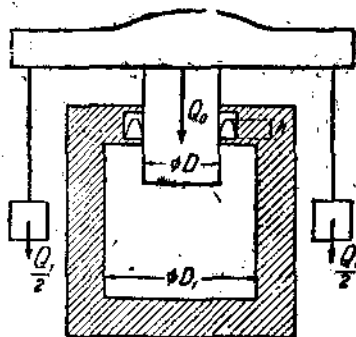
$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz). \quad (5)$$

Из ур-ия (5) видно, что равновесие жидкости возможно тогда, когда правая часть ур-ия будет полный дифференциал. При $\rho = \text{const}$ [или $\rho = f(p)$] равновесие возможно при

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

где U — силовая ф-ия.

След., из ур-ия (5): $\frac{dp}{\rho} = dU$ при $dp = 0$ и $dU = 0$, поэтому поверхности равного давления будут поверхности уровн.



Черт. 1.

бодной поверхностью; 3) давление по вертикали изменяется по закону прямой; 4) давление p_0 на поверхность передается во все слои без изменения (закон Паскаля).

Пример. Определить величину ед. давления p в гидравлическом аккумуляторе. Даны: Q — плунжера — D , высота шланга — h , коэф-т трения кожи о металл — f (черт. 1).

Для равновесия тяжелой несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$), находящейся только под действием силы тяжести, из ур-ия (5) получим, выбирая начало координат на свободной поверхности ($p = p_0$) и направляя ось Z вертикально вниз:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = g, \quad dp = \rho g dz,$$

или:

$$p = p_0 + \rho dz = p_0 + \gamma z, \quad (6)$$

где p_0 — давление на поверхности при $z = 0$.

Следствия из ур-ия (6): 1) поверхности равного давления — горизонтальные плоскости; 2) давление в каком-нибудь горизонтальном слое зависит от глубины погружения этого слоя под сво-

Полное давление: $P = Q_0 + Q_1 - F$, где F — сила трения $= f\pi D h p$, след.:

$$\frac{\pi D^2}{4} p + f\pi D h p = Q_0 + Q_1,$$

откуда:

$$p = \frac{Q_0 + Q_1}{\frac{\pi D^2}{4} + f\pi D h}$$

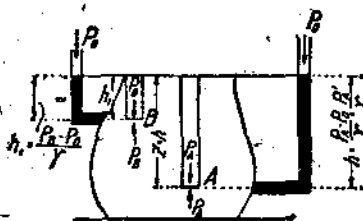
§ 2. Гидростатическое давление в данной точке для жидкости, находящейся в равновесии.

Гидростатическое давление в точке A (черт. 2) определяется из ур-ня (6):

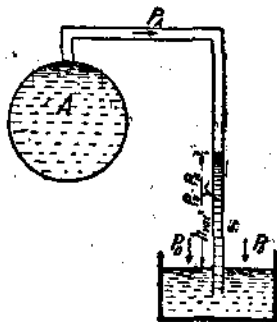
$$p_A = p_0 + \gamma h,$$

где $h = z$ — глубина погружения. $p_A - p_0 = p'_A$ — представляет избыточное давление, след.:

$$h = \frac{p'_A}{\gamma} \quad (7)$$



Черт. 2.



Черт. 3.

(в м вод. ст.) покажет поднимающаяся жидкость во вставленной трубке (пьезометр) и открытой сверху. Поставленный вместо трубки манометр покажет давление, соответствующее высоте h , называемой «пьезометрической высотой».

Если давление внутри сосуда меньше атмосферного p_0 , то жидкость во вставленной трубке (черт. 3), поднявшись на высоту $h_{\text{вас}}$, покажет в м вод. ст. разность между атмосферным давлением p_0 и давлением внутри сосуда p_A :

$$h_{\text{вас}} = \frac{p_0 - p_A}{\gamma} \quad (8)$$

То же показание, соответствующее величине $h_{\text{вас}}$, покажет и вакуумметр.

Пример. $h_{\text{вас}} = 6$ м вод. столба, $p_A = p_0 - \gamma h_{\text{вас}} = 1 - 0,001 \cdot 600 = -0,4$ атм.

$\gamma = 0,001$ кг/см³; $h_{\text{вас}} = 600$ см.

Табл. 1. Определение p' в различных мерах (по табл. проф. Н. Н. Павловского «Гидравлика», 1928 г., стр. 21).

Единица длины	Единица веса	γ	$p' = \gamma h$	Размерность гидрост. давл.
см	кг	0,001	$p' = 0,001h$	кг/см ²
м	кг	1 000	$p' = 1 000h$	кг/м ²
м	т	1	$p' = h$	т/м ²
фг. (ф)	англ. фн.	62,4	$p' = 62,4h$	lbs/ft ²

Давление 1 кг/см^2 соответствует высоте 10 м вод. столба, — новая техническая атмосфера. Старая атмосфера соответствует 10,33 м вод. столба. Гидростатическое давление можно измерять: 1) в атмосферах; 2) в ед. вод. ст. жидкости; 3) в ед. силы на ед. площади.

§ 3. Гидростатический напор.

Если в сосуд вставить трубку, запаянную сверху, и выкачать воздух (давление в трубке $p = 0$), то жидкость из сосуда поднимется на высоту (черт. 4), называемую «приведенной высотой»:

$$h_{\text{прив.}} = \frac{p_A}{\gamma}. \quad (9)$$

Выбрав произвольную плоскость сравнения xx , определяем расстояние от xx до уровня жидкости в трубке, как «гидростатический напор»:

$$H_{\text{ед.}} = h_{\text{прив.}} + Z = \frac{p_A}{\gamma} + Z = \text{Const.} \quad (10)$$

«Пьезометрический напор»:

$$H_{\text{пье.}} = h + Z = \frac{p'}{\gamma} + Z = \text{Const.} \quad (11)$$

след.:

$$H_{\text{пье.}} = H_{\text{ед.}} - \frac{p_0}{\gamma}. \quad (12)$$

Величины $H_{\text{ед.}}$ и $H_{\text{пье.}}$ служат мерой потенциальной энергии для единицы веса жидкости относительно плоскости xx .

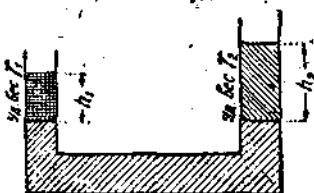
Положение плоскости xx произвольно, поэтому величины $H_{\text{ед.}}$ различны и м. б. равны 0, чего нельзя сказать о $H_{\text{пье.}}$, показывающей «избыточное» давление в данной точке жидкости.

§ 4. Равновесие тяжелой жидкости в сообщающихся сосудах.

Для равновесия тяжелой жидкости в сообщающихся сосудах необходимо, чтобы:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}, \quad (13)$$

т. е. высоты столбов h_1 и h_2 обратно пропорциональны их плотностям или уд. весам (черт. 5).



Черт. 5.

§ 5. Равновесие жидкости во вращающихся сосудах.

Пусть жидкость наполняет открытый сверху сосуд, вращающийся равномерно вокруг вертикальной оси (черт. 6). Относительно сосуда жидкость находится в покое (т. к. имеет одинаковую с сосудом скорость). Можно применить ур-ие (5): для единицы массы

$$X = \omega^2 x; \quad Y = \omega^2 y,$$

ω — угловая скорость; $Z = g$; следовательно:

$$p = \frac{\rho \omega^2}{2} (x^2 + y^2) + \rho g z + C,$$

при $x=y=z=0$, $p=p_0$;

$$p = p_0 + \gamma z + \frac{\rho \omega^2}{2} (x^2 + y^2); \quad x^2 + y^2 = r^2,$$

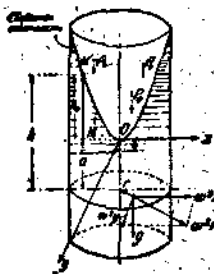
след.:

$$\gamma z + \frac{\rho \omega^2 r^2}{2} = p - p_0. \quad (14)$$

При $p=p_1$ ур-е (14) показывает, что «поверхность равного давления образует параболоид вращения», при $p=p_0$ из ур-я (14) получаемая свободная поверхность — параболоид вращения. Абс. величина

$h_0 = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$. Гидростатическое давление $p = p_0 + \gamma h$ аналогично равновесию тяжелой материальной жидкости. При вращении жидкости вокруг горизонтальной оси поверхности уровня будут цилиндры с общей осью, расположенной выше оси вращения на:

$$d = \frac{g}{\omega^2} = \text{Const.} \quad (15)$$



Черт. 6.

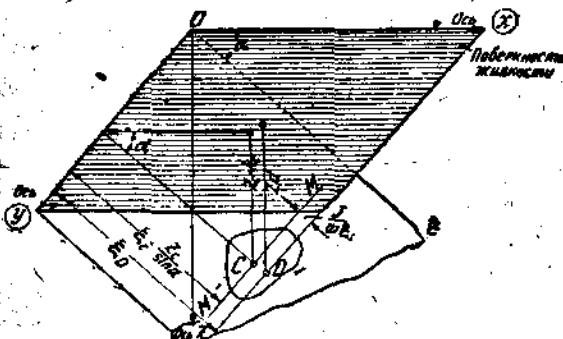
§ 6. Поверхность уровня в движущейся поступательно жидкости.

Поверхность уровня в каждой точке жидкости нормальна к равнодействующей из внешних сил и сил инерции. В частном случае, когда движение равномерное и поступательное, поверхности уровня такие же, как и в покоящейся жидкости.

§ 7. Давление на плоскую стенку.

Давление на плоскую фигуру площадью ω (черт. 7, заштрихованная площадь) определяется из ур-я (см. ур-е 6):

$$\Sigma(p_0 + \gamma z) d\omega.$$



Черт. 7.

Давление:

$$R = \omega (p_0 + \gamma h_c). \quad (16)$$

Избыточное давление:

$$P = \gamma \omega h_c, \quad (17)$$

т. е. избыточное давление (P) на плоскую фигуру равно площади фигуры (ω), умноженной на глубину центра тяжести площади фигуры (h_c) и на вес единицы объема (γ). Направление F перпендикулярно к ω

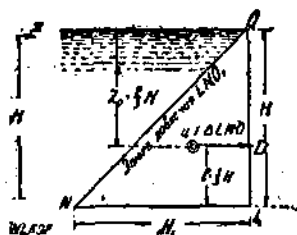
Точка приложения силы давления D определяется из ф-лы:

$$\xi_D = \xi_C + \frac{I}{\xi_C \omega}, \quad (18)$$

Табл. 2. Давления на стенку.

$P_{изб.}$ сила давлен.	Коор- дин. ц. т. Z_c	Координ. ц. давл. Z_D и ξ_D
$\frac{1}{2} \gamma H^2 B.$	$Z_c = \frac{H}{2}$	$Z_D = \frac{2}{3} H;$ $\xi = \frac{1}{3} H.$
$\frac{1}{2} \gamma (H_1^2 - H_2^2) B.$	—	$\xi = \frac{H_1^3 + H_1 H_2 + H_2^3}{3(H_1 + H_2)}$ $Z_D = H_1 - \xi.$

Эпюра давлений



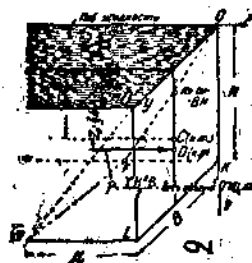
Черт. А.



Черт. В.

Тип стенки: Вертикальный прямоугольник при одностороннем давлении.

Эскиз



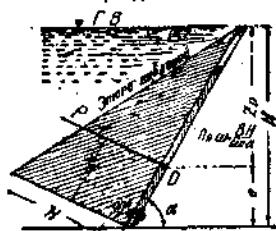
Черт. В.

Тип стенки: Вертикальный прямоугольник, давление с двух сторон.

Табл. 2. Давление на стенку (продолжение).

$P_{изд.}$ сила давлен.	Коор- дин. ц. т. Z_c	Координ. ц. давл. Z_p и ξ_D
$\frac{1}{2} \gamma \frac{H^3}{\sin \alpha} B.$	$\frac{H}{2}$	$e' = \frac{H}{3 \sin \alpha};$ $\xi_D = \frac{2H}{3 \sin \alpha}$ $Z_D = \frac{2H}{3}.$
$\frac{1}{2} \gamma \frac{H_1^3 - H_2^3}{\sin \alpha} B.$	—	$e' = \frac{H_1^3 + H_1 H_2 + H_2^3}{3 \sin \alpha (H_1 + H_2)}.$ $\xi_D = \frac{H_1}{\sin \alpha} - e'.$
$\frac{1}{2} \gamma \frac{(H_1^3 - H_2^3 - H_3^3)}{\sin \alpha} B$	—	$e' = \frac{H_1^3 - H_2^3 - 3H_1 H_2^2 + 2H_2^3}{3(H_1^3 - H_2^3 - H_3^3) \cdot \sin \alpha}$ $\xi_D = \frac{H_1}{\sin \alpha} - e'.$

Эпюра давлений



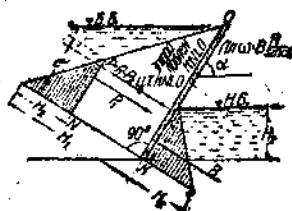
Черт. Г.

Тип стенки: Наклонный прямоугольник при одностороннем давлении



Черт. Д.

Тип стенки: Наклонный прямоугольник при давлении с двух сторон



Черт. Е.

Тип стенки: Наклон. прямоуг., верх. основан. которого лежит ниже горизон. воды

где I — момент инерции относительно оси MM , проходящей через ц. т. фигуры S и параллельной оси OY .

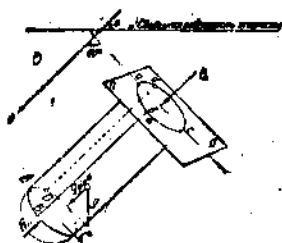
Из ур-ия (18) следует: $\xi_D > \xi_C$, т. е. центр давления лежит ниже ц. т. Ф-ла (17) показывает, что избыточное давление P равносильно весу объема столба жидкости с основанием ω и высотой h_c .

Во многих случаях практики приходится определять давления на стенку. Наиболее часто встречающиеся случаи сведены в таблицу (табл. 2, стр. 328).

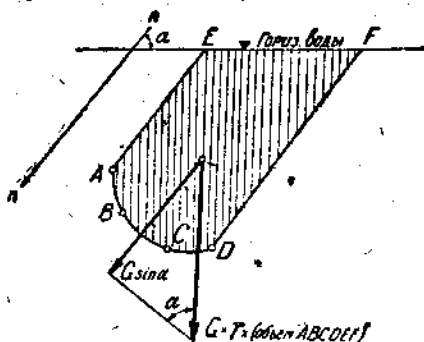
§ 8. Давление на криволинейную поверхность.

Для определения давления на криволинейную поверхность $ABCD$ по заданному направлению nn проводим плоскость $ПП \perp nn$ и через контур $ABCD$ (черт. 8) проведем цилиндрическую поверхность $\parallel nn$. Плоскость $ПП$ пересечется с цилиндрической поверхностью по контуру $abcd$, след.: $R_n = P_n + G \cdot \sin \alpha$, где P_n — давление на плоскую фигуру $abcd$ по заданному направлению nn .

$G \cdot \sin \alpha$ — проекция веса объема жидкости $ABC Dabcd$ на данное на-



Черт. 8.



Плоскость $ПП$ также есть плоскость симметрии

Черт. 9.

правление, а R_n — давление на криволинейную поверхность $ABCD$. Если $ПП$ провести ниже поверхности $ABCD$, то $G \cdot \sin \alpha$ будет вычитаться, след.:

$$R_n = P_n - G \cdot \sin \alpha. \quad (19)$$

Давление R_n м. б. выражено и как проекция веса объема жидкости $ABCDEF$ (ограниченного с одной стороны свободной поверхностью жидкости, с другой — криволинейной стенкой $ABCD$, с боков — цилиндрической поверхностью параллельной nn) на направление давления (черт. 9):

Следствия из ф-лы (19): 1) горизонтальная составляющая силы давления на криволинейную поверхность равна силе давления на проекцию криволинейной стенки на вертикальную плоскость; 2) вертикальная составляющая силы давления криволинейной стенки равна весу объема жидкости, ограниченного свободной поверхностью жидкости, криволинейной стенкой и с боков — вертикальной цилиндрической поверхностью, огибающей криволинейную стенку.

§ 9. Полное давление на криволинейную стенку.

Полная сила давления на криволинейную стенку определяется как равнодействующая от давлений по трем взаимно перпендикулярным направлениям. Точка приложения этой равнодействующей находится как

точка пересечения трех составляющих взаимно перпендикулярных сил.

Примечание. Если три составляющие давления не пересекаются в одной точке, то силы приводятся к паре и к силе.

Точки приложения составляющих сил находятся в ц. т. весов объемов, а в случае плоской стенки — в их центрах давления. Иногда бывает необходимым для нахождения равнодействующей давления найти две составляющие; в этом случае плоскость чертежа должна быть плоскостью симметрии.

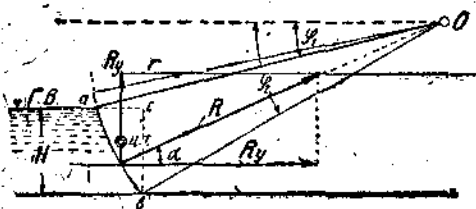
Замечание. При вычислении составляющих сил необходимо вес объема жидкости считать отрицательным, если он строится с несмачиваемой стороны стенки.

Пример 1. Определить давление воды на шит сегментного затвора (черт. 10). Пролет на свету L , водоудерживающая стенка очерчена по дуге круга радиуса r . Расчетный напор H .

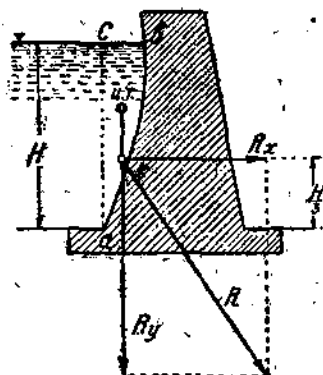
Определяем горизонтальное давление воды на шит:

$$R_x = \frac{\gamma H^2 L}{2}.$$

Сила R_x отстоит от ГВ на $\frac{2}{3} H$.



Черт. 10.



Черт. 11.

Вертикальное давление:

$$R_y = -\frac{\gamma r^2 L}{2} \left[(\varphi_2 - \varphi_1) \pm 2 \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \frac{1}{2} (\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2) \right].$$

Сила R_y проходит через ц. т. объема abc . Полное давление воды:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}.$$

Точку приложения силы R ищуте находить, т. к. все элементарные силы давления нормальны к поверхности шита, след., и R проходит через ось шита, составляя с горизонтом $\angle \alpha$, определяющийся из условия:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R_y}{R_x}.$$

Пример 2. Найти давление воды на плотину (черт. 11). Стенка ab — часть цилиндрической поверхности. Напор H . Длина плотины L .

$$R_x = \frac{1}{2} \gamma H^2 L$$

Точка приложения силы R_x отстоит на $\frac{1}{3} H$ от дна.

$$R_y = \frac{1}{2} \gamma V,$$

где V —объем части цилиндра с основанием abc и высотой L .

Точка приложения R_y в ц. т. объема V :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

и проходит через точку пересечения R_x и R_y .

§ 10. Закон Архимеда.

Погруженное в покоящуюся жидкость тело испытывает только суммарное вертикальное давление V со стороны жидкости. Это давление $V = -\gamma v$, где v —объем погруженного тела; по величине оно равно весу жидкости, вытесненной телом.

Величина силы V не зависит от глубины погружения тела.

Закон Архимеда распространяется и на тела, плавающие на поверхности жидкости; тогда сила $V' = -\gamma v'$, где v' —объем погруженной части тела.

§ 11. Равновесие плавающих тел.

Обозначим ц. т. плавающего тела C , точку приложения силы V , как ц. т. объема погруженной части тела, через D (черт. 12); точка D называется центром давления или водоизмещения.

При $V < G$ (вес тела) тело погружается в воду; при $V > G$ тело всплывает; при $V = G$ тело плавает в погруженном состоянии.

Кроме $V = G$ условием необходимым и достаточным для равновесия служит $\varphi = 90^\circ$; ось плавания AA_1 вертикальна.

Если C лежит ниже D , равновесие устойчивое; выше D —неустойчивое; совпадает с D —безразличное равновесие.

Для тела, плавающего на поверхности, необходимые условия равновесия:

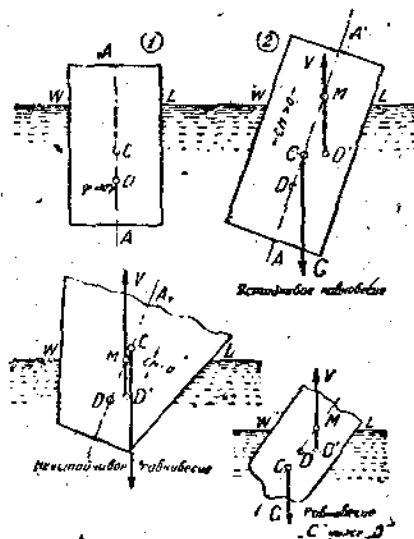
$$V = G; \varphi = 90^\circ.$$

Условия устойчивости плавания на поверхности (черт. 12). Метacentром называется точка M пересечения направления силы V при нек-ром крене тела с осью плавания AA_1 . D —центр давления при крене.

Отрезок CM называется метacentрической высотой. При $CM > 0$ —равновесие устойчивое; при $CM < 0$ —неустойчивое; при $CM = 0$ —безразличное.

CM положительно, если M выше C .

На черт. 13 представлено тело, имеющее плоскость симметрии $A'A$, на-



Черт. 12.

крененную на $\angle \alpha$. Плоскость WL , называемая плоскостью плавания, представляет сечение плавающего тела свободной поверхностью жидкости. Но все положение плоскостей плавания W_1L_1 ; $CD=d$; $MC=m$. Ось Y совпадает с пересечением плоскостей плавания WL и W_1L_1 , а ось $X \perp Y$ лежит в плоскости WL ; тогда существуют след. ур-ия:

$$m = \frac{I_y}{V} - d, \quad (20)$$

где V —объем WLA , I_y —момент инерции сечения судна плоскостью плавания относительно Y , а момент пары сил, возвращающий тело в первоначальное положение:

$$M_n = G \left(\frac{I_y}{V} - d \right) \cdot \sin \alpha. \quad (21)$$

Из ур-ия (20) и вытекают условия устойчивости тела: если $d < 0$, т. е. ц. т. (С) тела ниже ц. давления, $CM = m > 0$ и плавание тела получается устойчивым при всякой форме его.

Расстояние MD называется метacentрическим радиусом.

Если бы требовалось поверить устойчивость при килевом наклонении судна, то момент пары определялся бы из ур-ия:

$$M'_n = G \left(\frac{I_x}{V} - d \right) \cdot \sin \alpha. \quad (22)$$

Здесь I_x — момент инерции относительно оси x .

Лит.: Проф. Самусь, Техническая гидравлика, 1926; Проф. Максименко, Гидравлика, 1921; Проф. Н. Н. Павловский, Гидравлика, 1928; его же, Гидравлический справочник, 1924; P. Forchheimer, Hydraulik, 1930; Vuda u, Kurzgetastes Lehrbuch der Hydraulik, 1913.

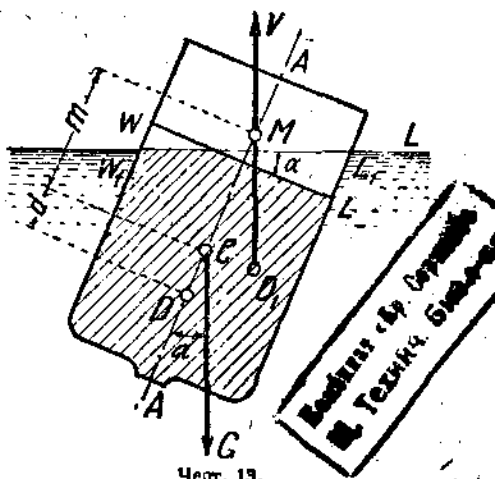
Гидродинамика.

Гидродинамика изучает явления движения жидкости под действием сил. Опыты показывают, что в движущейся жидкости могут существовать касательные усилия. Касательные усилия зависят: 1) от вязкости, действующей между смежными элементами жидкости; 2) от смазывания, действующего между элементами жидкости и элементами твердого тела и направленного по касательным раздельным поверхностям. В идеальной жидкости касательных усилий нет и все напряжения сводятся к нормальным давлениям.

Скорость движения жидкости выражают через компоненты u, v, w (проекции скорости по осям X, Y, Z) как: $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$.

§ 1. Уравнения Л. Эйлера движения жидкости.

Основная задача гидродинамики сводится к нахождению гидродинамического давления p и компонентов скорости, как функции координат и времени, т. е. найти:



$$\left. \begin{aligned} p &= F(t, x, y, z) \\ u &= F_1(t, x, y, z) \\ v &= F_2(t, x, y, z) \\ w &= F_3(t, x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

В частном случае, когда давление и компоненты скорости не зависят от времени, а только от координат, движение называется установившимся.

Из механики известно, что $\frac{dx}{dt} = u$; $\frac{dy}{dt} = v$; $\frac{dz}{dt} = w$. По интегрировании ур-ий получим:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t, a, b, c) \\ y &= f_2(t, a, b, c) \\ z &= f_3(t, a, b, c) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

где a, b, c — произвольные постоянные ур-ия (24) — дают траекторию движения при известных u, v, w .

§ 2. Уравнения линий тока.

$$\frac{dx}{F_1(t, x, y, z)} = \frac{dy}{F_2(t, x, y, z)} = \frac{dz}{F_3(t, x, y, z)}.$$

Если провести для какого-нибудь момента времени t в жидкости линию, то направлением скорости во всех точках линии определяется направление перемещений точек жидкости в данный момент. Кривые, объемлющие одно-временные векторы скорости для каждого момента, называются линиями тока. Для установившегося движения линии тока служат одновременно траекториями частиц жидкости.

Дифференциальные ур-ия гидродинамики для идеальной жидкости (даны Л. Эйлером в 1755 г.) имеют сл. вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

X, Y, Z — проекции объемных сил, отнесенных к единице массы жидкости, ρ — плотность, для несжимаемой жидкости — постоянная величина. Для несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$. Условием неразрывности потока, т. е. невозможности для жидкости претерпевать изменения объема, служит дифференциальное ур-ие (27) неизменяемости «элементарной массы жидкости»:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (27)$$

Задача решения дифференциальных ур-ий имеет смысл, когда известны граничные условия, удовлетворяющие интегралам.

Лагранж указал частный случай движения жидкости, когда существует ф-ия $\varphi(x, y, z, t)$, называемая потенциалом скоростей, что:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ w &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

При $\rho = \text{const}$ получается дифференциальное уравнение (29), известное под названием «уравнения Лапласа»:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (29)$$

При наличии уравнения (29) задача при известных граничных условиях сводится к определению только одной функции φ ; по уравнениям (28) находим u , v и w , из уравнения (26) и (28) при наличии силовой функции U для сил X , Y , Z , т. е. что $X = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$; $Y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $Z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$, получим ρ из уравнения (30):

$$\int \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + U - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + C_1, \quad (30)$$

где C_1 — произвольная функция.

Плоским движением называется такое движение, которое тождественно во всех параллельных между собою плоскостях. Для установившегося плоского движения имеем из уравнения (25):

$$F_2(x, y) dx - F_1(x, y) dy = 0; \quad (31)$$

при условии уравнений (28 и 29) существует функция $\psi(x, y)$, называемая функцией тока.

$$\psi(x, y) = C$$

есть интеграл уравнения (31), след.:

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = +\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Откуда $\varphi + i\psi$ есть функция комплексного переменного $x + iy$. Задавая $x + iy$ и разделяя действительную и мнимую части, найдем φ и ψ ; т. е., получим некоторое движение.

Плоским движением в гидродинамике пользуются для разрешения ряда важнейших вопросов.

Лит.: Проф. Павловский, Гидравлика, 1928; Проф. Максименко, Гидравлика, 1921; Проф. Есьман, Гидравлика, 1926; Аппель О., Руководство по теоретической механике, т. 3, 1911; Lamb H., Hydrodynamics, 1924, Cambridge; P. Förlschheimer, Hydraulik, 1930.

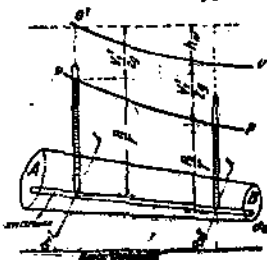
Гидравлика.

§ 1. Уравнение Бернули для элементарной струйки реальной жидкости.

Для установившегося движения реальной жидкости основным уравнением гидравлики является:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_w, \quad (31')$$

где v_1 — скорость в 1-м сечении; v_2 — скорость во 2-м сечении; p_1 — гидродинамическое давление в 1-м сечении; p_2 — во 2-м сечении; z — соответствующие высоты (черт. 14); h_w — потеря напора на сопротивление на пути от сечения 1—1 до 2—2. Линия pp — пьезометрическая линия; падение ее на единицу длины называется пьезометрическим уклоном. Линия OO^1 — напорная ли-



Черт. 14.

ния; падение ее на единицу длины называется гидравлическим уклоном I_g (гидравлический градиент).

Ур-ие Бернулли (31) относится к элементарной струйке сечения $d\omega$: $\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z$ выражают «удельную энергию», т. е. энергию, приходящуюся на единицу веса протекающей жидкости.

$\frac{v^2}{2g}$ — кинетическая энергия для единицы веса; $\frac{p}{\gamma}$ — энергия давления; z — энергия положения; $\frac{p}{\gamma} + z$ — потенциальная энергия для единицы веса; h_w — энергия, потерянная на сопротивление. Для идеальной жидкости $h_w = 0$.

§ 2. Одноразмерное неустановившееся движение.

Уравнение Бернулли. Одноразмерным называется такое движение, при котором переменными являются расстояния частиц от некой заданной точки S и времени t . Такое движение бывает тогда, когда траектория частиц жидкости наперед задана стенками сосуда, по которому протекает жидкость. Поперечные же размеры сосуда малы по сравнению с длиной, напр., движение жидкости по трубам и прочие.

Ур-ие Бернулли:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} = 0. \quad (32)$$

Ур-ием (32) приходится пользоваться в ряде случаев, напр., движение воды по трубам поршневого насоса и пр. Из ур-ия (32) для установившегося движения, полагая $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, можно получить по интегрировании ур-ие (31).

§ 3. Применение уравнения Бернулли для целого потока жидкости.

Обозначая через ω «живое сечение потока», полученное как поверхность сечения потока поверхностью, проведенной перпендикулярно к направлению скоростей потока, через Q — объем жидкости, протекающей через ω в единицу времени, называемый расходом, получим для элементарной струйки, что:

$$dQ = v d\omega,$$

или:

$$Q = \int v d\omega. \quad (33)$$

Принимая течение потока как «медленно изменяющееся», т. е. такое, в котором: а) кривизна струек потока мала и б) расхождение струек незначительно, вводится понятие «средней скорости течения» V из ур-ия (33):

$$Q = V\omega \text{ и } V = \frac{Q}{\omega}. \quad (34)$$

Ур-ие (34) для установившегося движения выражает ур-ие «неразрывности»:

$$Q = V\omega = \text{Const}. \quad (35)$$

Ур-ие Бернулли для участка потока в условиях «медленно изменяющегося» пишется как:

$$\frac{\alpha V_1^2}{2g} + \left(\frac{P_1}{\gamma} + z_1 \right) = \frac{\alpha V_2^2}{2g} + \left(\frac{P_2}{\gamma} + z_2 \right) + h_w, \quad (36)$$

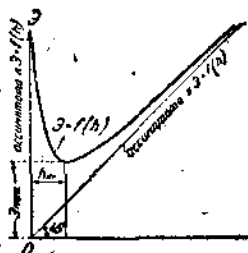
где V_1 и V_2 — средние скорости, а α — коэф-т, учитывающий неравномерное распределение скоростей по поперечному сечению потока. Обычно $\alpha = 1,1$.

По указанию проф. Н. Н. Павловского, давления p и z необязательно относить к п. т. соответствующего сечения, а можно к любой точке его. Кроме того условие «медленно изменяющегося» движения м. б. соблюдено лишь для тех сечений, для к-рых пишется ур-е Бернулли; между этими сечениями необязательно условие «медленного изменения».

Удельная энергия сечения. Если в ф-ле (36) плоскость сравнения отнести к плоскости дна потока для случая открытого русла, следовательно, $z=0$, тогда избыточное давление $\frac{p}{\gamma} = h$ покажет пьезометр, открытый сверху и опущенный на дно, где h —глубина потока. По Бахметьеву:

$$\mathcal{E} = \frac{\alpha V^2}{2g} + h$$

(37)



Черт. 15.

называется «удельной энергией сечения». График изменения $\mathcal{E}$ см. черт. 15. Минимум $\mathcal{E}$ будет при глубине, называемой «критической», $h_{кр}$:

$$h_{кр} = \sqrt[3]{\frac{\alpha q^3}{g}}, \quad (38)$$

где q —расход на единицу ширины русла:

$$q = \frac{Q}{b} \quad (38')$$

при b —ширина русла.

§ 4. Движение равномерное и неравномерное.

Признаки равномерного движения. 1) Живое сечение постоянно по длине водотока; 2) скорости постоянны в «соответствующих» точках, т. е. точках, полученных от пересечения поперечного сечения осью элементарной струйки. При равномерном движении I_p (пьезометрический уклон) = I_e (гидравлический уклон, градиент).

Признаки неравномерного движения. 1) Поперечное сечение потока изменяется по длине водотока; 2) изменение скоростей и ускорений в «соответствующих» точках сечения при постоянстве его; 3) изменение поперечного сечения по длине водотока, скоростей и ускорений «соответствующих» точек.

Различают также движение напорное, в к-ром жидкость движется под давлением, напр., напорный трубопровод водопровода или силовой станции, и безнапорное, в к-ром поток имеет свободную поверхность с давлением, равным атмосферному, напр., река, канал и пр.

Для равномерного и безнапорного движения уклон дна потока $i = I$, уклону поверхности потока.

§ 5. Основное уравнение равномерного движения.

Входящая в ур-е (36) величина

$$h_w = h_{wi} + \Sigma h_{wj}, \quad (39)$$

где h_{wi} —потеря напора на трение по длине L потока, а h_{wj} —местные потери.

Для определения $h_{\text{ш}}$ вводится τ_0 — среднее удельное сопротивление на стенке потока (размерн.: $\tau_0 = \frac{\text{сила}}{\text{площадь}}$); тогда основное ур-ие равномерного движения потока: $\frac{|\tau_0|}{\gamma} = RI$ преобразуется при замене $\frac{|\tau_0|}{\gamma}$ величиной, пропорциональной квадрату скорости, в ф-лу Шези:

$$v = C \sqrt{RI}. \quad (40)$$

Здесь R — гидравлический радиус $= \frac{\text{площадь сечения}}{\text{смачиваем. периметр}} = \frac{\omega}{x}$, I — пьезометрический (гидравл.) уклон, C — коэф-т. «Местные» потери определяются по ф-ле:

$$h_{\text{ш}} = \xi \frac{V^2}{2g}, \quad (41)$$

где V — средняя скорость, получающаяся за рассматриваемым местным препятствием; ξ — коэф-т «сопротивления».

§ 6. Ламинарное и турбулентное движение.

Ламинарный режим потока характеризуется тем, что жидкость движется элементарными струйками, не перемешивающимися друг с другом. В турбулентном движении происходит сильное перемешивание жидких частиц, к-рые кроме главного продольного движения имеют разнообразныя и сложные движения в поперечном направлении. Для определения критерия режима служит число Рейнольдса N :

$$N = \frac{RV}{\nu}, \quad (42)$$

где: R — гидр. радиус потока, V — средняя скорость, ν — кинематический коэф-т вязкости, получаемый из $\frac{\mu}{\rho} = \nu$, где μ — динамический коэф-т вязкости, а ρ — плотность. μ определяется как динамический коэф-т вязкости, выражающий при системе CGS численное значение (в динах) силы, приходящейся на 1 кв. единицу поверхности (1 см²) — соприкосновения двух скользящих один по другому слоев жидкости при условии, что градиент скорости по нормали к поверхности соприкосновения жидкостей равен единице.

По Пуазейлю для воды:

$$\frac{\mu}{\rho} = \nu = \frac{0,0178}{t + 0,0337t^2 + 0,000221t^3}, \quad (43)$$

где t — темп-ра по Цельсию.

Табл. 3. Значения ν для воды.

t	ν	ρ	ν	ρ	ν
0	0,0178	13	0,0122	30	0,0081
5	0,0152	15	0,0114	40	0,0066
10	0,0131	20	0,0101	50	0,0055

Табл. 4. Нефтяные продукты при $t = 15^\circ$.

Наименов. продукта	Уд. вес	μ
Бензин . .	0,71	0,0062
Керосин . .	0,82—0,83	0,020—0,025
Нефть . .	0,90	1,3—1,4
» . .	0,88	0,25—0,30
» . .	0,86	0,07—0,08
Значения μ в CGS.		

Определяемое по ф-ле (42) N дает критерий режима. По опытам Рейнольдса для круглых гладких труб $N_{кр.} = 500$, $N'_{кр.} = 3000$, т. е., если:

$$\left. \begin{aligned} N < N_{кр.} & \text{ — будет ламинарный режим} \\ N > N'_{кр.} & \text{ * турбулентный *} \\ N'_{кр.} > N > N_{кр.} & \text{ * неустойчивый *} \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

возможно и то и другое движение.

Для каналов гладких, широких и прямоугольного сечения по опытам Холфа $N_{кр.} = 300$. Из ур-ия (42) можно определить ту скорость, при которой будет $N = N_{кр.}$; такая скорость называется критической скоростью и обозначается $v_{кр.}$ и $v'_{кр.}$ соответственно $N'_{кр.}$.

На черт. 16 показан график зависимости J и V при разных режимах.

Пример. Определить число Рейнольдса N и характеризовать режим для трубы $\varnothing 100$ мм, $V = 0,5$ м/сек $= 50$ см/сек при $t = 15^\circ$ для воды и нефти.

$$R = \frac{100}{4} = 25 \text{ мм} = 2,5 \text{ см.}$$

По табл. (8) $\nu = 0,0114$ для воды;

по табл. (4) $\nu = \frac{1,3}{0,9} = 1,44$ для нефти.

Для воды $N = \frac{2,5 \cdot 50}{0,0114} \approx 11000 > 3000$ (турб. режим.)

Для нефти $N = \frac{2,5 \cdot 50}{1,44} \approx 90 < 500$ (лам. режим.)

Два потока механически подобны, если числа Рейнольдса одинаковы.

Частный случай: два жидких потока в одной и той же среде при одинаковом ν подобны, если

$$R_1 V_1 = R_2 V_2$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{D_2}{D_1},$$

где D — $\varnothing$ трубопровода.

При $D_1 = 100$ мм $V_1 = 1$ м/сек., а при $D_2 = 200$ мм скорость подобного потока:

$$V_2 = \frac{V_1 D_1}{D_2} = 0,5 \text{ м/сек.}$$

§ 7. Напорные трубопроводы.

На участке l при отсутствии местных потерь, при постоянных D и Q (круглое сечение, черт. 17) потеря напора для ламинарного режима:

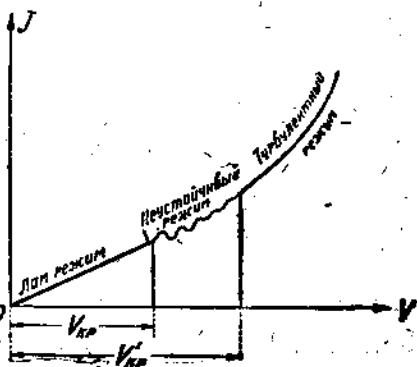
$$h_{wl} = \frac{32\mu}{\gamma} \frac{V}{D^4} l; \quad (45)$$

потеря напора для турбулентного режима:

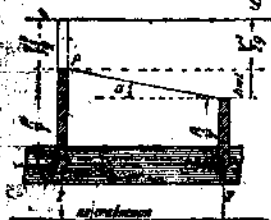
$$h_{wl} = \lambda \frac{l}{D} \frac{V^3}{2g}, \quad (46)$$

где g — ускорение силы тяжести.

Ф-ла (46) есть видоизмененная ф-ла Шези (40); при замене (40): $\frac{h_w}{l} = i$; $R = \frac{\pi D^4}{4}$; $\alpha D = \frac{D}{4}$;



Черт. 16.



Черт. 17.

$$C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}, \quad (47)$$

$$\lambda = \frac{8g}{C^2}. \quad (48)$$

Для быстрого подсчета по таблицам величины потери напора часто вводится «модуль расхода»:

$$K = \frac{Q}{\sqrt{I}}. \quad (49)$$

Если воспользоваться ф-лой Шези для определения Q , то можно найти:

$$K = C_w \sqrt{R}; \quad (50)$$

из ур-ия (49):

$$h_{wl} = \frac{Q^2 l}{K^2}. \quad (51)$$

Большим распространением при подсчете потерь напора на трение пользуются показательные ф-лы, общий вид к-рых:

$$h_{wl} = \frac{\beta Q^m l}{D^s}, \quad (52)$$

где: s, m — показатели, различные у разных авторов: β — коэф-т, тоже различный.

Из сравнения ф-л (51) и (52) видно, что при $m = 2$

$$K^2 = \frac{D^s}{\beta}. \quad (53)$$

К типу показательных ф-л относится ф-ла Маннинга; по ф-ле (40):

$$C = \frac{1}{n} R^{\frac{1}{6}},$$

где n — коэф-т шероховатости; в ф-ле (52), по Маннингу, $m = 2$; $\beta = \frac{n^2 64 \cdot \sqrt{4}}{\pi^2}$ для старых водопроводных труб. При $n = 0,012$ $\beta = 0,0014825$, а $s = 5,33$.

Если вычисления производить по ф-ле (51), то по Маннингу:

$$K^2 = \frac{\pi^2}{64 \cdot \sqrt{4} n^2} D^{5,333}. \quad (54)$$

По ф-ле (54) и составлены таблицы (табл. 9 на стр. 344).

Итак, потерю напора в напорных круглого сечения трубопроводах можно производить или по ф-ле (51), беря из таблиц значения K^2 , или по ф-ле (46), к-рую удобно преобразовать, заменив $V = \frac{Q}{\omega}$; тогда:

$$h_{wl} = \frac{Q^2 l}{B D^s}, \quad (55)$$

где:

$$B = \frac{g \pi^2}{8 \lambda} = f(\lambda) = \varphi(C), \quad (56)$$

т. к. на основании ф-лы (48) λ выражается через C .

Из приведенных соображений видно, что расчеты можно производить по различным приведенным ф-лам; надо выбрать λ или C .

Ф-лы (51) и (55) позволяют решать обратную задачу: по данным h_{wl} , l , D определить Q .

Классификация формул. Проф. Ф. Е. Максименко объединяет все существующие ф-лы в пять групп:

1. $\lambda = f(V)$; сюда относятся ф-лы Прони, Вейсбаха, Эйфельмана.

II. $\lambda = f(R)$ или $f_1(D)$ — ф-лы Дарси, Леви, Горбачева и пр.

III. $\lambda = f(R, V)$ — ф-лы Лампе, Фламана, Ланга, Биля, проф. Максимиенко и пр.

IV. $\lambda = f(R, l)$ — ф-ла Гангилье и Куттера, Невилля.

V. $\lambda = \text{Const}$ — ф-лы Дюшюи, Фаннинга и пр.

Теоретически обоснованной является та ф-ла, где $\lambda = f(N) = f\left(\frac{RV}{\nu}\right)$.

Такому условию удовлетворяют ф-лы Ланга, Фламана, Биля, Мизеса, Штриклера и пр.

Выбор значения λ зависит от трубопровода, материала и состояния его. Проф. Н. Н. Гензель («Примеры расчетов водопроводов», 1930, стр. 24) так рекомендует пользоваться выбором расчетной, для водопровода ф-лой: «Наиболее подходящей для расчета какого-нибудь водопровода ф-лой будет та, к-рая выведена из наблюдений и опытов, по своей обстановке наиболее близко подходящих к условиям движения воды в трубах рассчитываемого водопровода». С этим положением нельзя не согласиться.

Наиболее распространенными расчетными ф-лами у нас являются ф-лы Маннинга, Дарси, Куттера, менее — Фламана, Вейсбаха, Биля, Ланга и пр.

Формулы для чугунных водопроводных труб. а) Ф-ла Дарси. В ф-ле (46):

$$\lambda = \left(0,01989 + \frac{0,0005078}{d}\right) \sigma = \frac{1}{80} \cdot \left(1 + \frac{1}{40d}\right) \sigma,$$

где σ — поправка для «загрязненных труб» по Зонне; для чистых (новых) $\sigma = 1$; d — в м.

В опытах Дарси наибольший диам. труб был 0,5 м.

б) Ф-ла Маннинга:

$$C = \frac{1}{n} R^{\frac{1}{3}}, \quad (57)$$

где по Бахметьеву для чистых труб $n = 0,011$, $\frac{1}{n} = 90$; для нормальных расчетных условий $n = 0,0125$, $\frac{1}{n} = 80$; для грязных труб $n = 0,0143$, $\frac{1}{n} = 70$.

Следует заметить, что в установившейся расчетной практике $n = 0,012$, $\frac{1}{n} = 83,3$.

в) Ф-ла Куттера:
$$C = \frac{100}{1 + \frac{k}{\sqrt{R}}} = \frac{100}{1 + \frac{2k}{\sqrt{D}}}. \quad (58)$$

Здесь $k = 0,25$, что соответствует в ф-ле (57) $n = 0,012$.

г) Ф-ла Фламана:

$$k_{\text{Фл}} = \frac{a V^{1,75}}{D^{1,25}} l. \quad (59)$$

Для чугунных новых труб $a = 0,00074$; для бывших в употреблении $a = 0,00092$.

Проф. Павловский указывает, что по ф-ле (59) получаются несколько преуменьшенные значения.

д) Ф-ла Вейсбаха: в ф-ле (46):

$$\lambda = 0,014312 + \frac{0,01097}{V \sqrt{R/\text{см}}}. \quad (60)$$

Ф-ла может быть рекомендована для труб малого диаметра,

е) Ф-ла Ланга для труб, бывших в употреблении, с инкрустациями:

$$\lambda = \left(\frac{D}{D_1} \right)^5 \left(0,02 + \frac{0,0018}{\sqrt{VD}} \right); \quad (61)$$

здесь D —расчетный диам., а D_1 —средний диам., уменьшенный на величину неровности. Неопределенность в определении D_1 —слабое место ф-лы, однако в Германии ф-ла (61) имеет большое распространение.

ж) «Универсальная» ф-ла Биля:

$$1000I = \left(0,12 + \frac{f}{\sqrt{R}} + \frac{f'}{\sqrt{VR}} \cdot \frac{\mu}{\gamma} \right) \frac{V^3}{R}; \quad (62)$$

V и R —в м, μ и γ —в CGS (табл. 6 для f и f' , μ —табл. 3 и 4).

Табл. 6. Значения f и f' .

Вид поверхности и материал труб	f	f'
Медь, стекло, полиров. дерево, цельнотянутые латунные трубы, свинцовые трубы	0,0064	0,95
Гладкие поверхности, оцинкованные трубы, железные газовые трубы, строганные доски, новые чугунные трубы	0,018	0,71
Негладкие поверхности, обысков. чуг. трубы, оштукатуренные поверхности, деревянные трубы	0,036	0,47
Нестроганные доски, бетон, гладкий камень	0,054	0,27
Кирпичная и обысков. тесовая кладка	0,072	0,27

Ф-ла Биля применяется и дает хорошие результаты для труб малого диаметра и в расчетах по отоплению.

Деревянные напорные трубопроводы. Ф-ла Скобея имеет один из сл. видов:

$$I = 0,001373 \frac{Q^{1,5}}{D^{4,77}}; \quad (63)$$

$$V = 49,71 \frac{Q^{0,448}}{D^{0,68}}; \quad (63')$$

$$I = 0,000885 \frac{V^{1,18}}{D^{1,17}}; \quad (63'')$$

где Q —в м³/сек, D —в м, V —в м/сек.

Для расчетов пользуются графиком.

Асбесто-цементные трубы (этеритовые). Для новых труб:

$$I = 0,0009 \frac{Q^{1,788}}{D^{4,788}}; \quad (64)$$

или ф-ла Schmeml:

$$V = 64,28 \frac{Q^{0,44}}{D^{0,68}}; \quad (64')$$

Для старых труб:

$$I = 0,0811 \frac{Q^{1,788}}{D^{4,788}}; \quad (65)$$

$$V = 57,66 \frac{Q^{0,44}}{D^{0,68}}.$$

Здесь V —в м/сек, D —в м и Q —в м³/сек.

Бетонные и железобетонные трубопроводы. При применении железобетонных центробежных труб проф. Гениев рекомендует впредь до окончания опытов Гос. инст. соор. пользоваться ф-лой Маннинга при $n = 0,010 - 0,012$, в среднем $n = 0,0105$.

Проф. Анисимов для напорных трубопроводов особо рекомендует ф-лу Williams и Hazen для V и R в фт. и дает:

$$V = 1,31825 CR^{0,44} I^{0,44}; \quad (66)$$

в метрических мерах при $C = 120$:

$$I = \frac{0,000962 V^{1,433}}{D^{1,147}}; \quad (67)$$

D —диаметр трубы, R —гидравлический радиус (67).

По ф-ле Williams и Hazen.

Для бетонных труб $C = 120 \div 150$, в зависимости от качества работы по устройству штукатурки. При больших диаметрах труб удобнее формула Williams.

Железные клепаные трубы. Проф. Павловский указывает на ф-лу Маннинга при $n = 0,0125$ или Дарси при $\lambda = 0,025$. Проф. Анисимов указывает на ф-лу (66) при $C = 107 \div 113$ при диам. труб 0,1—1,5 м; в случае сварочных труб при тех же значениях диаметров в ф-ле (67) $C = 118 \div 120$. Это указание проф. Анисимова относится к большим диаметрам трубопроводов (гидроэлектростанции).

Пожарные рукава.

$$I = \frac{Q}{K^2},$$

где K можно брать из табл. 10, составленной по ф-ле Ясковича:

$$I = m \frac{Q^{1,9}}{D^{5,88}}. \quad (68)$$

При размерах D в м, а Q —в л/мин коэф-т $m = 5000$ для пенковых рукавов, $m = 3000$ для прорезиненных, $m = 2000$ для резиновых.

При движении жидкостей, кроме воды, при ламинарном режиме пользоваться ф-лой (45), при турбулентном—ф-лой Биля (62).

При расчете нефтепроводов при наличии турбулентного движения $N > 2320$ для чистых труб пользуются ф-лой (46), где K —потеря напора нефтяного столба;

$$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt{N}}. \quad (69)$$

ф-ла (69) Блазиуса, где N —число Рейнольдса (42); применяется и ф-ла Панга.

Для загрязненных труб можно пользоваться ф-лой Мизеса, где

$$\lambda = 0,0096 + \sqrt{\frac{K_0}{D} + \frac{1,7}{\sqrt{N}}}, \quad (70)$$

где D —ф в м, N —число Рейнольдса, а K_0 можно брать из табл. 7.

Табл. 7. Величины K_0 для железных, жестяных и чугунных труб.

Материал	$10^3 K_0$
Железные трубы	640—1600
Жестяные или чугунные трубы (асфальтированные)	950—1900
Чугунн. трубы новые	3200—6400
„ „ старые	8000—16000

Табл. 8. Коэффициент m по П. А. Филонову.

Название нефтепродукта	Уд. вес	m
Керосин	0,820	23,0
Бакинские нефти	0,881—0,871	18,4
Мазут	0,910	4,59

Часто пользуются при расчете нефтепроводов ф-лой акад. В. Г. Шухова:

$$I = \frac{Q^2}{m^2 D^5}, \quad (71)$$

где m —коэф-т, определяемый по таблице П. А. Филонова (табл. 8), D —диаметр в м, Q —в м³/сек.

Табл. 9. Величины K и K^2 для чугунных труб нормального

Внутрен. диам. в мм	Ф-ла Маннинга $n = 0,011$		Ф-ла Маннинга $n = 0,0125$		Ф-ла Маннинга $n = 0,0143$	
	K л/сек	K^2 л ² /сек ²	K л/сек	K^2 л ² /сек ²	K л/сек	K^2 л ² /сек ²
40	5,308	28,17	4,666	21,77	4,083	16,67
50	9,624	92,62	8,460	71,58	7,403	54,8
75	28,37	805,1	24,94	622,2	21,83	478,4
100	61,11	3734	53,72	2886	47,01	2209
125	110,8	12280	97,40	9487	85,23	7264
150	180,2	32460	158,4	25090	138,6	19210
200	398	158600	341,1	116400	298,5	89080
250	703,5	494900	618,5	382500	541,2	292800
300	1144	1,309 · 10 ⁶	1006	1,011 · 10 ⁶	880,0	774400
350	1726	2,978 · 10 ⁶	1517	2,301 · 10 ⁶	1327	1,762 · 10 ⁶
400	2464	6,070 · 10 ⁶	2166	4,691 · 10 ⁶	1895	3,592 · 10 ⁶
450	3373	11,38 · 10 ⁶	2965	8,792 · 10 ⁶	2594	6,731 · 10 ⁶
500	4467	19,95 · 10 ⁶	3927	15,41 · 10 ⁶	3436	11,81 · 10 ⁶
600	7264	52,76 · 10 ⁶	6386	40,78 · 10 ⁶	5587	31,22 · 10 ⁶
700	10960	120,1 · 10 ⁶	9632	92,78 · 10 ⁶	8428	71,04 · 10 ⁶
800	15640	244,7 · 10 ⁶	13750	189,1 · 10 ⁶	12030	144,8 · 10 ⁶
900	21420	458,6 · 10 ⁶	18830	354,5 · 10 ⁶	16470	271,4 · 10 ⁶
1000	28360	804,5 · 10 ⁶	24930	621,7 · 10 ⁶	21820	476,0 · 10 ⁶
1200	46120	2,127 · 10 ⁹	40550	1,644 · 10 ⁹	35480	1,259 · 10 ⁹
175*	271,8	73,86 · 10 ³	238,9	75,08 · 10 ³	209,0	43,7 · 10 ³
225**	531,2	282,2 · 10 ³	497	218,1 · 10 ³	408,8	167 · 10 ³

*1 Врем. **2 Сорт.

Табл. 10. Значения K и K^2 для водопроводных (железных и стальных) труб по Ф-лам Маннинга $n = 0,012$.

Диаметр		K л/сек	K^2 л ² /сек ²	Диаметр		K л/сек	K^2 л ² /сек ²
номинальный ди.	принятый для рас- чета мм			номинальный ди.	принятый для рас- чета мм		
1/2	14	0,296	0,0874	1 1/4	43	5,893	34,74
3/4	20	0,766	0,586	2	49	8,362	69,73
1	25	1,389	1,93	2 1/2	65	17,734	314,7
1 1/4	34	3,151	9,93	3	79	29,844	890,7
1 1/2	39	4,49	20,17				

сортамента по Ф-лам Маннинга, Куттера, Дарси.

Ф-ла Маннинга $n = 0,012$		Ф-ла Куттера $K = 0,25$		Ф-ла Дарси старые трубы	
K л/сек	K^3 л ³ /сек ³	K л/сек	K^3 л ³ /сек ³	K л/сек	K^3 л ³ /сек ³
4,86	23,6	3,59	12,89	4,36	19,0
8,81	77,6	6,782	45,99	8,30	68,82
25,98	675	21,43	459,25	23,19	537,8
55,97	3 130	48,10	2 344	49,2	2 420,5
101,5	10 300	89,84	8 072	87,72	7 692,9
164,8	27 200	149,37	22 310	144	20 761
355	126 000	331,7	110 030	309,5	96 053
644,3	415 000	613,59	376 500	488,1	238 160
1049	$1,1 \cdot 10^6$	1012,0	$1,024 \cdot 10^6$	894,8	800 900
1581	$2,5 \cdot 10^6$	1540	$2,379 \cdot 10^6$	1360	$1,85 \cdot 10^6$
2256	$5,09 \cdot 10^6$	2 220	$4,926 \cdot 10^6$	1 911	$3,654 \cdot 10^6$
3086	$9,52 \cdot 10^6$	3 057	$9,343 \cdot 10^6$	2 619	$6,861 \cdot 10^6$
4090	$16,7 \cdot 10^6$	4 067	$16,54 \cdot 10^6$	3 472	$12,06 \cdot 10^6$
6530	$44,2 \cdot 10^6$	6 665	$44,29 \cdot 10^6$	—	—
10050	$101 \cdot 10^6$	10 080	$101,53 \cdot 10^6$	—	—
14318	$205 \cdot 10^6$	14 420	$207,87 \cdot 10^6$	—	—
19621	$385 \cdot 10^6$	19 760	$390,57 \cdot 10^6$	—	—
25980	$675 \cdot 10^6$	26 180	$685,39 \cdot 10^6$	—	—
42220	$1,782 \cdot 10^9$	42 530	$1,809 \cdot 10^9$	—	—
		229,2	52 530	220	48 403
		459,02	$210,7 \cdot 10^3$	418	174 650

 Табл. 11. Значения K и K^3 для пенковых, прорезиненных и резиновых рукавов по Ф-ле Ясыковича (68) для воды.

Диам. (в дм.)	Пенковые рукава		Прорезиненные рукава		Резиновые рукава	
	K л/сек	K^3 л ³ /сек ³	K л/сек	K^3 л ³ /сек ³	K л/сек	K^3 л ³ /сек ³
1 1/2	4,47	20	5,75	33	7,07	50
1 3/4	6,71	45	8,66	75	10,609	112,50
2	9,49	90	12,25	150	15	225
2 1/2	17,32	300	22,36	500	27,39	760
3	26,28	800	36,5	1 333	44,7	2006

Табл. № 13. Выявлены расходы Q л/сек в трубах при различных диаметрах и скорости V .

Диам. трубы в мм	Скорость V м/сек											
	0,25	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,50
40	0,313	0,628	0,764	0,880	1,005	1,131	1,257	1,571	1,885	2,189	2,513	3,14
50	0,492	0,989	1,178	1,374	1,571	1,767	1,964	2,454	2,945	3,436	3,927	4,908
75	1,105	2,209	2,651	3,093	3,534	3,976	4,418	5,522	6,627	7,731	8,836	11,05
100	1,963	3,927	4,712	5,498	6,283	7,069	7,854	9,817	11,781	13,744	15,708	19,64
125	3,068	6,136	7,363	8,590	9,817	11,045	12,272	15,340	18,408	21,476	24,544	30,68
150	4,418	8,836	10,603	12,370	14,137	15,904	17,672	22,089	26,507	30,925	35,343	44,18
(175)	6,01	12,026	14,432	16,837	19,242	21,648	24,053	30,066	36,079	42,092	48,106	60,10
200	7,854	15,708	18,850	21,991	25,133	28,274	31,416	39,270	47,124	54,980	62,832	78,54
(225)	9,935	19,880	23,857	27,833	31,809	35,785	39,761	49,761	59,641	69,521	79,402	99,36
250	12,27	24,544	29,452	34,361	39,270	44,179	49,087	61,359	73,631	85,903	98,175	122,7
300	17,67	35,343	42,411	49,480	56,549	63,617	70,686	88,367	106,03	123,70	141,37	176,7
350	24,05	48,106	57,727	67,348	76,969	86,590	96,211	120,26	144,32	168,37	192,42	240,4
400	31,42	62,832	75,398	87,965	100,53	113,10	125,66	157,08	188,50	219,91	251,33	314,2
450	39,76	79,522	95,426	111,33	127,23	143,14	159,04	194,80	230,57	276,33	318,09	397,4
500	49,09	98,175	117,81	137,45	157,08	176,72	196,35	245,44	294,53	343,61	392,70	490,9
500	70,69	141,37	169,65	197,92	226,19	254,47	282,74	353,43	424,11	494,80	565,49	708,0
700	98,27	192,42	230,91	269,39	307,88	346,36	384,85	481,06	577,27	673,48	769,69	961,6
(750)	110,5	220,89	265,07	309,25	353,43	397,61	441,79	552,23	662,68	773,13	883,57	1105
800	125,7	251,33	301,59	351,80	402,12	452,39	502,66	628,32	753,98	879,65	1005,3	1256
900	159,0	318,09	381,70	445,32	508,94	572,56	636,17	796,22	956,26	1113,3	1272,3	1590
1000	196,4	392,70	471,24	549,78	628,32	706,86	785,40	981,75	1178,1	1374,4	1570,8	1964
1200	282,6	565,46	678,56	791,68	904,78	1017,9	1131,0	1413,5	1696,5	1979,2	2261,9	2826

Пример 1. Определить потерю напора по длине в 1000 м для трубопровода $\Phi D = 400$ мм в расходе в 115 л/сек.

Принимаем трубы старые по ф-ле (51):

$$h_{\text{уд}} = \frac{115^2 \cdot 1000}{K^5}$$

По Манингу при $n = 0,012$ $K^2 = 5,09 \cdot 10^3$ (табл. 8).

След.:

$$h_{\text{уд}} = \frac{115^2 \cdot 1000}{5,09 \cdot 10^3} = 2,6 \text{ м.}$$

По Куттеру (табл. 8):

$$K^2 = 4,926 \cdot 10^3;$$

$$h_{\text{уд}} = \frac{115^2 \cdot 1000}{4,926 \cdot 10^3} = 2,74 \text{ м.}$$

По Дарси (табл. 8):

$$K^2 = 3,654 \cdot 10^3,$$

$$h_{\text{уд}} = \frac{115^2 \cdot 1000}{3,654 \cdot 10^3} = 3,68 \text{ м.}$$

По Манингу $n = 0,0125$ (табл. 8), $K^2 = 4,691 \cdot 10^3$,

$$h_{\text{уд}} = 2,87 \text{ м.}$$

Полученные результаты показывают, что при $n = 0,012$ мм и $n = 0,0125$ ф-л Манинга и Куттера результаты $h_{\text{уд}}$ близки. Ф-ла Дарси дала преувеличенные потери. По табл. 11 $V = 0,92$ м/сек.

Пример 2. Определить расход для $\Phi 250$ мм при $I = 0,0058$ на ф-лы (49):

$$Q = K \sqrt{I}.$$

По Манингу $n = 0,012$, $K = 644,3$ л/сек. След.: $Q = 644,3 \cdot \sqrt{0,0058} = 49$ л/сек.

По Куттеру $K = 613,59$ л/сек (по табл. 7):

$$Q = 613,59 \cdot \sqrt{0,0058} = 46,6 \text{ л/сек.}$$

Пример 3. Определить ΦD , если $Q = 22$ л/сек, а $I = 0,0179$.

Определяем:

$$K^2 = \frac{Q^2}{I} = \frac{22^2}{0,0179} = 27\,040.$$

По табл. (8) подбираем ближайший диаметр, для которого $K^2 = 27\,040$.

По Манингу: $n = 0,012$, $K^2 = 27\,200$, $D = 150$ мм.

По Куттеру: $K^2 = 22\,310$, $D = 150$ мм.

$D = 150$ мм — искомый диаметр.

Потеря напора на местные сопротивления. Преобразованная ф-ла (41):

$$h_{\text{уд}} = \xi \frac{V}{2g} = \xi \frac{8}{\pi^2} \frac{Q^2}{D^5}$$

приводится к типу ф-лы (51), если принять

$$K_j^2 = \frac{8\pi^2}{8} D^4 = 12,106 D^4$$

при $g = 9,81$ м/сек², след.:

$$h_{\text{уд}} = \frac{\xi Q^2}{K_j^2} \quad (72)$$

Размерность K_j^2 иная, чем K^2 .

$K_j^2 = \text{м}^5/\text{сек}^2$, тогда $h_{\text{уд}}$ — в м. (Надо заметить, что при вычислении K_j^2 g — в м/сек², след., и D в м.)

Табл. 13. Значения K_j^2 .

Диам. в мм	Величина K_j^2		Диам. в мм	Величина K_j^2	
	для расхода, выражен. в $\text{м}^3/\text{сек}$	для расхода, выражен. в $\text{л}/\text{сек}$		для расхода, выражен. в $\text{м}^3/\text{сек}$	для расхода, выражен. в $\text{л}/\text{сек}$
40	$31,0 \cdot 10^{-8}$	31	250	$47300 \cdot 10^{-8}$	47300
50	$75,7 \cdot 10^{-8}$	75,7	300	$98100 \cdot 10^{-8}$	98100
75	$383 \cdot 10^{-8}$	383	350	$182000 \cdot 10^{-8}$	182000
100	$1210 \cdot 10^{-8}$	1210	400	$310000 \cdot 10^{-8}$	310000
125	$2960 \cdot 10^{-8}$	2960	450	$498000 \cdot 10^{-8}$	498000
150	$6130 \cdot 10^{-8}$	6130	500	$757000 \cdot 10^{-8}$	757000
200	$19400 \cdot 10^{-8}$	19400	600	$1570000 \cdot 10^{-8}$	1570000

Табл. 14-а. Значения K_j^2 для местных сопротивлений при газовых трубах.

Диаметр		Величина K_j^2	
в мм	принят для расчета в м	для расхода, выраж. в $\text{м}^3/\text{сек}$	для расхода, выраж. в $\text{л}/\text{сек}$
$\frac{1}{2}$	0,014	$0,465 \cdot 10^{-8}$	0,465
$\frac{3}{4}$	0,020	$1,94 \cdot 10^{-8}$	1,94
1	0,025	$4,73 \cdot 10^{-8}$	4,73
$1\frac{1}{4}$	0,034	$16,18 \cdot 10^{-8}$	16,18
$1\frac{1}{2}$	0,039	$28,01 \cdot 10^{-8}$	28,01
$1\frac{3}{4}$	0,043	$41,4 \cdot 10^{-8}$	41,4
2	0,049	$69,8 \cdot 10^{-8}$	69,8
$2\frac{1}{2}$	0,066	$216,1 \cdot 10^{-8}$	216,1
3	0,079	$471,5 \cdot 10^{-8}$	471,5

Табл. 14-б. Значения K_j^2 для местных сопротивлений при пожарных рукавах.

Диаметр		Величина K_j^2	
в мм	в м	для расхода, выраж. в $\text{м}^3/\text{сек}$	для расхода, выраж. в $\text{л}/\text{сек}$
1	0,0254	$5,04 \cdot 10^{-8}$	5,04
$1\frac{1}{2}$	0,0381	$25,5 \cdot 10^{-8}$	25,5
$1\frac{3}{4}$	0,0444	$46,7 \cdot 10^{-8}$	46,7
2	0,0508	$80,6 \cdot 10^{-8}$	80,6
$2\frac{1}{2}$	0,0635	$198,6 \cdot 10^{-8}$	198,6
3	0,0762	$408,1 \cdot 10^{-8}$	408,1

Для определения потери напора по ф-ле (72) необходимо знать ξ . Ниже приводятся таблицы значений ξ .

Величины коэффициентов сопротивлений ξ [к ф-ле (41) или (72)]:

- а) Вход в трубу, кромки острые $\xi = 0,5$. (73)
 б) Вход в трубу, если кромки хорошо закруглены . . . $\xi = 0,06$. (74)
 в) Вход в трубу с патрубком внутри бака (сосуда) . . . $\xi = 1$. (75)
 г) Выход из трубы в бассейн, бак $\xi = 1$. (76)

- д) Вход в заборную водопроводную трубу (сетка с клапаном)—в зависимости от конструкции... $\xi =$ от 5 до 10. (77)
- е) Внезапное расширение («потеря на удар» по Борда):

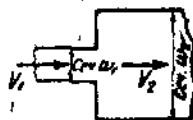
$$h_{w \text{ уд.}} = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} = \xi'_{\text{уд.}} \frac{V_1^2}{2g} = \xi''_{\text{уд.}} \frac{V_2^2}{2g}, \quad (78)$$

где (черт. 18):

$$\xi'_{\text{уд.}} = \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2; \quad \xi''_{\text{уд.}} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right)^2. \quad (79)$$

Табл. 15.

$\frac{\omega_1}{\omega_2}$	0,01	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\xi'_{\text{уд.}}$	0,98	0,81	0,64	0,36	0,16	0,04	0



Черт. 18.

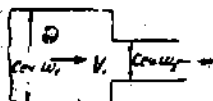
- ж) Внезапное сужение (черт. 19):

$$h_{w \text{ суж.}} = \xi_{\text{суж.}} \frac{V_2^2}{2g}. \quad (80)$$

По Вейсбаху.

Табл. 16.

$\frac{\omega_1}{\omega_2}$	0,01	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\xi_{\text{суж.}}$	0,5	0,5	0,42	0,34	0,25	0,15	0



Черт. 19.

- з) Диафрагма в трубе постоянного диаметра [ф-ла (41) или (72), черт. 20].

Табл. 17. $\xi_{\text{диафр.}}$, отнесенные к сечению трубы.

$\frac{\omega_0}{\omega_1}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\xi_{\text{диафр.}}$	225,9	47,77	17,51	7,801	3,753	1,796	0,797	0,29	0,06



Черт. 20.

- и) Резкий поворот, по Вейсбаху (черт. 21):

$$\xi_{\text{пов.}} = 0,9457 \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2,047 \cdot \sin^4 \frac{\theta}{2}. \quad (81)$$

Табл. 18.

θ	20°	40°	60°	80°	90°	100°	120°	140°
$\xi_{\text{пов.}}$	0,046	0,139	0,364	0,740	0,984	1,260	1,861	2,431



Черт. 21.

- к) Колено, плавно закругленное (черт. 22):

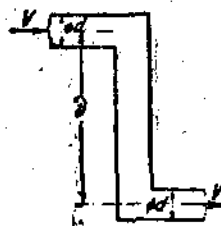
$$\xi_{\text{кол.}} = \frac{\theta^\circ}{90^\circ} \left[0,131 + 0,163 \left(\frac{d}{R} \right)^{2,5} \right] = \frac{\theta^\circ}{90^\circ} \xi'_{\text{кол.}}. \quad (82)$$

Табл. 19.

$\frac{d}{2R}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\xi'_{\text{кол.}}$	0,131	0,138	0,158	0,206	0,295	0,440	0,661	0,977	1,408	1,978



Черт. 22.



Черт. 23

л) Двойные угловые колена под углом 90° (черт. 23).

Табл. 20. Величина ξ для одного колена.

l	ξ	l	ξ
От $l=0$ до $l=3d$	1,8	От $l=5d$ до $l=8d$	1,3
» $l=3d$ » $l=5d$	1,5	» $l=8d$ » $l=\infty$	1,0

м) Обходной отвод (черт. 24).

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } R < 10d \quad \xi = 0,5 \\ \text{» } R > 10d \quad \xi = 0 \end{array} \right\} \quad (83)$$



Черт. 24.

н) Тройник (черт. 25-а) в прямом направлении $\xi_D = 1$, в направлении отвления:

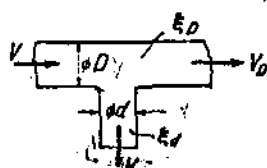
$$\xi_d = 1,5; \quad (84)$$

при противотоке $\xi = 3$ (черт. 25-б):

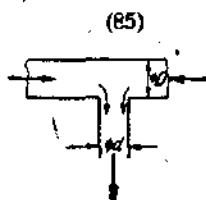
$$\xi = 3.$$

о) Косое соединение (черт. 26):

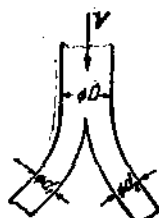
$$\xi = 1,0$$



Черт. 25-а.



Черт. 25-б.



Черт. 26.

п) ξ для труб малого диаметра (по Ритшель—Браббе).

Табл. 21.

Наименование фасонных частей	Тип фирмы	Величина ξ при Φ трубы в мм					
		14	20	25	34	39	49
Угольник	Георг Фишер	2	2	1,5	1,5	1	1
Отвод 90°	»	1,5	1,5	1,0	1,0	0,5	0,5
Двойной отвод узкий	»	2	2	2	2	2	2
Двойной отвод широкий	»	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0

р) Поворотный (горловой) клапан (черт. 27).

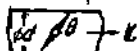


Табл. 22.

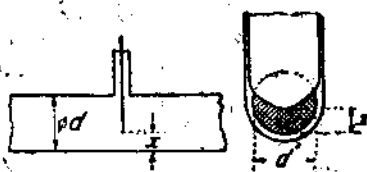
Черт. 27.

θ град. к.	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	50°	55°	60°	65°	70°	90°
ξ	0,24	0,52	0,90	1,54	2,51	3,91	6,22	10,8	32,8	58,8	118	258	751	∞

е) Задвижка (черт. 28).

Табл. 23.

$\frac{L}{d}$	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$
$\xi_{\text{пов. кл.}}$	0	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17,0	97,8

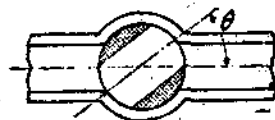


Черт. 23

г) Кран в круглой трубе (черт. 29).

Табл. 24.

θ	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°
$\xi_{\text{кр.}}$	0,05	0,29	0,75	1,56	3,10	5,47	9,68
θ	40°	45°	50°	55°	60°	65°	82 1/2°
$\xi_{\text{кр.}}$	17,3	31,2	52,6	106	206	486	∞ кран закр.



Черт. 29

у) Откидной шарнирный клапан (так же работают и обратные клапаны, черт. 30).

Табл. 25.

θ	70°	65°	60°	55°	50°	40°	35°	30°	25°	20°	15°
$\xi_{\text{отк. кл.}}$	1,7	2,3	3,2	4,6	6,6	14	20	30	42	62	90



Черт. 30.

ф) Конический вентиль (черт. 31).

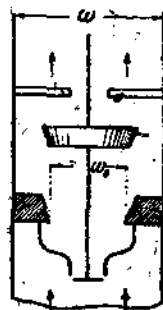
$$\xi_p = \left(1,537 \frac{a}{\omega_0} - 1 \right)^2.$$

(86)

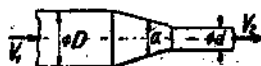
х) Переходные конуса (черт. 32).

Табл. 26. Значения ξ , отнесенные к меньшему сечению трубопровода.

Угол θ	Сходящ. конуса $\xi_{\text{сх.}}$	Расходящ. конуса $\xi_{\text{расх.}}$	Угол α	Сходящ. конуса $\xi_{\text{сх.}}$	Расходящ. конуса $\xi_{\text{расх.}}$
10°	0,16	0,22	50°	0,31	0,91
15°	0,16	0,46	55°	0,31	0,91
20°	0,18	0,34	60°	0,32	0,91
25°	0,20	0,60	65°	0,33	0,91
30°	0,22	0,67	70°	0,34	0,91
35°	0,24	0,73	75°	0,34	0,91
40°	0,26	0,79	80°	0,35	0,91
45°	0,28	0,84	85°	0,36	0,91
50°	0,30	0,88			



Черт. 31.



Черт. 32.

ц) Характеристики местных потерь для водометов по данным инж. Коровой и инж. В. Г. Любачева;

Табл. 27. Скоростные водометры (системы Симмс-Гальске, Мейнке).

Калибр водометра (в мм)	10—13	15	20	25	30	40	50	60	80	100
Теоретическая пропускная способность в м³/час при потере в 10 м вод. столба . . .	2	3	5	7	10	20	30	40	50	100
Характеристика $\frac{K_f^2}{\xi}$ при расходе в л/сек . . .	0,031	0,070	0,193	0,378	0,772	3,09	6,95	12,34	19,25	77,20

Табл. 28. Поршневые водометры (типа Фраке).

Калибр водометра (в мм)	10	15	20	30	40	60	80	100
Теоретическая пропускная способность в м³/час при потере напора в 10 м вод. столба . . .	1,44	2,19	2,65	6,35	10,39	24,81	42,12	57,7
Характеристика $\frac{K_f^2}{\xi}$ при расходе в л/сек . . .	0,016	0,037	0,0545	0,311	0,833	4,75	13,46	25,70

Табл. 29. Водометры Вольтмана (Симмс и Гальске).

Калибр водометра (в мм)	50	70	80	100	125	150
Теоретическая пропускная способность в м³/час при потере напора в 10 м вод. столба . . .	100	200	300	500	800	1200
Характеристика $\frac{K_f^2}{\xi}$ при расходе в л/сек	77,17	309	695	1 925	4 940	11 100
Калибр водометра (в мм)	200	250	300	400	500	750
Теоретическая пропускная способность в м³/час при потере напора в 10 м вод. столба	2 000	3 100	4 500	8 500	12 500	28 000
Характеристика $\frac{K_f^2}{\xi}$ при расходе л/сек K	30 900	74 100	156 000	557 000	1 200 000	6050 000

Тбл. 30. Дисковые водомеры.

Калибр водомера (в мм)	10—13	15	20	25	30	40
Теоретическая пропускная способность в м³/час при потере напора в 10 м вод. ст.	2	3	5	7	10	20
$\frac{K_f^2}{\xi}$ при расходе в л/сек	0,031	0,07	0,193	0,378	0,772	3,09

Пример на применение таблиц.

Дан скоростной водомер (системы Мейнеке) калибра 25 мм. Определить пропускную способность при потере: в 1 м, 2,5 м и 5 м.

Из ур-ня (72) $Q^2 = \frac{K_f^2}{\xi} h_{\text{ср}}$.

По табл. 27: $\frac{K_f^2}{\xi} = 0,378$; для $h_{\text{ср}} = 1$ м, 2,5 м и 5 м находим:

$$Q_1 = \sqrt{0,378 \cdot \sqrt{1}} = 0,62 \text{ л/сек} = 2,24 \text{ м}^3/\text{час};$$

$$Q_2 = \sqrt{0,378 \cdot \sqrt{2,5}} = 0,98 \text{ л/сек} = 3,5 \text{ м}^3/\text{час};$$

$$Q_3 = \sqrt{0,378 \cdot \sqrt{5}} = 1,36 \text{ л/сек} = 4,9 \text{ м}^3/\text{час}$$

Если вместо скоростного водомера поставить водомер Фраке калибра 20 мм, то для вычисления расходов 0,62 л/сек, 0,98 л/сек, 1,36 л/сек подсчитаем потерю напора

$$\left(\frac{K_f^2}{\xi} = 0,0545 \text{ по табл. 28} \right);$$

$$H_1 = \frac{Q^2}{\frac{K_f^2}{\xi}} = \frac{0,62^2}{0,0545} = 7,1 \text{ м};$$

$$H_2 = \frac{Q^2}{\frac{K_f^2}{\xi}} = \frac{0,98^2}{0,0545} = 17,8 \text{ м};$$

$$H_3 = \frac{Q^2}{\frac{K_f^2}{\xi}} = \frac{1,36^2}{0,0545} = 34,4 \text{ м}.$$

Примечание. При длинных трубопроводах влияние местных потерь не велико, ими пренебрегают, увеличивая потерю на трение на 5—10%:

$$\Sigma h_{\text{ср}} = (1,05 \text{—} 1,1) h_{\text{ср}}. \quad (87)$$

Более точно можно «местные потери» заменить потерями на трение, введя длину «эквивалентной трубы» $l_{\text{экв}}$ из соотношения:

$$l_{\text{экв}} = \xi \frac{K_f^2}{K_f^2} = \xi m, \quad (88)$$

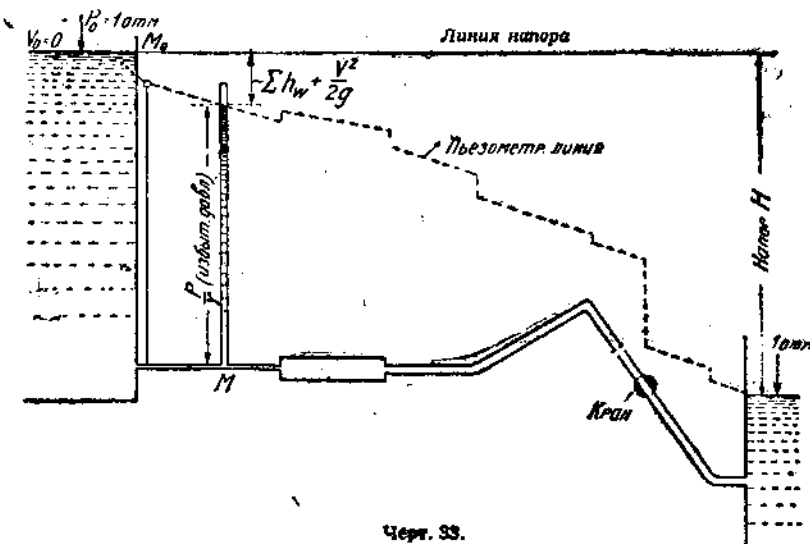
$$\text{где } m = \frac{K_f^2}{K_f^2}.$$

Табл. 31.

Диам. трубы (в мм)	40	50	75	100	125	150	200	250	300	350	400	450	500
т	0,76	1,025	1,76	2,59	3,48	4,44	6,50	8,78	11,22	13,74	16,40	19,20	22,10

§ 8. Простой водопровод.

Водопровод без ответвлений и боковых отверстий, ведущий жидкость из верхнего резервуара в нижний, называется простым.



Черт. 33.

Применяя ур-ие Бернулли, можно показать, что напор H при истечении под уровень целиком затрачивается на преодоление сопротивлений, при истечении в атмосферу — на сопротивления и создание скорости при выходе из конечного отверстия.

При истечении в бак:

$$H = \Sigma h_{wl} + \Sigma h_{wf}; \quad (89)$$

при истечении в атмосферу:

$$H = \Sigma h_{wl} + \Sigma h_{wf} + \frac{v_{\text{вых}}^2}{2\mu^2 g}, \quad (90)$$

где μ — коэф-т расхода выходного отверстия.

Построение пьезометрической линии. При построении пьезометрической линии общее правило такое (черт. 33): от поверхности напора откладываются по вертикали Σh_w на участке от M_0 до M , прибавляя к Σh_w близу величину скоростного напора $\frac{v^2}{2g}$ (для M). Расстояние от оси трубы вверх до уровня пьезометра показывает «избыточное давление» в трубе

$\left(\frac{p}{\gamma}\right)$, а если $\Sigma h_{\text{м}} + \frac{V^2}{2g}$ будет ниже оси трубы, — вакуумметрическую высоту». При «местных потерях» пьезометрическая линия опускается, а для случая внезапного расширения поднимается (подробности см. курсы гидравлики проф. А. Аксисменко, проф. Есьман, проф. Астрова и пр.).

Простой водопровод постоянного диаметра. $V = \text{const}$ при постоянном Q и ω ($Q = V\omega$).

При истечении под уровень (см. ур-не 89):

$$H = \frac{V^2}{2g} \left(\Sigma \xi + \lambda \frac{l}{D} \right), \quad (91)$$

откуда:

$$Q = \mu_s \omega \sqrt{2gH}, \quad (92)$$

где:

$$\mu_s = \frac{1}{\sqrt{\Sigma \xi + \lambda \frac{l}{D}}}. \quad (93)$$

μ_s называется коэф-том расхода системы.

При истечении в атмосферу (см. ур-не 91):

$$Q = \mu_s \omega \sqrt{2gH}. \quad (92')$$

Но:

$$\mu_s = \frac{1}{\sqrt{\Sigma \xi + \lambda \frac{l}{D} + 1}}. \quad (94)$$

Примеры на простой водопровод.

1) Трубопровод не имеет местных потерь, тогда из:

$$h_{\text{мт}} = \frac{Q^2 l}{K^3} \text{ и } Q = K \sqrt{I};$$

а) даны D и l , определяются K и Q (см. примеры в напорных трубопроводах);

б) даны Q и D , определяем K^3 и $h_{\text{мт}}$;

в) даны Q и l , определяем K^3 , а по таблицам определяем D ;

2) Трубопровод имеет значительную длину, местными потерями пренебрегаем. На участках $l_1 \Phi D_1$, $l_2 \Phi D_2$, $l_3 \Phi D_3$; тогда:

$$H = Q^2 \left(\frac{l_1}{K_1^3} + \frac{l_2}{K_2^3} + \frac{l_3}{K_3^3} \right) = Q^2 \sum \frac{l}{K^3}. \quad (95)$$

По данным диаметрам и H можно определить Q и, обратно, по заданным диаметрам и Q найти H .

Из ф-лы (95) $\frac{H}{\Sigma l} = \frac{Q^2}{\Sigma l} \sum \frac{l}{K^3}$:

$$\frac{H}{\Sigma l} = I_{\text{ср}}, \quad (96)$$

называемая средним гидравлическим уклоном, а

$$K_{\text{ср}}^3 = \frac{\Sigma l}{\sum \frac{l}{K^3}}; \quad (97)$$

$K_{\text{ср}}$ называется средней пропускной способностью системы.

3) Трубопровод постоянного диаметра: местными потерями не пренебрегаем. По ф-лам (92) и (92') можно решать след. задачи.

а) Даны D и H , определяется μ_s , затем Q .

б) Даны Q и D , определяются μ_s и H .

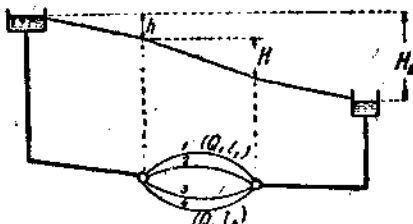
в) Даны Q и H , определяется $\mu_s \omega = \frac{Q}{\sqrt{2gH}}$ — известной величиной; затем по формуле определяется D .

§ 9. Параллельное соединение трубопроводов (черт. 34).

Имеется n ответвлений, тогда основными ур-иями служат:

$$\left. \begin{aligned} Q &= Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n \\ H &= \frac{Q_1^2 l_1}{K_1^5} = \\ &= \frac{Q_2^2 l_2}{K_2^5} = \dots = \frac{Q_n^2 l_n}{K_n^5} \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

При данных l и D можно определить Q . В системе (98) число ур-ий = числу неизвестных.



Черт. 34.

§ 10. Разветвленная система (черт. 35).

Для определения расходов Q_x , Q_y и Q_T служат ур-ия:

$$Q_x = Q_T + Q_y;$$

$$Q_1 = Q_x + Q_y + Q_T,$$

а также:

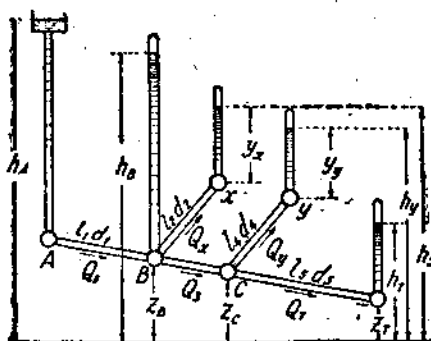
$$h_A - h_B = Q_1^2 \frac{l_1}{K_1^5};$$

$$h_B - h_x = Q_x^2 \frac{l_x}{K_x^5};$$

$$h_B - h_C = Q_y^2 \frac{l_y}{K_y^5};$$

$$h_C - h_y = Q_y^2 \frac{l_y}{K_y^5};$$

$$h_C - h_T = Q_T^2 \frac{l_T}{K_T^5};$$



Черт. 35.

По этим ур-иям определяются Q_x , Q_y , Q_T , h_B и h_C (h_C на черт. не указано).

Непрерывный расход. При расходовании воды во многих точках трубопровода длиной l полагают, что расходование производится непрерывно на единицу длины q куб. единиц. Для расчета вводится эквивалентный расход Q_i , к-рый при пропуске по трубопроводу длиной l даст при том же D одинаковую с непрерывным расходом потерю напора:

$$Q_i = 0,55 q l. \quad (99)$$

Если имеется «транзитный» расход Q_T , идущий на питание дальнейших участков, то общий расход:

$$Q = Q_T + Q_i = Q_T + 0,55 q l. \quad (100)$$

Правило Дюпюи (Dupuit). Если имеется длинный трубопровод, состоящий из участков различных диаметров, то такой трубопровод для упрощения расчетов можно заменить трубопроводом с постоянным диаметром, дающим

ту же потерю напора, что и с различным диаметром. «Приведенный» диаметр при длине трубы $L = \Sigma l$ находится из ф-лы:

$$d_{\text{прив.}} = \sqrt[5]{\frac{L}{\Sigma \left(\frac{l}{d^5}\right)}} \quad (101)$$

Если изменить длину трубопровода, взяв какой-нибудь «средний» из диаметров d_0 , то при условии неизменяемости напора «приведенная» длина

$$L_{\text{прив.}} = l_1 \left(\frac{d_0}{d_1}\right)^5 + l_2 \left(\frac{d_0}{d_2}\right)^5 + \dots \quad (102)$$

«Эквивалентная» труба рассчитывается как простой водопровод с постоянным диаметром.

Сифон. Условия работы сифона (черт. 36):

$$1) v_{ac} = h_s + \Sigma h_{w_j} + h_{w_i} \leq 6 \div 7 \quad (103)$$

м вод. столба.

2) Участок CD трубопровода д. б. заполнен водой, чтобы из него мог выйти воздух, — достигается опусканием D в жидкость.

Расчет сифона а. а) По данным Q , L и D определить H . Сначала определяют μ_s , а затем:

$$H = \frac{Q^2}{2g\mu_s^3 \omega^2} \quad (104)$$

б) По Q , l и H определить D . Задача решается подбором, пользуясь постоянством $\mu_s \omega = \frac{Q}{\sqrt{2gH}}$. Обычная скорость в сифоне $V = 0,8 - 1$ м/сек. Превосходить предел 1 м/сек не рекомендуется, т. к., согласно ф-ле (103), увеличивается v_{ac} .

Дюкер—это трубопровод, расположенный в месте пересечения водовода с рекой, под дном последней. Дюкер—обратный сифон. Дюкеры бывают напорные и безнапорные. Напорные дюкеры рассчитываются по общему методу напорных трубопроводов, безнапорные—как каналы (см. ниже).

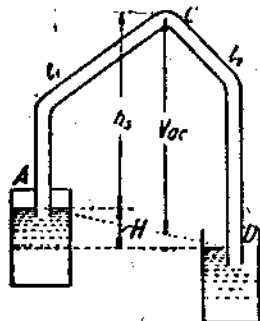
Напорная труба под насыпью. Расчет напорной трубы сводится к определению диаметра ее D и H при данных Q , l и H_s (черт. 37). Задавая наибольшую допустимую скоростью V (на основании особых инструкций НКПС и пр.), определяют из соотношения $Q = \frac{\pi D^2}{4} V$ ΦD , определяют дальше μ_s из ур-ня (93):

$$\mu_s = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{\text{сх.}} + \epsilon_{\text{сх.}} + \lambda \frac{l}{d}}}$$

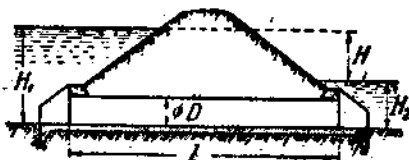
при $\epsilon_{\text{сх.}} = 0,5$ $\epsilon_{\text{сх.}} = 1$, после чего из $H = H_1 - H_2 = \frac{V^2}{\mu_s^2 2g}$ находится:

$$H_1 = H_s + \frac{V^2}{\mu_s^2 2g} \quad (105)$$

Если из ур-ня (105) H , слишком большая величина, то, исходя из допустимого H_1 , аналогично задаче (б) сифона, определяют D .



Черт. 36.



Черт. 37.

Пример. Высота насыпи $H = 6$ м, расход $Q = 5$ м³/сек. Глубина воды перед трубой $H_1 < 3$ м, $H_2 = 1$ м, предельная скорость $v < 5$ м/сек. Опред. Φ железобетонной трубы при длине $l = 30$ м.

$$\text{Определяем } D = \sqrt{\frac{Q \cdot 4}{v \cdot \pi}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 4}{5 \cdot \pi}} = 1,13 \text{ м.}$$

Примем $D = 1,2$ м, тогда по ур-нию (93):

$$\Sigma \xi = \xi_{\text{вх.}} + \xi_{\text{вых.}} = 0,5 + 1 = 1,5.$$

$\lambda = 0,02$ (принимается для предварительных подсчетов железобетона, чугуна и бетона; для стальных железных $\lambda = 0,025$).

$$\mu_s = \frac{1}{\sqrt{1,5 + 0,02 \cdot \frac{30}{1,2}}} = 0,71.$$

По формуле (105):

$$H_1 = H_2 + \frac{Q^2}{\omega^2 \mu_s^5 \cdot 2g} = 1 + \frac{25}{\left(\frac{\pi \cdot 1,2^2}{4}\right)^2 \cdot 0,71^5 \cdot 2 \cdot 9,81} = 1 + 1,97 \approx 3 \text{ м.}$$

Если принять $\Phi D = 1$ м, то:

$$\mu_s = \frac{1}{\sqrt{1,5 + 0,02 \cdot \frac{30}{1}}} = 0,69,$$

следовательно:

$$H_1 = 1 + \frac{25}{\left(\frac{\pi \cdot 1}{4}\right)^2 \cdot (0,69)^5 \cdot 19,62} = 5,3 > \text{допуст. } 5 \text{ м.}$$

$D = 1200$ мм, взятый с нек-рым запасом, оставляем как принятый.

§ 11. Гидравлический удар в трубопроводах.

При быстром закрытии отверстия в трубопроводах происходит повышение давления в протекающей в ней жидкости.

По ф-ле проф. Н. Е. Жуковского давление p (в *атм*) независимо от длины трубы выражается:

$$p = \frac{\gamma \lambda v}{g}, \quad (106)$$

где γ —удельный вес, λ —скорость ударной волны, v —скорость движения воды в трубе до закрытия крана, g —ускорение силы тяжести. Скорость ударной волны, учитывая при ударе сжатие воды и растяжение металлических стенок трубы:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \left(\frac{1}{E_{\text{воды}}} + \frac{D}{E_{\text{тр.}} \cdot \delta} \right)}}, \quad (107)$$

где D — Φ трубы, ρ_0 —плотность до удара, δ —толщина стенок, $E_{\text{воды}}$ и $E_{\text{тр.}}$ —модуль Юнга; $E_{\text{воды}} = 21\,000$ кг/см².

Для чугунных труб:

$$\begin{aligned} \text{при } D = 2'' \quad \lambda &= 1348 \text{ м;} \\ \text{» } D = 4'' \quad \lambda &= 1289 \text{ »} \\ \text{» } D = 6'' \quad \lambda &= 1255 \text{ »} \\ \text{» } D = 24'' \quad \lambda &= 913 \text{ »} \end{aligned}$$

Для ослабления гидравлического удара применяют водовыпускные краны и задвижки, допускающие медленное закрытие.

Время этого закрытия t может определяться из ф-лы:

$$t = \frac{p}{P_{\text{доп.}}} \cdot \frac{2L}{\lambda}, \quad (108)$$

где p определяется по ф-ле (106), $p_{\text{доп.}}$ — наибольшее допустимое повышение давления против гидростатического, $\frac{2L}{\lambda}$ — время двойного пробега ударной волной длины трубы L .

Пример. $p = 17 \text{ atm}$, $p_{\text{доп.}} = 1 \text{ atm}$, $\frac{2L}{\lambda} = 1.15 \text{ сек.}$

$$t = \frac{17}{1} \cdot 1.15 = 19.7 \text{ сек.}$$

По Алливи, величина H переменного напора в трубе на расстоянии x от задвижки и при скорости v в данном сечении:

$$H = H_0 + \frac{\lambda}{g} (v_0 - v), \quad (109)$$

где H_0 — первоначальный напор в трубе при установившемся движении жидкости в том же сечении, v_0 — первоначальная скорость там же.

При $v = 0$ ф-ла (109) соответствует ф-ле (106):

$$p = \gamma (H - H_0) = \frac{\gamma v_0}{g}.$$

По Алливи время закрытия t , при котором повышение давления у задвижки не превосходит значения H_1 :

$$t = \frac{Lv_0}{g(H_1 - H_0)} \sqrt{\frac{H_1}{H_0}}. \quad (110)$$

Пример. $L = 4600 \text{ м}$, $v_0 = 1.1 \text{ м/сек}$, $H_0 = 30 \text{ м}$, $H_1 = 40 \text{ м}$, $t = 51.6 \text{ сек.}$

О влиянии рода материала и др. факторов на величину скорости распространения гидравлического удара, в частности в трубопроводах металлических и железобетонных, см.: Ермолов и Смирнов (под руководством и редакцией проф. Н. И. Амисимова) — Железобетонные напорные трубопроводы. ГНТИ. 1932.

Равномерное движение в открытых руслах и безнапорных трубопроводах.

§ 1. Каналы.

При безнапорном движении поток имеет свободную поверхность, $I = i$ (пьеометрический уклон = уклону дна).

Основные ф-лы — (40) и (49).

Для определения C в открытых руслах наиболее распространенной и проверенной служит ф-ла Базена, а также ф-лы Гангиле и Куттера:

$$C = \frac{23 + \frac{1}{n} + \frac{0.00055}{I}}{1 + \left(23 + \frac{0.00055}{I}\right) \frac{n}{\sqrt{R}}} \quad (111)$$

для метровых размеров. Предпочтительность этой последней формулы пред формулой Базена установлена при $R > 3 \text{ м}$. При уклоне $I < 0.0005$ можно пользоваться сокращенной ф-лой Гангиле и Куттера для метровых размеров:

$$C = \frac{23 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{23n}{\sqrt{R}}} \quad (112)$$

т. к. в ф-ле (111) влиянием I можно пренебречь.

Табл. 32. Значения коэф-та шероховатости λ по Ф-ле Гангилье и Куттера.

№	Род стенки	λ	$\frac{1}{\lambda}$
1	Поверхности, покрытые эмалью или глазурью. Весьма тщательно остроганные доски, хорошо пригнанные	0,009	111,1
2	*Струганные доски. Штукатурка из чистого цемента	0,010	100,0
3	Цементная штукатурка ($\frac{1}{2}$ песку). Чистые (новые) гончарные, чугунные и железные трубы, хорошо уложенные и соединенные	0,011	90,9
4	*Неструганные доски, хорошо пригнанные. Водопроводные трубы в нормальных условиях, без заметной инкрустации; весьма чистые водосточные трубы, весьма хорошая бетонировка	0,012	83,3
5	*Тесовая кладка, весьма хорошая кирпичная кладка. Водосточные трубы в нормальных условиях; несколько загрязненные водопроводные трубы. Неструганные доски, не вполне тщательно пригнанные	0,013	76,9
6	*«Загрязненные» трубы (водопроводные и водосточные); средняя кирпичная кладка; бетонировка каналов в средних условиях	0,014	71,4
7	Грубая кирпичная кладка; каменная кладка (не тесовая) с чистой отделкой поверхностей при ровном постелистом камне. Чрезвычайно загрязненные водостоки. Брезент по деревянным рейкам	0,015	66,7
8	*Обыкновенная бутовая кладка в удовлетворительном состоянии; старая (расстроенная) кирпичная кладка; сравнительно грубая бетонировка. Гладкая, весьма хорошо разработанная скала	0,017	58,8
9	Каналы, покрытые толстым, устойчивым илстым слоем; каналы в плотном лесе и плотном медком гравии, затянутые сплошной илистой пленкой (при всем том — в безукоризненном состоянии)	0,018	55,6
10	Очень грубая бутовая кладка; сухая кладка из крупных камней; булыжная мостовая. Каналы, чисто высеченные в скале. Каналы в лесе, плотном гравии, плотной земле, затянутые илистой пленкой (в нормальном состоянии)	0,020	50,0
11	Мостовая из крупного рваного камня, с резко выступающими углами; каналы в скале при посредственной обработке поверхности; каналы в плотной глине. Каналы в лесе, гравии, земле, затянутые несплошной (местами прерываемой) илистой пленкой. Большие земляные каналы, находящиеся в условиях содержания и ремонта выше средних	0,0225	44,4
12	*Большие земляные каналы в средних условиях содержания и ремонта и малые—в хороших. Реки и ручьи в благоприятных условиях со свободным течением, без засорения и значительных водорослей	0,025	40,0
13	Земляные каналы: большие—в условиях ниже среднего, малые—в средних	0,0275	36,4
14	*Каналы и реки в сравнительно плохих условиях (напр., местами с водорослями и булыжником или заметно заросшие травой, с местными обвалами откосов и т. д.)	0,030	33,3
15	Каналы и реки, находящиеся в весьма плохих условиях, с неправильным профилем, значительно засоренные камнями и водорослями и проч. . . .	0,035	28,6
16	То же—в исключительно плохих условиях (обломки скалы и крупные камни по руслу, густые корни, значительные промоины и обвалы, заросли камыша)	0,040	25,0

* Коэф-ты даны авторами формул, остальные—позднейшими исследователями.

Примечание. Коэф-т λ может доходить до 0,5 в болотистых заросших руслах (см.: проф. Брудастов, Осушение болот и регулирование водоприемников, 2-е изд. 1931 г.).

Табл. 33. Значения коэф-та С по формуле Ганганы и Куттера.

Коэф-т	Гидрал., радиус в м	Уклоны I						Коэф-т	Гидрал., радиус в м	Уклоны I					
		0,000025	0,000050	0,0001	0,0002	0,0004	0,001			0,000025	0,000050	0,0001	0,0002	0,0004	0,001
0,010	0,05	38	44	51	54	56	57	0,025	0,05	12	13	15	16	17	18
	0,10	49	56	61	65	68	70		0,10	17	18	19	20	21	22
	0,20	63	70	74	77	78	79		0,20	22	23	24	25	26	27
	0,30	72	77	81	84	85	86		0,30	26	28	29	30	30	31
	0,50	83	86	88	90	91	91		0,50	31	32	33	34	34	35
	1,00	100	100	100	100	100	100		1,00	40	40	40	40	40	40
	2,00	115	111	109	107	106	105		2,00	50	48	47	46	45	45
	3,00	124	117	113	111	110	109		3,00	56	53	51	49	48	47
	5,00	134	123	118	115	113	112		5,00	64	59	54	53	52	50
	15,00	151	135	125	121	118	117		15,00	81	71	63	59	57	55
0,013	0,05	26	31	35	38	40	41	0,030	0,05	10	11	12	13	13	14
	0,10	36	40	44	47	49	50		0,10	13	14	15	16	17	18
	0,20	46	50	53	56	58	59		0,20	18	19	19	20	21	22
	0,30	53	57	60	63	64	65		0,30	21	22	23	24	24	25
	0,50	62	65	67	69	69	70		0,50	25	26	27	27	28	29
	1,00	77	77	77	77	77	77		1,00	33	33	33	33	33	33
	2,00	90	87	85	84	83	82		2,00	42	41	40	40	39	38
	3,00	99	94	89	88	87	86		3,00	48	45	43	42	42	41
	5,00	108	100	93	91	90	89		5,00	56	51	47	45	44	43
	15,00	125	114	102	98	96	94		15,00	72	62	55	52	51	48
0,017	0,05	19	22	24	26	28	29	0,035	0,05	8	9	9	10	10	11
	0,10	25	29	32	34	35	36		0,10	11	12	12	13	13	14
	0,20	34	37	39	41	42	42		0,20	15	16	16	17	17	18
	0,30	40	43	45	46	47	47		0,30	18	19	19	20	20	21
	0,50	47	49	50	51	51	52		0,50	22	23	23	23	24	24
	1,00	58	58	58	58	58	58		1,00	29	29	29	29	29	29
	2,00	71	69	67	66	65	64		2,00	36	35	34	34	33	33
	3,00	78	74	71	70	69	68		3,00	42	40	38	37	36	36
	5,00	87	79	75	73	72	71		5,00	49	45	43	42	41	40
	15,00	105	90	83	79	77	76		15,00	65	56	51	47	45	43
0,020	0,05	15	18	20	21	23	23	0,040	0,05	6	7	7	8	8	9
	0,10	21	23	25	28	29	29		0,10	9	10	11	11	12	12
	0,20	28	30	32	34	35	36		0,20	13	14	14	15	15	16
	0,30	33	35	37	38	39	40		0,30	15	16	17	18	18	19
	0,50	40	41	42	43	43	44		0,50	19	19	20	20	21	21
	1,00	50	50	50	50	50	50		1,00	25	25	25	25	25	25
	2,00	61	59	57	56	55	54		2,00	32	31	31	30	30	29
	3,00	69	64	61	59	59	58		3,00	37	35	34	33	33	32
	5,00	76	70	66	63	62	61		5,00	44	41	39	38	37	36
	15,00	94	81	74	70	68	66		15,00	59	52	46	43	42	40

Ф-ла Базена для метровых размеров:

$$C = \frac{87}{1 + \frac{1}{\sqrt{R}}}$$

Табл. 34. Значения γ по Ф-ле Базена.

№ катег.	Род отделки стенок русла	γ
1	Очень гладкие стенки (строганные доски, гладкая цементная штукатурка и т. д.)	0,06
2	Гладкие стенки (нестроганные доски, тесовая и кирпичная кладка, бетонные и чугунные трубы, весьма хорошая бетонировка и др.)	0,16
3	Негладкие стенки (хорошая бутовая кладка, посредственная бетонировка)	0,46
4	Грубо обработанные стенки (грубая бутовая кладка, весьма грубая бетонировка по скале, замощение булыжником, стенки в плотных землястых грунтах, притом весьма хорошо содержимые, стенки, чисто высеченные в скале)	0,85
5	Земляные стенки в обычном состоянии (сюда же мощные, но несколько заросшие и т. п.)	1,30
6	Земляные русла, оказывающие особенно сильное сопротивление (при плохом содержании, значительных водорослях, скалистом с валунами или крупногалечном дне и пр.)	1,75

Табл. 35. Значения C по Ф-ле Базена.

R	γ						R	γ					
	0,06	0,16	0,46	0,85	1,30	1,75		0,06	0,16	0,46	0,85	1,30	1,75
0,05	68,5	50,7	28,4	18,1	12,8	9,9	1,00	82,0	75,0	59,6	47,0	37,8	31,6
0,10	73,1	57,7	35,5	23,6	17,0	13,3	1,50	82,9	76,9	63,2	51,3	42,2	35,8
0,15	75,3	61,5	39,7	27,2	19,9	15,8	2,00	83,4	78,1	65,6	54,3	45,3	38,9
0,20	76,7	64,1	42,9	30,0	22,3	17,7	3,00	84,0	79,6	68,7	58,3	49,7	43,3
0,25	77,6	65,9	45,3	32,2	24,2	19,3	4,00	84,4	80,5	70,7	61,0	52,7	46,4
0,30	78,4	67,3	47,3	34,1	25,8	20,7	5,30	84,7	81,2	72,1	63,0	55,0	48,3
0,35	79,0	68,4	48,8	35,7	27,2	22,0	6,90	84,9	81,6	73,2	64,6	56,8	50,7
0,40	79,4	69,4	50,4	37,1	28,5	23,1	7,90	85,0	82,0	74,1	65,8	58,3	52,3
0,45	79,8	70,2	51,6	38,4	29,6	24,1	8,90	85,2	82,3	74,8	66,9	59,6	53,7
0,50	80,2	70,9	52,7	39,5	30,6	25,0	9,90	85,3	82,6	75,4	67,8	60,7	54,9
0,60	80,7	72,1	54,5	41,4	32,5	26,7	19,93	85,3	83,8	75,9	68,5	61,6	56,0
0,70	81,1	73,0	56,1	43,1	34,1	28,1	15,00	85,6	83,5	77,7	71,8	65,1	59,9
0,80	81,5	73,8	57,4	44,5	35,5	29,4	20,00	85,8	84,0	78,3	73,0	67,3	62,5
0,90	81,8	74,4	58,6	45,9	36,7	30,6	—	—	—	—	—	—	—

Вычисленная по Ф-лам скорость течения воды в канале проверяется на размывание и заиление:

$$v_{разм.} > v > v_{заи.}$$

$v_{разм.}$ — размывающая скорость, т. е. скорость, при к-рой ложе и откосы земляных каналов размываются (значение $v_{разм.}$ определяется обычно инструкциями).

$v_{заи.}$ — скорость, при к-рой происходит заиление канала благодаря отложению наносов из потока.

Ф-ла Кеннеди:

$$v_{заи.} = a \cdot h^{0.44}, \quad (118)$$

где h — глубина воды в канале, a — коэф-т, определяемый из таблицы 36.

Табл. 36. Значения a по Ф-ле Кеннеди.

Характер наносов	a	Характер наносов	a	Характер наносов	a
Легкий ил для $h = 0,3$ м.	0,45	Мелкий песок для $h = 0,67-2,13$. .	0,62	Очень крупный песок для $h = 0,67-2,13$ м. . .	0,73
Очень мелкий песок для $h = 0,67-2,13$	0,66	Крупный песок для $h = 0,67-2,13$. .	0,68		

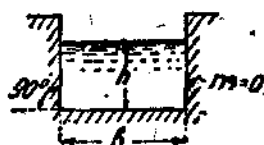
Более подробные сведения можно найти: проф. Бахметьев — О равномерном движении жидкостей в каналах и трубах. Ленинград, 1929 г., стр. 204, и Анализ критич. скоростей инж. А. А. Чебоксарова, «Г. протехника», изд. «Нов. агроном», 1929—1930, стр. 119.

§ 2. Гидравлические элементы канала.



Черт. 38.

h — глубина воды в канале;
 b — ширина по дну канала;
 $m = \text{ctg } \alpha$ — коэф-т откоса;



Черт. 39.

Сечение $\omega = b(b + mh)$;
 смачиваемый периметр $\chi = b + 2h\sqrt{1+m^2}$;
 гидравл. радиус $R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{b + 2h\sqrt{1+m^2}}{b + 2h\sqrt{1+m^2}}$.



Черт. 40.

Для прямоугольного профиля (черт. 39) $m = 0$, а для треугольного: $b = 0$ (черт. 40).

Табл. 37.

m	0	1/8	3/8	1	1 1/8	1 1/2	1 3/4	2	2 1/8	3
$2\sqrt{1+m^2}$	2,0	2,34	2,5	2,83	3,2	3,61	4,03	4,47	5,39	6,33

Гидравлически наимыгоднейшим сечением называется такое, в к-ром при заданных Q и i получается наименьшая площадь сечения ω , а след. наибольшая скорость V .

Следует помнить, что гидравлически «наимыгоднейшее сечение» не является «наимыгоднейшим» в смысле строительной и эксплуатационной стоимости. Гидравлически «наимыгоднейшие» сечения иногда дают большие глубины.

Условие гидравлически «наимыгоднейшего» сечения для прямоугольного сечения: $h = 0,5b$, для трапециoidalного: $R = \frac{h}{2}$.

§ 3. Определение сечения трапециoidalного канала по данным Q и i .

Задача может иметь бесчисленное множество решений. Для определенности решения необходимо задаться: а) либо h , б) либо b , в) либо $\frac{b}{h}$.

а) Известно h , определяемое техническими соображениями. Задаемся $b = b_1$ и определяем Q . Если значение Q_1 близко к заданному Q , то составляют значение b_1 , в противном случае расчет повторяют.

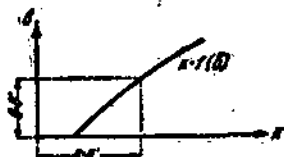
б) Зная b , задаемся $h = h_1$ и определяем Q_1 . Дальше порядок расчета аналогичен предыдущему случаю.

в) При $\frac{b}{h} = \beta$, $b = \beta h$ задаемся $h = h_1$ и вопрос сводим к одному из первых двух случаев.

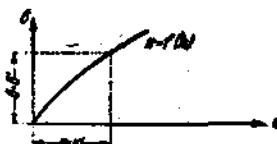
Метод подбора сечения — длинный и кропотливый. Имеются таблицы площади сечения (ω) и смачиваемых периметров (X) при разных b и h , а также и номограммы для различных n . Все это ускоряет решение.

§ 4. Метод проф. Бахметьева расчета каналов.

Введя «модуль расхода» $K = \frac{Q}{\sqrt{i}}$, где $K = C\omega\sqrt{R}$, по заданным Q и i определяют $K = K'$. Для случая «а» задаются значениями $b = b_1$, $b = b_2$, $b = b_3$ и т. д., по данному h определяются ω и R , а след., и ряд значений K .



Черт. 41.



Черт. 42.

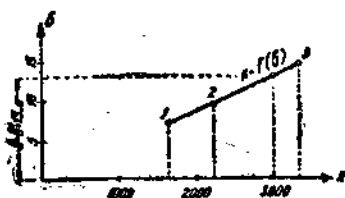
Строится кривая $K = f(b)$, по к-рой, зная $K = K'$, определяем искомое $b = b_1$ (черт. 41).

Для случая «б», задаваясь значениями $h = h_1$, $h = h_2$ и т. д., определяем при заданном b значения ω , R и K и строим график $K = f(h)$ (черт. 42). Данному значению K соответствует искомое значение $h = h'$.

Для случая «в» задача решается аналогично.

Определяемая скорость потока $V = \frac{Q}{\omega}$ должна удовлетворять эксплуатационным требованиям канала для целей осушения, судоходства и пр.; в этих отделах и приводятся значения V .

Пример. $Q = 21 \text{ м}^3/\text{сек}$, $i = 0,00005$, $h = 3 \text{ м}$. Определить размеры для трапециoidalного земляного канала $m = 1,5$, $n = 0,025$, $K = \frac{21}{0,007} = 300 \text{ м}^3/\text{сек}$.



Черт. 43.

Задавая значения $b = 7,5 \text{ м}, 10 \text{ м}, 15 \text{ м}$; свведя значения ω, χ, R и K в таблицу, находим C .

$$h = 3 \text{ м.}$$

b м	ω м ²	χ м	R м	C	K м ³ /сек
7,5	36	29,16	1,23	42	1 663,2
10	43,5	31,66	1,34	43	2 244,0
15	56,5	36,66	1,60	44	3 351,4

Строим по точкам кривую $K = f(b)$ и определяем искомое значение $b = 13 \text{ м}$ при $K = 3 000 \text{ м}^3/\text{сек}$ (черт. 43).

§ 5. Составные профили.

«Составной» профиль ясен из черт. 44. Составные части I, II, III имеют различные гидравлические свойства. Подобные случаи бывают при разливе реки, где коренное русло резко выделяется среди поймы. С «составными» профилями приходится встречаться также при выправлении и обваловании рек. Проф. Бахметьев полагает, что «за неимением достаточных опытных данных о взаимодействии течения по плоскостям раздела за надо считать, что движения на отдельных участках (I, II, III) совершенно независимы, тем самым общая пропускная способность K равна сумме пропускных способностей, вычисленных для отдельных участков:

$$K = 2K_1. \quad (119)$$

Если русло широкое прямоугольного сечения, то:

$$R \approx h; \quad (120)$$

для параболического сечения:

$$R = \frac{2}{3} h; \quad (121)$$

при $B =$ ширине поверхности ищем:

$$Q = BhC\sqrt{hi} = CBh^{\frac{5}{2}}i^{\frac{1}{2}} \text{ для прямоугольного русла; } \quad (122)$$

$$Q = \frac{2}{3} BhC\sqrt{\frac{2}{3} hi} \approx 0,55 CBh^{\frac{5}{2}}i^{\frac{1}{2}} \text{ для параболического русла. } \quad (123)$$

Для естественных русел большим распространением при определении V пользуется ф-ла Германека, и в последнее время ф-ла Линдбо.

Ф-ла Германека:

$$\left. \begin{aligned} h < 1,5 \text{ м: } V &= 30,7 \sqrt{h_{cp}} \sqrt{h_{cp} i} \\ 1,5 < h < 6 \text{ м: } V &= 34 \sqrt[4]{h_{cp}} \sqrt{h_{cp} i} \\ h > 6 \text{ м: } V &= (50,2 + 0,5h_{cp}) \sqrt{h_{cp} i} \end{aligned} \right\} \quad (122')$$

где $h_{cp} = \frac{\omega}{B}$ и называется «средней глубиной».

Проф. Форхеймер предложил несколько видоизменений в ф-ле (122') при $h > 6 \text{ м}$:

$$v = 44,5h_{cp}^{0,1} \sqrt{h_{cp} i}.$$



Черт. 44.

Табл. 38. Значения V по ф-ле Липинба.

$i < 0,6 \text{ м/км}$	
$\frac{h_{cp}}{B} < 0,028$	$\frac{h_{cp}}{B} > 0,028$
$h_{cp} < 1,12 \text{ м}$	$V = 23,37 \cdot \left(0,822 - \frac{h_{cp}}{B}\right) h_{cp}^{0,9} i^{0,43}$ $V = 8,10 \cdot \left(2,293 - \frac{h_{cp}}{B}\right) h_{cp}^{0,9} i^{0,43}$
$1,12 \text{ м} < h_{cp} < 3,65 \text{ м}$	$V = 24,11 \cdot \left(0,822 - \frac{h_{cp}}{B}\right) h_{cp}^{0,94} i^{0,43}$ $V = 8,45 \cdot \left(2,293 - \frac{h_{cp}}{B}\right) h_{cp}^{0,94} i^{0,43}$
$h_{cp} > 3,65 \text{ м}$	$V = 27,45 \cdot \left(0,822 - \frac{h_{cp}}{B}\right) h_{cp}^{0,94} i^{0,43}$ $V = 9,62 \cdot \left(2,293 - \frac{h_{cp}}{B}\right) h_{cp}^{0,94} i^{0,43}$
$0,6 \text{ м/км} < i < 0,5 \text{ м/км}$	
$h_{cp} < 1,12 \text{ м}$	$V = 33,86 \cdot \left(0,822 - \frac{h_{cp}}{B}\right) h_{cp}^{0,9} i^{0,47}$ $V = 11,86 \cdot \left(2,293 - \frac{h_{cp}}{B}\right) h_{cp}^{0,9} i^{0,47}$
$1,12 \text{ м} < h_{cp} < 3,65 \text{ м}$	$V = 34,94 \cdot \left(0,822 - \frac{h_{cp}}{B}\right) h_{cp}^{0,94} i^{0,47}$ $V = 12,24 \cdot \left(2,293 - \frac{h_{cp}}{B}\right) h_{cp}^{0,94} i^{0,47}$
$h_{cp} > 3,65 \text{ м}$	$V = 39,77 \cdot \left(0,822 - \frac{h_{cp}}{B}\right) h_{cp}^{0,94} i^{0,47}$ $V = 13,04 \cdot \left(2,293 - \frac{h_{cp}}{B}\right) h_{cp}^{0,94} i^{0,47}$
Границы применения ф-лы:	$h_{cp} < 0,12; i < 5 \text{ м/км}$

Ф-ла Линдбо:

$$V = K \left(m + \frac{h_{cp}}{B} \right) h_{cp}^n R, \quad (122')$$

где K , m , n и r — постоянные величины.В настоящее время для определения V пользуются показательными ф-лами, различными для каждого потока или части потока.

§ 6. Расчет закрытых каналов.

Круглые каналы (черт. 46).

$$\omega = \frac{D^3}{8} (\varphi - \sin \varphi); \quad (124)$$

$$\chi = \frac{\varphi D}{2}; \quad (125)$$

$$R = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\sin \varphi}{\varphi} \right) D. \quad (126)$$

 $\xi = \frac{h}{H}$ называется степенью наполнения.

$$V = \frac{1}{2} C \sqrt{1 - \frac{\sin \varphi}{\varphi}} D i; \quad (127)$$

$$Q = \frac{C}{16} \frac{(\varphi - \sin \varphi)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\varphi}} D^{\frac{5}{2}} \sqrt{i}. \quad (128)$$

Следует отметить, что при неизменном профиле и i V и Q с увеличением h сначала увеличиваются, затем несколько уменьшаются. V_{max} при $\varphi = 257^\circ 30'$ и $h = 0,81H$; Q_{max} » $\varphi = 308^\circ$ » $h = 0,95H$.

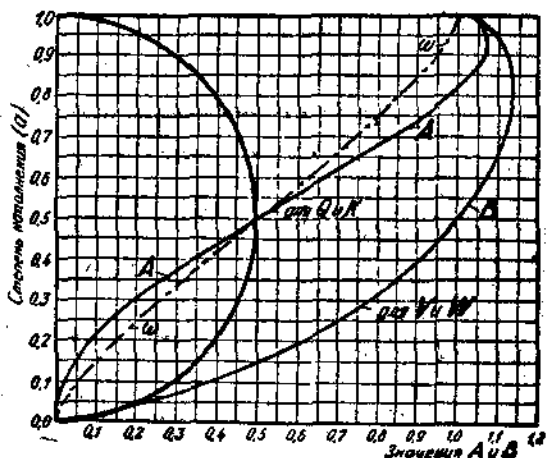
§ 7. Аналитический расчет канализационных труб.

Расчет ведут по различным ф-лам: Гангиле-Куттера (сокращенная), Баазена, Горбачева, Маннинга, Форхеймера и пр.

Проф. Павловский указывает на сокращенную ф-лу Гангиле-Куттера при $n = 0,013$ (в среднем). Проф. А. Я. Милович на основании опытных данных предлагает пользоваться ф-лой Форхеймера (116) при $n = 0,0125$ и $C = \frac{1}{n} R^{0,2}$.

Порядок расчета:

$$K = \frac{Q}{\sqrt{i}} \text{ и } W = \frac{V}{\sqrt{i}},$$

где W наз. «модулем скорости» ($W = C \sqrt{R}$). Про-

Черт. 46.

фессором Павловским составлена таблица K_n и W_n при $\xi=1$, при чем C взято по сокращенным ф-лам Гангилье и Куттера; $n=0,013$. Черт. 46 представляет кривую зависимости Q и K и W и V от степени наполнения (ξ), при чем $K=AK_n$, $W=BW_n$, где K_n и W_n берутся из табл. 39.

Табл. 39. K_n и W_n по сокращенным ф-лам Гангилье и Куттера при $n=0,013$.

D м	W_n м/сек	K_n л/сек	D м	W_n м/сек	K_n л/сек	D м	W_n м/сек	K_n л/сек
0,20	9,64	302,9	0,55	20,38	4 838	1,00	30,99	24 350
0,25	11,26	551,7	0,60	21,70	6 132	1,10	33,09	31 480
0,30	12,86	908,2	0,65	22,97	7 913	1,20	35,07	39 680
0,35	14,48	1 393	0,70	24,27	9 340	1,30	37,04	49 090
0,40	16,12	2 028	0,75	25,52	11 270	1,40	39,05	60 100
0,45	17,76	2 826	0,80	26,81	13 490	1,50	41,02	72 470
0,50	19,09	3 718	0,90	28,94	18 410			

Задача 1. Даны D , ξ и i ; найти Q .

Определяем по табл. 39 K_n и по черт. 46, зная ξ , находим A , след.: $K=AK_n$, $Q=KV/T$.

Определяем по таблице W_n ; $W=W_nB$, где B — из чертежа:

$$V=W/T.$$

Задача 2. Даны ξ , Q и i ; определить D .

Определяем $K=\frac{Q}{V/T}$ и по ξ определяем A , из $K=AK_n$ находится значение K_n , а по табл. подбирается D .

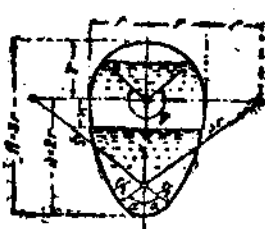
Значения ξ при раздельной сплошной системе для круглых труб Φ D .

D мм	150 — 300	350 — 450	500 — 600	> 600
ξ	0,6	0,6 — 0,66	0,66	0,66 — 0,75

При общей сплавной системе $\xi=1$.

Нормальное овоидальное сечение (3:2) (черт. 47).

$V_{\max}$ при $\varphi=248^\circ 30'$; $Q_{\max}$ при $\varphi=297^\circ 30'$.



Черт. 47.

$$\omega_x = r^2 \left(3,023328 - 9 \cdot \arcsin \frac{x}{3r} \right) + \\ + rx \left[4 - 3 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3r} \right)^2} \right]. \quad (129)$$

$$\chi_x = r \left(4,788296 - 6 \cdot \arcsin \frac{x}{3r} \right). \quad (130)$$

Ф-лы (129) и (130) для любого горизонта воды ниже x пятовой линии; при заполнении канала выше пятовой линии прибавляют к найденным ω_x и χ_x , при $x=0$, еще величины ω и χ для живого сечения выше пятовой линии.

Табл. 40.

При:	Живое сечение ω	Смачив. перим. χ	Гидравл. радиус R	Скорость V	Расход Q
$\alpha = 0$	3,0233 $\sqrt{H}$	4,7883 $\sqrt{H}$	0,6314 $\sqrt{H}$	0,795 C $\sqrt{H}$	2,4 C $\sqrt{H^3}$
$\varphi = 248\frac{1}{2}^\circ$	4,0863 $\sqrt{H}$	5,9839 $\sqrt{H}$	0,6829 $\sqrt{H}$	0,826 C $\sqrt{H}$	3,377 C $\sqrt{H^3}$
$\varphi = 297\frac{1}{2}^\circ$	4,4926 $\sqrt{H}$	6,48052 $\sqrt{H}$	0,6568 $\sqrt{H}$	0,810 C $\sqrt{H}$	3,641 C $\sqrt{H^3}$
$\varphi = 360^\circ$	4,5941 $\sqrt{H}$	7,9299 $\sqrt{H}$	0,5793 $\sqrt{H}$	0,761 C $\sqrt{H}$	3,496 C $\sqrt{H^3}$

Для расширенного и сжатого оvoidного сечения см.: С. Бриллинг — Пособие для проектирования и расчета водопроводных линий. ГИЗ. 1930 г., стр. 168—169.

Истечение жидкостей через отверстия.

§ 1. Отверстие в тонкой стенке с острыми кромками (черт. 48).

а) Истечение в воздух $\frac{\omega_{\text{сж.}}}{\omega} = \alpha$, коэф-т сжатия струи — α ; скорость истечения:

$$V = \varphi \sqrt{2g \left(H + \frac{V_0^2}{2g} \right)}, \quad (131)$$

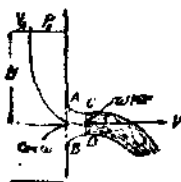
φ — коэф-т скорости; H — напор, V_0 — скорость на поверхности. Потеря на сопротивление при выходе из отверстия:

$$h_{\text{сж.}} = \xi \frac{V^2}{2g}; \quad (132)$$

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi}}. \quad (133)$$

Расход:

$$Q = \omega_{\text{сж.}} V = \alpha \varphi \omega \sqrt{2g \left(H + \frac{V_0^2}{2g} \right)} = \mu \omega \sqrt{2g \left(H + \frac{V_0^2}{2g} \right)}. \quad (134)$$



Черт. 48.

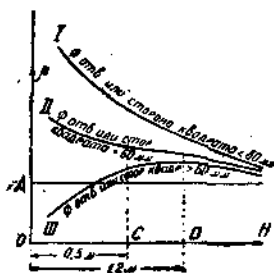
Коэф-т расхода $\mu = \alpha \varphi$. При $V_0 = 0$ ф-ла (134) принимает обычный вид:

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gH}. \quad (135)$$

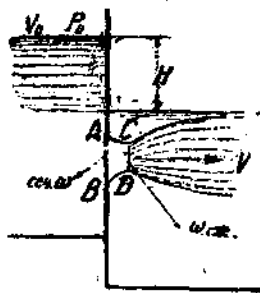
Сечение CD не всегда наименьшее, след. сечение CD — сжатое — определяется как такое, в котором давление $p = p_0$ (атм); тогда часть струи вправо от CD будет состоять из частиц, двигающихся независимо друг от друга.

При круглом сечении среднее значение: $\alpha \approx 0,64$, $\varphi = 0,97$, $\mu = 0,62$, $\xi = 0,06$ при постоянном напоре H .

Значения коэф-та μ меняются в зависимости от формы сечения и напора. На черт. 49 представлены кривые μ , как функции H , и сечения отверстия. $\mu = 0,592$ для круглого отверстия, для квадратного $\mu = 0,592$ при H_{min} , $\mu_{max} = 0,66$ для наименьшего отверстия, $\mu = 0,59$ при H_{min} для наибольшего отверстия. Для прямоугольного сечения μ_{max} для узкой горизонтальной щели, а для узкой вертикальной щели μ_{min} .



Черт. 49.



Черт. 50.

б) Истечение через затопленное отверстие (черт. 50). CD—сжатое сечение, площадь его:

$$\omega_{сж.}, a_{зат.} = \frac{\omega_{сж.}}{\omega}; \quad (136)$$

$$V = \varphi_{зат.} \sqrt{2g \left(H + \frac{V_0^2}{2g} \right)}; \quad (137)$$

$$Q = \mu_{зат.} \omega \sqrt{2g \left(H + \frac{V_0^2}{2g} \right)}. \quad (138)$$

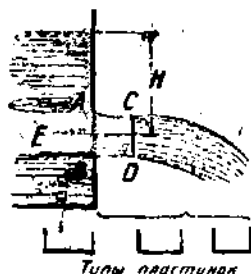
По опытам проф. Ф. Е. Максименко в гидравлической лаборатории МИИТ (1906 — 1916 гг.), коэф-т расхода $\mu_{зат.}$ мало отличается от коэф-та расхода μ при истечении на воздух: в ф-ле (138) меняется лишь значение напора H , к-рый для затопленного отверстия представляет (черт. 50) разность уровней.

След.:

$$a_{зат.} = a; \quad \varphi_{зат.} = \varphi; \quad \mu_{зат.} = \mu. \quad (139)$$

§ 2. Неполное сжатие струи (черт. 51).

Помещенная пластинка BE уничтожает сжатие снизу, благодаря чему сжатое сечение больше, чем в случае отсутствия BE. Такой случай называется неполным сжатием.



Черт. 51.

$$a'_{неп. сж.} = \frac{\omega_{сж.}}{\omega} > a; \quad V = \varphi \sqrt{2g \left(H + \frac{V_0^2}{2g} \right)};$$

$$Q = \mu' \omega \sqrt{2g \left(H + \frac{V_0^2}{2g} \right)}; \quad (140)$$

где $\mu' = a' \varphi > \mu$ при совершенном сжатии.

По Бидону:

$$\mu' = \mu \left(1 + a \frac{p_1}{p} \right), \quad (141)$$

где: p — периметр отверстия, p_1 — периметр той части отверстия, по которой устранено сжатие струи; $a = 0,14$; с увеличением напора a уменьшается; μ — коэф-т расхода при совершенном сжатии.

По Грасхофу:

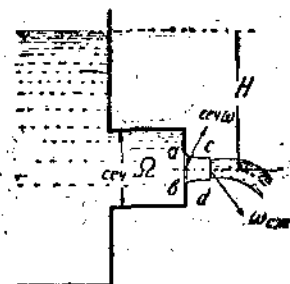
$$\mu' = \mu \left(1 + 0,12 \frac{z}{p} + 0,16 \frac{a}{p} \right), \quad (142)$$

где z — длина одной или двух вертикальных сторон отверстия, смотря по тому, будет ли уничтожено сжатие с одной или с двух сторон, a — ширина сечения, p — периметр отверстия.

По ф-лам Грасхофа следует, что уничтожение сжатия снизу влияет на увеличение μ' больше, чем уничтожение с боков, что и согласуется с опытами и теоретическими положениями.

§ 3. Несовершенное сжатие (черт. 52).

Пластины, поставленные не только у самого края отверстия, но и на нек-ром расстоянии, увеличивают сжатое сечение. Этот случай впервые изучен Вейсбахом и называется несовершенным сжатием:



Черт. 52.

$$\text{пл. } CD = \omega_1 = \omega_2 \omega;$$

$$Q = \mu_0 \omega \sqrt{2g \left(H + \frac{V_0^2}{2g} \right)}, \quad (143)$$

где:

$$\mu_0 = \mu \left[1 + a \left(b \frac{\omega}{\Omega} - 1 \right) \right]. \quad (144)$$

Для круглых отверстий $a = 0,04564$; $b = 14,821$; для прямоугольных отверстий $a = 0,076$; $b = 9,0$.

Несовершенное сжатие получается тогда, когда отверстие ω помещено в поперечной стенке прямоугольного канала. По Вейсбаху:

$$\mu_0 = \mu \left[1 + 0,641 \left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^2 \right]. \quad (145)$$

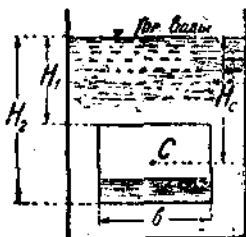
Отношение $\frac{\omega}{\Omega}$ не должно превышать 0,5.

§ 4. Большие отверстия (черт. 53).

Для больших отверстий нельзя считать, что в плоскостях их напоры во всех точках одинаковы, следовательно, приходится для подсчетов разбивать отверстие на элементарные площадки горизонтальными линиями.

Для прямоугольного отверстия:

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} (H_2^{\frac{3}{2}} - H_1^{\frac{3}{2}}). \quad (146)$$



Черт. 53.

Значение μ иное, чем для малых отверстий, и изменяется в зависимости от частных условий.

На практике, по указанию проф. Н. Н. Павловского, часто вычисляют расход Q по ф-ле:

$$Q = \mu_{\text{отв.}} \cdot \omega \sqrt{2gH_0}, \quad (147)$$

где $\mu_{\text{отв.}}$ — коэф-т расхода для «большого отверстия», $H_0 = H_c + \frac{V_0^2}{2g}$, где H_c — напор над ц. т., а V_0 — скорость на свободной поверхности.

Ф-ла (147) служит и для затопленных отверстий, если считать $H_0 = H + \frac{V_0^2}{2g}$, где H — разность уровней.

§ 5. Расчетные формулы.

Проф. Н. Н. Павловский рекомендует для предварительных расчетов отверстий, имеющих сжатие со всех сторон, брать $\mu = 0,6-0,65$, в среднем $\mu = 0,625$; для отверстий, не имеющих сжатия по дну, $\mu = 0,7$. Для более точных подсчетов необходимо вести расчет, согласуясь с особенностями отверстий и руководясь опытными данными.

Более подробные сведения можно найти:
1) Н. Н. Павловский—Гидравлич. справочник;
2) Проф. Максименко—Гидравлика;
3) Проф. Астров—Гидравлика.

Табл. 41. Относительные значения расхода.

μ	Q	μ	Q
0,625	Q	0,80	1,28Q
0,600	0,96Q	0,825	1,32Q
0,650	1,04Q	0,900	1,44Q
0,700	1,12Q	0,950	1,52Q
0,750	1,2Q		

Истечение жидкости через насадки.

Насадка—трубка небольшой длины, в среднем около 4 диам. отверстия, плотно пригнанная к отверстию в баке (или трубе).

Через насадки жидкость вытекает в воздух или в жидкость. Насадки бывают: цилиндрические, конически сходящиеся, расходящиеся и пр.

Ф-лы, определяющие V и Q , остаются те же, что и для отверстия в тонкой стенке [ф-лы (131), (134), (135)], изменяются от типа насадки α , φ , ρ . В цилиндрической и конически расходящейся насадке наблюдается всасывание в трубе насадки. В табл. 42 при вытекании воды из насадки в воздух приведены средние значения коэф-тов. Согласно опытным данным, коэф-ты меняются с изменением сечения насадки и напора; при точных подсчетах это надо учитывать. (Подробнее см.: 1) Проф. Максименко—Гидравлика; 2) Труды МИИТ, вып. XI, ст. инж. М. З. Абрамова, в к-рой имеются подробные опытные данные и список литературы).

§ 1. Выводы.

1. Наибольший расход получается при конически сходящейся насадке и конoidalной.

2. Наибольшая скорость получается при отверстии в тонкой стенке при конически сходящейся и конoidalной насадке.

3. Наибольшая живая сила получается при конически сходящейся и конoidalной насадке; наименьшая живая сила получается при конически расходящейся насадке.

§ 2. Вытекание через затопленные насадки (черт. 55).

Для цилиндрической насадки α , φ , ρ остаются те же. Вакуум получается при $H_1 < 0,75H$; при $H_1 > 0,75H$ вакуума нет. Для параллелепипедных

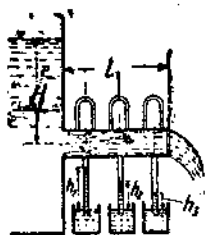
Табл. 52. Методика учета насадки в воздухе.

№ п/п	Тип насадки	Чертеж	α	φ	μ	ξ в ф-ле $K_{\text{ф}} = \xi \frac{V_2}{2g}$	Кэф-т внутр. смазки μ_1	Ва- куум $V_{\text{вас}}$	Живая сила $\frac{1}{2} M V^2$
1	Отверстие в тонкой стенке.	Черт. 54	0,64	0,97	0,625	0,063	—	—	0,583C
2	Цилиндр. насадка Вентури $f = 3d - 4d$	Черт. 55	1	0,82	0,82	0,5	$\frac{1}{1 + \frac{1}{2\mu^2} \frac{H}{H_1}}$	0,75H	0,551C
3	Цилиндр. насадка (короткая) $f = 2d$	Черт. 56	0,64	0,97	0,625	—	Нет	Нет	0,583C
4	Цилиндр. насадка с муф- штуком	Черт. 57	1	0,90	0,90	0,236	Нет	Нет	0,729C
5	Насадка Бордз.	Черт. 58	1	0,71	0,71	1,0	—	—	—
6	Конические сходящиеся на- садка	$\left. \begin{array}{l} \beta = 13^\circ \\ \beta = 5^\circ \\ \beta = 45^\circ \end{array} \right\}$	0,96 1 0,872	0,97 0,92 0,833	0,95 0,92 0,857	0,093 0,182 0,360	Нет	Нет	0,894C 0,779C 0,640C
7	Конически расходящаяся насадка	Черт. 60 $\beta = 5^\circ$ $\beta = 87^\circ$	1 1	0,45 0,244	0,45 0,246	4,0 15,8	$\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2\mu^2} \frac{H}{H_1}} \right)^{\frac{\omega}{\omega_0}}$	1,5H	0,091C
8	Коническая насадка, очер- ченная по форме струи с закруглен. внутр. углом по большому радиусу	Черт. 61	1	0,97	0,97	0,063	—	—	0,913C
9	Брандспойт	Черт. 62	—	—	—	—	—	—	—
10	Головка спринклера	—	—	—	—	—	—	—	—

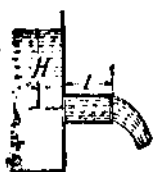
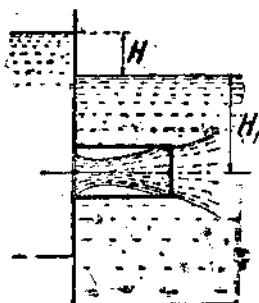
Значения C в табл. — $\frac{1}{\sqrt{2gH^2}}$.
Живая сила $\frac{1}{2} M V^2 = C \mu^2 H^2$.



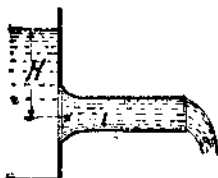
Черт. 54.



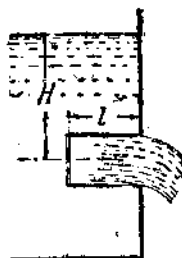
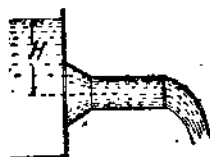
Черт. 55.



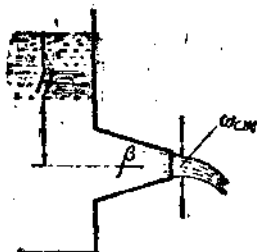
Черт. 56.



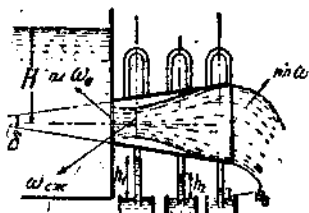
Черт. 57.



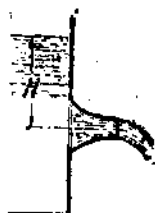
Черт. 58.



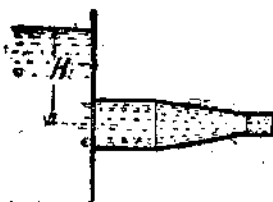
Черт. 59.



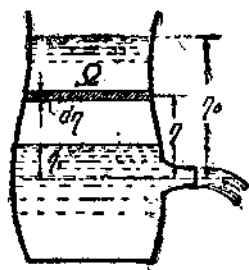
Черт. 60.



Черт. 61.



Черт. 62.



Черт. 63.

насадок в среднем $\varphi = \mu = 0,80$; $\xi = 0,56$. Для затопленных конически расходящихся насадок коэф-ты те же, что и для не затопленных. Аналогично получаются и условия вакуума.

§ 3. Истечение из отверстий и насадок при переменном напоре (черт. 63).

По гипотезе, что «в каждый момент времени t скорость вытекания V при переменном горизонте та же, что и скорость установившегося движения для того же момента»: $V = \varphi \sqrt{2g\eta}$ и $Q = \mu\omega \sqrt{2g\eta}$, где η —напор для момента t .

Время, необходимое, чтобы горизонт η_0 снизился до η :

$$t = \frac{1}{\mu\omega \sqrt{2g}} \int_{\eta_1}^{\eta_0} \frac{\Omega d\eta}{V\eta}. \quad (148)$$

Если $\Omega = \Omega_0 = \text{Const}$, то:

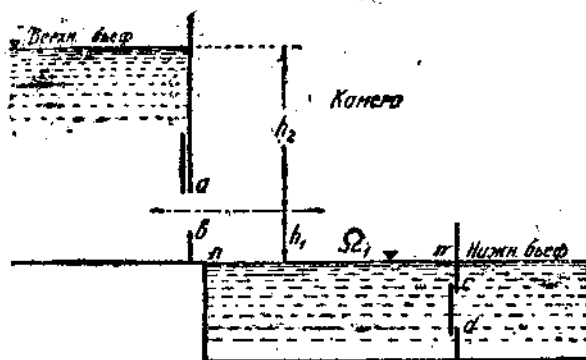
$$t = \frac{2\Omega_0}{\mu\omega \sqrt{2g}} (\sqrt{\eta_0} - \sqrt{\eta_1}). \quad (149)$$

Время опорожнения T получится из ф-лы (149) при $\eta_1 = 0$:

$$T = \frac{2\Omega_0}{\mu\omega} \sqrt{\frac{\eta_0}{2g}}. \quad (150)$$

§ 4. Наполнение и опорожнение плузных камер.

Время наполнения камеры из верхнего бьефа (черт. 64). Горизонт воды в камере равен горизонту нижнего бьефа. Если h_2 —постоянный напор, n —число отверстий, ω —площадь одного отверстия, суммарная площадь



Черт. 64.

отверстий $n\omega$. Время вытекания воды на воздух из верхнего бьефа, т. е. пока горизонт не поднимется до h_1 :

$$t_1 = \frac{\Omega_1 h_1}{\mu n \omega \sqrt{2g h_2}}. \quad (151)$$

После того, как вода в камере дойдет до высоты h_1 , будет истечение через затопленное отверстие,

Время, необходимое для сравнения уровней:

$$t_2 = \frac{2Q_1}{\mu \omega} \sqrt{\frac{h_2}{2g}}. \quad (152)$$

Следовательно, время наполнения:

$$T_1 = t_1 + t_2 = \frac{Q_1}{\mu \omega \sqrt{2gh_2}} (h_1 + 2h_2). \quad (153)$$

Время опорожнения камеры:

Если ω — площадь отверстия, то:

$$T_2 = \frac{2Q_1}{\mu \omega} \sqrt{\frac{h_1 + h_2}{2g}}. \quad (154)$$

По Энгельсу $\mu = 0,6-0,8$ и выбирается соответственно обделке отверстия.

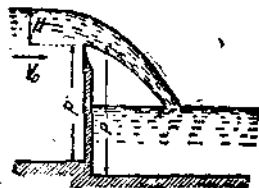
В настоящее время камеры делаются большими и для ускорения наполнения и опорожнения камеры вместо отверстий, при к-рых T_1 и T_2 очень большие, устраивают в обеих сторонах камеры особые каналы с большим поперечным сечением.

Водосливы.

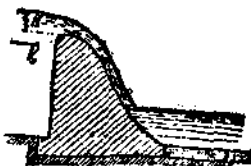
Если струя жидкости свободно переливается через отверстие в стенке, перегородивающей поток, то полученное гидравлическое явление называется истечением через водослив.

§ 1. Классификация водосливов по типу стенок.

- а) Водосливы с тонкой стенкой. б) Водосливы практических профилей.
в) Водосливы с широким порогом.
Важно различать водосливы по типу сопряжения струи с нижней частью потока на: а) не затопленные, б) затопленные. В затопленных водосливах



Черт. 65.



Черт. 66.



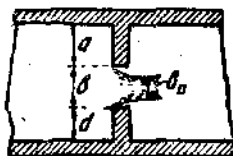
Черт. 67.

низовой уровень оказывает влияние на истечение. Следует различать и способ подвода воды к водосливу, т. е. водосливы с боковым сжатием и без бокового сжатия.

Основная ф-ла водослива:

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} H_0^{\frac{3}{2}} = m b \sqrt{2g} H_0^{\frac{3}{2}}, \quad (155)$$

где: $m = \frac{2}{3} \mu$, $H_0 = H + \frac{V_0^2}{2g}$ (V_0 — скорость под-
хода),



Черт. 68.

Значение коэф-та расхода водослива m удобно выражать через:

$$m = m_r \sigma_f \sigma_H \sigma_n, \quad (156)$$

где: m_r — приведенный коэф-т расхода; при $\sigma_f = \sigma_H = \sigma_n = 1$; $m = m_r$; σ_f — коэф-т формы; σ_H — коэф-т полноты напора; σ_n — коэф-т затопления.

Влияние бокового сжатия можно в ф-ле (155) выразить введением:

$$b_c = b - 0,1nH_0 \text{ — по Френсису,} \quad (157)$$

где n — число отдельных сжатий.

Для сжатия, ослабленного плавной формой устоев и быков плотины или моста, b_c определяется:

$$b_c = b - 0,1\xi nH_0, \quad (158)$$

где ξ — коэф-т уменьшения к ф-ле Френсиса.

При очертании голов быков: а) прямоугольного $\xi = 1$; б) полуциркульного $\xi = 0,7$; в) криволинейного заостренного $\xi = 0,4$. Если водослив разбивается по ширине на ряд мелких частей при помощи стоек, то полагают $b_c = \epsilon b$, где $\epsilon = 0,95 \text{ — } 0,85$, в зависимости от степени стеснения потока стойками и от плавности очертания стоек.

$$Q = m b_c \sqrt{2g} H_0^{\frac{3}{2}} \quad (159)$$

будет общей ф-лой водослива, где m определяется для каждого водослива отдельно. Обозначая $m \sqrt{2g} = M$, получим:

$$Q = M b_c H_0^{\frac{3}{2}}. \quad (160)$$

§ 2. Водослив в тонкой стенке.

Прямоугольный водослив (черт. 65) со свободной струей (под струю обеспечен доступ воздуха):

$$Q = m_0 b \sqrt{2g} H^{\frac{3}{2}}, \quad (161)$$

Табл. 43. Значения m_0 для формулы Базена истечения через водослив.

Напор H м	Высота стенки водослива p' м									
	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,80	1,00	1,50	2,00	∞
0,05	0,458	0,453	0,451	0,450	0,449	0,449	0,449	0,448	0,448	0,448
0,06	0,456	0,450	0,447	0,445	0,445	0,444	0,443	0,443	0,443	0,443
0,08	0,456	0,447	0,443	0,441	0,440	0,438	0,438	0,437	0,437	0,436
0,10	0,459	0,447	0,442	0,439	0,437	0,435	0,434	0,433	0,433	0,432
0,12	0,462	0,448	0,442	0,438	0,436	0,433	0,432	0,430	0,430	0,429
0,14	0,466	0,450	0,443	0,438	0,435	0,432	0,430	0,428	0,428	0,427
0,16	0,471	0,453	0,444	0,438	0,435	0,431	0,429	0,427	0,426	0,425
0,18	0,475	0,456	0,446	0,439	0,435	0,431	0,428	0,426	0,425	0,423
0,20	0,480	0,459	0,447	0,440	0,436	0,431	0,428	0,425	0,423	0,421
0,22	0,484	0,462	0,449	0,442	0,437	0,431	0,428	0,424	0,423	0,420
0,24	0,488	0,465	0,452	0,444	0,438	0,432	0,428	0,424	0,422	0,419
0,26	0,492	0,468	0,455	0,446	0,440	0,432	0,429	0,424	0,422	0,419
0,28	0,496	0,472	0,457	0,448	0,441	0,433	0,429	0,424	0,422	0,418
0,30	0,500	0,475	0,460	0,450	0,443	0,434	0,430	0,424	0,421	0,417
0,35	—	0,482	0,465	0,455	0,447	0,437	0,431	0,424	0,421	0,416
0,40	—	0,489	0,472	0,459	0,451	0,440	0,433	0,424	0,421	0,414
0,45	—	0,495	0,477	0,464	0,455	0,442	0,435	0,425	0,421	0,413
0,50	—	—	0,482	0,468	0,459	0,445	0,437	0,426	0,421	0,412
0,60	—	—	0,490	0,476	0,466	0,451	0,441	0,427	0,421	0,409
0,70	—	—	0,498	0,484	0,473	0,456	0,446	0,430	0,423	0,408

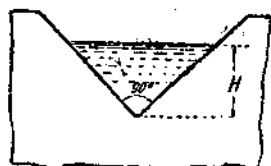
где для случая без бокового сжатия по Базену для метровых размеров:

$$m_0 = \left(0,405 + \frac{0,003}{H}\right) \left[1 + 0,55 \frac{H^2}{(H + p)^2}\right]. \quad (162)$$

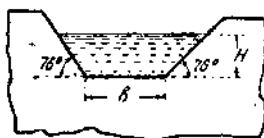
При наличии бокового сжатия b_c в ф-ле (159) можно определять по ф-ле (157), в случае одностороннего сжатия $n = 1$ и для сжатия с двух сторон $n = 2$ при $b < \frac{H}{3}$.

Для сечения прямоугольного тр-ка водослива (Томсона) $m_0 = 0,316$ (черт. 69), для трапециoidalного при угле $\alpha = 76^\circ$ (Чиолетти) $m_0 = 0,42$ (черт. 70), следовательно, в случае прямоугольного тр-ка для водослива Томсона:

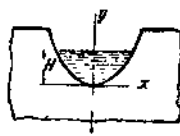
$$Q = 0,316 \sqrt{2g} H^{\frac{5}{2}}; \quad (163)$$



Черт. 69.



Черт. 70.



Черт. 71.

Чиолетти: при $\alpha = 76^\circ$:

$$Q = 0,42b \sqrt{2g} H^{\frac{5}{2}}. \quad (164)$$

Параболический водослив (черт. 77):

$$Q = kH^3,$$

где k по опытам Greve — постоянная величина для каждого профиля.

(Ур-не параб. $x^2 = 2py$); $m_0 = \frac{k}{\frac{\pi}{2} \sqrt{2g}}$.

В ф-лах (163) и (164) Q — в $\text{м}^3/\text{сек}^3$, если g , A , b в м .

§ 3. Затопленный водослив с тонкой стенкой (черт. 72).

Условие затопленного водослива:

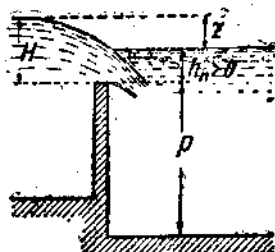
1) $h_n > 0$; 2) $\frac{z}{p} < 0,7$ (по Базену).

Условие отогнанного прыжка (черт. 73):

1) $h_n > 0$; 2) $\frac{z}{p} > 0,7$.



Черт. 72.



Черт. 73.

Следовательно, водослив в этом случае не затопленный.

$$Q = mb \sqrt{2g} H^{\frac{3}{2}}, \quad (165)$$

$$m = m_0 1,05 \cdot \left(1 + 0,2 \frac{h_n}{p}\right); \quad (166)$$

где:

1,05 учитывает влияние перехода струи от свободной к «подтопленной» снизу; следовательно [см. Ф-лу (156)]:

$$\sigma_n = \left(1 + 0,2 \frac{h_n}{p}\right) \sqrt[3]{\frac{z}{H}}.$$

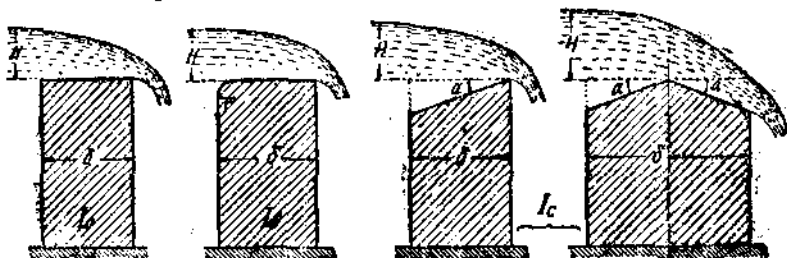
§ 4. Водосливы практических профилей по классификации проф. Н. Н. Напаловского.

Группа I.

Тип 1_а. Чистый прямоугольный профиль (черт. 74, 1_а).

$$Q = m_r \sigma_f \sigma_H b_c \sqrt{2g} H_0^{\frac{3}{2}},$$

где $H_0 = H + \frac{V_0^2}{2g}$; V_0 —скорость подхода.



Черт. 74.

$$\text{Среднее значение } m_r = 0,42, \sigma_H = 0,70 + 0,185 \frac{H}{b}. \quad (167)$$

$$\sigma_f = 1.$$

Табл. 44. Значения m_r для водосливов чистого прямоугольного профиля.

$\frac{H}{b}$	0	0,33	0,5	1,0	1,5	1,5—2,0
σ_H	0,70	0,76	0,79	0,88	0,98	1,00
$m_r \sigma_H$	0,30	0,32	0,33	0,37	0,41	0,42

При $\frac{H}{b} < 0,5$ получается водослив с широким порогом.

При $1,5 < \frac{H}{b} < 2$ можно полагать $\sigma_H = 1$, $m_r \sigma_H = 0,42$.

При $\frac{H}{b} > 2$ считают m как для тонкой стенки.

Значение b_c —по Ф-ле (157).

Тип 1_б. Прямоугольный водослив с закруглением входного ребра (черт. 74, 1_б).

$$\sigma_f = 1 + \frac{r}{H}. \quad (168)$$

В среднем $\sigma_f = 1,05$. Значение σ_H —см. Ф-лу (167).

Тип 1_с. Прямоугольный водослив с наклонным верхом. Для этого типа водослива σ_H по Ф-ле (167) (черт. 30, 1_с). При $\text{ctg } \alpha > 10$ $\sigma_f = 1$; при $\text{ctg } \alpha = 5—10$ $\sigma_f = 1,05$.

Для двускатного верха можно принимать те же значения, если же имеется только обратный скат $\text{ctg } \alpha'$, то $\sigma_f = 1$.

Все эти соображения применимы для $\text{ctg } \alpha$ и $\text{ctg } \alpha'$ не меньше 5, т. к. за этим пределом прямоугольный профиль переходит в полигональный, особенно при низких водосливах.

Группа II. Трапециевидные профили (черт. 75).

Табл. 45. Значения коэф-тов трапециевидных профилей по Н. Н. Павловскому.

Группа	Тип профилей	Тип напора			
		$\frac{H}{\delta} > 2$	$\frac{H}{\delta} = 2 - 1$	$\frac{H}{\delta} = 1 - \frac{1}{2}$	$\frac{H}{\delta} < \frac{1}{2}$
Высокие	Тип II _a $\text{ctg } \alpha < \frac{1}{2}; \text{ctg } \alpha' < \frac{1}{2}$	0,43 — 0,42	0,40 — 0,38	0,36 — 0,35	Переход к водосливу с широким порогом
Средние	Тип II _b (с наклонной верхн. гранью) При $\text{ctg } \alpha = 1$ » $\text{ctg } \alpha = 2$	0,44 0,43	0,42 0,41	0,40 0,39	
	Тип II _{b'} (с наклонной нижн. гранью) При $\text{ctg } \alpha' = 1$ » $\text{ctg } \alpha' = 2$	0,42 0,40	0,40 0,38	0,38 — 0,37 0,36 — 0,35	
Низкие (растянутые)	Тип II _c (с равной поперечной частью) При $\text{ctg } \alpha = 3$ » $\text{ctg } \alpha = 4$ » $\text{ctg } \alpha = 5$ » $\text{ctg } \alpha = 10$	0,42 0,41 0,40 0,38	0,40 0,39 0,38 0,36	0,38 0,37 0,36 Переход к водосливу с широким порогом	Переход к водосливу с широким порогом
	Тип II _{c'} (с равной водосливной частью) При $\text{ctg } \alpha_1 = 3$ » $\text{ctg } \alpha_1 = 5$ » $\text{ctg } \alpha_1 = 10$	0,39 0,375 0,35	0,37 0,35 Переход к водосливу с широким порогом	0,38 Переход к водосливу с широким порогом	



Черт. 75.

При комбинации профилей (на черт. 75—пунктирные наклонные грани) необходимо к табличному значению m прибавить значение из таблицы проф. Н. Н. Павловского;

Наклон $\text{ctg } \alpha$	$< \frac{1}{2}$	1—2	3	4	5	10
Прибавлять к значению m для типов с вертикальной верхней гранью:	0%	+5%	+2%	0%	-3%	-10%

Группа III. Полигональные профили (черт. 76).

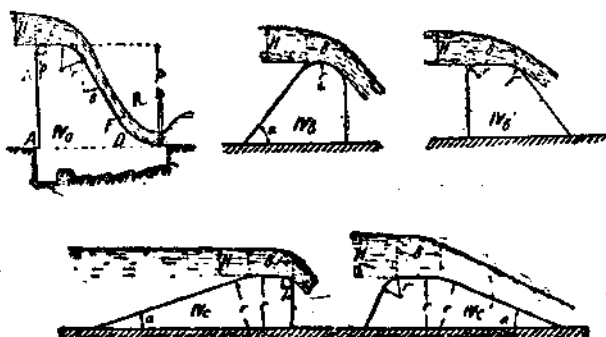


Черт. 76.

Значения m для III _c	$m = 0,45 - 0,46$
» m » III _a	$m = 0,43$
» m » III _b	$m = 0,39 - 0,40$

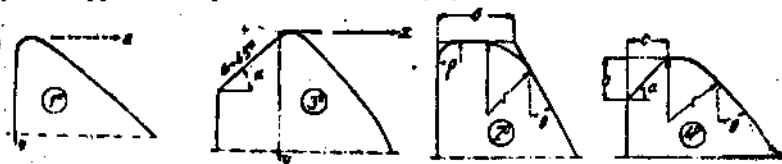
Группа IV. Профили криволинейных форм (черт. 77).

А) Высокий тип профиля (черт. 77, IV_a). Эти профили различаются по верхним частям (оголовкам, черт. 78).



Черт. 77.

Тип. IV_a. Р—оголовок с вертикальной смоченной гранью; Р' получается путем округления трапециoidalного профиля; оголовок с вертикальной



Черт. 78.

смоченной гранью; 3° аналогичен 1° , но смощенная грань оголовка имеет наклон 45° ; 4° аналогичен 2° , но смощенная грань оголовка имеет различные углы наклона.

Проф. Н. Н. Павловский приводит сл. данные, сведенные в табл. 46.

Табл. 46. Данные для водосливов практических профилей.

Тип	m_f	σ_f	σ_n	Примечание																				
$IV_a 1^\circ$	0,49	1	$0,785 + 0,25 \frac{H}{H_{max}}$	При $\frac{H}{H_{max}} = 0,1 - 0,8$																				
$IV_a 1^\circ$	0,49	1	$0,88 + 0,12 \sqrt{\frac{H}{H_{max}}}$	При $\frac{H}{H_{max}} > 0,8$																				
$IV_a 2^\circ$	0,49	0,97	По $IV_a 1^\circ$	—																				
$IV_a 3^\circ$	0,48	1,0	$0,805 + 0,31 \frac{H}{H_{max}}$	При $\frac{H}{H_{max}} = 0,1 - 0,5$																				
$IV_a 3^\circ$	0,48	1,0	$\sqrt[10]{\frac{H}{H_{max}}}$	При $\frac{H}{H_{max}} > 0,5$																				
$IV_a 4^\circ$	0,47	$1,02 - 0,02 \operatorname{ctg} \alpha - 0,02 \left(\frac{a}{r} - 1 \right)$	По $IV_a 3^\circ$	<table><tr><th colspan="4">Значения σ_f</th></tr><tr><th>$\frac{a}{r}$</th><th>$\operatorname{ctg} \alpha = 1$</th><th>$\operatorname{ctg} \alpha = 2$</th><th>$\operatorname{ctg} \alpha = 4$</th></tr><tr><td>1</td><td>1,0</td><td>0,98</td><td>0,94</td></tr><tr><td>2</td><td>0,98</td><td>0,96</td><td>0,92</td></tr><tr><td>4</td><td>0,94</td><td>0,94</td><td>0,88</td></tr></table>	Значения σ_f				$\frac{a}{r}$	$\operatorname{ctg} \alpha = 1$	$\operatorname{ctg} \alpha = 2$	$\operatorname{ctg} \alpha = 4$	1	1,0	0,98	0,94	2	0,98	0,96	0,92	4	0,94	0,94	0,88
Значения σ_f																								
$\frac{a}{r}$	$\operatorname{ctg} \alpha = 1$	$\operatorname{ctg} \alpha = 2$	$\operatorname{ctg} \alpha = 4$																					
1	1,0	0,98	0,94																					
2	0,98	0,96	0,92																					
4	0,94	0,94	0,88																					

Б) Средние профили IV_b и IV_b' (черт. 77, IV_b и IV_b'). При выборе коэф-та расхода можно пользоваться табл. для трапецидальных профилей, имеющих те же наклоны α и α' , увеличивая средние значения таблицы на 5%.

В) Низкие профили IV_c и IV_c' (черт. 77, и IV_c'). То же, что и для «Б»; увеличить аналогичные значения коэф-та на 5%. При наличии обеих наклонных граней в табл. остаются лишь отрицательные поправки; положительных не следует делать.

§ 5. Построение профиля водосливных плотин.

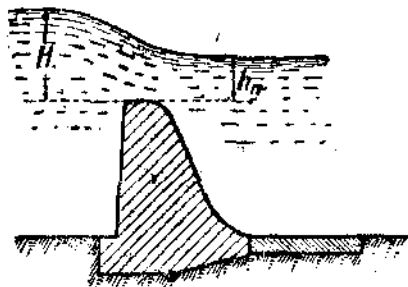
Профиль водосливной плотины во избежание образования вакуума должен приближаться к очертанию струи, падающей с гребня плотины, а также удовлетворять и законам статики сооружений в смысле прочности и устойчивости. Однако опасаться вакуума следует лишь при высоте водослива свыше 10 м.

Решения даны американским инж. Крегером и проф. Н. П. Пузыревским. Последний в 1927 г. дал строгое решение. Профиль по Крегеру, проверенный в Ленинграде в связи с постройкой плотины на Свири (у д. Пиркиничи), оказался не вполне удовлетворительным (найден вакуум.)

§ 6. Приближенный способ очертания струи для предварительных проектов.

Для предварительных проектов при построении профиля можно исходить из трапециoidalного профиля, вводя в нем закругления черт. 77 (IV_a) и черт. 78 (2°, 4°), считая:

$$R = (0,5 - 1,0) p; \quad r = \delta; \quad \rho = (0,25 - 0,30) \delta.$$



Черт. 79.

δ берется из условий, что для больших напоров $\frac{\delta}{H}$ не > 1 , средних $\frac{\delta}{H}$ не $> 1,5$, малых $\frac{\delta}{H}$ не > 2 ; $\theta \cong 30 - 35^\circ$. В профилях (черт. 78, 4°) со скошенным оголовком:

$$\operatorname{ctg} a = \frac{c}{a} = 1 - 4; \quad \frac{a}{r} = 1 - 4;$$

часто $\frac{a}{c} = 1$ и $\frac{a}{r} = 1$.

Полученные профили необходимо подвергнуть проверке статического расчета и, если необходимо, усилить.

Затопленные водосливы практических профилей (черт. 79). Способ американских инженеров:

$$Q = \sigma_n m b_c \sqrt{2g} H_0^{\frac{3}{2}} = M \sigma_n b_c H_0^{\frac{3}{2}}, \quad (169)$$

где σ_n — коэф-т «затопления», $M = m \sqrt{2g}$, b_c — по ф-ле (156), $H_0 = H + \frac{V_0^2}{2g}$.

Табл. 4Т. Значения σ_n .

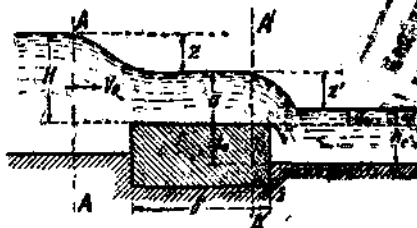
$\frac{h_n}{H}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
σ_n	1,00	0,991	0,981	0,970	0,956	0,937	0,907	0,856	0,778	0,621	0,000

§ 7. Водослив с широким порогом.

Характеризуется наблюдаемым течением на водосливе, близким к параллельноструйному течению, при $\frac{\delta}{H} = 2$.

Не затопленный водослив с широким порогом (черт. 80). Не затопленный водослив характеризуется наличием двух перепадов (z и z'). Из черт. 80 видно, что для не затопленного водослива $a_0 < a$, $a_0 = h_e - t_0$ при $h_e < t$, $a_0 < 0$, т. е. горизонт воды ниже водослива будет ниже порога. Значение a определяется по след. постулатам:

1) Беданже: $a = \frac{2}{3} H_0$ при максимальном расходе на водосливе;



Черт. 80.

2) Бахметьев: $a \cong 0,6H_0$; в конце порога устанавливается критическая глубина при «минимальной удельной энергии» потока:

$$Q = mb_c \sqrt{2g} H_0^{\frac{3}{2}} = Mb_c H_0^{\frac{3}{2}}, \quad (170)$$

где: $b_c = \varepsilon b$, $M = \sqrt{2g} m$, $H_0 = H + \frac{V^2}{2g}$.

Табл. 48. Значения m , M и коэф-т скорости φ .

Тип порога	m	M	φ
Порог с закругленным входным ребром	0,35	1,55	0,92
Порог без закругленных ребер	0,32	1,4	0,85

Пренебрегая боковым сжатием $\varepsilon = 1$: находим:

$$Q = mb \sqrt{2g} H_0^{\frac{3}{2}} = Mb H_0^{\frac{3}{2}}. \quad (171)$$

Значения M для метровых размеров в среднем 1,5.

Способы Беланже и Бахметьева практически дают одинаковые результаты при определении одной из величин Q , H или b ; при $a_0 < a$ низовой горизонт не влияет на истечение; по Беланже a на 10% больше, чем по Бахметьеву.

§ 8. Затопленный водослив с широким порогом (черт. 81).

При $a_0 > a$ получается затопленный водослив при одном перепаде Z .

По Беланже: $a_0 > \frac{2}{3} H_0$
По Бахметьеву: $a_0 > 0,6H_0$ } затопленный водослив с широким порогом.

Обозначая $Z_0 = Z + \frac{V^2}{2g}$ (исправленный на скорость подхода), где $Z = H - a_0$, имеем:

$$V = \varphi \sqrt{2gZ_0},$$

где φ можно брать из табл. 48.

$$Q = \varphi b c a_0 \sqrt{2gZ_0}, \quad (172)$$

где $b_c = \varepsilon b$;
при $\varepsilon = 1$:

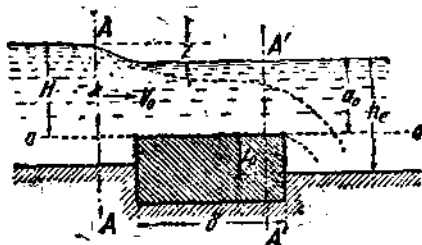
$$Q = \varphi b a_0 \sqrt{2gZ_0}. \quad (173)$$

Проф. Павловский рекомендует из осторожности предусматривать сжатие при расчете труб и мостиков: для малых мостиков $\varepsilon = 0,85-0,90$; для труб с откосными крыльями $\varepsilon = 0,90-0,95$; для труб без крыльев $\varepsilon = 0,75$.

Вместо ф-лы (173) можно пользоваться и ф-лой проф. Павловского:

$$Q = \sigma_n m b_c \sqrt{2g} H_0^{\frac{3}{2}}, \quad (174)$$

где σ_n — коэф-т «затопления» — можно брать из табл. 49.



Черт. 81.

Табл. 49. Значения $\frac{a}{H_0}$, $\frac{Z_0}{H_0}$, σ_n .

$\frac{a}{H_0}$	$\frac{Z_0}{H_0}$	σ_n	$\frac{a}{H_0}$	$\frac{Z_0}{H_0}$	σ_n	$\frac{a}{H_0}$	$\frac{Z_0}{H_0}$	σ_n
< 0,7	> 0,3	1,00	0,9	0,1	0,74	0,98	0,02	0,360
0,75	0,25	0,973	0,92	0,08	0,676	0,99	0,01	0,256
0,80	0,20	0,930	0,84	0,06	0,597	0,995	0,005	0,183
0,83	0,17	0,888	0,76	0,05	0,553	0,997	0,003	0,143
0,85	0,15	0,853	0,68	0,04	0,498	0,998	0,012	0,119
0,87	0,13	0,814	0,60	0,03	0,434	0,999	0,001	0,084

§ 9. Порядок расчета водосливных плотин.

$$Q = Mb_c H_0^{\frac{5}{2}},$$

где $M = M_r \sigma_f \sigma_n$;

$$M_r = \sqrt{2g} m_r$$



Черт. 82.

Для предварительных расчетов:

кривые профили $m = 0,45$; $M = 2,0$; для практических профилей (трапециевидных, полYGONАЛЬНЫХ, прямоугольных): $m = 0,4$; $M = 1,75$; для широкого порога: $m = 0,335$; $M = 1,5$. При затопленном водосливе умножить на σ_n .

П о р я д о к: 1) тип водослива; 2) затопленный водослив или нет; 3) определение $m = m_r \sigma_f \sigma_n$ и $M = M_r \sigma_f \sigma_n$; 4) выбор расчетной ф-лы. При искомом H — приближенный способ.

П р и м е р. Расчет открытых мостиков и безнапорных труб (черт. 82, 83-а, 83-б) По данным Q и h_e , а также по сечению русла найти отверстие b и H . Из ф-лы

$$a = \frac{V^2}{K} \quad (175)$$

определяется глубина потока в трубе a ; скоростью V задаются согласно табл. 50.

Табл. 50.

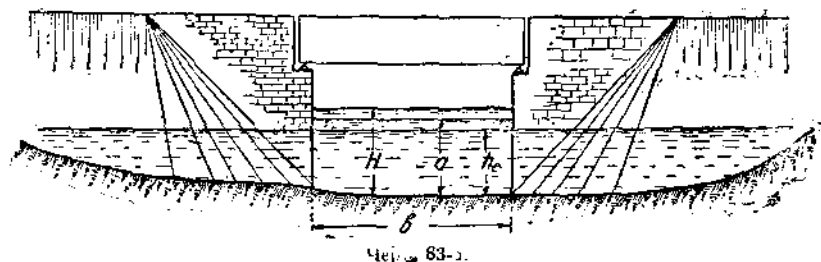
Род грунта сооружения или его укрепления	Допускаемая по дну скорость V м/сек	Средняя расчетная скорость V м/сек
Крупный песок, лёсс и одиночная дерновка плашмя. Глинистые грунты средней плотности (суглинки, супески)	0,6	0,8
Хрящеватый грунт, галька крупная	0,40—0,75	0,55—0,95
Плотная твердая глина, дерновка в стенку	1,20	1,50
Каменный грунт, одиночная мостовая	1,50	1,80
Скала, двойная мостовая	2,15	2,50
Кирпичная кладка из железняка на цементном растворе	3,10	3,50
Лоток из бута, бетонная кладка, плиты, ящики, заполненные крупным камнем	4,00	4,50
Деревянный лоток	4,50	5,00
	6,00	6,50

Сравнивая a с h_e , устанавливают, имеется затопленный водослив или не затопленный.

А. Не затопленный водослив (открытый мостик (черт. 83-б), безнапорная труба (черт. 82)):

$$h_e < a, h_e < \frac{V^2}{g}; \quad (176)$$

$$b = \frac{Q}{aV} = \frac{Qg}{aV^2}. \quad (177)$$



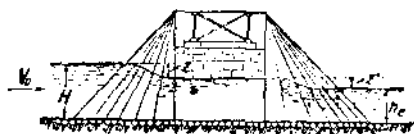
Первый перепад:

$$Z = \frac{1}{\varphi^3} \frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g}$$

при $\varphi = 0,95$ и $V_0 \cong 0$:

$$Z = 0,057V^2; \quad (178)$$

$$H = a + Z. \quad (179)$$



Черт. 83-б.

Если отверстие b округляется до b' , то скорость будет иная:

$$V' = \sqrt{\frac{Qg}{ab'}}. \quad (180)$$

Z и H определяются по ф-лам (178) и (179) при замене V через V' .

Б. Затопленный водослив.

$$h_e > a \text{ или } h_e > \frac{V^2}{g}; \quad (181)$$

$$b = \frac{Q}{ah_e V}; \quad (182)$$

Z по ф-ле (178), H по ф-ле (179).

Если отверстие округляется до b' , то $V' = \frac{Q}{ab'h_e}$, следовательно, новое значение Z при скорости V' , а также и H можно получить по ф-лам (178) и (179).

Лит.: Проф. Н. Н. Павловский, Гидравлический справочник, гл. V, 1924; то же, Учебный гидравлич. справочник, изд. 2, 1931; Инж. Казанская, Водосливные плотины, 1927; Проф. Анисимов Н. И., Водоподъемные плотины, 1931; то же, Водохранилищные плотины, 1932; К. А. Михайлов, Проектирование пригравийных сооружений на сети, 1928; Инж. Н. А. Григорович, Анализ движения жидкости через водослив с широким порогом, «Гидротехника» № 1, 1929—1930; «Wasserkraft», 1929 г., статья Paul Bösse; Creager, Engineering for masonry Dams, New-York, 1929 г.

Неравномерное движение.

Основными факторами, определяющими неравномерное движение, являются: 1) изменение живого сечения по длине потока; 2) переменные скорости и ускорения в соответствующих точках (см. выше) при постоянстве живого сечения; 3) наличие одновременных факторов, указанных в пп. 1 и 2.

Примеры. Цилиндрическая труба близ места входа в нее воды из бака, движение воды в реках, где равномерное движение — исключительный случай.

Обычно рассматривается движение установившееся, для которого справедливо ур-ие Д. Бернулли. Ур-ие дается в двух видах — конечном и дифференциальном. Здесь изменение скоростей происходит от одного сечения к другому и уклон поверхности потока не равен уклону дна.

§ 1. Уравнение неравномерного движения в конечном виде.

$$\frac{\alpha Q^2}{2g} \left(\frac{1}{\omega_n^3} - \frac{1}{\omega_0^3} \right) + Q^2 \int \frac{\chi ds}{\omega^5 C^2} = y. \quad (183)$$

В этом ур-ии (черт. 84) ω_0 и ω — сечения ab , $a'b'$ и ω_n — какое-либо промежуточное; $\alpha \approx 1$ — коэф-т, зависящий от неравномерного распределения скоростей по сечению; χ — смачиваемый периметр. Ур-ие (183) служит для определения Q , когда нельзя определить расход с помощью вертушек и поплавков, а также C в ф-ле Шези. Ф-ла (183) м. б. представлена в виде:

$$y = \frac{\alpha Q^2}{2g} \left(\frac{1}{\omega_n^3} - \frac{1}{\omega_0^3} \right) + \frac{Q^2 l}{C^2 R \omega^2}, \quad (184)$$

где C , K и ω определяются, как полусумма значений для крайних участков. Для определения ω_0 и R_0 в верхнем сечении надо знать глубину воды h_0 , т. е. вычислить y ; следовательно, ур-ие (184) решается приближенно:

$$C^2 = C_{cp}^2 = \frac{Q^2}{\omega_{cp}^2 R_{cp} l_{cp}},$$

по ф-ле равномерного движения, как средняя величина, для средних сечений, уклона, гидравлического радиуса на соответствующем участке в естественном состоянии.

Член ур-ия (184) $\frac{\alpha Q^2}{2g} \left(\frac{1}{\omega_n^3} - \frac{1}{\omega_0^3} \right)$ для кривой подпора (т. е. когда скорость уменьшается) отбрасывается, следовательно, ур-ие (184) в полном виде действительно для кривой спада.

§ 2. Дифференциальное ур-ие неравномерного движения (черт. 85).

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - \frac{Q^2}{K^2} \left(1 - \frac{\alpha R C^2}{g \omega} \frac{\partial \omega}{\partial s} \right)}{1 - \frac{\alpha Q^2 b'}{g \omega^3}} \quad (185)$$

где: i — уклон дна; K — модуль расхода; b' — ширина потока поверху при глубине h .

Ур-ие (185) имеет вид:

$$dh = f(h, s) ds$$

Черт. 85.

и интегрируется востепненным приближением.

Для призматических русел $\frac{\partial \omega}{\partial s} = 0$, т. к. форма таких русел вдоль потока не изменяется; при этом ур-ие (185) приводится к виду:

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - \frac{Q^2}{K^2}}{1 - \frac{\alpha Q^2 b'}{g \omega^3}}. \quad (186)$$

Проф. Бахметьев устанавливает след. определения:

1) h_0 — нормальная глубина, соответствующая равномерному режиму при данных Q и i ; при этой глубине h_0 модуль расхода обозначим K_0 , а поверхностный уклон I равен уклону дна i .

Следовательно:

$$I = \frac{Q^2}{C_0^2 R_0 \omega_0^3} = \frac{Q^2}{K_0^2} \text{ (ф-ла Шези),}$$

откуда:

$$Q^2 = i K_0^2.$$

2) h_k — та глубина, при к-рой знаменатель (186) обращается в нуль; она называется «критической глубиной»; геометрические размеры поперечного сечения потока с индексами k соответствуют h_k , следовательно:

$$\frac{\alpha Q^2 b'_k}{g \omega_k^3} = \frac{\alpha b'_k}{g \omega_k} V^2 = 1,$$

или:

$$\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{\omega_k}{b'_k} \quad (187)$$

и

$$\frac{\omega_k}{b'_k} = \frac{\alpha V^2}{g} \quad (188)$$

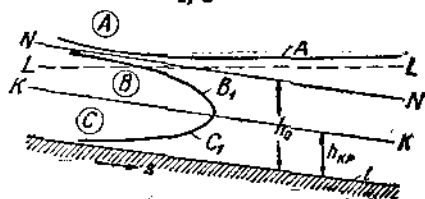
Ур-не (186) может быть представлено:

$$\frac{dh}{ds} = i \frac{1 - \frac{K_0^2}{K^2}}{1 - \frac{\lambda(h_k)}{\lambda(h)}} = i \frac{1 - \frac{K_0^2}{K^2}}{1 - j \frac{K^2}{K_0^2}}, \quad (189)$$

где:

$$\lambda(h_k) = \frac{\omega_k^3}{b'_k}, \quad \lambda(h) = \frac{\omega^3}{b'}, \quad j = \frac{\alpha C^2 b'}{g i}; \quad (190)$$

h_k с физической стороны выражает глубину, при к-рой удельная энергия потока $\mathcal{E} = h + \frac{\alpha Q^2}{2g \omega^2}$ имеет минимум (черт. 15).



Черт. 86.

Для прямоугольного русла шириной b критическая глубина:

$$h_k = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{g b^3}} = \sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}}, \quad (191)$$

где $q = \frac{Q}{b}$ называется «удельным расходом», соответствующим единице ширины русла.

3) i_k называется критическим уклоном, т. е. i_k — такой уклон дна потока, при к-ром при данной форме русла и расходе Q нормальная глубина $h_0 = h_k$. Зная последнюю, имеем:

$$i_k = \frac{g}{\alpha C_k^2}. \quad (192)$$

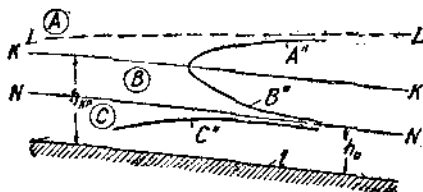
§ 3. Форма свободной поверхности потоков при прямом уклоне дна.

Если дно потока падает по направлению течения, то уклон дна называется прямым уклоном.

I. $h_0 > h_k$, следовательно, $i < i_k$; NN—линия нормальной глубины, KK—линия критической глубины (черт. 86).

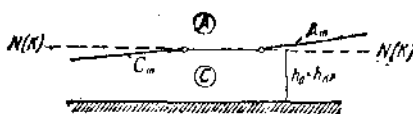
При $h > h_0$ кривая подпора A вогнутой формы с двумя асимптотами: горизонтальной прямой LL и NN.

При $h_0 > h > h_k$ — кривая спада B, (выпуклая форма кривой) и при $h < h_k$ кривая подпора C₁ (вогнутая форма, если смотреть в обоих случаях сверху).



Черт. 87.

II. $h_0 < h_k$, т. е. $i > i_k$ (черт. 87).



Черт. 88.

При $h > h_k$ кривая подпора A'' (выпуклой формы), LL—асимптота.

При $h_k > h > h_0$ кривая спада B'' (вогнутая форма), NN—асимптота.

При $h < h_0$ кривая подпора C'' (выпуклая форма), NN—асимптота.

III. $h_k = h_0$, т. е. $i = i_k$ (черт. 88), NN совпадает с KK; получают для этого случая кривые подпора A''' и C''', близкие к горизонтальным прямым и переходящие в них при $\chi = b'$, т. е. при широких руслах при пренебрежении изменением C с глубиной.

§ 4. Показательный закон для модуля расхода проф. Бахметьева.

C достаточной для практики точностью можно написать, что:

$$\left(\frac{K_1}{K_2}\right)^2 = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^x, \quad (193)$$

где: K_1 и K_2 — модули расхода данного открытого русла правильного сечения; h_1 и h_2 — соответствующие глубины наполнения.

Из ур-ия (193):

$$x = \frac{2 \lg K_1 - \lg K_2}{\lg h_1 - \lg h_2}. \quad (194)$$

Для более точного определения x необходимо величину x определять по ряду значений h и K и брать для x среднее значение.

Пример. Определить x для прямоугольного канала с земляными стенками, если $b = 25$ м. Примем: $h_1 = 1$ м, $h_2 = 2$ м, $h_3 = 3$ м, $h_4 = 4$ м, $h_5 = 5$ м, свдвд все значения в табл.:

h м	ω м ²	χ м	R м	$\sqrt{R}$	По Бах ну при $\gamma \approx 1,3$	$K = C\omega\sqrt{R}$	$\lg K$	$\lg h$
1	25	27	0,925	0,962	37,0	892	2,9504	0
2	50	29	1,73	1,31	43,8	2 851	3,4450	0,301
3	75	31	2,42	1,56	47,3	5 630	3,7427	0,447
4	100	33	3,03	1,73	49,7	8 610	3,9350	0,602
5	125	35	3,57	1,89	51,6	12 300	4,0950	0,699

Для определения x строим логарифмическую анаморфозу (черт. 89), откладывая по осям $\lg h$ и $\lg K$; из чертежа определяем: $\lg \alpha = 1,65$, след., из ф-лы (194) показатель русла: $x = 2 \lg \alpha = 3,30$.

Гидравлический показатель x для каналов обычных практических профилей заключается часто между 3 и 4, но возможны случаи, когда $x < 3$ и $x > 4$. x обыкновенно выражается дробным числом, иногда и целым.

Табл. 51. Значения x при определении C по Маннингу, Форхеймеру и Павловскому.

Вид русла	Значения x		
	С по Маннингу	С по Форхеймеру	по Павловскому $C = \frac{1}{h} K^x$
Широкое прямоугольное русло	$x = 3,33$	$x = 3,4$	$x = 3,0 + 2\gamma$
Широкое параболическое русло	$x = 4,33$	$x = 4,40$	$x = 4,0 + 2\gamma$
Треугольное русло	$x = 5,33$	$x = 5,40$	$x = 5,0 + 2\gamma$

§ 5. Уравнение неравномерного движения для потока с прямым уклоном дна.

Относительной глубиной η называется отношение действительной глубины при неравномерном движении h к нормальной глубине при равномерном движении h_0 ; следовательно:

$$\eta = \frac{h}{h_0} \quad (195)$$

Относительным модулем расхода K называется отношение модуля расхода K при глубине h к модулю при h_0 :

$$K = \frac{K}{K_0} \quad (196)$$

Тогда ур-е (189) получает вид:

$$\left(\frac{ds}{h_0} \right) = \left(1 - \frac{1-j}{1-K^2} \right) d\eta, \quad (197)$$

а пользуясь законом Бахметьева:

$$x^2 = \eta^x,$$

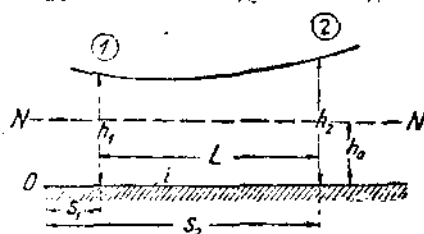
получим:

$$\frac{ds}{h_0} = d\eta - \frac{1-j}{1-\eta^x} d\eta. \quad (198)$$

Интегрируем ур-е 199 (черт. 90-а).

$$\frac{sl}{h_0} = \eta_2 - \eta_1 - \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{1-j}{1-\eta^x} d\eta,$$

где: $\eta_2 = \frac{h_2}{h_0}$, а $\eta_1 = \frac{h_1}{h_0}$.



Черт. 90-а.

Рассматривая среднюю величину для j в пределах ε_1 и ε_2 , имеем:

$$\frac{h}{L} = \eta_2 - \eta_1 - (1-j) \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{d\eta}{1-\eta^2}.$$

Считая x известным и обозначая $\psi(\eta) = \int \frac{d\eta}{1-\eta^2}$, получаем ур-ие неравномерного движения:

$$\frac{hL}{h_0} = \eta_2 - \eta_1 - (1-j)[\psi(\eta_2) - \psi(\eta_1)]. \quad (199)$$

Для значений $\psi(\eta)$ приводятся ниже таблицы проф. Бахметьева для $x = 2,0, 2,5, 3,20, 3,5, 3,75, 4,0$.

Для показателя x , для которого нет таблиц, можно поступать двояко: 1) пользоваться ближайшей таблицей, для которой x близко к данному; 2) более точно, если $x_a < x < x_b$, то:

$$\psi(\eta) = \psi_a(\eta) + \frac{x - x_a}{x_b - x_a} [\psi_b(\eta) - \psi_a(\eta)] \quad (200)$$

для $j = \frac{a i C^2 b^3}{g h}$ при широком русле $b = x$
и

$$j = \frac{a i C^2}{g}; \quad (201)$$

для кривых подпора типа А' (черт. 86) в случае малого i можно j пренебрегать, и ур-ие (199) преобразовывается в:

$$\frac{hL}{h_0} = \eta_2 - \eta_1 - [\psi(\eta_2) - \psi(\eta_1)]. \quad (202)$$

Пример. Построить кривую подпора по методу проф. Бахметьева для трапециевидного канала, при $b = 10$ м, $m = 1,5$, $i = 0,0005$; подпор у затвора $h = 3,75$ м, $h_0 = 1,75$ м. Русло земляное (черт. 90-б).

а) Определение x .

	h м	ω м ²	γ_0 м	R м	$\sqrt{R}$	C по Б. вену	K	$\lg K$	$\lg h$
h'	1	11,5	13,606	0,844	0,92	36,05	384	2,5843	0
h_0	1,75	22,09	16,31	1,354	1,16	41,1	1062	3,0261	0,2430

$$x = \frac{2(\lg K_0 - \lg h')}{\lg h_0 \cdot \lg h} = \frac{0,884}{0,243} = 3,65.$$

б. Берем три точки, соответствующие:

$$\begin{aligned} h_1 &= 1,75 \text{ м, чему соответствует подпор } y_1 = 0,01 \text{ м} \\ h_2 &= 2,50 \text{ » } \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad y_2 = 0,75 \text{ »} \\ h_3 &= 3,0 \text{ » } \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad y_3 = 1,25 \text{ »} \end{aligned}$$

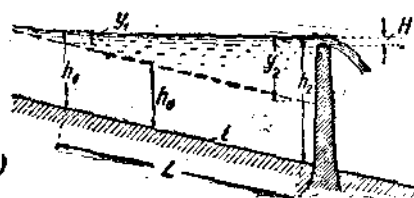
Соответствующие равномерному режиму при $h_0 = 1,75$

$$\omega_0 = 22,9 \text{ м}^2, \gamma_0 = 16,31 \text{ м} \quad R_0 = 1,354 \text{ м}, C_0 = 41,1.$$

По ф-ле (201):

$$j = \frac{1,1 \cdot 41,1^3 \cdot 0,0005}{9,81} = 0,095;$$

$$1 - j = 1 - 0,095 = 0,905;$$



Черт. 90-б.

1-й участок от затвора до $h_2 = 3$ м при $x = 3,75$:

$$\eta_2 = \frac{1,75 + 2}{1,75} = 2,1429; \psi(\eta_2) = 0,0456;$$

$$\eta_1 = \frac{3,00}{1,65} = 1,7143; \psi(\eta_1) = 0,0890.$$

Подставляя в ур-ие (199):

$$\frac{0,0005 L_I}{1,75} = 2,1429 - 1,7143 - 0,905 \cdot (0,0456 - 0,0890),$$

$$L_I = 1\,670 \text{ м.}$$

2-й участок, от $h_2 = 3$ м до $h_2 = 2,5$ м, при $x = 3,75$ м:

$$\eta_2 = 1,7143; \psi(\eta_2) = 0,0890;$$

$$\eta_1 = \frac{2,5}{1,75} = 1,4286; \psi(\eta_1) = 0,1544.$$

$$\frac{L_{II} \cdot 0,0005}{1,75} = 1,7143 - 1,4286 - 0,905 \cdot (0,0890 - 0,1544).$$

$$L_{II} = 1\,230 \text{ м.}$$

3-й участок, от $h_2 = 2,50$ м до $h_1 = 1,76$ м, $x = 3,75$:

$$\eta_2 = 1,4286; \psi(\eta_2) = 0,1544;$$

$$\eta_1 = \frac{1,76}{1,75} = 1,0057; \psi(\eta_1) = 1,086.$$

$$\frac{0,0005 L_{III}}{1,75} = 1,4286 - 1,0057 - 0,905 \cdot (0,1544 - 1,0860);$$

$$L_{III} = 4\,440 \text{ м.}$$

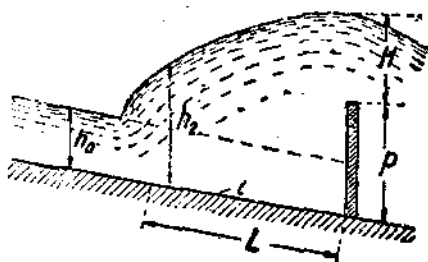
Полная длина кривой подпора:

$$L = L_I + L_{II} + L_{III} = 1\,670 + 1\,230 + 4\,440 = 7\,340 \text{ м.}$$

Пользуясь ф-лой (200), можно вычислить L_1 , L_2 , L_3 и L , определяя по таблицам $\psi(\eta)$ для $x_0 = 3,5$ и $x_0 = 3,75$.

Прыжок воды.

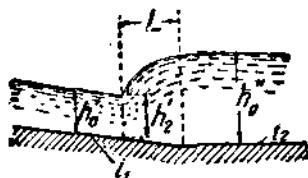
Прыжок получается, напр., при преграждении русла, имеющего уклон больше критического, при сопряжении кривой подпора выше заграждения с поверхностью равно-



Черт. 91.



Черт. 92.



Черт. 93.

мерного режима в верхней части русла (черт. 91); прыжок может получиться также при переломе продольного профиля канала—при условии, что верхний участок канала имеет уклон больше критического (черт. 92). Прыжок м. б. отогнан в нижний участок или надвинут на верхний (черт. 93).

Прыжок получается у водосливной плотины (черт. 94) и м. б. сделан отогнанным.

Рассмотрение всех перечисленных случаев имеет актуальное значение в гидротехнике для проектирования соответствующих сооружений.

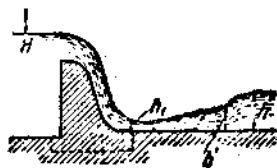
Глубины h_1 и h_2 до и после прыжка называются «взаимными глубинами» и связаны (черт. 95) ур-нем Belanger-Boussinesq'a:

$$\frac{\alpha Q^3}{g \omega_2} + \omega_2 y_{02} = \frac{\alpha Q^3}{g \omega_1} + \omega_1 y_{01}, \quad (212)$$

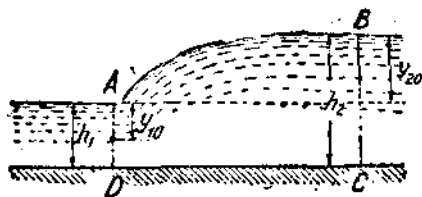
где $\alpha = 1,1$, y_{02} и y_{01} — глубины до п. т. соответствующих сечений.

Как правая, так и левая части ур-ня (212) являются ф-циями h (глубины):

$$\theta(h) = \frac{\alpha Q^3}{g \omega} + \omega y_0. \quad (213)$$



Черт. 94.



Черт. 95.

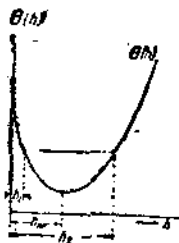
$\theta(h)$ называется прыжковой функцией. Из ур-ня (212) имеем:

$$\theta(h_2) = \theta(h_1). \quad (214)$$

При графическом изображении $\theta(h)$ (черт. 96) «взаимные глубины» получатся лежащими на одной горизонтальной прямой.

Для прямоугольного русла взаимные глубины h_2 и h_1 связаны ф-лой:

$$\left. \begin{aligned} h_2 &= \frac{h_1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{8\alpha Q^3}{gb^3 h_1^3}} - 1 \right) \\ h_1 &= \frac{h_2}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{8\alpha Q^3}{gb^3 h_2^3}} - 1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (215)$$



Черт. 96

Для возможности прыжка необходимо $h_0 < h_{кр}$.

При определении взаимных глубин длину подпорной линии L (черт. 91) можно определить по таблицам Бахметьева или Бресса.

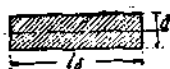
Пример (черт. 91). Прямоугольное русло $t=0,02$, $C=30$, $h_0=1$ м, $g=\frac{Q}{b}=4,24$ м³/сек,

$f=\frac{\alpha C^3 t}{g}=2$; h_0 (215) при $h_1=h_0=1$ м, $h_2=\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{8 \cdot 1,1 \cdot 4,24^3}{0,81 \cdot 1^3}} - 1 \right) = 1,57$ м при $H=3$ м.

Подробные сведения о прыжке см.: Бахметьев, «О неравномерном движении жидкости в открытом русле», КУБУЧ, 1928 г., стр. 89—123, в той же книге: «К вопросу о расчете перепадов», стр. 212—227. А. Н. Ахутин, «Примеры гидравлических расчетов», 1928 г., примеры 17—23 (стр. 74—93), примеры 24, 26, 27, 28.

Подпор в мостах.

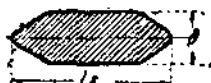
Быки и устой мостов, стесняя живое сечение реки, изменяют режим как под мостом, так и выше и ниже моста. Выше моста горизонт воды поднимается, в пролетах же моста горизонт воды понижается, скорость увеличивается; по выходе из пролета горизонт несколько повышается, скорость уменьшается и движение переходит в равномерное. Обозначая через z понижение уровня воды при входе в пролет, остановимся на эмпирической



Черт. 97.



Черт. 98.



Черт. 99.

ф-ле проф. Р. Ребока (теоретические положения Дюлонн встречают возражения, и единственный путь правильного решения—испытание сооружения в лаборатории).

Ф-ла Ребока:

$$z = [\delta_0 - \varepsilon_0(\delta_0 - 1)] (0,4\varepsilon_0 + \varepsilon_0^2 + 9\varepsilon_0^4) \left(1 + \frac{2h_0}{h_c}\right) h_{0.1} \quad (216)$$

где: ε_0 —стеснение русла, отношение отнимаемой опорами части живого сечения к величине последнего при естественной глубине; δ_0 зависит от формы опор; h_c —естественная (нормальная) глубина потока; h_0 —скоростной напор.

$$\text{(Черт. 97)} \quad \begin{cases} \frac{l_d}{d} > 4,5; & \delta_0 = 3,10 + 0,12 \frac{l_d}{d}; \\ \frac{l_d}{d} < 4,5; & \delta_0 = 4,85 - 0,27 \frac{l_d}{d}; \end{cases} \quad (217)$$

$$(218)$$

$$\text{(Черт. 98)} \quad \begin{cases} \frac{l_d}{d} > 4; & \delta_0 = 1,27 + 0,12 \frac{l_d}{d}; \\ \frac{l_d}{d} < 4; & \delta_0 = 2,71 - 0,2 \frac{l_d}{d}; \end{cases} \quad (219)$$

$$(220)$$

$$\text{(Черт. 99)} \quad \begin{cases} \frac{l_d}{d} > 4; & \delta_0 = 0,88 + 0,12 \frac{l_d}{d}; \\ \frac{l_d}{d} < 4; & \delta_0 = 2,33 - 0,2 \frac{l_d}{d}. \end{cases} \quad (221)$$

$$(222)$$

Для последнего случая радиус дуги— $2d$, длина заостренной части по оси— $1,25d$.

Канал с прямым уклоном $i_0 > 0$, по Бахметьеву. $\gamma = 4,0$.

η	$\psi(\eta)$	$+\Delta$	η	$\psi(\eta)$	$\pm \Delta$	η	$\psi(\eta)$	$-\Delta$	η	$\psi(\eta)$	$-\Delta$
0	0	0,000	0,85	0,980	0,022	1,07	0,471	0,030	1,44	0,125	0,003
0,05	0,050	0,000	0,86	1,002	0,023	1,08	0,441	0,026	1,45	0,122	0,003
0,10	0,100	0,000	0,87	1,025	0,024	1,09	0,415	0,023	1,46	0,119	0,003
0,15	0,150	0,000	0,88	1,049	0,026	1,10	0,392	0,020	1,47	0,116	0,003
0,20	0,200	0,000	0,89	1,075	0,028	1,11	0,372	0,018	1,48	0,113	0,002
0,25	0,250	0,000	0,90	1,103	0,015	1,12	0,354	0,017	1,49	0,111	0,002
0,30	0,300	0,001	0,905	1,118	0,016	1,13	0,337	0,015	1,50	0,109	0,012
0,35	0,351	0,001	0,910	1,134	0,016	1,14	0,322	0,014	1,51	0,097	0,010
0,40	0,402	0,002	0,915	1,150	0,017	1,15	0,308	0,013	1,60	0,087	0,008
0,45	0,454	0,003	0,920	1,167	0,018	1,16	0,295	0,012	1,61	0,079	0,007
0,50	0,507	0,004	0,925	1,185	0,019	1,17	0,283	0,011	1,70	0,072	0,006
0,55	0,561	0,006	0,930	1,204	0,021	1,18	0,272	0,010	1,75	0,066	0,006
0,60	0,617	0,011	0,935	1,225	0,022	1,19	0,262	0,010	1,80	0,060	0,005
0,61	0,628	0,012	0,940	1,247	0,024	1,20	0,252	0,009	1,85	0,055	0,005
0,62	0,640	0,012	0,945	1,271	0,026	1,21	0,243	0,008	1,90	0,050	0,004
0,63	0,652	0,012	0,950	1,297	0,028	1,22	0,235	0,008	1,95	0,046	0,003
0,64	0,664	0,012	0,955	1,325	0,031	1,23	0,227	0,008	2,0	0,043	0,006
0,65	0,678	0,012	0,960	1,356	0,035	1,24	0,219	0,007	2,1	0,037	0,005
0,66	0,688	0,012	0,965	1,391	0,040	1,25	0,212	0,007	2,2	0,032	0,0041
0,67	0,700	0,013	0,970	1,431	0,048	1,26	0,205	0,006	2,3	0,0279	0,0034
0,68	0,713	0,013	0,975	1,475	0,058	1,27	0,199	0,006	2,4	0,0245	0,0029
0,69	0,726	0,013	0,980	1,531	0,074	1,28	0,193	0,006	2,5	0,0216	0,0024
0,70	0,739	0,013	0,985	1,611	0,105	1,29	0,187	0,005	2,6	0,0192	0,0021
0,71	0,751	0,014	0,990	1,714	0,175	1,30	0,182	0,003	2,7	0,0171	0,0018
0,72	0,766	0,014	0,995	1,885	∞	1,31	0,176	0,005	2,8	0,0153	0,0016
0,73	0,780	0,014	1,000	∞	∞	1,32	0,171	0,004	2,9	0,0137	0,0014
0,74	0,794	0,014	1,005	1,107	0,171	1,33	0,167	0,003	3,0	0,0123	0,0046
0,75	0,808	0,015	1,010	0,936	0,100	1,34	0,162	0,004	3,5	0,0077	0,0025
0,76	0,823	0,015	1,015	0,836	0,070	1,35	0,158	0,005	4,0	0,0052	0,0015
0,77	0,838	0,016	1,020	0,766	0,054	1,36	0,153	0,004	4,5	0,0037	0,0010
0,78	0,854	0,016	1,025	0,712	0,044	1,37	0,149	0,004	5,0	0,0027	0,0012
0,79	0,870	0,017	1,030	0,638	0,038	1,38	0,145	0,003	6,0	0,0015	0,0008

Канал с прямым уклоном $i = 0$, по Бахметьеву. $x = 4,0$. (Продолжение.)

η	$\psi(\eta)$	$+\Delta$	η	$\psi(\eta)$	$\pm\Delta$	η	$\psi(\eta)$	$-\Delta$	η	$\psi(\eta)$	$-\Delta$
0,80	0,887		1,035	0,632		1,39	0,142		8,0	0,0007	
0,81	0,904	0,017	1,040	0,600	0,032	1,40	0,138	0,004	10 0	0,0003	0,0004
0,82	0,922	0,018	1,045	0,572	0,028	1,41	0,135	0,003			
0,83	0,940	0,018	1,05	0,548	0,024	1,42	0,131	0,004			
0,84	0,960	0,020	1,06	0,506	0,042	1,43	0,128	0,003			
		0,020			0,035						

Канал с прямым уклоном $i_0 > 0$, по Бахметьеву. $x = 3,0$.

η	$\psi(\eta)$	$+\Delta$	η	$\psi(\eta)$	$\pm\Delta$	η	$\psi(\eta)$	$-\Delta$	η	$\psi(\eta)$	$-\Delta$
0	0		0,85	1,065		1,07	0,790		1,44	0,283	
0,05	0,050	0,050	0,86	1,092	0,027	1,08	0,749	0,041	1,45	0,278	0,005
0,10	0,100	0,050	0,87	1,120	0,028	1,09	0,713	0,036	1,46	0,273	0,008
0,15	0,150	0,050	0,88	1,151	0,031	1,10	0,680	0,033	1,47	0,268	0,005
0,20	0,200	0,050	0,89	1,183	0,032	1,11	0,652	0,028	1,48	0,263	0,008
0,25	0,251	0,051	0,90	1,218	0,035	1,12	0,626	0,026	1,49	0,259	0,004
0,30	0,302	0,051	0,905	1,237	0,019	1,13	0,602	0,024	1,50	0,255	0,004
0,35	0,354	0,052	0,910	1,257	0,020	1,14	0,581	0,021	1,55	0,235	0,020
0,40	0,407	0,053	0,915	1,278	0,021	1,15	0,561	0,020	1,55	0,235	0,017
0,45	0,461	0,054	0,920	1,300	0,022	1,16	0,542	0,019	1,60	0,218	0,015
0,50	0,517	0,056	0,925	1,323	0,003	1,16	0,542	0,017	1,65	0,203	0,014
0,55	0,575	0,058	0,930	1,348	0,025	1,17	0,525	0,015	1,70	0,189	0,012
0,60	0,637	0,062	0,935	1,374	0,026	1,18	0,510	0,015	1,75	0,177	0,011
0,61	0,650	0,013	0,940	1,403	0,029	1,19	0,495	0,015	1,80	0,166	0,010
0,62	0,663	0,013	0,945	1,434	0,031	1,20	0,480	0,013	1,85	0,156	0,009
0,63	0,676	0,013	0,950	1,467	0,033	1,21	0,467	0,013	1,90	0,147	0,008
0,64	0,689	0,013	0,955	1,504	0,037	1,22	0,454	0,012	1,95	0,139	0,007
0,65	0,703	0,014	0,960	1,545	0,041	1,23	0,442	0,011	2,0	0,132	0,013
0,66	0,717	0,014	0,965	1,592	0,047	1,24	0,431	0,011	2,1	0,119	0,011
0,67	0,731	0,015	0,970	1,645	0,053	1,25	0,420	0,010	2,2	0,108	0,010
0,68	0,746	0,015	0,975	1,708	0,063	1,26	0,410	0,010	2,3	0,098	0,008
0,69	0,761	0,015	0,980	1,784	0,076	1,27	0,400	0,009	2,4	0,090	0,008
0,70	0,776	0,015	0,985	1,882	0,098	1,28	0,391	0,009	2,5	0,082	0,006
					0,137	1,29	0,382	0,009	2,6	0,076	0,006

Канал с прямым уклоном $i = 0$, по Бахметьеву. $x = 3,0$. (Продолжение.)

η	$\psi(\eta)$	$+\Delta$	η	$\psi(\eta)$	$\pm \Delta$	η	$\psi(\eta)$	$-\Delta$	η	$\psi(\eta)$	$-\Delta$
0,71	0,791		0,990	2,019		1,30	0,373		2,7	0,070	
		0,016			0,231			0,008			0,005
0,72	0,807		0,995	2,250		1,31	0,365		2,8	0,065	
		0,016			∞			0,008			0,005
0,73	0,823		1,000	∞		1,32	0,357		2,9	0,060	
		0,017			∞			0,008			0,004
0,74	0,840		1,005	1,647		1,33	0,349		3,0	0,056	
		0,017			0,228			0,008			0,015
0,75	0,857		1,010	1,419		1,34	0,341		3,5	0,041	
		0,017			0,128			0,007			0,010
0,76	0,874		1,015	1,291		1,35	0,334		4,0	0,031	
		0,018			0,098			0,006			0,006
0,77	0,892		1,020	1,183		1,36	0,328		4,5	0,025	
		0,019			0,074			0,006			0,005
0,78	0,911		1,025	1,119		1,37	0,322		5,0	0,020	
		0,019			0,058			0,006			0,006
0,79	0,930		1,030	1,061		1,38	0,316		6,0	0,014	
		0,020			0,051			0,006			0,005
0,80	0,950		1,035	1,010		1,39	0,310		8,0	0,009	
		0,021			0,043			0,006			0,004
0,81	0,971		1,040	0,967		1,40	0,304		10,0	0,005	
		0,022			0,038			0,006			
0,82	0,993		1,045	0,929		1,41	0,298				
		0,023			0,033			0,005			
0,83	1,016		1,05	0,896		1,42	0,293				
		0,024			0,058			0,005			
0,84	1,040		1,06	0,838		1,43	0,288				
		0,025			0,048			0,005			

Канал с прямым уклоном $i_0 > 0$, по Бахметьеву. $x = 2,0$

η	$\psi(\eta)$	$+\Delta$	η	$\psi(\eta)$	$\pm \Delta$	η	$\psi(\eta)$	$-\Delta$	η	$\psi(\eta)$	$-\Delta$
0,00	0,0		0,85	1,256		1,07	1,693		1,44	0,856	
		0,050			0,037			0,064			0,009
0,05	0,150		0,86	1,293		1,08	1,629		1,45	0,847	
		0,050			0,040			0,056			0,009
0,10	0,100		0,87	1,333		1,09	1,573		1,46	0,838	
		0,051			0,042			0,051			0,009
0,15	0,251		0,88	1,375		1,10	1,522		1,47	0,829	
		0,052			0,046			0,045			0,008
0,20	0,203		0,89	1,421		1,11	1,477		1,48	0,821	
		0,052			0,051			0,041			0,008
0,25	0,255		0,90	1,472		1,12	1,436		1,49	0,813	
		0,054			0,027			0,038			0,008
0,30	0,309		0,905	1,499		1,13	1,398		1,50	0,805	
		0,056			0,028			0,035			0,038
0,35	0,365		0,910	1,527		1,14	1,363		1,55	0,767	
		0,059			0,030			0,032			0,034
0,40	0,424		0,915	1,557		1,15	1,331		1,60	0,733	
		0,061			0,032			0,030			0,030
0,45	0,485		0,920	1,589		1,16	1,301		1,65	0,703	
		0,064			0,033			0,028			0,028
0,50	0,549		0,925	1,622		1,17	1,273		1,70	0,675	
		0,070			0,036			0,026			0,025
0,55	0,619		0,930	1,658		1,18	1,247		1,75	0,650	
		0,074			0,038			0,025			0,024
0,60	0,693		0,935	1,696		1,19	1,222		1,80	0,626	
		0,016			0,042			0,023			0,021
0,61	0,709		0,940	1,738		1,20	1,199		1,85	0,605	
		0,016			0,044			0,022			0,020

Канал с прямым уклоном $i=0$, по Бахметьеву. $x=2,0$. (Продолжение.)

η	$\psi(\eta)$	$-\Delta$	η	$\psi(\eta)$	$-\Delta$	η	$\psi(\eta)$	$-\Delta$	η	$\psi(\eta)$	$-\Delta$
0,62	0,725		0,945	1,782		1,21	1,177		1,90	0,585	
0,63	0,741	0,016	0,950	1,831	0,049	1,22	1,166	0,021	1,95	0,568	0,019
0,64	0,758	0,017	0,955	1,885	0,054	1,23	1,138	0,020	2,00	0,549	0,017
0,65	0,775	0,017	0,960	1,945	0,060	1,24	1,117	0,019	2,1	0,518	0,031
0,66	0,792	0,017	0,965	2,013	0,068	1,25	1,098	0,019	2,2	0,490	0,038
0,67	0,810	0,018	0,970	2,092	0,079	1,26	1,081	0,017	2,3	0,466	0,024
0,68	0,829	0,019	0,975	2,184	0,092	1,27	1,065	0,016	2,4	0,444	0,022
0,69	0,848	0,019	0,980	2,297	0,113	1,28	1,049	0,016	2,5	0,424	0,020
0,70	0,867	0,019	0,985	2,442	0,145	1,29	1,033	0,015	2,6	0,406	0,019
0,71	0,887	0,020	0,990	2,646	0,204	1,30	1,018	0,015	2,7	0,389	0,016
0,72	0,907	0,020	0,995	3,000	0,354	1,31	1,004	0,014	2,8	0,374	0,015
0,73	0,928	0,021	1,000	∞	∞	1,32	0,990	0,014	2,9	0,360	0,014
0,74	0,950	0,022	1,005	2,997	∞	1,33	0,977	0,013	3,0	0,346	0,014
0,75	0,972	0,022	1,010	2,652	0,345	1,34	0,964	0,013	3,5	0,294	0,052
0,76	0,996	0,024	1,015	2,450	0,202	1,35	0,952	0,012	4,0	0,255	0,089
0,77	1,020	0,024	1,020	2,307	0,143	1,36	0,940	0,012	4,5	0,226	0,029
0,78	1,045	0,025	1,025	2,197	0,110	1,37	0,928	0,012	5,0	0,203	0,023
0,79	1,071	0,026	1,030	2,107	0,090	1,38	0,917	0,011	6,0	0,168	0,035
0,80	1,098	0,027	1,035	2,031	0,076	1,39	0,906	0,011	8,0	0,126	0,042
0,81	1,127	0,029	1,040	1,966	0,065	1,40	0,896	0,010	10,0	0,100	0,026
0,82	1,156	0,029	1,045	1,907	0,058	1,41	0,886	0,010			
0,83	1,186	0,032	1,05	1,857	0,051	1,42	0,878	0,010			
0,84	1,221	0,033	1,06	0,768	0,089	1,43	0,866	0,010			
		0,035			0,075						

Таблицы для $x=2,50, 3,25, 3,50, 3,75, 4,50$ и 5 можно найти в книге Бахметьева «О неравномерном движении жидкости в открытом русле», изд. КУБУЧ, 1932 г., а также у Ахуткина — «Примеры гидравлических расчетов», ГИТТ, 1931 г.

Таблица Бахметьева. Канал с прямым уклоном.

 $x = 3,25$.

η	$\psi(\eta)$	$+\Delta$	η	$\psi(\eta)$	$\pm \Delta$	τ	$\psi(\eta)$	$-\Delta$	η	$\psi(\eta)$	$-\Delta$
0	0		0,85	1,038	0,025	1,07	0,683		1,44	0,226	0,004
0,05	0,050	0,050	0,86	1,063	0,027	1,08	0,646	0,037	1,45	0,222	0,004
0,10	0,100	0,050	0,87	1,090	0,028	1,09	0,613	0,033	1,46	0,218	0,004
0,15	0,150	0,050	0,88	1,118	0,030	1,10	0,584	0,029	1,47	0,214	0,004
0,20	0,200	0,050	0,89	1,148	0,033	1,11	0,558	0,026	1,48	0,210	0,004
0,25	0,250	0,051	0,90	1,181	0,018	1,12	0,534	0,022	1,49	0,206	0,004
0,30	0,301	0,051	0,905	1,199	0,019	1,13	0,512	0,019	1,50	0,202	0,017
0,35	0,352	0,053	0,910	1,218	0,019	1,14	0,493	0,018	1,55	0,185	0,015
0,40	0,405	0,053	0,915	1,237	0,020	1,15	0,475	0,017	1,60	0,170	0,013
0,45	0,458	0,055	0,920	1,257	0,022	1,16	0,458	0,015	1,65	0,157	0,012
0,50	0,513	0,057	0,925	1,279	0,023	1,17	0,443	0,015	1,70	0,145	0,010
0,55	0,570	0,060	0,930	1,302	0,025	1,18	0,428	0,014	1,75	0,135	0,009
0,60	0,630	0,012	0,935	1,327	0,027	1,19	0,414	0,013	1,80	0,126	0,008
0,61	0,642	0,013	0,940	1,354	0,028	1,20	0,401	0,012	1,85	0,118	0,007
0,62	0,655	0,013	0,945	1,382	0,031	1,21	0,389	0,011	1,90	0,111	0,007
0,63	0,668	0,013	0,950	1,413	0,034	1,22	0,378	0,010	1,95	0,104	0,006
0,64	0,681	0,013	0,955	1,447	0,038	1,23	0,368	0,010	2,0	0,098	0,011
0,65	0,694	0,013	0,960	1,485	0,043	1,24	0,358	0,010	2,1	0,087	0,009
0,66	0,707	0,014	0,965	1,528	0,049	1,25	0,348	0,009	2,2	0,078	0,008
0,67	0,721	0,014	0,970	1,577	0,057	1,26	0,339	0,009	2,3	0,070	0,006
0,68	0,735	0,014	0,975	1,634	0,071	1,27	0,330	0,008	2,4	0,064	0,006
0,69	0,749	0,015	0,980	1,705	0,090	1,28	0,322	0,008	2,5	0,058	0,005
0,70	0,763	0,015	0,985	1,795	0,127	1,29	0,314	0,008	2,6	0,053	0,005
0,71	0,778	0,015	0,990	1,922	0,216	1,30	0,306	0,007	2,7	0,048	0,004
0,72	0,793	0,016	0,995	2,132	∞	1,31	0,299	0,007	2,8	0,044	0,003
0,73	0,808	0,016	1,000	∞	∞	1,32	0,292	0,007	2,9	0,041	0,003
0,74	0,824	0,017	1,005	1,477	0,212	1,33	0,285	0,006	3,0	0,038	0,011
0,75	0,841	0,016	1,010	1,265	0,125	1,34	0,279	0,006	3,5	0,027	0,007
0,76	0,857	0,017	1,015	1,140	0,087	1,35	0,273	0,006	4,0	0,020	0,005
0,77	0,874	0,018	1,020	1,053	0,067	1,36	0,267	0,006	4,5	0,015	0,003

Таблица Бахметьева. Канал с прямым уклоном. $x = 3,25$. (Продолжение.)

η	$\psi(\eta)$	$\pm \Delta$	η	$\psi(\eta)$	$\pm \Delta$	η	$\psi(\eta)$	$\pm \Delta$	η	$\psi(\eta)$	$\pm \Delta$
0,78	0,892	0,019	1,025	0,986	0,054	1,37	0,261	0,006	5,0	0,012	0,004
0,79	0,911	0,019	1,030	0,932	0,046	1,38	0,255	0,005	6,0	0,008	0,003
0,80	0,930	0,019	1,035	0,886	0,040	1,39	0,250	0,005	7,0	0,005	0,001
0,81	0,949	0,021	1,040	0,846	0,035	1,40	0,245	0,005	8,0	0,004	0,001
0,82	0,970	0,022	1,045	0,811	0,031	1,41	0,240	0,004	9,0	0,003	0,001
0,83	0,992	0,022	1,05	0,780	0,053	1,42	0,235	0,004	10,0	0,002	
0,84	1,014	0,024	1,06	0,727	0,044	1,43	0,231	0,005			

Таблица Бахметьева. Канал с прямым уклоном $i_0 > 0$. $x = 3,5$

η	$\psi(\eta)$	$\pm \Delta$	η	$\psi(\eta)$	$\pm \Delta$	η	$\psi(\eta)$	$\pm \Delta$	η	$\psi(\eta)$	$\pm \Delta$
0	0	0,050	0,85	1,016	0,023	1,07	0,599	0,035	1,44	0,184	0,004
0,05	0,050	0,050	0,86	1,039	0,025	1,08	0,564	0,030	1,45	0,180	0,004
0,10	0,100	0,050	0,87	1,064	0,027	1,09	0,534	0,027	1,46	0,176	0,003
0,15	0,150	0,050	0,88	1,091	0,029	1,10	0,507	0,024	1,47	0,173	0,004
0,20	0,200	0,050	0,89	1,120	0,031	1,11	0,483	0,022	1,48	0,169	0,003
0,25	0,250	0,051	0,90	1,151	0,017	1,12	0,461	0,019	1,49	0,166	0,003
0,30	0,301	0,051	0,905	1,168	0,017	1,13	0,442	0,018	1,50	0,163	0,015
0,35	0,352	0,052	0,910	1,185	0,019	1,14	0,424	0,017	1,55	0,148	0,013
0,40	0,404	0,053	0,915	1,204	0,019	1,15	0,407	0,016	1,60	0,135	0,011
0,45	0,456	0,054	0,920	1,223	0,020	1,16	0,391	0,014	1,65	0,124	0,010
0,50	0,510	0,056	0,925	1,243	0,022	1,17	0,377	0,013	1,70	0,114	0,009
0,55	0,566	0,059	0,930	1,265	0,023	1,18	0,364	0,012	1,75	0,105	0,008
0,60	0,625	0,012	0,935	1,288	0,025	1,19	0,352	0,011	1,80	0,097	0,007
0,61	0,637	0,012	0,940	1,319	0,026	1,20	0,341	0,011	1,85	0,090	0,006
0,62	0,649	0,012	0,945	1,339	0,029	1,21	0,330	0,010	1,90	0,084	0,005
0,63	0,661	0,013	0,950	1,368	0,032	1,22	0,320	0,010	1,95	0,079	0,005
0,64	0,674	0,013	0,955	1,400	0,036	1,23	0,310	0,009	2,0	0,074	0,009

Таблица Бахметьева. Канал с прямым уклоном $i_0 > 0$, $x = 3,5$ (продолжение.)

η	$\psi(\eta)$	$+\Delta$	η	$\psi(\eta)$	$+\Delta$	η	$\psi(\eta)$	$-\Delta$	η	$\psi(\eta)$	$-\Delta$
0,65	0,687	0,013	0,960	1,436	0,036	1,24	0,301	0,009	2,1	0,066	
0,66	0,700	0,013	0,965	1,476	0,040	1,25	0,292	0,009	2,2	0,057	0,008
0,67	0,713	0,013	0,970	1,522	0,046	1,26	0,284	0,008	2,3	0,051	0,006
0,68	0,726	0,014	0,975	1,576	0,054	1,27	0,276	0,008	2,4	0,046	0,005
0,69	0,740	0,014	0,980	1,642	0,066	1,28	0,269	0,007	2,5	0,041	0,008
0,70	0,754	0,014	0,985	1,726	0,084	1,29	0,262	0,007	2,6	0,037	0,004
0,71	0,768	0,014	0,990	1,844	0,118	1,30	0,255	0,007	2,7	0,034	0,003
0,72	0,782	0,015	0,995	2,043	0,199	1,31	0,248	0,006	2,8	0,031	0,003
0,73	0,797	0,015	1,000	∞	∞	1,32	0,242	0,006	2,9	0,028	0,002
0,74	0,812	0,016	1,006	1,329	0,191	1,33	0,236	0,006	3,0	0,026	0,008
0,75	0,828	0,016	1,010	1,138	0,116	1,34	0,230	0,005	3,5	0,018	0,008
0,76	0,844	0,016	1,015	1,022	0,082	1,35	0,225	0,006	4,0	0,012	0,003
0,77	0,860	0,017	1,020	0,940	0,061	1,36	0,219	0,005	4,5	0,009	0,002
0,78	0,877	0,018	1,025	0,879	0,052	1,37	0,214	0,005	5,0	0,007	0,003
0,79	0,895	0,018	1,030	0,827	0,042	1,38	0,209	0,004	6,0	0,004	0,002
0,80	0,913	0,019	1,035	0,785	0,037	1,39	0,205	0,005	8,0	0,002	0,001
0,81	0,932	0,020	1,040	0,748	0,032	1,40	0,200	0,004	10,0	0,001	
0,82	0,952	0,020	1,045	0,716	0,028	1,41	0,196	0,004			
0,83	0,972	0,021	1,05	0,688	0,049	1,42	0,192	0,004			
0,84	0,999	0,023	1,06	0,639	0,040	1,43	0,188	0,004			

Таблица Бахметьева. Канал с прямым уклоном $i_0 > 0$. $x = 3,75$

η	$\psi(\eta)$	$+\Delta$	η	$\psi(\eta)$	$\pm \Delta$	η	$\psi(\eta)$	$-\Delta$	η	$\psi(\eta)$	$-\Delta$
0	0	0,060	0,85	0,997	0,023	1,07	0,529	0,032	1,44	0,151	0,004
0,05	0,050	0,050	0,86	1,020	0,024	1,08	0,497	0,029	1,45	0,147	0,003
0,10	0,100	0,050	0,87	1,044	0,025	1,09	0,469	0,025	1,46	0,144	0,003
0,15	0,150	0,050	0,88	1,069	0,027	1,10	0,444	0,022	1,47	0,141	0,003
0,20	0,200	0,050	0,89	1,096	0,030	1,11	0,422	0,020	1,48	0,138	0,022

Таблица Бахметьева. Канал с прямым уклоном $i_0 > 0$, $x = 3,75$ (продолжение).

η	$\phi(\eta)$	$+\Delta$	η	$\phi(\eta)$	$\pm\Delta$	η	$\phi(\eta)$	$-\Delta$	η	$\phi(\eta)$	$-\Delta$
0,25	0,250	0,050	0,90	1,126	0,027	1,12	0,402	0,022	1,49	0,135	0,003
		0,050			0,016			0,018			0,003
0,30	0,300	0,051	0,905	1,142	0,016	1,13	0,384	0,016	1,50	0,132	0,013
0,35	0,351	0,052	0,910	1,158	0,017	1,14	0,368	0,015	1,55	0,119	0,011
0,40	0,403	0,052	0,915	1,175	0,018	1,15	0,353	0,014	1,60	0,108	0,010
0,45	0,455	0,055	0,920	1,193	0,019	1,16	0,339	0,013	1,65	0,098	0,008
0,50	0,508	0,056	0,925	1,212	0,020	1,17	0,326	0,012	1,70	0,090	0,007
0,55	0,553	0,057	0,930	1,232	0,022	1,18	0,314	0,012	1,75	0,083	0,007
0,60	0,620	0,012	0,935	1,254	0,024	1,19	0,302	0,010	1,80	0,076	0,006
0,61	0,632	0,012	0,940	1,278	0,025	1,20	0,292	0,010	1,85	0,070	0,005
0,62	0,644	0,012	0,945	1,304	0,027	1,21	0,282	0,010	1,90	0,065	0,005
0,63	0,656	0,012	0,950	1,331	0,030	1,22	0,272	0,009	1,95	0,060	0,004
0,64	0,668	0,013	0,955	1,361	0,033	1,23	0,263	0,008	2,0	0,056	0,008
0,65	0,681	0,012	0,960	1,394	0,037	1,24	0,255	0,008	2,1	0,048	0,006
0,66	0,693	0,013	0,965	1,431	0,043	1,25	0,247	0,007	2,2	0,042	0,005
0,67	0,706	0,013	0,970	1,474	0,050	1,26	0,240	0,007	2,3	0,037	0,004
0,68	0,719	0,013	0,975	1,524	0,062	1,27	0,233	0,007	2,4	0,023	0,003
0,69	0,732	0,014	0,980	1,586	0,079	1,28	0,226	0,006	2,5	0,030	0,003
0,70	0,746	0,013	0,985	1,665	0,111	1,29	0,220	0,006	2,6	0,027	0,003
0,71	0,759	0,014	0,990	1,776	0,189	1,30	0,214	0,006	2,7	0,024	0,002
0,72	0,773	0,014	0,995	1,965	∞	1,31	0,208	0,005	2,8	0,022	0,002
0,73	0,787	0,015	1,000	∞	∞	1,32	0,203	0,006	2,9	0,020	0,0022
0,74	0,802	0,015	1,005	1,216	0,185	1,33	0,197	0,005	3,0	0,0178	0,0061
0,75	0,817	0,016	1,010	1,031	0,109	1,34	0,192	0,005	3,5	0,0117	0,0037
0,76	0,833	0,016	1,015	0,922	0,075	1,35	0,187	0,004	4,0	0,0080	0,0022
0,77	0,849	0,016	1,020	0,847	0,058	1,36	0,183	0,005	4,5	0,0058	0,0015
0,78	0,865	0,017	1,025	0,789	0,047	1,37	0,178	0,004	5,0	0,0043	0,0018
0,79	0,882	0,017	1,030	0,742	0,040	1,38	0,174	0,005	6,0	0,0026	0,0014
0,80	0,899	0,018	1,035	0,702	0,034	1,39	0,169	0,004	8,0	0,0012	0,006
0,81	0,917	0,019	1,040	0,668	0,030	1,40	0,165	0,004	10,0	0,0006	
0,82	0,936	0,019	1,045	0,638	0,026	1,41	0,161	0,003			
0,83	0,955	0,020	1,05	0,612	0,025	1,42	0,158	0,004			
0,84	0,975	0,022	1,06	0,556	0,037	1,43	0,154	0,003			

ТЕПЛОТА И ТЕРМОДИНАМИКА.

Теплота.

§ 1. Общие тепловые свойства тел.

Степень нагретости тела отмечается его темп-рой. Для измерения темп-ры применяются различные шкалы, так, напр., Цельсия, Реомюра, Фарен-

Табл. 1. Соотношение показаний термометров по шкалам С и F при одной и той же температуре.

С	F	С	F	С	F	С	F	С	F	С	F	С	F	С	F
-20	-4,0	+23	+73,4	+66	+150,8	+109	+228,2	+152	+305,6	+195	+383,0	+900	+1652		
-19	-2,2	24	75,2	67	152,6	110	230,0	153	307,4	196	384,8	950	1742		
-18	-0,4	25	77,0	68	154,4	111	231,8	154	309,2	197	386,6	1000	1832		
-17	+1,4	26	78,8	69	156,2	112	233,6	155	311,0	198	388,4	1050	1922		
-16	3,2	27	80,6	70	158,0	113	235,4	156	312,8	199	390,2	1100	2012		
-15	5,0	28	82,4	71	159,8	114	237,2	157	314,6	200	392	1150	2102		
-14	6,8	29	84,2	72	161,6	115	239,0	158	316,4	210	410	1200	2192		
-13	8,6	30	86,0	73	163,4	116	240,8	159	318,2	220	428	1250	2282		
-12	10,4	31	87,8	74	165,2	117	242,6	160	320,0	230	446	1300	2372		
-11	12,2	32	89,6	75	167,0	118	244,4	161	321,8	240	464	1350	2462		
-10	14,0	33	91,4	76	168,8	119	246,2	162	323,6	250	482	1400	2552		
-9	15,8	34	93,2	77	170,6	120	248,0	163	325,4	260	500	1450	2642		
-8	17,6	35	95,0	78	172,4	121	249,8	164	327,2	270	518	1500	2732		
-7	19,4	36	96,8	79	174,2	122	251,6	165	329,0	280	536	1550	2822		
-6	21,2	37	98,6	80	176,0	123	253,4	166	330,8	290	554	1600	2912		
-5	23,0	38	100,4	81	177,8	124	255,2	167	332,6	300	572	1650	3002		
-4	24,8	39	102,2	82	179,6	125	257,0	168	334,4	310	590	1700	3092		
-3	26,6	40	104,0	83	181,4	126	258,8	169	336,2	320	608	1750	3182		
-2	28,4	41	105,8	84	183,2	127	260,6	170	338,0	330	626	1800	3272		
-1	30,2	42	107,6	85	185,0	128	262,4	171	339,8	340	644	1850	3362		
0	32,0	43	109,4	86	186,8	129	264,2	172	341,6	350	662	1900	3452		
+1	33,8	44	111,2	87	188,6	130	266,0	173	343,4	360	680	1950	3542		
2	35,6	45	113,0	88	190,4	131	267,8	174	345,2	370	698	2000	3632		
3	37,4	46	114,8	89	192,2	132	269,6	175	347,0	380	716	2050	3722		
4	39,2	47	116,6	90	194,0	133	271,4	176	348,8	390	734	2100	3812		
5	41,0	48	118,4	91	195,8	134	273,2	177	350,6	400	752	2150	3902		
6	42,8	49	120,2	92	197,6	135	275,0	178	352,4	410	770	2200	3992		
7	44,6	50	122,0	93	199,4	136	276,8	179	354,2	420	788	2250	4082		
8	46,4	51	123,8	94	201,2	137	278,6	180	356,0	430	806	2300	4172		
9	48,2	52	125,6	95	203,0	138	280,4	181	357,8	440	824	2350	4262		
10	50,0	53	127,4	96	204,8	139	282,2	182	359,6	450	842	2400	4352		
11	51,8	54	129,2	97	206,6	140	284,0	183	361,4	460	860	2450	4442		
12	53,6	55	131,0	98	208,4	141	285,8	184	363,2	470	878	2500	4532		
13	55,4	56	132,8	99	210,2	142	287,6	185	365,0	480	896	2550	4622		
14	57,2	57	134,6	100	212,0	143	289,4	186	366,8	490	914	2600	4712		
15	59,0	58	136,4	101	213,8	144	291,2	187	368,6	500	932	2650	4802		
16	60,8	59	138,2	102	215,6	145	293,0	188	370,4	510	950	2700	4892		
17	62,6	60	140,0	103	217,4	146	294,8	189	372,2	520	968	2750	4982		
18	64,4	61	141,8	104	219,2	147	296,6	190	374,0	530	986	2800	5072		
19	66,2	62	143,6	105	221,0	148	298,4	191	375,8	540	1004	2850	5162		
20	68,0	63	145,4	106	222,8	149	300,2	192	377,6	550	1022	2900	5252		
21	69,8	64	147,2	107	224,6	150	302,0	193	379,4	560	1040	2950	5342		
22	71,6	65	149,0	108	226,4	151	303,8	194	381,2	570	1058				

гейта, абсолютная. В СССР применяется столградусная шкала. Градус столградусной шкалы есть одна сотая разности темп-ры кипения воды при нормальном давлении и темп-ры таяния льда. Темп-ра таяния льда принимается за нуль градусов. Соотношение между шкалами Цельсия, Реомюра и Фаренгейта следующее:

$$1^{\circ}\text{C} = \frac{9}{5}^{\circ}\text{F}; 1^{\circ}\text{F} = \frac{5}{9}^{\circ}\text{C}; 1^{\circ}\text{R} = \frac{4}{5}^{\circ}\text{C};$$

$$1^{\circ}\text{R} = \frac{4}{9}^{\circ}\text{F}; 1^{\circ}\text{C} = \frac{5}{4}^{\circ}\text{R}; 1^{\circ}\text{F} = \frac{9}{4}^{\circ}\text{R}.$$

Кроме того: темп-ра Цельсия $\text{C} = \frac{5}{4}\text{R}$ и $\text{C} = \frac{5}{9}(\text{F} - 32)$; темп-ра Реомюра: $\text{R} = \frac{4}{5}\text{C}$ и $\text{R} = \frac{4}{9}(\text{F} - 32)$; темп-ра Фаренгейта: $\text{F} = 32 + \frac{9}{5}\text{C}$ и $\text{F} = 32 + \frac{9}{4}\text{R}$.

§ 2. Расширение тел от нагревания.

Коэф-том линейного расширения твердого тела называется приращение единицы тела при увеличении его темп-ры на 1° . Коэф-т линейного расширения тела обозначается через α .

Коэф-том объемного расширения тела (твердого, жидкого или газообразного) называется приращение единицы объема тела при увеличении его темп-ры на 1° . Коэф-т объемного расширения тела обозначается через β . (Коэф-т объемного расширения газов часто обозначается через α).

Коэф-т объемного расширения однородных твердых тел в три раза больше коэф-та линейного расширения, т. е. $\beta = 3\alpha$.

Коэф-т плоскостного расширения равен удвоенному коэф-ту линейного расширения.

Коэф-т объемного расширения всех газов при постоянном давлении равняется $\frac{1}{273} = 0,00366$.

Значения коэф-тов расширения тел даны в таблицах 2—6.

Табл. 2. Коэф-ты объемного расширения 1 000 β при комнатной темп-ре.

Название тела	Коэф.	Название тела	Коэф.	Название тела	Коэф.
Алкоголь	1,10	Оливковое масло	0,72	Серная к-та	0,55
Бензол	1,25	Керосин	1,00—0,92	Смеклар	1,00
Глицерин	0,50	Ртуть	0,181	Вода	0,18
Эфир	1,60	Сурепное масло	0,90		

Табл. 3. Линейная усадка металлов при их затвердевании и охлаждении.

Название тела	Линейная усадка	Название тела	Линейная усадка
Свинец	$\frac{1}{92}$	Литая сталь	$\frac{1}{64}$
Бронза	$\frac{1}{64}$	Стальные отливки	$\frac{1}{30}$
Мелкозернистое железо	$\frac{1}{72}$	Висмут	$\frac{1}{265}$
Чугун	$\frac{1}{98}$	Цинк литой	$\frac{1}{63}$
Пушечный металл	$\frac{1}{134}$	Олово	$\frac{1}{120}$
Желтая медь	$\frac{1}{65}$	100 вес. ч. красной меди	$\frac{1}{134}$
Пудлинговая сталь	$\frac{1}{73}$	12,5 вес. ч. олова	
Полосовое железо прокатное	$\frac{1}{64}$		

Табл. 4. Линейное расширение твердых тел между 0° и t° в мм, относительное к 1 м при 0°.

Название тела	0° до 100°	0° до 100°	0° до 200°	0° до 300°	0° до 400°	0° до 500°	0° до 600°	0° до 700°	0° до 800°	0° до 900°	0° до 1000°	0° до 1100°	0° до 1200°	0° до 1300°	0° до 1400°	0° до 1500°
Алюминий	—5,43	2,38	4,94	7,68	10,60	13,70	16,67									
Свинец	—5,12	2,92														
Бронза	—2,84	1,75	3,58	5,50	7,51	9,61		8,79	10,63							
Литое железо	—1,67	1,20	2,51	3,92	5,44	7,06		8,60	10,40							
Литая сталь	—1,64	1,70	2,45	3,83	5,31	6,91		8,09	9,87							
Высокопрочный чугун	—1,59	1,04	2,21	3,49	4,90	6,44		7,91								
Чугун для машинных частей	—1,61	1,04	2,19	3,45	4,82	6,31										
Константан	—2,26	1,52	3,12	4,81	6,57	8,41										
Мель	—2,66	1,65	3,38	5,18	7,07	9,04	11,09									
Никель	—1,89			4,34	5,91	7,56	9,27	11,05	12,89	14,80	16,78					
Палладий	—1,93	1,19	2,42	3,70	5,02	6,38	7,79	9,24	10,74	12,27	13,86					
Платина	—1,51	0,9	1,83	2,78	3,76	4,77	5,80	6,86	7,94	9,05	10,19					
Платино-иридий. Сплав 80—20%	—1,43	0,83	1,70	2,59	3,51	4,45	5,43	6,43								
Сварочное железо	—1,68	1,22	2,53	3,93	5,43	7,02	8,71	10,49	12,27	14,05	15,83					
Серебро	—3,21	1,97	4,00	6,08	8,23	10,43	12,69	15,14	17,47	19,83	22,19					
Цинк	—1,85	1,65														
Олово	—4,24	2,67														
Целое стекло:																
6 III	—1,12	0,81	1,67	2,60	3,59	4,63										
59 III	—0,82	0,59	1,20	1,83	2,47	3,12										
156 III		0,345	0,72	1,12	1,56	2,02										
Кварцевое стекло		0,05	0,12	0,19	0,25	0,31	0,36	0,40	0,45	0,50	0,54					

Табл. 5. Плотность и удельный объем воды при различных темп-рах.

Темп-ра	Плотность	Удельный объем	Темп-ра	Плотность	Удельный объем	Темп-ра	Плотность	Удельный объем	Темп-ра	Плотность	Удельный объем
0	0,99987	1,01012	30	0,99567	1,00435	75	0,9749	1,0258	200	0,8628	1,1590
2	0,99997	1,00003	32	0,99505	1,00497	80	0,9718	1,0290	210	0,850	1,177
4	1,00000	1,00000	34	0,99440	1,00563	85	0,9687	1,0324	220	0,837	1,195
6	0,99997	1,00003	36	0,99372	1,00632	90	0,9653	1,0359	230	0,828	1,215
8	0,99988	1,00012	38	0,99299	1,00706	95	0,9619	1,0396	240	0,809	1,236
10	0,99973	1,00027	40	0,99224	1,00782	100	0,9584	1,0434	250	0,794	1,259
12	0,99953	1,00048	42	0,99147	1,00861	110	0,9510	1,0515	260	0,779	1,283
14	0,99927	1,00073	44	0,99066	1,00943	120	0,9435	1,0600	270	0,775	1,308
16	0,99897	1,00103	46	0,98982	1,01028	130	0,9351	1,0694	280	0,75	1,34
18	0,99862	1,00138	48	0,98896	1,01116	140	0,9263	1,0795	290	0,72	1,38
20	0,99823	1,00177	50	0,9881	1,0121	150	0,9172	1,0903	300	0,70	1,42
22	0,99780	1,00221	55	0,9857	1,0145	160	0,9076	1,1018	310	0,68	1,46
24	0,99732	1,00268	60	0,9832	1,0171	170	0,8973	1,1145	320	0,66	1,51
26	0,99681	1,00320	65	0,9806	1,0198	180	0,8866	1,1279			
28	0,99626	1,00375	70	0,9778	1,0227	190	0,8750	1,1429			

Табл. 6. Удельный объем воды при различных давлениях и темп-рах.

Темп-ра Давл. в атм	0°	10°	20°	30°	40°	60°	60°	70°	80°
1	1,0001	1,0002	1,0017	1,0042	1,0077	1,0119	1,0167	1,0225	1,0288
1 000	0,9579	0,9603	0,9631	0,9664	0,9701	0,9744	0,9792	0,9843	0,9897
2 000	0,9261	0,9294	0,9328	0,9365	0,9404	0,9446	0,9490	0,9538	0,9586
4 000	0,8808	0,8844	0,8881	0,8898	0,8957	0,8997	0,9038	0,9081	0,9124
6 000	0,8481	0,8510	0,8546	0,8565	0,8624	0,8663	0,8703	0,8743	0,8782
8 000			0,8276	0,8301	0,8361	0,8400	0,8439	0,8478	0,8514
12 000				0,8108	0,8150	0,8189	0,8227	0,8265	0,8301
					0,7967	0,8006	0,8044	0,8081	0,8116

§ 3. Удельная теплота.

За единицу количества тепла принимается количество тепла, необходимое для нагревания 1 кг воды от 14,5 до 15,5° при атмосферном давлении. Эта единица тепла называется большой калорией (*Cal*) или килограмм-калорией. Малой калорией (*cal*), или грамм-калорией, называется 0,001 *Cal*.

Удельной теплоемкостью тела называется количество тепла (в калориях), к-рое необходимо для нагревания 1 кг тела на 1°. Теплоемкость тела обозначается через *c*. Количество тепла, необходимое для нагревания *Q* кг тела, имеющего теплоемкость *c* от *t*₁ до *t*₂, определяется по ф-ле:

$$Q = cG(t_2 - t_1).$$

Табл. 7. Теплоемкость воды по Барнесу.

<i>t</i>	<i>c</i>	<i>t</i>	<i>c</i>	<i>t</i>	<i>c</i>	<i>t</i>	<i>c</i>	<i>t</i>	<i>c</i>
0	1,0091	20	0,9987	40	0,9971	60	0,9988	75	1,0007
5	1,0050	25	0,9978	45	0,9973	65	0,9994	80	1,0014
10	1,0020	30	0,9973	50	0,9977	70	1,0001	85	1,0021
16	1,0000	35	0,9971	55	0,9982			100	1,0043

Табл. 8. Средняя теплоемкость воды c_m между 0° и t° по Дидеричи.

t	c_m	t	c_m	t	c_m	t	c_m	t	c_m	t	c_m
20	1,0010	80	0,9985	140	1,0046	200	1,0155	240	1,0256	280	1,0380
40	0,9973	100	1,0000	160	1,0077	220	1,0203	260	1,0315	300	1,0449
60	0,9976	120	1,0020	180	1,0113						

Табл. 9. Средняя теплоемкость твердых и жидких тел между 0° и 100°.

Название тела	c	Название тела	c	Название тела	c	Название тела	c
Алюминий . . .	0,22	Висмут . . .	0,030	Древесн. уголь	0,20	Бензол . . .	0,44
Сурьма . . .	0,05	Вольфрам . . .	0,034	Кокс . . .	0,20	Глицерин . . .	0,58
Свинец . . .	0,031	Цинк . . .	0,094	Мрамор, из-		Машин. масло	0,40
Золото . . .	0,031	Ртуть . . .	0,033	вестняк . . .	0,21	Нафталин . . .	0,31
Медь красная	0,094	Олово . . .	0,056	Песчаник . . .	0,22	Керосин . . .	0,50
Магний . . .	0,25	Золот. . .	0,20	Шлак . . .	0,18	Серная к-та	0,33
Марганец . . .	0,12	Вазальт . . .	0,20	Сера . . .	0,18	Сернистая к-та	0,32
Константан . .	0,088	Бетон . . .	0,21	Каменный		Скипидар . . .	0,42
Никель . . .	0,11	Гипс . . .	0,20	уголь . . .	0,31	Кислород	
Бронза . . .	0,092	Стекло . . .	0,20	Кирпич . . .	0,22	(жидкий) . . .	0,347
Платина . . .	0,032	Гранит . . .	0,20	Спирт . . .	0,58	Азот (жидкий)	0,430
Железо и сталь	0,115	Графит . . .	0,20	Аммиак . . .	1,00	Окись свинца	0,05
Серебро . . .	0,056	Дуб . . .	0,57	Анилин . . .	0,49	Лед (-20° до 0°)	0,50
Тантал . . .	0,036	Сосна . . .	0,65	Эфир . . .	0,54		

Табл. 10. Теплоемкость раствора поваренной соли.

Темп-ра	Насыщенность раствора в %								
	10	12	14	16	18	20	22	24	26
а) для 1 л									
-20°							0,940		
-10			0,946	0,944	0,942	0,941	0,940	0,939	0,939
0	0,954	0,950	0,946	0,944	0,942	0,941	0,940	0,939	0,938
+10	0,953	0,950	0,946	0,944	0,942	0,940	0,939	0,938	0,937
+20	0,956	0,951	0,947	0,944	0,942	0,939	0,938	0,936	0,934
б) для 1 кг									
-20°			0,851	0,838	0,825	0,812	0,795		
-10			0,854	0,840	0,827	0,814	0,793	0,787	0,776
0	0,885	0,869	0,854	0,840	0,827	0,814	0,801	0,789	0,778
+10	0,889	0,872	0,857	0,843	0,830	0,816	0,804	0,791	0,780
-20	0,892	0,875	0,860	0,845	0,832	0,818	0,806	0,793	0,784

§ 4. Изменение агрегатного состояния тела от теплоты.

Табл. 11. Температура плавления или затвердевания тел при 760 мм ртутного столба.

Название тела	t°	Название тела	t°
Углерод	около	Платина	1764
Вольфрам	3 920	Палладий	1557
Тантал	3 000	Железо	1520
Иридий	2 800	Кобальт	1490
Радия	2 350	Никель	1450
	2 000		

Табл. 11. Темп-ра плавления или затвердевания тел при 760 мм рт. ст. (продолж.).

Название тела	°	Название тела	°
Литое железо	1350—1450	Парафин	54
Сталь	1300—1400	Стеарин	50
Шлак дом. печей	1300—1430	Фосфор	44
Марганец	1245	Бензол	5,5
Чугун серый	1200	Вода	0
» белый	1130	Морская вода	—2,5
Медь	1083	Анилин	—6
Золото	1063	Скипидар	—10
Серебро	960	Соляной раствор (насыщ. иный)	—18
Эмалевые краски	960	Глицерин	—19
Латунь около	900	Ланолин	—20
Бронза »	900	Ртуть	—39
Алюминий	658	Угловая х-та (5,27 кг/см)	—56,3
Сурьма	630	Хлороформ	—63
Цинк	419	Серная х-та	—73
Свинец	327	Аммиак	—77
Кадмий	321	Толуол	—94,5
Висмут	271	Хлор	—101
Олово	231,8	Сероуглерод	—113
Мягкий припой	135—210	Спирт	—114
Висмутый припой	94—128	Эфир	—118
Каучук	125	Бензин (уд. в. 0,75)	—150
Сера (ромбическая)	113	Азот	—210
Натрия	97,5	Кислород	—291
Нафталин	80		
Воск	64		
Калий	63		

Табл. 12. Точки плавления различных солей для соляных ванн.

Название тела	°	Название тела	°	Название тела	°
Фтористый барий	1000	Фтористый стронций	732	Хлористое серебро	481
Фтористый кальций	1000	Хлористый калий	730	Хлорная медь	434
Фтористый магний	908	Хлористый кальций	720	Азотнокислый калий	340
Фтористый натрий	902	Сода	714	Хлористое железо	300
Хлористый барий	860	Хлористый магний	708	Азотнокислый натр.	300
Поташ	830	Углекислый литий	695	Хлористый цинк	262
Фтористый литий	801	Хлористый литий	600	Хлористый алюми-	180
Фтористый калий	790	Хлористый свинец	500		
Поваренная соль	770	Хлористая медь	498		

Табл. 13. Темп-ра кипения различных тел при давлении в 760 мм ртутного столба.

Название тела	°	Название тела	°	Название тела	°
Цинк	930	Скипидар	160	Аммиак	—33
Сера (ромбическая)	444,5	Толуол	110	Хлор	—34
Ртуть	357	Насыщ. раствор поваренной соли	108	Углекислота	—78,5
Ланолин	316	Вода	100	Ацетилен	—84
Парафин	300	Бензол	80	Этилен	—104
Глицерин	290	Алкоголь (абсолют.)	78,5	Кислород	—183
Фосфор	290	Хлороформ	61	Аргон	—186
Нафталин	218	Сероуглерод	46	Оксид углерода	—190
Анилин	184	Эфир	35	Азот	—196
Насыщ. раствор хлористого кальция	180	Серная кислота	—10	Водород	—253
				Гелий	—269

Табл. 14. Темп-ра кипения воды при различном стоянии барометра в мм рт. ст.

b	Г	b	Г	b	Г	b	Г	b	Г	b	Г	b	Г	b	Г
680	96,92	695	97,52	710	98,11	725	98,69	740	99,26	760	100,00	780	100,73	795	101,26
685	97,12	700	97,71	715	98,30	730	98,88	745	99,44	765	100,18	785	100,91	800	101,44
690	97,32	705	97,91	720	98,49	735	99,07	750	99,63	770	100,37	790	101,09		
								755	99,82	775	100,55				

Скрытой теплотой плавления называется количество тепла (в *Cal*), необходимое для превращения 1 кг тела из твердого состояния в жидкое без повышения темп-ры. При замерзании тела это количество тепла им отдается.

Табл. 15. Скрытая t различных тел.

Название тела	<i>Cal</i>	Название тела	<i>Cal</i>	Название тела	<i>Cal</i>
Алюминий	77	Шлак домен. печей	50	Ртуть	2,8
Бензол	30	Медь	43	Сера	9
Свинец	6	Нафталин	36	Серебро	21
Кадмий	14	Парафин	35	Висмут	13
Лед	80	Фосфор	5	Цинк	28
Железо	30	Платина	27	Олово	14

Скрытой теплотой парообразования называется количество тепла (в *Cal*), необходимое для обращения 1 кг подогретой до $t_{\text{кип}}$ жидкости в пар той же темп-ры при постоянном во время кипения давлении. При обращении пара в жидкость эта теплота паром отдается. Скрытая теплота парообразования зависит от давления и обозначается через r .

Табл. 16. Скрытая теплота испарения при $t_{\text{кип}}$ и при давлении в 1 кг/см².

Название тела	r	Название тела	r	Название тела	r
Алкоголь	210	Хлороформ	58	Серная к-та (при 0°)	91
Аммиак (при 0°)	800	Углекислота (при 0°)	56	Азот	48
Анилин	110	Ртуть	68	Скипидар	70
Эфир	90	Кислород	51	Толуол	85
Бензол	94	Сера	362	Вода	539
Хлор	62	Серовуглерод	85	Водород	123
Хлорметил	97	Серная к-та	95		

§ 5. Растворение газов.

Табл. 17. Количество газа (в м³) при 0° и 760 мм рт. столба, растворимое 1 м³ дистиллированной воды при давлении 760 мм рт. столба и различных темп-рах.

Название тела	Температура			Название тела	Температура		
	0°	20°	100°		0°	20°	100°
Воздух	0,032	0,020	0,012	Хлор	5,0	2,5	0,20
Азот	0,026	0,017	0,0103	Хлористый водород	560	480	—
Кислород	0,053	0,034	0,0185	Оксид углерода	0,039	0,025	—
Водород	0,023	0,020	0,018	Сероводород	5,0	2,8	0,87
Углекислота	1,87	0,96	0,26	Серная к-та	87	43	—
Ацетилен	1,89	1,12	—	Аммиак	1250	700	—

Термодинамика.

Общие свойства и основные законы.

§ 1. Определение состояния газа.

Термодинамика изучает законы превращения тепла в работу. В термодинамических процессах участвуют газ или пар. Состояние газа и параметры, его определяющие (объем, давление и темп-ра), в процессах непрерывно меняются.

Объем газа. Объем произвольного количества газа, обозначаемый через V , измеряется в м^3 . Объем 1 кг газа, обозначаемый через v , измеряется в $\text{м}^3/\text{кг}$. Объем 1 кг газа называется удельным объемом. Вес 1 м^3 называется удельным весом и обозначается через γ . Уд. в., измеряемый в $\text{кг}/\text{м}^3$, является величиной, обратной удельному объему, т. е.:

$$\gamma = \frac{1}{v}.$$

Удельный вес газа при нормальных условиях, т. е. при давлении в 760 мм и 0°С или при 1 atm и 15°С , м. б. взят из табл. 2.

При иных условиях уд. в. определяется по ф-ле:

$$\gamma_1 = \gamma_0 \frac{p_1}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T_1} = 288 \frac{\gamma_0 p_1}{T_1},$$

где γ_0 —удельный вес при 1 atm и 15°С , p_1 и T_1 —давление и темп-ра, при к-рых определяется уд. в. газа.

Давление газа. Давление газа обозначается через P или p ; первое обозначение употребляется при измерении давления в $\text{кг}/\text{м}^2$, второе—при измерении в $\text{кг}/\text{см}^2$. Давление, равное 1 $\text{кг}/\text{см}^2$, называется атмосферой.

$$1 \text{ atm} = 1 \text{ кг}/\text{см}^2 = 10\,000 \text{ кг}/\text{м}^2.$$

Давление измеряется также высотой столба жидкости, при этом 1 atm уравновешивается ртутным столбом высотой в 736 мм и водяным высотой в 10 м.

Табл. 1. Соотношение метрической и физической атмосфер, измеренных в других единицах измерения.

Название	$\text{кг}/\text{см}^2$	$\text{кг}/\text{м}^2$	Высота рт. ст. 0°С в мм	Высота вод. ст. 0°С в мм	Анг. фн. дм ²
Метрич. атмосфера. . . .	1	10 000	735,6	10	14,22
Физич. атмосфера	1,033	10 333	760	10,333	14,70

Полное (абсолютное) давление определяется по ф-лам:

$$P_{\text{абс.}} = P_{\text{вар.}} + P_{\text{ман.}}$$

$$P_{\text{абс.}} = P_{\text{вар.}} - P_{\text{вак.}}$$

Первая ф-ла относится к случаю избыточного давления, вторая—разряжения. В ф-лах $P_{\text{вар.}}$ —атмосферное давление, определяемое барометром, $P_{\text{ман.}}$ —избыточное давление, определяемое по манометру, $P_{\text{вак.}}$ —разряжение, определяемое вакуумметром.

Температура газа. Температура обозначается через t° или T° ; первое обозначение употребляется при измерении температуры по шкале Цельсия, второе—по шкале абсолютной, при этом:

$$T^\circ = 273 + t^\circ.$$

§ 2. Уравнение состояния газа. Характеристическое уравнение.

Параметры газа P , v и T° при всех изменениях подчиняются закону Бойля-Мариотта—Гей-Люссака, согласно к-рому:

$$Pv = RT \text{ для 1 кг газа;}$$

$$PV = GRT \text{ для } G \text{ кг газа.}$$

Последнее ур-е называется характеристическим ур-ем газа. В ур-и: P —в кг/м², V —объем газа в м³, T —абсолютная темп-ра, R —газовая постоянная, определяемая по ф-ле: $R = \frac{848}{m}$, где m —мол. в. газа.

Табл. 2. Значения параметров газов.

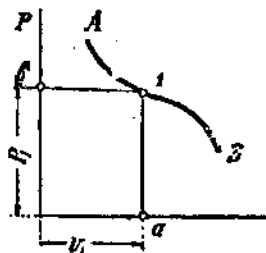
Г а з ы	Химич. обознач.	Атомность	Мол. в.		Постоянная газа	Уд. в.		Удельн. объем	
			прибл.	итого		760 мм и 0° С	1 м³ и 15° С	760 мм и 0° С	1 м³ и 15° С
Кислород	O ₂	2	32	32	26,50	1,429	1,312	0,700	0,763
Азот	N ₂	2	28	28,08	30,26	1,251	1,150	0,799	0,871
Водород	H ₂	2	2	2,016	420,0	0,0899	0,0827	11,13	12,13
Оксид углерода	CO	2	28	28,00	30,26	1,250	1,148	0,800	0,870
Воздух	—	—	29	28,95	29,27	1,293	1,188	0,772	0,841
Углекислота	CO ₂	3	44	44,00	19,27	1,377	1,813	0,506	0,551
Водяные пары	H ₂ O	3	18	18,02	47,10	0,806	0,739	1,24	1,35
Серный ангидрид	O ₃	3	64	64,06	13,24	2,927	2,627	0,342	0,372
Ацетилен	C ₂ H ₂	4	26	26,02	32,59	1,176	1,066	0,850	0,938
Аммиак	NH ₃	4	17	17,06	49,79	0,770	0,698	1,300	1,435
Метан	CH ₄	5	16	16,03	52,90	0,717	0,658	1,395	1,521
Этилен	C ₂ H ₄	6	28	28,038	30,25	1,250	1,149	0,800	0,870

§ 3. Графический метод исследования процессов. Система координат P — V .

Графический метод значительно упрощает исследование процессов. В системе координат P — V по оси абсцисс откладываются объемы газа, по оси ординат—давления. Графики процессов, протекающие в тепловых машинах, снимаются индикатором и называются индикаторными диаграммами.

По индикаторной диаграмме определяются параметры газа. Так, для точки 1 (черт. 1) имеем:

$$P_1 = 1 - a; V_1 = 1 - b; T_1 = \frac{P_1 V_1}{GR}.$$



Черт. 1.

§ 4. Газовые смеси.

Смеси газов подчиняются закону Дальтона, согласно к-рому каждый газ в смеси имеет такое давление, к-рое он имел бы, если бы один заполнял объем, занимаемый смесью. Поэтому полное давление смеси равно сумме давлений отдельных газов, составляющих смесь, т. е.:

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P = \sum_1^n P_i.$$

а) Задание смеси. Смесь задается весовыми долями или объемными. Под весовыми долями, обозначаемыми через g , подразумевается отношение веса газа к полному весу смеси, поэтому:

$$g_1 = \frac{G_1}{G}; g_2 = \frac{G_2}{G}; \dots; g_n = \frac{G_n}{G};$$

при этом:

$$g_1 + g_2 + g_3 + \dots + g_n = 1 \text{ и } G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n = G.$$

Объемная доля есть отношение приведенного объема газа к объему смеси. Приведенными объемами называются объемы, взятые при одинаковых давлениях и темп-рах. Объемные доли обозначаются через r ; при этом:

$$r_1 = \frac{V_1}{V}; r_2 = \frac{V_2}{V}; \dots; r_n = \frac{V_n}{V};$$

$$V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n = V;$$

$$r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n = 1.$$

б) Формула соотношения. Зависимость между весовыми и объемными долями устанавливается ф-лами:

$$g_1 = \frac{r_1 m_1}{r_1 m_1 + r_2 m_2 + \dots + r_n m_n} = \frac{r_1 m_1}{\sum_1^n r_i m_i};$$

$$g_2 = \frac{r_2 m_2}{r_1 m_1 + r_2 m_2 + \dots + r_n m_n} = \frac{r_2 m_2}{\sum_1^n r_i m_i} \text{ и т. д.};$$

$$r_1 = \frac{\frac{g_1}{m_1}}{\frac{g_1}{m_1} + \frac{g_2}{m_2} + \dots + \frac{g_n}{m_n}} = \frac{\frac{g_1}{m_1}}{\sum_1^n \frac{g_i}{m_i}};$$

$$r_2 = \frac{\frac{g_2}{m_2}}{\frac{g_1}{m_1} + \frac{g_2}{m_2} + \dots + \frac{g_n}{m_n}} = \frac{\frac{g_2}{m_2}}{\sum_1^n \frac{g_i}{m_i}} \text{ и т. д.,}$$

где $g_1, g_2, \dots, g_n$ —весовые доли отдельных газов, $r_1, r_2, \dots, r_n$ —объемные доли, $m_1, m_2, \dots, m_n$ —мол. в.

в) Газовая постоянная смеси. Газовая постоянная смеси в зависимости от условий задания м. б. определена по одной из сл. ф-л:

$$R = g_1 R_1' + g_2 R_2 + \dots + g_n R_n = \sum_1^n g_i R_i;$$

$$R = 848 \left(\frac{g_1}{m_1} + \frac{g_2}{m_2} + \dots + \frac{g_n}{m_n} \right) = 848 \sum_1^n \frac{g_i}{m_i};$$

$$R = \frac{848}{r_1 m_1 + r_2 m_2 + \dots + r_n m_n} = \frac{848}{\sum_1^n r_i m_i}.$$

г) Парциальные давления газов. Под парциальными давлениями подразумеваются давления отдельных газов в смеси. Парциальные давления газов определяются по ф-лам:

$$P_1 = g_1 \frac{R_1}{R} P; P_2 = g_2 \frac{R_2}{R} P \text{ и т. д.}$$

или:

$$P_1 = r_1 P; P_2 = r_2 P; P_3 = r_3 P \text{ и т. д.,}$$

где P_1, P_2, P_3 и т. д.—парциальные давления газов, $g_1, g_2 \dots g_n$ —весовые доли газов, $r_1, r_2 \dots r_n$ —объемные доли газов, $R_1, R_2 \dots R_n$ —газовые постоянные отдельных газов, P —давление смеси, R —постоянная смеси.

§ 5. Теплоемкость газов.

Теплоемкостью газа называется то количество тепла, которое необходимо для нагревания 1 кг газа на 1° ,—весовая теплоемкость, или для нагревания 1 м³ на 1° ,—объемная теплоемкость.

Теплоемкость газа является величиной переменной, зависящей от темп-ры, а также и от характера процесса нагревания газа. В общем виде теплоемкость газа, как ф-ия темп-ры, м. б. выражена ф-лой:

$$c = a + bt + dt^2 + \dots$$

Для двухатомных газов последняя ф-ла имеет вид:

$$c = a + bt.$$

Количество тепла, необходимое для нагревания G кг газа от t_1 до t_2 , выражается ф-лами (в Cal):

а) при постоянной теплоемкости газа:

$$Q = cG(t_2 - t_1);$$

б) при переменной теплоемкости, когда $c = a + bt + dt^2 + \dots$:

$$Q = G \int_{t_1}^{t_2} c dt = G \int_{t_1}^{t_2} (a + bt + dt^2 + \dots) dt.$$

Количество тепла, необходимое для нагревания 1 кг газа на 1° в процессе с изменением его темп-ры от t_1 до t_2 , называется средней теплоемкостью газа. Средняя теплоемкость газа в общем виде определяется по ф-ле:

$$[c]_{t_1}^{t_2} = \frac{Q}{t_2 - t_1}.$$

При переменной теплоемкости последнее выражение имеет вид:

$$[c]_{t_1}^{t_2} = \frac{Q}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (a + bt + dt^2 + \dots) dt.$$

Для процесса нагревания газа от 0° до t° средняя теплоемкость определяется по ф-ле:

$$[c]_0^t = \frac{1}{t} \int_0^t (a + bt + dt^2 + \dots) dt = a + \frac{b}{2}t + \frac{d}{3}t^2 + \dots$$

Для двухатомных газов

$$[c]_0^t = a + \frac{b}{2}t.$$

Т. о., ф-лы истинной и средней теплоемкостей двухатомных газов отличаются только значением коэф-та при слагаемом, содержащем t , к-рый в ф-ле средней теплоемкости в два раза меньше, чем в ф-ле истинной теплоемкости.

В табл. 3 даны ф-лы различных авторов, устанавливающие функциональную зависимость молекулярной теплоемкости от темп-р. Под молекулярной теплоемкостью подразумевается количество тепла, необходимое для нагревания моля газа на 1° .

Теплоемкость газа в процессе постоянного объема обозначается через c_v , а в процессе постоянного давления—через c_p .

Табл. 3. Ф-лы средней теплоемкости газа.

Автор	Газ	Молекулярная теплоемкость mc_v
Ланген-Шребер	Двухат.	$mc_v = 4,625 + 0,000537t$
	CO ₂	$mc_v = 6,774 + 0,001897t$
Гольборн-Геннинг	H ₂ O	$mc_v = 6,855 + 0,001167t$
	Двухат.	$mc_v = 4,59 + 0,000532t$
Пир	CO ₂	$mc_v = 6,85 + 0,00326t - 0,000000792t^2$
	H ₂ O	$mc_v = 6,44 - 0,0003815t + 0,000000792t^2$
	Двухат.	$mc_v = 4,9 + 0,00045t$
	CO ₂	$mc_v = 6,8 + 0,0033t - 0,00000095t^2 + 0,0000000001t^3$
	H ₂ O	$mc_v = 0,065 + 0,0005t + 0,0000000002t^3$
Автор	Газ	Молекулярная теплоемкость mc_p
Ланген-Шребер	Двухат.	$mc_p = 6,615 + 0,000537t$
	CO ₂	$mc_p = 8,764 + 0,001897t$
Гольборн-Геннинг	H ₂ O	$mc_p = 8,845 + 0,001167t$
	Двухат.	$mc_p = 6,58 + 0,000532t$
Пир	CO ₂	$mc_p = 8,84 + 0,00326t - 0,000000792t^2$
	H ₂ O	$mc_p = 8,43 - 0,0003815t + 0,000000792t^2$
	Двухат.	$mc_p = 6,89 + 0,00045t$
	CO ₂	$mc_p = 8,79 + 0,0033t - 0,00000095t^2 + 0,0000000001t^3$
	H ₂ O	$mc_p = 8,055 + 0,0005t + 0,0000000002t^3$

Разность теплоемкостей mc_p и mc_v равняется 1,99, т. е.: $mc_p - mc_v = 1,99$. Наиболее точными ф-лами считаются ф-лы Партингтона-Шиллинга, данные ниже.

Ф-лы истинной теплоемкости по Партингтону-Шиллингу:
для N₂, O₂, CO и воздуха для темп-р от 0 до 2000°С:

$$mc_v = 4,97 + 0,00017t + 0,00000031t^2;$$

для H₂:

$$mc_v = 4,85 + 0,0007t;$$

для H₂O для темп-р от 100 до 1700°С:

$$mc_v = 6,75 - 0,00119t + 0,00000434t^2.$$

для H₂O для темп-р 1700 до 2300°С:

$$mc_v = 12,652 + 0,02214t - 0,00000467t^2;$$

для C₂O для темп-р от 0 до 2000°С:

$$mc_v = 6,7 + 0,0045t - 0,00000102t^2.$$

Значения средней теплоемкости газа по ф-лам Партингтона-Шиллинга даны в табл. 4, 5, 6 и 7.

Табл. 4. Средняя теплоемкость при постоянном давлении на 1 кг.

° C	Воздух	N ₂ , CO	O ₂	CO ₂	H ₂ O	H ₂
0	0,2404	0,2489	0,2178	0,1989	0,4740	3,391
100	0,2405	0,2490	0,2179	0,2034	0,4633	3,409
200	0,2410	0,2494	0,2182	0,2080	0,4613	3,426
300	0,2414	0,2498	0,2186	0,2126	0,4615	3,443
400	0,2419	0,2504	0,2191	0,2171	0,4629	3,461
500	0,2425	0,2510	0,2196	0,2219	0,4640	3,478
600	0,2432	0,2517	0,2202	0,2256	0,4676	3,496
700	0,2439	0,2524	0,2209	0,2297	0,4710	3,513
800	0,2447	0,2533	0,2217	0,2336	0,4756	3,530
900	0,2457	0,2543	0,2225	0,2374	0,4811	3,548
1000	0,2466	0,2552	0,2233	0,2410	0,4872	3,565
1100	0,2477	0,2563	0,2243	0,2445	0,4938	3,582
1200	0,2488	0,2575	0,2253	0,2478	0,5012	3,600
1300	0,2499	0,2587	0,2264	0,2510	0,5093	3,617
1400	0,2512	0,2600	0,2275	0,2540	0,5180	3,635
1500	0,2525	0,2613	0,2287	0,2569	0,5276	3,652
1600	0,2539	0,2628	0,2299	0,2596	0,5380	3,669
1700	0,2554	0,2643	0,2313	0,2621	0,5493	3,687
1800	0,2569	0,2659	0,2327	0,2645	0,5614	3,704
1900	0,2585	0,2675	0,2341	0,2668	0,5737	3,721
2000	0,2602	0,2693	0,2356	0,2689	0,5859	3,739

Табл. 5. Средняя теплоемкость при постоянном объеме на 1 кг.

° C	Воздух	N ₂ , CO	O ₂	CO ₂	H ₂ O	H ₂
0	0,1715	0,1775	0,1553	0,1523	0,3521	2,406
100	0,1718	0,1778	0,1556	0,1573	0,3466	2,423
200	0,1722	0,1783	0,1560	0,1622	0,3467	2,441
300	0,1727	0,1787	0,1564	0,1609	0,3473	2,458
400	0,1732	0,1793	0,1569	0,1715	0,3485	2,475
500	0,1738	0,1799	0,1574	0,1759	0,3513	2,492
600	0,1745	0,1806	0,1581	0,1802	0,3550	2,510
700	0,1753	0,1814	0,1587	0,1843	0,3587	2,527
800	0,1761	0,1823	0,1595	0,1882	0,3634	2,545
900	0,1770	0,1832	0,1603	0,1921	0,3688	2,562
1000	0,1780	0,1842	0,1612	0,1957	0,3749	2,579
1100	0,1790	0,1853	0,1621	0,1992	0,3817	2,597
1200	0,1801	0,1864	0,1631	0,2025	0,3889	2,614
1300	0,1813	0,1876	0,1642	0,2057	0,3975	2,632
1400	0,1826	0,1890	0,1653	0,2087	0,4065	2,646
1500	0,1839	0,1903	0,1665	0,2116	0,4163	2,669
1600	0,1853	0,1918	0,1678	0,2148	0,4265	2,684
1700	0,1868	0,1933	0,1691	0,2169	0,4380	2,701
1800	0,1883	0,1949	0,1705	0,2193	0,4499	2,718
1900	0,1899	0,1965	0,1720	0,2215	0,4625	2,736
2000	0,1916	0,1983	0,1735	0,2236	0,4748	2,753

Значения средней теплоемкости перегретого пара—табл. 22 (стр. 446).

Отношение теплоемкостей газа при постоянном давлении и постоянном объеме обозначается через k ; т. е.:

$$k = \frac{c_p}{c_v}$$

Коэф-т λ уменьшается с увеличением темп-ры.

Объемная теплоемкость. Под объемной теплоемкостью подразумевается количество тепла, необходимое для нагревания 1 м³ газа на 1°.

Объемная теплоемкость κ б. определена по весовой теплоемкости по ф-ле:

$$C = \frac{mc}{V},$$

где: C —объемная теплоемкость, mc —молекулярная теплоемкость, V —объем моля газа, который при 1 атм и темп-ре 15° С равняется 24,4 м³.

Объемная теплоемкость есть ф-ция не только темп-ры, но и ф-ия давления газа.

В табл. 6 и 7 даны значения объемной теплоемкости различных газов.

Табл. 6. Средняя теплоемкость при постоянном давлении на 1 м³ (0/160).

Табл. 7. Средняя теплоемкость при постоянном объеме на 1 м³ (0/160).

С	N ₂ , O ₂ , CO воздух	CO ₂	H ₂ O	H ₂
0	0,3112	0,3931	0,3809	0,3049
100	0,3113	0,4021	0,3723	0,3063
200	0,3116	0,4110	0,3707	0,3081
300	0,3120	0,4200	0,3709	0,3094
400	0,3129	0,4290	0,3720	0,3112
500	0,3138	0,4376	0,3729	0,3125
600	0,3147	0,4461	0,3758	0,3143
700	0,3156	0,4542	0,3785	0,3156
800	0,3165	0,4618	0,3822	0,3174
900	0,3179	0,4694	0,3866	0,3188
1000	0,3192	0,4766	0,3915	0,3206
1100	0,3205	0,4834	0,3968	0,3219
1200	0,3219	0,4897	0,4028	0,3237
1300	0,3232	0,4959	0,4093	0,3250
1400	0,3250	0,5022	0,4163	0,3268
1500	0,3268	0,5076	0,4240	0,3281
1600	0,3286	0,5130	0,4323	0,3299
1700	0,3304	0,5180	0,4414	0,3313
1800	0,3321	0,5229	0,4511	0,3330
1900	0,3344	0,5274	0,4610	0,3344
2 000	0,3366	0,5314	0,4708	0,3362

°С	N ₂ , O ₂ , CO воздух	CO ₂	H ₂ O	H ₂
0	0,2219	0,3010	0,2829	0,2162
100	0,2223	0,3109	0,2785	0,2176
200	0,2228	0,3209	0,2786	0,2193
300	0,2232	0,3297	0,2791	0,2207
400	0,2241	0,3392	0,2800	0,2225
500	0,2250	0,3477	0,2823	0,2238
600	0,2253	0,3662	0,2853	0,2256
700	0,2268	0,3643	0,2882	0,2269
800	0,2277	0,3720	0,2920	0,2287
900	0,2290	0,3796	0,2964	0,2300
1000	0,2304	0,3868	0,3013	0,2318
1100	0,2317	0,3935	0,3067	0,2332
1200	0,2330	0,4003	0,3125	0,2350
1300	0,2341	0,4066	0,3194	0,2363
1400	0,2362	0,4124	0,3267	0,2381
1500	0,2379	0,4182	0,3345	0,2394
1600	0,2397	0,4236	0,3427	0,2412
1700	0,2415	0,4286	0,3520	0,2425
1800	0,2437	0,4335	0,3615	0,2443
1900	0,2455	0,4380	0,3717	0,2457
2 000	0,2478	0,4420	0,3815	0,2474

При определении объемной теплоемкости при условиях, отличных от нормальных, объем V , входящий в ф-лу объемной теплоемкости, определяется по ф-ле:

$$V = 24,4 \frac{T}{273p},$$

где T и p —заданные темп-ра и давление газа; p —в атм.

Теплоемкость смеси газов определяется по ф-ле:

$$c = g_1 c_1 + g_2 c_2 + g_3 c_3 + \dots + g_n c_n = \sum g_i c_i.$$

§ 6. Первый закон термодинамики.

Первый закон термодинамики, устанавливающий количественную зависимость между тепловой и механической энергиями при их превращениях, есть частный случай закона сохранения энергии, к-рый отмечает, что при всех изменениях энергии, происходящих в замкнутой системе, полный запас энергии системы не изменяется. Из закона сохранения энергии следует, что в процессах превращения энергии участвуют эквивалентные количества энергии. Эквивалент тепловой и механической энергии, называемый механи-

ческим эквивалентом тепла и обозначаемый через букву E , равенется 427. Т. о., 1 Cal тепла при превращении в механическую энергию развивает 427 кгм работы.

Обратная величина эквиваленту E , обозначаемая через букву A , называется термическим эквивалентом работы. Т. о., $A = \frac{1}{E} = \frac{1}{427}$.

§ 7. Второй закон термодинамики.

Первый закон термодинамики, устанавливая количественную зависимость между тепловой и механической энергиями, не отмечает необходимых условий, при к-рых возможен переход тепловой энергии в механическую. Последние условия устанавливаются вторым законом термодинамики.

Второй закон термодинамики отмечает, что тепло может превратиться в работу только в том случае, если в системе имеются тела с различными темп-рами. Т. о., вторым законом термодинамики устанавливается качественность тепловой энергии. Тепловая энергия системы при наличии в ней общей для всех тел темп-ры является теплотой бесценной, т. к. такая теплота при этом не м. б. использована и переведена в работу. При увеличении разности темп-р отдельных носителей тепла системы ценность (работоспособность) тепловой энергии увеличивается.

§ 8. Уравнение тепла.

Первый закон термодинамики для системы изолированной выражается след. ур-нем:

$$U = U_1 + U_2 + \dots U_n = \text{Const},$$

где U —полный запас энергии изолированной системы, $U_1, U_2, \dots U_n$ —запасы в системе отдельных видов энергии.

Для обычных процессов, в к-рых газ получает извне тепло, первый закон термодинамики выражается ур-нем:

$$Q = \Delta U + AL.$$

В последнем ур-ии, называемом ур-нем тепла, ΔU есть теплота, израсходованная на изменение внутренней энергии газа, AL —теплота, израсходованная на работу, развиваемую при расширении газа.

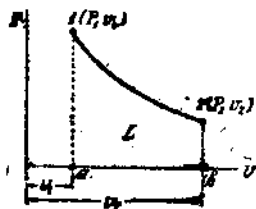
При изменении в процессе скорости газа ур-не тепла принимает вид:

$$Q = \Delta U + AL + A \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} (1 \text{ кг}).$$

где: w_2 и w_1 —конечная и начальная скорости частичек газа.

а) Внешняя работа L . Внешняя работа, развиваемая при расширении газа (черт. 2), определяется по ф-ле:

$$L = \int_{v_1}^{v_2} p dv.$$



Черт. 2.

Графически работа газа в системе координат P — V изображается площадью 1-2-b-a, ограниченной линией процесса 1-2, крайними ординатами 1-a и 2-b и осью объемов v . При расширении газа работа газа положительная, при сжатии—отрицательная.

б) Внутренняя энергия газа. Внутренняя энергия газа, являясь ф-ней его состояния, есть энергия, газом обладаемая. В газах рассматривается,

только внутренняя, кинетическая, энергия, зависящая от скорости внутреннего движения молекул газа, а следовательно, зависящая от его темп-ры.

Количество тепла, расходуемое на изменение внутренней энергии газа, определяется по ф-ле (Cal):

$$\Delta U = U_2 - U_1 = c_v(t_2 - t_1) G,$$

где: G —вес газа, c_v —теплоемкость газа при постоянном объеме, t_2 и t_1 —конечная и начальная темп-ры газа:

в) Явный вид уравнения тепла (для 1 кг газа):

$$Q = c_v(T_2 - T_1) + A \int_{v_1}^{v_2} p dv,$$

$$dQ = c_v dt + A p dv.$$

§ 9. Энтропия. Тепловые, или энтропийные, диаграммы.

Ф-ия, дифференциал к-рой равняется $\frac{dQ}{T}$, называется энтропией и обозначается через S ; т. е.:

$$dS = \frac{dQ}{T}.$$

Термин «энтропия», введенный Клаузиусом, означает «обращение внутрь». Название ф-ии S энтропией, имеющей вышеозначенный смысл, объясняется тем, что ф-ия S отмечает степень обесценения энергии, или, что то же, степень рассеяния энергии. Последнее необходимо понимать так. Во всех естественных процессах, протекающих в замкнутой системе, количество энергии не изменяется, но ценность энергии при этом уменьшается. Энергия в этих процессах, оставаясь по величине неизменной, переходит в такой вид, при к-ром уменьшается ее работоспособность, т. е. происходит ее обесценение, или рассеяние. При течении естественных тепловых процессов (перетекание тепла от горячего тела к холодному) темп-ра уменьшается, а при этом передаваемая холодному телу теплота, оставаясь неизменной по величине, теряет свою ценность, т. к. теплота, согласно второму закону термодинамики, тем ценнее, чем большая в системе наблюдается разность темп-р.

Не трудно видеть, что в подобных процессах, сопровождающихся уменьшением темп-ры и уменьшением работоспособности тепловой энергии, ф-ия S ($dS = \frac{dQ}{T}$) будет увеличиваться. Последним объясняется, почему ф-ия S м. б. принята за степень рассеяния энергии и почему этой ф-ии Клаузиусом дано название энтропия.

Отмеченные особенности течения процессов позволяют в общем отметить, что энтропия замкнутой системы стремится к максимуму, а работоспособность энергии ее при этом непрерывно уменьшается.

Изменение энтропии, являющейся ф-ией состояния газа, определяется по ф-лам (для 1 кг газа):

$$\Delta S = S_2 - S_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + AR \ln \frac{v_2}{v_1};$$

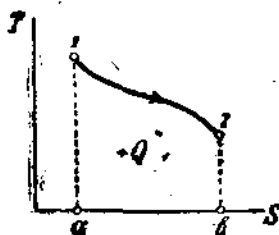
$$\Delta S = S_2 - S_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - AR \ln \frac{p_2}{p_1};$$

$$\Delta S = S_2 - S_1 = c_v \ln \frac{p_2}{p_1} + c_p \ln \frac{v_2}{v_1},$$

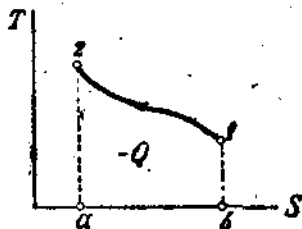
где: p_1, v_1, T_1, S_1 —начальные параметры газа, p_2, v_2, T_2, S_2 —конечные параметры.

Теплоемкости c_v и c_p в последних ф-лах принимаются за величины постоянные.

Система координат $T-S$. В системе координат $T-S$ по оси абсцисс откладывается энтропия газа, по оси ординат—температура. Система координат $T-S$ обладает тем свойством, что тепло, участвующее в процессе, в этой системе координат изображается площадью 1-2-b-a, ограниченной линией процесса 1-2, крайними ординатами 1-a и 2-b и осью S (черт. 3). Если процесс протекает в сторону увеличения S, то площадь a-1-2-b отмечает положительную теплоту (черт. 3), иначе (черт. 4) — отрицательную.



Черт. 3.



Черт. 4.

нией процесса 1-2, крайними ординатами 1-a и 2-b и осью S (черт. 3). Если процесс протекает в сторону увеличения S, то площадь a-1-2-b отмечает положительную теплоту (черт. 3), иначе (черт. 4) — отрицательную.

§ 10. Экономический КПД силовой установки.

Экономический КПД установки отмечает степень совершенства превращения в ней тепловой энергии в механическую. Экономический КПД указывает, какая доля тепла, расходуемого на машину, в машине полезно используется.

Экономический КПД определяется по ф-ле:

$$\eta_e = \frac{632,3}{B \cdot Q},$$

где: B—расход топлива в кг на 1 HP/ч., Q—теплотворная способность топлива.

Теплотворной способностью называется теплота, выделяемая при сжигании 1 кг топлива. Теплотворная способность определяется по ф-ле Менделеева.

Основные термодинамические процессы.

К процессам принадлежат: 1) процесс постоянного объема; 2) процесс постоянного давления; 3) процесс постоянной температуры; 4) процесс адиабатический; 5) процесс политропический.

При изучении основных процессов выявляется следующее. 1) Уравнение процесса, уравнение вида $f(p, v) = 0$. 2) Вид графика процесса в системах координат $P-V$ и $T-S$. 3) Ф-лы соотношения параметров. 4) Работа газа. 5) Изменение внутренней энергии газа. 6) Тепло, участвующее в процессе. 7) Изменение энтропии газа. 8) Характер превращения энергии в процессе.

Примечание. Начальные параметры газа обозначаются через P_1, V_1, T_1, U_1 и S_1 , конечные—через P_2, V_2, T_2, U_2 и S_2 .

§ 11. Процесс при постоянном объеме.

Процесс при постоянном объеме называется изохорическим. Уравнение процесса в системе координат $P-V$ будет $V = \text{Const}$. График процесса

в системе $P-V$ будет вертикаль 1—2 (черт. 5), в системе координат $T-S$ — логарифмическая кривая 1—2 (черт. 6).

Ф-ла соотношения параметров будет:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Ф-ла отмечает, что в процессе $V = \text{Const}$ изменение давления газа прямо пропорционально изменению абсолютной темп-ры газа.

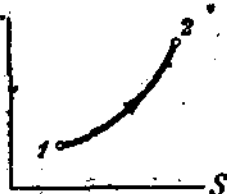
Работа газа в процессе $V = \text{Const}$ не совершается, т. к.:

$$L = \int_{v_1}^{v_2} p dv = 0.$$

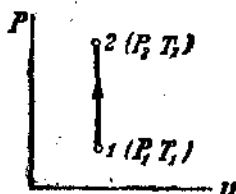
Ф-лы теплоты (для 1 кг газа):

$$dQ = c_v dT$$

$$Q = c_v (T_2 - T_1).$$



Черт. 6.



Черт. 5.

При переменной теплоемкости $c_v = a + bT$ ф-ла теплоты принимает вид:

$$Q = \left(a + b \frac{T_1 + T_2}{2} \right) (T_2 - T_1).$$

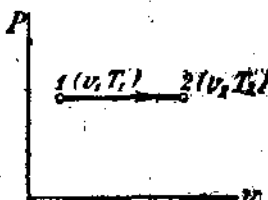
Изменение внутренней энергии газа для процесса $V = \text{Const}$ определяется по выше данным ф-лам теплоты, т. к. для этого процесса $\Delta U = Q$.

Изменение энтропии газа определяется по ф-ле:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = c_v \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} = c_v \cdot \ln \frac{P_2}{P_1}.$$

§ 12. Процесс при постоянном давлении.

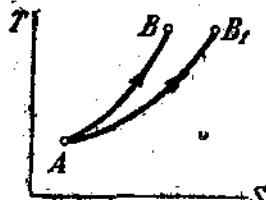
Процесс при постоянном давлении называется изобарическим. Уравнение процесса в системе координат $P-V$ будет $P = \text{Const}$. График процесса в системе $P-V$ будет горизонталь 1-2 (черт. 7), в системе $T-S$ —



Черт. 7.



Черт. 8.



Черт. 9.

логарифмическая кривая 1-2 (черт. 8); при этом изобара AB' (черт. 9) в системе $T-S$ будет более пологая кривая, чем изоплера AB .

Ф-ла соотношения параметров будет:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Ф-ла отмечает, что в процессе $P = \text{Const}$ изменение объема газа прямо пропорционально изменению его абсолютной темп-ры.

Ф-ла работы:

$$L = \int_{v_1}^{v_2} p dv = p(v_2 - v_1) = R(T_2 - T_1).$$

Ф-ла теплоты (для 1 кг газа):

$$dQ = c_p dT$$

$$Q = c_p(T_2 - T_1).$$

При переменной теплоемкости $c_p = a + bT$ ф-ла теплоты принимает вид:

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} c_p dT = \left(a + b \frac{T_1 + T_2}{2} \right) (T_2 - T_1).$$

Ф-лы изменения внутренней энергии:

при $c_p = \text{Const}$ и $c_v = \text{Const}$:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = c_v = \text{Const};$$

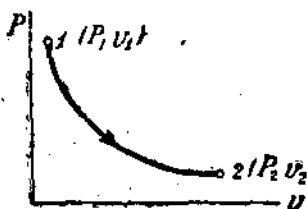
при $c_v = a + bT$:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \left(a + b \frac{T_2 + T_1}{2} \right) (T_2 - T_1).$$

Изменение энтропии газа:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = c_p \cdot \lg \frac{T_2}{T_1} = c_p \cdot \lg \frac{v_2}{v_1}.$$

В процессе $P = \text{Const}$ теплота расходуется (расширение) на изменение внутренней энергии газа и на внешнюю работу.



Черт. 10.



Черт. 11.

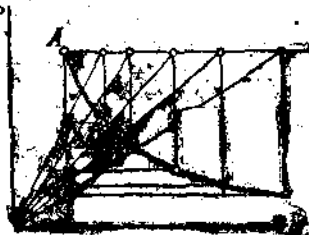
§ 13. Процесс при постоянной температуре.

Процесс при постоянной темп-ре называется изотермическим. Ур-ие процесса в системе $P-V$ будет $PV = \text{Const}$. График процесса в системе $P-V$ будет равнобокая гиперболы 1-2 (черт. 10), в системе $T-S$ — горизонталь (черт. 11). Построение изотермы, проходящей через точку А, дано на черт. 12. Построение понятно из чертежа.

Ф-ла соотношения параметров будет:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{v_2}{v_1}.$$

Ф-ла отмечает, что в изотермическом процессе изменение давления газа обратно пропорционально изменению его объема.



Черт. 12

Ф-ла работы:

$$L = \int_{v_1}^{v_2} p dv = 2,303 p_1 v_1 \cdot \lg \frac{v_2}{v_1} = 2,303 RT \cdot \lg \frac{p_1}{p_2}.$$

Ф-ла теплоты:

$$Q = AL = \frac{1}{427} \cdot 2,303 p_1 v_1 \cdot \lg \frac{v_2}{v_1}.$$

В изотермическом процессе тепло, подводимое к газу, расходуется на внешнюю работу. В изотермическом процессе

$$\Delta U = c_v(T_2 - T_1) = 0.$$

Изменение энтропии газа определяется по ф-ле:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = AR \cdot \ln \frac{v_2}{v_1} = AR \cdot \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

§ 14. Адиабатический процесс.

Адиабатическим процессом называется процесс, протекающий без участия внешнего тепла.

Ур-ие адиабатического процесса будет: $p v^k = \text{const}$, в к-ром $k = \frac{c_p}{c_v}$. При переменной теплоемкости газа ур-ие адиабатического процесса будет иметь вид:

$$\frac{T^{k_0-1}}{k_0-1-\alpha T} = \text{const}.$$

При выводе коэф-т k принимается равным:

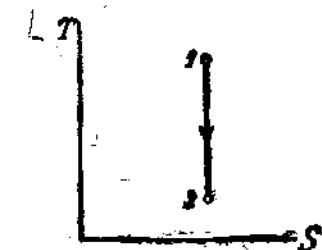
$$k = k_0 - \alpha T.$$

График адиабатического процесса в системе $P-V$ будет гиперболой 1-2 (черт. 13). в системе $T-S$ — вертикаль 1-2 (черт. 14).

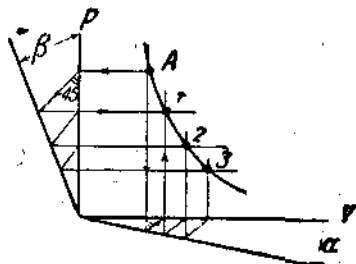
Построение адиабаты (черт. 15). Через начало координат проводят косям V и P два луча, из к-рых первый под произвольным углом α , второй — под углом β .



Черт. 13.



Черт. 14.



Черт. 15.

определяемым по углу α из равенства: $1 + \tan \beta = (1 + \tan \alpha)^k$. Построение промежуточных точек адиабаты, проходящей через точку A , понятно из чертежа.

Ф-лы соотношения параметров:

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^k$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{k-1}$$

Ф-ла работы:

$$L = \int_{v_1}^{v_2} p dv = 2,303 p_1 v_1 \cdot \lg \frac{v_2}{v_1} = 2,303 RT \cdot \lg \frac{p_1}{p_2}.$$

Ф-ла теплоты:

$$Q = AL = \frac{1}{427} \cdot 2,303 p_1 v_1 \cdot \lg \frac{v_2}{v_1}.$$

В изотермическом процессе тепло, подводимое к газу, расходуется на внешнюю работу. В изотермическом процессе

$$\Delta U = c_v(T_2 - T_1) = 0.$$

Изменение энтропии газа определяется по ф-ле:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = AR \cdot \ln \frac{v_2}{v_1} = AR \cdot \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

§ 14. Адиабатический процесс.

Адиабатическим процессом называется процесс, протекающий без участия внешнего тепла.

Ур-не адиабатического процесса будет: $p v^k = \text{Const}$, в к-ром $k = \frac{c_p}{c_v}$. При переменной теплоемкости газа ур-не адиабатического процесса будет иметь вид:

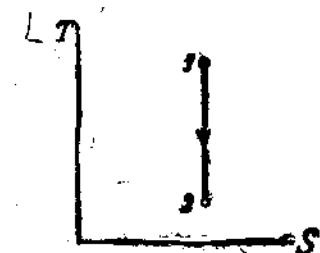
$$\frac{T^{k_0-1}}{k_0-1-\alpha T} = \text{Const}.$$

При выводе коэф-т k принимается равным:

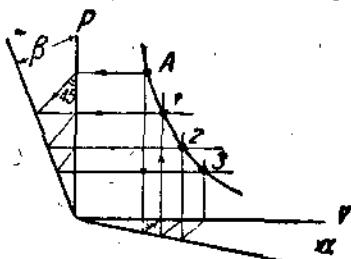
$$k = k_0 - \alpha T.$$

График адиабатического процесса в системе $P-V$ будет гиперболой 1-2 (черт. 13). в системе $T-S$ — вертикаль 1-2 (черт. 14).

Построение адиабаты (черт. 15). Через начало координат проводят косям V и P два луча, из к-рых первый под произвольным углом α , второй — под углом β .



Черт. 14.



Черт. 15.

определяемым по углу α из равенства: $1 + \lg \beta = (1 + \lg \alpha)^k$. Построение промежуточных точек адиабаты, проходящей через точку A , понятно из чертежа.

Ф-лы соотношения параметров:

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^k$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{k-1}$$

Ф-лы работы:

$$L = \int_{v_1}^{v_2} p dv = \frac{1}{k-1} (p_1 v_1 - p_2 v_2) = \frac{R}{k-1} (T_1 - T_2) = \\ = \frac{p_1 v_1}{k-1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] = 427 c_v (T_1 - T_2).$$

В адиабатическом процессе работа совершается за счет уменьшения внутренней энергии газа. Изменения энергии газа в адиабатическом процессе не происходит, т. к.:

$$ds = \frac{dQ}{T} = 0; S = \text{Const.}$$

§ 15. Политропический процесс.

Политропическим процессом называются процессы, в к-рых наблюдается вполне определенный закон превращения энергии.

Доля теплоты, расходуемая в политропическом процессе на изменение внутренней энергии газа, обозначается через α .

Т. о.:

$$\alpha = \frac{\Delta U}{Q}.$$

Ур-ие политропического процесса будет:

$$p v^n = \text{Const.}$$

$$\text{Коэф-т } n = \frac{c_p - c_v}{c - c_v}, \text{ а } c = \frac{c_p}{\alpha}.$$

Коэф-т α , определяющий отношение изменения внутренней энергии газа к теплоте, участвующей в процессе, находится по ф-ле:

$$\alpha = \frac{n-1}{n-k}.$$

Теплоемкость газа в политропическом процессе определяется по ф-ле:

$$c = \frac{c_p}{\alpha} = c_v \frac{n-k}{n-1}.$$

График политропического процесса, так же, как и график адиабатического процесса, строится по способу Брауера.

Табл. 8. Значения угла β при $\alpha = 30^\circ$ при построении политропы по способу Брауера.

$n =$	1	1,1	1,2	1,25	1,30	1,32	1,35	1,38	1,41
$\beta =$	30°	33°	36°	37°10'	39°	39°50'	40°20'	41°20'	42°

Ф-ла соотношения параметров:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^n \\ \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{n-1}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}}$$

Ф-лы работы:

$$L = 427 (1 - \alpha) Q;$$

$$L = \frac{1}{n-1} (p_1 v_1 - p_2 v_2) = \frac{R}{n-1} (T_1 - T_2)$$

Ф-ла теплоты (для 1 кг газа):

$$Q = c_p \frac{n-k}{n-1} (T_2 - T_1).$$

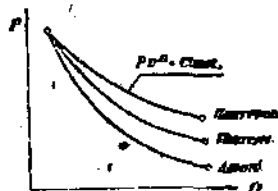
Ф-лы изменения внутренней энергии:

$$\Delta U = \alpha Q;$$

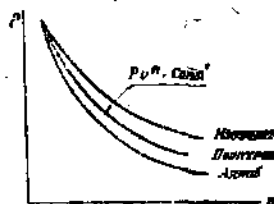
$$\Delta U = c_v (T_2 - T_1).$$

Изменение энтропии газа в политропическом процессе определяется по ф-ле:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = c_v \frac{n-k}{n-1} \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}.$$



Черт. 16.



Черт. 17.

Вид графика политропы в системе координат $T-S$ зависит от величины показателя n .

Всевозможные политропические процессы можно разбить на три типичные группы:

1-я группа процессов. К первой группе процессов относятся политропические процессы с показателем $n < 1$. На черт. 16 дано расположение этих процессов. Внутренняя энергия газа в политропических процессах, принадлежащих к этой группе, возрастает (при расширении), — теплота к газу подводится.

2-я группа процессов. Ко второй группе процессов относятся политропические процессы с показателем $1 < n < k$. На черт. 17 дано расположение этих процессов. Внутренняя энергия газа в политропических процессах этой группы уменьшается, — теплота к газу подводится.

3-я группа процессов. К третьей группе процессов относятся процессы с показателем $n > k$. На черт. 18 дано расположение этих процессов.

Внутренняя энергия газа в этих процессах убывает, — теплота от газа отнимается.

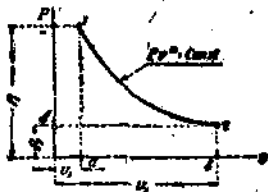
Определение показателя политропы n . Показатель политропы определяется по данному графику (черт. 19) по след. ф-лам.

1-й способ.

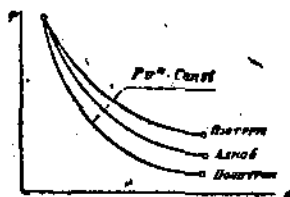
$$n = \frac{\lg \frac{P_1}{P_2}}{\lg \frac{v_2}{v_1}}.$$

2-й способ.

$$n = \frac{\text{плос. } a-1-b-d}{\text{плос. } a-1-b}.$$



Черт. 19.



Черт. 18.

Табл. 9. Адиабатическое и политропическое изменение газов.

$\frac{p_1}{p}$	Для $n =$				Для $n =$			
	1,4	1,3	1,2	1,1	1,4	1,3	1,2	1,1
	$\left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{v_2}{v_1}$				$\left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \frac{T_1}{T_2}$			
1,1	1,070	1,076	1,083	1,090	1,020	1,022	1,016	1,009
1,2	1,139	1,151	1,164	1,180	1,053	1,048	1,031	1,017
1,3	1,206	1,224	1,244	1,269	1,078	1,062	1,045	1,024
1,4	1,271	1,295	1,323	1,358	1,101	1,081	1,068	1,031
1,5	1,336	1,366	1,401	1,445	1,123	1,098	1,070	1,038
1,6	1,399	1,436	1,479	1,533	1,144	1,115	1,081	1,044
1,7	1,461	1,504	1,557	1,620	1,164	1,130	1,092	1,050
1,8	1,522	1,571	1,633	1,706	1,183	1,145	1,103	1,055
1,9	1,589	1,639	1,708	1,791	1,201	1,160	1,113	1,060
2,0	1,641	1,705	1,782	1,879	1,219	1,174	1,126	1,065
2,5	1,924	2,023	2,145	2,300	1,299	1,235	1,165	1,087
3,0	2,193	2,330	2,498	2,715	1,369	1,289	1,201	1,106
3,5	2,449	2,624	2,842	3,126	1,431	1,336	1,232	1,121
4,0	2,692	2,907	3,177	3,505	1,487	1,378	1,260	1,134
4,5	2,926	3,178	3,500	3,925	1,526	1,415	1,285	1,147
5,0	3,156	3,449	3,824	4,320	1,563	1,449	1,307	1,167
5,5	3,378	3,712	4,142	4,710	1,627	1,482	1,328	1,187
6,0	3,598	3,970	4,447	5,100	1,668	1,512	1,348	1,177
6,5	3,809	4,218	4,780	5,483	1,707	1,540	1,366	1,186
7,0	4,012	4,467	5,058	5,861	1,742	1,566	1,383	1,194
7,5	4,217	4,710	5,360	6,250	1,778	1,591	1,399	1,201
8,0	4,415	4,950	5,650	6,620	1,811	1,616	1,414	1,208
8,5	4,612	5,187	5,950	6,997	1,843	1,639	1,429	1,215
9,0	4,800	5,420	6,240	7,370	1,873	1,660	1,442	1,221
9,5	4,989	5,651	6,528	7,742	1,903	1,681	1,455	1,227
10,0	5,188	5,885	6,820	8,120	1,931	1,701	1,468	1,233
11,0	5,544	6,325	7,378	8,845	1,989	1,739	1,491	1,244
12,0	5,900	6,763	7,931	9,574	2,034	1,774	1,513	1,253
13,0	6,247	7,193	8,478	10,300	2,081	1,807	1,533	1,263
14,0	6,587	7,614	9,018	11,010	2,126	1,839	1,549	1,271
15,0	6,919	8,030	9,551	11,730	2,168	1,868	1,570	1,279
16,0	7,246	8,438	10,080	12,440	2,208	1,896	1,587	1,287
17,0	7,568	8,841	10,600	13,140	2,247	1,923	1,604	1,294
18,0	7,882	9,238	11,120	13,840	2,284	1,948	1,619	1,301
19,0	8,192	9,631	11,630	14,540	2,319	1,973	1,633	1,307
20,0	8,496	10,020	12,140	15,230	2,354	1,996	1,648	1,313
21,0	8,803	10,400	12,640	15,930	2,387	2,019	1,661	1,319
22,0	9,097	10,780	13,140	16,610	2,418	2,041	1,674	1,324
23,0	9,390	11,150	13,640	17,300	2,449	2,062	1,688	1,330
24,0	9,680	11,530	14,130	17,970	2,479	2,082	1,698	1,335
25,0	9,967	11,890	14,620	18,650	2,508	2,102	1,710	1,340
26,0	10,250	12,260	15,100	19,340	2,537	2,121	1,721	1,345
27,0	10,530	12,620	15,580	20,010	2,564	2,140	1,732	1,349
28,0	10,810	12,980	16,070	20,680	2,591	2,168	1,743	1,354
29,0	11,090	13,330	16,540	21,360	2,617	2,175	1,753	1,358
30,0	11,350	13,680	17,020	22,020	2,643	2,192	1,763	1,362

Круговые процессы, или циклы.

§ 16. Основные определения.

Процессы, в к-рых рабочее тело возвращается в свое первоначальное состояние, называются круговыми процессами, или циклами. Графики циклов будут замкнутые линии. Циклы состоят из процессов расширения и процессов сжатия. Прямыми циклами называются циклы, в к-рых линия расши-

рения располагается над линией сжатия (черт. 20); обратными циклами называются циклы при обратном расположении линий сжатия и расширения (черт. 21).

Прямыми циклами работают тепловые машины, превращая тепло в работу, обратными—компрессоры. В прямом цикле газ при расширении получает теплоту Q_1 , при сжатии отдает теплоту Q_2 . Тогда теплота, использованная в цикле, будет равна $Q_1 - Q_2$. Работа, полученная за цикл, графически изображается площадью, расположенной внутри графика цикла, т. е. площадью $1-a-2-b-1$ (черт. 21). Отношение теплоты $Q_1 - Q_2$, использованной в цикле, к теплоте Q_1 , полученной газом за цикл, показывает степень совершенства цикла и называется термическим кпд цикла. Т. о., термический кпд, обозначаемый через η_t , будет определяться по ф-ле:

$$\eta_t = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

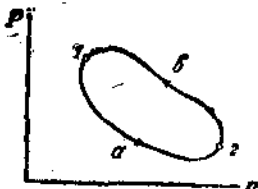
Работа, получаемая за цикл, определяется по ф-лам:

$$L = L_{\text{расп.}} - L_{\text{сжат.}}$$

$$L = 427 (Q_1 - Q_2).$$



Черт. 20.



Черт. 21.

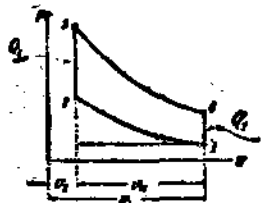
Внутренняя энергия газа и энтропия за цикл не изменяются.

§ 17. Теоретические циклы двигателей внутреннего сгорания.

В теоретических циклах схематизируются сплошные явления превращения тепла в работу, протекающие в цилиндрах машин, и рассматриваются только главные возможные процессы в их простейшей форме. При этом не принимаются во внимание второстепенные и побочные явления, к-рые сопутствуют основным процессам и к-рые вызываются не термодинамическими требованиями, а влиянием на предполагаемые главные процессы действительных реальных условий. Получаемые при таком рассмотрении циклы учитывают только процессы, к-рые должны бы протекать в машине при отсутствии каких-либо отрицательных влияний на них со стороны машины в целом. Теоретические циклы, отмечая максимальное возможное превращение тепла в работу при разбираемых условиях и схематизируя действительные явления, позволяют изучить эти явления в основном, отмечая при этом главные факторы, влияющие на экономику этих явлений.

В указанном заключается значение теоретических циклов.

При изучении теоретических циклов выясняется: 1) как описывается цикл; 2) значение параметров газа в типичных точках цикла; 3) работа за цикл; 4) среднее индикаторное давление; 5) термический кпд цикла.



Черт. 22.

§ 18. Цикл Отто.

Цикл Отто дан на черт. 22. Отношение начального объема V_1 к объему V_2 называется степенью сжатия и обозначается через ϵ ; отношение давления P_2 к давлению P_1 обозначается через λ .

Описание цикла Отто происходит сл. обр. При ходе поршня вперед механизм открывает

всасывающий клапан *A*, через к-рый в цилиндр засасывается при давлении, близком к атмосферному, смесь горючего с воздухом. Горючим м. б. какой-либо горючий газ или пары жидкого топлива. Линия всасывания, как линия постоянного давления, изображается горизонтально. При обратном ходе поршня всасывающий клапан закрывается и засосанная в цилиндр смесь адиабатически сжимается. Линия сжатия будет кривая 1-2. При левом мертвом положении поршня сжатая горючая смесь особым запальником воспламеняется. Процесс сгорания протекает при постоянном объеме и изображается линией 2-3. За третий ход поршня продукты сгорания адиабатически расширяются, — линия 3-4. В правом мертвом положении поршня механизм открывает выпускной клапан *B*, давление газов при этом уменьшается, — линия 4-1. За четвертый, обратный, ход поршня продукты сгорания через открытый выпускной клапан вытесняются в атмосферу.

Двигатели, в к-рых цикл совершается за четыре хода поршня, называются четырехтактными.

Значение параметров в типичных точках цикла.

За начальные данные принимаются параметры: давление P_1 , темп-ра T_1 и объем $V_h = 0,785 D^2 S$, где D — диаметр цилиндра и S — ход поршня.

$$\begin{array}{l|l|l} P_2 = P_1 \varepsilon^k; & T_2 = T_1 \varepsilon^{k-1}; & v_2 = v_3 = \frac{v_h}{\varepsilon - 1}; \\ P_3 = P_1 \varepsilon^{k\lambda}; & T_3 = T_1 \varepsilon^{k-1}\lambda; & v_1 = v_4 = \frac{v_h \varepsilon}{\varepsilon - 1}. \\ P_4 = P_1 \lambda; & T_4 = T_1 \lambda; & \end{array}$$

Работа газа за цикл:

$$L = L_{\text{расш.}} - L_{\text{сжат.}} = \frac{P_1 V_h (\lambda - 1) (\varepsilon^k - \varepsilon)}{(k - 1) (\varepsilon - 1)}.$$

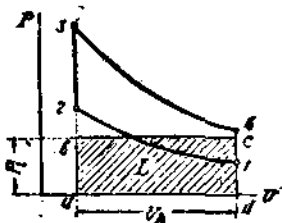
Среднее индикаторное давление.

Средним индикаторным давлением называется нек-рое постоянное давление, при к-ром могла бы получиться работа, равная работе, получаемой за рассматриваемый цикл при действительном, но переменном давлении газа. Из определения следует, что среднее индикаторное давление в системе координат P — V изображается высотой прямоугольника (черт. 23), равно-великого индикаторной диаграмме и имеющего с циклом общее основание. Среднее индикаторное давление определяется по ф-ле:

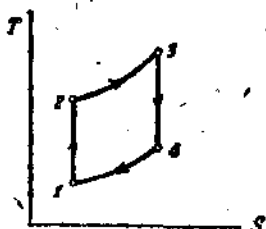
$$P_i = \frac{L}{V_h} = \frac{P_1 \cdot (\lambda - 1) (\varepsilon^k - \varepsilon)}{(k - 1) (\varepsilon - 1)}.$$

Ф-ла термического кпд:

$$\begin{aligned} \eta_t &= 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = \\ &= 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\lambda-1}}. \end{aligned}$$



Черт. 23.



Черт. 24.

Ф-ла отмечает, что термический кпд цикла Отто зависит от степени сжатия, возрастающей с ее увеличением.

На черт. 24 дан цикл Отто в системе координат T — S .

Табл. 10. Значения η_c цикла Отто при различных k и ϵ .

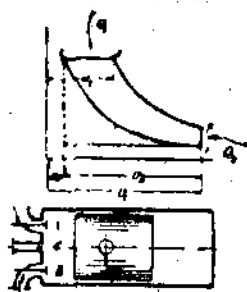
$\epsilon \backslash k$	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	6	7	8	9	10
1,20	0,13	0,17	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28	0,30	0,32	0,34	0,36	0,37
1,25	0,16	0,21	0,24	0,26	0,29	0,31	0,33	0,36	0,39	0,41	0,42	0,44
1,30	0,19	0,24	0,28	0,31	0,34	0,36	0,38	0,42	0,41	0,46	0,48	0,50
1,35	0,22	0,27	0,32	0,35	0,38	0,41	0,43	0,47	0,49	0,52	0,54	0,55
1,40	0,25	0,31	0,36	0,40	0,43	0,46	0,48	0,52	0,55	0,57	0,59	0,61

§ 19. Цикл Дизеля.

Теоретический цикл Дизеля дан на черт. 25. Отношение объема V_1 и объема V_2 называется степенью сжатия и обозначается через ϵ , отношение объема V_3 к объему V_2 называется степенью предварительного расширения. В двигателе Дизеля в цилиндр засасывается воздух. Процессы сжатия 1-2 (черт. 25) и расширения 3-4 принимаются в цикле за адиабатические. Процесс сгорания протекает при постоянном давлении, — линия 2-3. Процесс выхлопа совершается так же, как и в цикле Отто.

Значение параметров:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_1 \epsilon^k; & T_2 &= T_1 \epsilon^{k-1}; & V_1 &= \frac{V_{h\epsilon}}{\epsilon-1}. \\ P_2 &= P_2 = P_1 \epsilon^k; & T_3 &= T_1 \epsilon^{k-1} \rho; & V_2 &= \frac{V_h}{\epsilon-1}. \\ P_4 &= P_1 \rho^k; & T_4 &= T_1 \rho^k & V_3 &= \frac{V_{h\rho}}{\epsilon-1}. \end{aligned}$$



Черт. 25.

Работа газа за цикл:

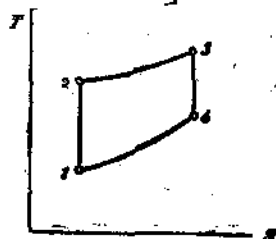
$$L = L_{\text{расш.}} - L_{\text{сжат.}} = \left[P_2(V_3 - V_2) + \frac{1}{k-1} (P_3 V_3 - P_4 V_4) \right] - \frac{1}{k-1} (P_2 V_2 - P_1 V_1).$$

Среднее индикаторное давление:

$$P_i = \frac{L}{V_h}.$$

Термический КПД цикла:

$$\eta_c = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{\rho^k - 1}{\epsilon^{k-1} k (\rho - 1)}.$$



Черт. 26.

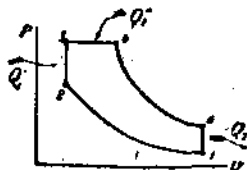
Ф-ла отмечает, что термический КПД цикла возрастает с увеличением степени сжатия и уменьшается с увеличением степени предварительного расширения. На черт. 26 дан цикл Дизеля в системе координат $T-S$.

Табл. 11. Значения T_3 и P_3 при $P_1 = 0,9 \text{ атм}$ и $T = 390^\circ$.

Значения k	Степени сжатия								
	ϵ	8	9	12	13	14	15	16	17
1,30	P_3	13,42	15,70	22,70	25,20	27,80	30,30	33,00	35,80
	T_3	708	734	801	822	840	856	873	889
1,35	T_3	14,9	17,50	25,70	28,80	31,80	34,90	38,20	41,40
	T_3	795	850	907	932	956	980	1004	1020

Табл. 12. Значения η_f при различных ϵ и p
($k=1,35$).

Значения p	Степени сжатия					
	ϵ	10	12	14	16	18
1,5	η_f	0,52	0,54	0,57	0,59	0,61
2,0	η_f	0,49	0,52	0,55	0,57	0,58
2,5	η_f	0,46	0,49	0,52	0,54	0,56



Черт. 27.

§ 20. Цикл Сабатэ.

На черт. 27 дан цикл Сабатэ. Процесс сгорания в цикле Сабатэ протекает частично процессом $V = \text{const}$, частично процессом $P = \text{const}$.

Обозначения:

$$\frac{V_1}{V_2} = \epsilon; \quad \frac{P_3}{P_1} = \lambda; \quad \frac{V_3}{V_4} = \rho.$$

Значения параметров в точках цикла.

$$P_2 = P_1 \epsilon^k;$$

$$T_2 = T_1 \epsilon^{k-1};$$

$$V_2 = \frac{V_1}{\epsilon};$$

$$P_3 = P_1 \epsilon^k \lambda;$$

$$T_3 = T_1 \epsilon^{k-1} \lambda;$$

$$V_3 = \frac{V_1}{\epsilon};$$

$$P_4 = P_3 = P_1 \epsilon^k \lambda \rho;$$

$$T_4 = T_1 \epsilon^{k-1} \lambda \rho;$$

$$V_4 = \frac{V_1 \rho}{\epsilon};$$

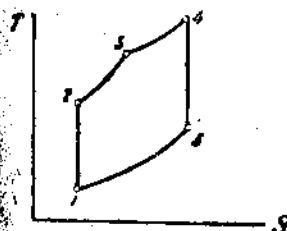
$$P_5 = P_1 \lambda \rho^k;$$

$$T_5 = T_1 \lambda \rho^{k-1};$$

$$V_5 = V_1.$$

Работа газа за цикл:

$$L = L_{\text{расш.}} - L_{\text{сжат.}} = \left[P_3 (V_4 - V_2) + \frac{1}{k-1} (P_4 V_4 - P_3 V_3) \right] - \left[\frac{1}{k-1} (P_2 V_2 - P_1 V_1) \right].$$



Черт. 28.

Среднее индикаторное давление:

$$P_i = \frac{L}{V_h}.$$

Термический кпд цикла:

$$\eta_t = 1 - \frac{Q_2}{Q_1' + Q_1''} =$$

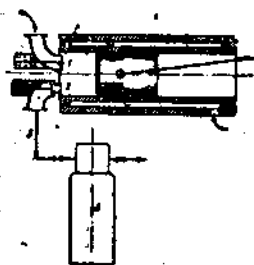
$$= 1 - \frac{\lambda \rho^k - 1}{\epsilon^{k-1} [(\lambda - 1) + \lambda \lambda (\rho - 1)]}.$$

Термический кпд Сабатэ, так же, как и кпд циклов Отто и Дизеля, увеличивается с увеличением степени сжатия.

На черт. 28 дан цикл Сабатэ в системе координат $T-S$.

§ 21. Компрессор.

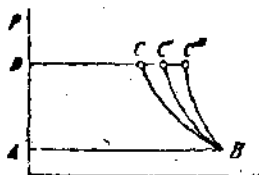
а) Одноцилиндровый компрессор. Общая характеристика работы одноцилиндрового компрессора. На черт. 29 дана схема одноцилиндрового компрессора. Поршень компрессора



Черт. 29.

имеет поступательное возвратное движение, получаемое им посредством кривошипного механизма от постороннего двигателя. Компрессор имеет всасывающий клапан 1 и нагнетательный 2, открывающиеся под влиянием изменения давления в цилиндре компрессора.

При ходе поршня вперед открывается всасывающий клапан и в цилиндр засасывается воздух (линия AB черт. 30); при обратном ходе поршня всасывающий клапан закрывается и засосанный воздух сжимается. Когда давление сжимаемого воздуха превысит давление, прижимающее нагнетательный клапан к его седлу, клапан 2 открывается и воздух потечет в резервуар 4. Давление сжатого воздуха, даваемого компрессором, зависит от давления воздуха в баллоне 4 и трубопроводе 3. Если давление воздуха в баллоне меняется, то соответствующим образом будет меняться давление сжатого воздуха, даваемого компрессором.



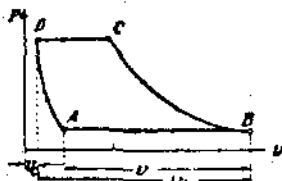
Черт. 30.

На черт. 30: линия AB —всасывание в цилиндр компрессора воздуха, BC , BC' и BC'' —три возможных процесса сжатия воздуха: BC —изотермическое сжатие, BC' —политропическое и BC'' —адиабатическое. Линия CD —нагнетание воздуха в баллон 4 (черт. 29). Характер процесса сжатия зависит от охлаждения воздуха во время сжатия. Охлаждение производится водой, пропускаемой через рубашку компрессора. С увеличением охлаждения процесс сжатия приближается к изотермическому; показатель политропы сжатия при этом уменьшается. В быстроходных компрессорах показатель λ имеет относительно большие значения, т. е. в них теплообмен совершается в меньший период времени.

Относительное расположение возможных линий сжатия на черт. 30 позволяет заключить, что при увеличении охлаждения воздуха при сжатии уменьшается работа, расходуемая на сжатие воздуха, и конечная темп-ра сжатого воздуха. Последнее благоприятно для смазки.

Табл. 13 отмечает значение охлаждения воздуха при сжатии, особенно при получении воздуха высокого давления. Последним объясняется, почему максимальным давлением воздуха для одноцилиндрового компрессора являются 9—10 atm .

На черт. 31 дана диаграмма компрессора при наличии вредного пространства. На диаграмме: DA —процесс расширения воздуха, заполняющего в конце нагнетания вредное пространство. Отношение $\frac{V}{V_A}$, отмечающее наполнение



Черт. 31.

цилиндра компрессора воздухом при всасывании, называется объемным кпд.

На черт. 32 дано изменение диаграммы при увеличении давления сжатого воздуха. Изменение диаграммы позволяет заключить, что с увели-

Табл. 13. Темп-ры сжатого воздуха в зависимости от конечного давления даны. Начальная темп-ра воздуха принята равной 20°.

Темп-ра в °C	Конечное давление P_2 (при $P_1 = 1 \text{ atm}$)									
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Адиабат. сжатие	85	124	160	190	214	235	254	272	289	
Политроп. $\lambda = 1,2$	44	78	96	111	123	132	141	150	157	

чением давления воздуха уменьшается производительность компрессора. В пределе, когда линия сжатия пересечет линию вредного пространства, засасывание воздуха в цилиндр компрессора прекратится. Отношение давлений, при котором прекращается подача воздуха компрессором, определяется по ф-ле:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{V}{V_c}\right)^n = \left(\frac{V_c + V_h}{V_c}\right)^n = \left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)^n,$$

где $\alpha = \frac{V_h}{V_c}$ характеризует величину вредного пространства. Значения $\frac{P_2}{P_1}$ даны в табл. 14.

Таблица отмечает, что предел возможного изменения давления воздуха резко уменьшается при увеличении вредного пространства.

Табл. 14. Пределы возможного изменения давления воздуха.

Название процесса сжатия	$\alpha=0,01$	$\alpha=0,02$	$\alpha=0,03$
	P_2/P_1	P_2/P_1	P_2/P_1
Изотермическое.	101	51	34
Политропическое.	254	112	69
Адиабатическое.	640	248	139



б) Многоцилиндровый компрессор. Отмеченные выше отрицательные особенности одноцилиндрового компрессора заставляют при получении воздуха высокого давления употреблять многоцилиндровые компрессоры с промежуточным охлаждением воздуха при переходе из одного цилиндра в другой. При этом на каждый цилиндр компрессора будет приходиться меньшее отношение давлений $\frac{P_2}{P_1}$, а при этом, как отмечалось, интенсивнее используется объем цилиндра. Кроме того при многоцилиндровом ступенчатом сжатии получают бла-

гоприятные условия для смазки цилиндров, т. к. при меньшем увеличении давления воздуха в каждом цилиндре меньше увеличивается его темп-ра и кроме того воздух после каждого цилиндра пропускаясь через холодильник, охлаждается.

При прохождении воздуха через холодильники темп-ра воздуха t_2 понижается до начальной темп-ры, т. е. $t_2 = t_1$. Процесс охлаждения воздуха в холодильнике д. б. при $P = \text{Const}$.

Т. о., при промежуточном между ступенями компрессора охлаждении воздуха в каждую ступень будет засасываться воздух с одинаковой темп-рой, равной примерно темп-ре помещения. Темп-ра сжатого воздуха при выходе из цилиндров компрессора тоже д. б. для всех ступеней одинаковая, т. к. максимальное значение этой темп-ры устанавливается темп-рой самовоспламенения смазки. При одинаковых темп-рах входа воздуха во все ступени и одинаковых темп-рах при выходе из них получаются одинаковые отношения давлений воздуха для каждой ступени и одинаковые работы, расходуемые на сжатие воздуха в каждой ступени. Т. о., для двухступенчатого компрессора имеем:

$$x = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_4}{P_3} = \sqrt{\frac{P_4}{P_1}}; \text{ и } P_2 = xP_1; V_2 = \frac{V_1}{x}; V_4 = V_1 \frac{1}{x^{\frac{k-1}{k}}};$$

$$T_4 = T_2 = T_1 x^{\frac{k-1}{k}}.$$

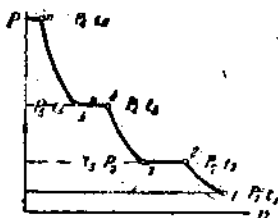
Для трехступенчатого компрессора (черт. 33) имеем:

$$P_6 = P_4; P_3 = P_2; t_5 = t_3 = t_1; t_6 = t_4 = t_2;$$

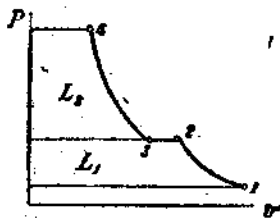
$$x = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_3}{P_2} = \frac{P_4}{P_3} = \sqrt[3]{\frac{P_4}{P_1}};$$

$$P_2 = xP_1; P_3 = P_1 x^2; V_2 = \frac{V_1}{x}; V_3 = \frac{V_1}{x^2}; V_4 = \frac{V_1}{x^3}; V_6 = \frac{V_1}{x^3};$$

$$T_6 = T_4 = T_2 = T_1 x^{\frac{k-1}{k}}.$$



Черт. 33.



Черт. 34.

в) Работа, расходуемая на сжатие воздуха в компрессоре. Для одноступенчатого компрессора:

изотермическое сжатие: $L = 2,303 P_1 V_1 \cdot \lg \frac{P_2}{P_1};$

адиабатическое сжатие: $L = \frac{k}{k-1} P_1 V_1 \left[\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right];$

политропическое сжатие: $L = \frac{n}{n-1} P_1 V_1 \left[\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right].$

Для двухступенчатого компрессора (черт. 34):

$$L_2 = L_1, \text{ при } t_3 = t_1 \text{ и } t_4 = t_2;$$

$$L = L_1 + L_2 = 2L_1 = 2 \frac{n}{n-1} P_1 V_1 \left[\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right].$$

Последняя ф-ла относится к случаю политропического сжатия. В табл. 15 даны значения работы L , расходуемой на сжатие воздуха в цилиндрическом компрессоре.

Табл. 15. Работа, необходимая для получения 1 м³ сжатого воздуха заданного давления $P_2 = 1 \text{ атм}$ (сжатый воздух холодный).

Характер сжатия	Конечное давление в атм								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Изотермическое	13 818	33 163	55 272	80 605	108 241	138 180	165 816	198 058	230 300
Политропическое	14 400	36 900	62 666	88 080	118 000	159 600	198 800	237 600	280 000
Адиабатическое	14 700	38 850	68 600	99 750	144 900	181 300	226 800	274 050	325 800

Водяные пары.

§ 22. Сухой насыщенный пар.

Продукт полного парообразования, при к-ром испарена вся жидкость, называется сухим насыщенным паром. Температуру сухого пара называют $t_{\text{кип}}$ и зависят от давления. С увеличением давления $t_{\text{кип}}$ увеличивается, но каждому давлению соответствует вполне определенная и единственная $t_{\text{кип}}$. Зависимость $t_{\text{кип}}$ от давления довольно точно выражается следующей приближенной ф-лой (для давления от 2 до 25 атм):

$$t_s = 100 \sqrt[4]{p},$$

где p — в атм.

Удельный объем сухого пара, обозначаемый V_s или V'' , является ф-ной давления, уменьшающейся с его увеличением.

Тепло, необходимое для получения 1 кг пара из воды 0° С, называется полной теплотой пара и определяется по ф-ле:

$$\lambda = q + r.$$

В ф-ле: q — теплота жидкости, необходимая для нагревания 1 кг жидкости от 0° С до $t_{\text{кип}}$; r — теплота парообразования — теплота, необходимая для перевода 1 кг воды, подогретой до $t_{\text{кип}}$, в пар той же тем-ры. Теплота q с увеличением давления увеличивается, а r уменьшается. Значения λ и r м.°б. определены по ф-лам (для $t_{\text{кип}}$ 100—200°):

$$\lambda = 608 + 0,311 t_s;$$

$$r = 610,2 - 0,712 t_s.$$

В ф-лах t_s — температура кипения.

Внутренняя энергия сухого пара определяется по ф-ле:

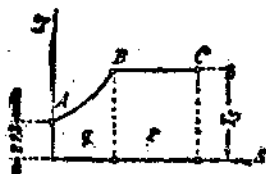
$$U = q + p = q + [r - Ap(v_s - v)],$$

где v — объем 1 кг воды.

Теплота $Ap(v_s - v)$ называется внешней теплотой парообразования, а теплота $r - Ap(v_s - v)$ — внутренней теплотой парообразования. Энтропия сухого пара определяется по ф-ле:

$$S = 2,303 \cdot \lg \frac{T_s}{273} + \frac{r}{T_s}.$$

На черт. 35 дан график в системе $T-S$ получения сухого пара. AB —процесс подогрева жидкости, BC —процесс парообразования.



Черт. 35.

Ф-ия $i = u + Arv$, называемая теплосодержанием пара, является ф-ией давления и т. б. выражена для сухого пара ф-лой:

$$i = u + Arv = q + r + Ar\sigma.$$

Если пренебречь величиной $Ar\sigma$, то:

$$i = q + r \approx \lambda.$$

Величины $i, \lambda, r, q, v_s, i_s, p, Ar(v_s - \sigma)$ и S являются ф-ями давления, по заданному давлению берутся из табл. 16—24.

§ 23. Насыщенный влажный пар.

Влажный пар, являясь продуктом не законченного парообразования, есть смесь пара с мельчайшими капельками воды. Влажный пар получается также при охлаждении сухого пара. Признаком существования влажного пара является соприкосновение его с водой, из н-рой он образуется. Паровой котел дает влажный пар; в верхних частях парового пространства котла располагается пар более сухой, как более легкий, в нижних же частях более мокрый. Чтобы получить от котла относительно более сухой пар, в нек-рых системах котлов устраивается сухопарник. Сухопарник приклепывается к верхней части котла и в его пространстве, как в самой высшей части парового пространства, собирается относительно более сухой пар.

Весовая доля пара в 1 кг влажного пара (смеси) обозначается через x и называется степенью сухости, или степенью паросодержания. Весовая доля воды, равная $(1 - x)$, называется степенью влажности.

Темп-ра влажного пара равняется $t_{\text{нп}}$ — температуре сухого пара того же давления.

Объем влажного пара определяется по ф-лам:

$$v_w = \sigma(1 - x) + v_s x;$$

приближенно:

$$v_w \approx v_s x,$$

где σ — объем 1 кг воды.

Уд. в. влажного пара определяется по ф-ле:

$$\tau_w = \frac{1}{v_w} = \frac{\tau_s}{x}.$$

Полная теплота влажного пара:

$$\lambda_w = q + rx.$$

Внутренняя энергия влажного пара:

$$U_w = q + rx = q + [r - Ar(v_s - \sigma)]x.$$

Теплосодержание влажного пара:

$$i_w = U_w + Arv_w = q + rx + Ar\sigma;$$

приближенно:

$$i_w = q + rx \approx \lambda_w.$$

Энтропия влажного пара:

$$S_w = 2,303 \cdot \lg \frac{T_s}{273} + \frac{r}{T_s} x.$$

Во всех ф-лах влажного пара величины $q, r, p, v_s, T_s, \gamma_s$ как параметры сухого пара, берутся из табл. 16, 17, 18.

Уравнение Клапейрона-Клаузиуса. Ур-ие Клапейрона-Клаузиуса позволяет определить приращение объема пара при парообразовании, а следовательно, и объем сухого пара.

Вид ур-ия:

$$\frac{r}{u} = AT \frac{dp}{dT}.$$

В ур-ии U —приращение объема пара при парообразовании, равное: $u = u_s - v$, где v —объем 1 кг воды.

§ 24. Перегретый пар.

Перегретый пар образуется из сухого пара при его нагревании. В котельных перегретый пар получается при пропускании влажного пара, даваемого котлом, через особый прибор, называемый перегревателем. Перегреватель представляет собою ряд грубчатых змеевиков, помещаемых в пространстве, оживаемом горячими продуктами сгорания. Пар, проходя по змеевикам, воспринимает теплоту продуктов сгорания, сперва подсушивается, превращается в сухой пар, а после этого перегревается. Во время перегрева давление пара остается постоянным, равным давлению пара в котле, темп-ра же возрастает. Конечная темп-ра перегретого пара зависит от количества тепла, воспринятого в перегревании. Обычная темп-ра перегретого пара—300—400° С. Насыщенные пары, как выше отмечалось, имеют для каждого давления вполне определенную темп-ру, темп-ра же перегретых паров не является ф-ией давления и может для одного и того же давления принимать произвольные значения (большие $t_{\text{кпл.}}$). Перегретые пары, имея темп-ру выше $t_{\text{кпл.}}$, при охлаждении начинают конденсироваться только после того, как потеряют весь перегрев, т. е. после того, как темп-ра понизится до $t_{\text{кпл.}}$. Эта особенность перегретых паров выгодно отличает их от насыщенных паров, незначительное охлаждение к-рых сопровождается конденсацией. При увеличении темп-ры перегретые пары в своих свойствах приближаются к свойствам газов. Но при обычных темп-рах, близких к $t_{\text{кпл.}}$, характеристическое ур-ие газов $Pu = RT$ является для них грубо приближенным.

Для перегретых паров было предложено много характеристических ур-ий, из них наиболее простым и достаточно точным является ур-ие Тумлирца-Линде:

$$P(v + 0,016) = RT,$$

или:

$$P(v + 0,016) = 47,1T,$$

т. к. для водяного пара

$$R = \frac{848}{m} = \frac{848}{18} = 47,1;$$

P —в кг/м².

Более точным ур-ием для перегретого пара является ур-ие Каллендара-Молье:

$$P(v - 0,001) = 47T - 0,075P \left(\frac{273}{T} \right)^{\frac{16}{9}}.$$

150	1,6327	1,1910	0,4417	510,1	0,1300	598,3	64,5	350,3	150,3	1,0575	4,8517	150
155	1,6226	1,1867	0,4438	511,4	0,1316	599,3	44,5	350,3	155,3	1,0586	5,2363	155
160	1,6129	1,1808	0,4460	512,6	0,1332	600,3	45,1	350,3	160,3	1,0596	5,6206	160
165	1,6033	1,1750	0,4480	513,9	0,1348	601,3	45,4	350,3	165,3	1,0606	6,0044	165
170	1,5936	1,1691	0,4500	515,1	0,1364	602,3	45,7	350,3	170,3	1,0616	6,3887	170
175	1,5840	1,1633	0,4519	516,4	0,1380	603,3	46,0	350,3	175,3	1,0626	6,7729	175
180	1,5744	1,1574	0,4538	517,6	0,1396	604,3	46,3	350,3	180,3	1,0636	7,1571	180
185	1,5648	1,1516	0,4557	518,9	0,1412	605,3	46,5	350,3	185,3	1,0646	7,5413	185
190	1,5552	1,1457	0,4575	520,1	0,1428	606,3	46,8	350,3	190,3	1,0656	7,9255	190
195	1,5456	1,1399	0,4594	521,4	0,1444	607,3	47,0	350,3	195,3	1,0666	8,3097	195
200	1,5360	1,1340	0,4612	522,6	0,1460	608,3	47,3	350,3	200,3	1,0676	8,6939	200
205	1,5264	1,1282	0,4630	523,9	0,1476	609,3	47,5	350,3	205,3	1,0686	9,0781	205
210	1,5168	1,1223	0,4648	525,1	0,1492	610,3	47,8	350,3	210,3	1,0696	9,4623	210
215	1,5072	1,1165	0,4666	526,4	0,1508	611,3	47,9	350,3	215,3	1,0706	9,8465	215
220	1,4976	1,1106	0,4684	527,6	0,1524	612,3	48,0	350,3	220,3	1,0716	10,2307	220
225	1,4880	1,1048	0,4702	528,9	0,1540	613,3	48,0	350,3	225,3	1,0726	10,6149	225
230	1,4784	1,0989	0,4720	530,1	0,1556	614,3	48,0	350,3	230,3	1,0736	11,0000	230
235	1,4688	1,0931	0,4738	531,4	0,1572	615,3	48,0	350,3	235,3	1,0746	11,3842	235
240	1,4592	1,0872	0,4756	532,6	0,1588	616,3	48,0	350,3	240,3	1,0756	11,7684	240
245	1,4496	1,0814	0,4774	533,9	0,1604	617,3	48,0	350,3	245,3	1,0766	12,1526	245
250	1,4400	1,0755	0,4792	535,1	0,1620	618,3	48,0	350,3	250,3	1,0776	12,5368	250
255	1,4304	1,0697	0,4810	536,4	0,1636	619,3	48,0	350,3	255,3	1,0786	12,9210	255
260	1,4208	1,0638	0,4828	537,6	0,1652	620,3	48,0	350,3	260,3	1,0796	13,3052	260
265	1,4112	1,0580	0,4846	538,9	0,1668	621,3	48,0	350,3	265,3	1,0806	13,6894	265
270	1,4016	1,0521	0,4864	540,1	0,1684	622,3	48,0	350,3	270,3	1,0816	14,0736	270
275	1,3920	1,0463	0,4882	541,4	0,1700	623,3	48,0	350,3	275,3	1,0826	14,4578	275
280	1,3824	1,0404	0,4900	542,6	0,1716	624,3	48,0	350,3	280,3	1,0836	14,8420	280
285	1,3728	1,0346	0,4918	543,9	0,1732	625,3	48,0	350,3	285,3	1,0846	15,2262	285
290	1,3632	1,0287	0,4936	545,1	0,1748	626,3	48,0	350,3	290,3	1,0856	15,6104	290
295	1,3536	1,0229	0,4954	546,4	0,1764	627,3	48,0	350,3	295,3	1,0866	15,9946	295
300	1,3440	1,0170	0,4972	547,6	0,1780	628,3	48,0	350,3	300,3	1,0876	16,3788	300
305	1,3344	1,0112	0,4990	548,9	0,1796	629,3	48,0	350,3	305,3	1,0886	16,7630	305
310	1,3248	1,0053	0,5008	550,1	0,1812	630,3	48,0	350,3	310,3	1,0896	17,1472	310
315	1,3152	1,0000	0,5026	551,4	0,1828	631,3	48,0	350,3	315,3	1,0906	17,5314	315
320	1,3056	0,9941	0,5044	552,6	0,1844	632,3	48,0	350,3	320,3	1,0916	17,9156	320
325	1,2960	0,9882	0,5062	553,9	0,1860	633,3	48,0	350,3	325,3	1,0926	18,2998	325
330	1,2864	0,9823	0,5080	555,1	0,1876	634,3	48,0	350,3	330,3	1,0936	18,6840	330
335	1,2768	0,9765	0,5098	556,4	0,1892	635,3	48,0	350,3	335,3	1,0946	19,0682	335
340	1,2672	0,9706	0,5116	557,6	0,1908	636,3	48,0	350,3	340,3	1,0956	19,4524	340
345	1,2576	0,9647	0,5134	558,9	0,1924	637,3	48,0	350,3	345,3	1,0966	19,8366	345
350	1,2480	0,9589	0,5152	560,1	0,1940	638,3	48,0	350,3	350,3	1,0976	20,2208	350
355	1,2384	0,9530	0,5170	561,4	0,1956	639,3	48,0	350,3	355,3	1,0986	20,6050	355
360	1,2288	0,9471	0,5188	562,6	0,1972	640,3	48,0	350,3	360,3	1,0996	20,9892	360
365	1,2192	0,9413	0,5206	563,9	0,1988	641,3	48,0	350,3	365,3	1,1006	21,3734	365
370	1,2096	0,9354	0,5224	565,1	0,2004	642,3	48,0	350,3	370,3	1,1016	21,7576	370
375	1,1999	0,9296	0,5242	566,4	0,2020	643,3	48,0	350,3	375,3	1,1026	22,1418	375
380	1,1904	0,9237	0,5260	567,6	0,2036	644,3	48,0	350,3	380,3	1,1036	22,5260	380
385	1,1808	0,9178	0,5278	568,9	0,2052	645,3	48,0	350,3	385,3	1,1046	22,9102	385
390	1,1712	0,9120	0,5296	570,1	0,2068	646,3	48,0	350,3	390,3	1,1056	23,2944	390
395	1,1616	0,9061	0,5314	571,4	0,2084	647,3	48,0	350,3	395,3	1,1066	23,6786	395
400	1,1520	0,9003	0,5332	572,6	0,2100	648,3	48,0	350,3	400,3	1,1076	24,0628	400
405	1,1424	0,8944	0,5350	573,9	0,2116	649,3	48,0	350,3	405,3	1,1086	24,4470	405
410	1,1328	0,8886	0,5368	575,1	0,2132	650,3	48,0	350,3	410,3	1,1096	24,8312	410
415	1,1232	0,8827	0,5386	576,4	0,2148	651,3	48,0	350,3	415,3	1,1106	25,2154	415
420	1,1136	0,8769	0,5404	577,6	0,2164	652,3	48,0	350,3	420,3	1,1116	25,5996	420
425	1,1040	0,8710	0,5422	578,9	0,2180	653,3	48,0	350,3	425,3	1,1126	25,9838	425
430	1,0944	0,8652	0,5440	580,1	0,2196	654,3	48,0	350,3	430,3	1,1136	26,3680	430
435	1,0848	0,8593	0,5458	581,4	0,2212	655,3	48,0	350,3	435,3	1,1146	26,7522	435
440	1,0752	0,8535	0,5476	582,6	0,2228	656,3	48,0	350,3	440,3	1,1156	27,1364	440
445	1,0656	0,8476	0,5494	583,9	0,2244	657,3	48,0	350,3	445,3	1,1166	27,5206	445
450	1,0560	0,8418	0,5512	585,1	0,2260	658,3	48,0	350,3	450,3	1,1176	27,9048	450
455	1,0464	0,8359	0,5530	586,4	0,2276	659,3	48,0	350,3	455,3	1,1186	28,2890	455
460	1,0368	0,8301	0,5548	587,6	0,2292	660,3	48,0	350,3	460,3	1,1196	28,6732	460
465	1,0272	0,8242	0,5566	588,9	0,2308	661,3	48,0	350,3	465,3	1,1206	29,0574	465
470	1,0176	0,8184	0,5584	590,1	0,2324	662,3	48,0	350,3	470,3	1,1216	29,4416	470
475	1,0080	0,8125	0,5602	591,4	0,2340	663,3	48,0	350,3	475,3	1,1226	29,8258	475
480	0,9984	0,8067	0,5620	592,6	0,2356	664,3	48,0	350,3	480,3	1,1236	30,2100	480
485	0,9888	0,8008	0,5638	593,9	0,2372	665,3	48,0	350,3	485,3	1,1246	30,5942	485
490	0,9792	0,7950	0,5656	595,1	0,2388	666,3	48,0	350,3	490,3	1,1256	30,9784	490
495	0,9696	0,7891	0,5674	596,4	0,2404	667,3	48,0	350,3	495,3	1,1266	31,3626	495
500	0,9600	0,7833	0,5692	597,6	0,2420	668,3	48,0	350,3	500,3	1,1276	31,7468	500
505	0,9504	0,7774	0,5710	598,9	0,2436	669,3	48,0	350,3	505,3	1,1286	32,1310	505
510	0,9408	0,7716	0,5728	599,1	0,2452	670,3	48,0	350,3	510,3	1,1296	32,5152	510
515	0,9312	0,7657	0,5746	600,4	0,2468	671,3	48,0	350,3	515,3	1,1306	32,8994	515
520	0,9216	0,7599	0,5764	601,6	0,2484	672,3	48,0	350,3	520,3	1,1316	33,2836	520
525	0,9120	0,7540	0,5782	602,9	0,2500	673,3	48,0	350,3	525,3	1,1326	33,6678	525
530	0,9024	0,7482	0,5800	604,1	0,2516	674,3	48,0	350,3	530,3	1,1336	34,0520	530
535	0,8928	0,7423	0,5818	605,4	0,2532	675,3	48,0	350,3	535,3	1,1346	34,4362	535
540	0,8832	0,7365	0,5836	606,6	0,2548	676,3	48,0	350,3	540,3	1,1356	34,8204	540
545	0,8736	0,7306	0,5854	607,9	0,2564	677,3	48,0	350,3	545,3	1,1366	35,2046	545
550	0,8640	0,7248	0,5872	609,1	0,2580	678,3	48,0	350,3	550,3	1,1376	35,5888	550
555	0,8544	0,7189	0,5890	610,4	0,2596	679,3	48,0	350,3	555,3	1,1386	35,9730	555
560	0,8448	0,7131	0,5908	611,6	0,2612	680,3	48,0	350,3	560,3	1,1396	36,3572	560
565	0,8352	0,7072	0,5926	612,9	0,2628	681,3	48,0	350,3	565,3	1,1406	36,7414	565
570	0,8256	0,7014	0,5944	614,1	0,2644	682,3	48,0	350,3	570,3	1,1416	37,1256	570
575	0,8160	0,6955	0,5962	615,4	0,2660	683,3	48,0	350,3	575,3	1,1426	37,5098	575
580	0,8064	0,6897	0,5980	616,6	0,2676	684,3	48,0	350,3	580,3	1,1436	37,8940	580
585	0,7968	0,6838	0,5998	617,9	0,2692	685,3	48,0	350,3	585,3	1,1446	38,2782	585
590	0,7872	0,6780	0,6016	619,1	0,2708	686,3	48,0	350,3	590,3	1,1456	38,6624	590
595	0,7776	0,6721	0,6034	620,4	0,2724	687,3	48,0	350,3	595,3			

Табл. 17. Водяной пар по Schlie.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Давление абсолют. р кг/см²	Температура °С	Уд. объем		Уд. вес сухого пара γ кг/м³	Теплота				Теплота расширения жидкости Δr кал		Внутр. энерг.		Энтальпия		Давление абсолют. р кг/см²	
		жид- кости 1 000 м³/мг	сухого пара м³/кг		жид- кости ρ кал	паро- образова- ния r кал	пол- ная сухого пара λ кал	внешняя Δr кал	скрытая внутренняя p кал	жид- кости U _f кал	сухого пара U _g кал	жид- кости с един. энтр.	испарения r един. энтр.	сухого пара S _g един. энтр.		
0,02	17,2	1,0013	68,28	0,01465	17,2	586,0	603,2	32,0	554,0	—	17,2	571,2	0,0611	2,0193	2,0804	0,02
0,04	28,6	1,0040	35,47	0,02819	28,6	580,0	608,6	32,2	546,8	—	28,6	576,4	0,0676	1,9231	2,0207	0,04
0,06	35,8	1,0063	24,19	0,04134	35,7	576,2	611,9	34,0	542,2	—	35,7	577,9	0,1233	1,8859	1,9892	0,06
0,08	41,15	1,0083	18,48	0,05420	41,1	573,4	614,5	34,7	538,7	—	41,1	579,8	0,1394	1,8552	1,9648	0,08
0,10	45,4	1,0100	14,96	0,06631	45,3	571,4	616,7	35,1	536,1	—	45,3	581,4	0,1539	1,7946	1,9483	0,10
0,15	59,6	1,0131	10,22	0,09785	53,5	566,6	620,1	36,1	530,5	—	53,5	584,0	0,1794	1,7348	1,9142	0,15
0,20	69,7	1,0185	7,80	0,1282	59,6	563,1	622,7	36,6	526,5	—	59,6	586,1	0,1979	1,6925	1,8904	0,20
0,25	84,6	1,0195	6,39	0,1580	64,6	560,1	624,6	37,0	523,1	—	64,6	587,6	0,2126	1,6591	1,8717	0,25
0,30	98,7	1,0219	5,33	0,1876	68,6	557,9	626,5	37,5	520,4	—	68,6	589,0	0,2247	1,6327	1,8574	0,30
0,35	112,3	1,0241	4,62	0,2164	72,2	555,7	627,9	37,8	517,9	—	72,2	590,1	0,2352	1,6093	1,8445	0,35
0,40	125,4	1,0260	4,06	0,2462	75,3	553,9	629,2	38,1	515,8	—	75,3	591,1	0,2443	1,5898	1,8341	0,40
0,45	138,2	1,0278	3,630	0,2755	78,1	552,2	630,3	38,3	513,9	—	78,1	592,0	0,2523	1,5723	1,8246	0,45
0,50	150,9	1,0296	3,290	0,3039	80,8	550,4	631,2	38,5	511,9	—	80,8	592,7	0,2600	1,5552	1,8152	0,50
0,60	185,45	1,0327	2,785	0,3603	85,4	547,2	632,6	39,0	508,2	—	85,4	593,6	0,2682	1,5265	1,7947	0,60
0,70	198,4	1,0355	2,400	0,4167	89,4	544,5	634,0	39,3	505,3	—	89,4	594,7	0,2739	1,5027	1,7866	0,70
0,80	210,9	1,0381	2,116	0,4728	93,0	542,5	635,4	39,6	502,9	—	93,0	595,7	0,2793	1,4771	1,7761	0,80
0,90	222,6	1,0405	1,900	0,5263	96,2	540,6	636,8	40,0	500,6	—	96,2	596,6	0,2827	1,4642	1,7659	0,90
1,00	233,9	1,0426	1,721	0,5811	99,1	538,8	637,9	40,3	498,5	0,0244	99,1	597,6	0,3106	1,4480	1,7586	1,00
1,20	254,15	1,0467	1,451	0,6863	104,3	535,7	640,0	40,7	496,0	0,0294	104,4	599,1	0,3246	1,4200	1,7446	1,20
1,40	272,7	1,0503	1,248	0,7949	108,8	532,9	641,7	41,2	494,0	0,0344	108,8	600,5	0,3364	1,3961	1,7325	1,40
1,60	289,7	1,0536	1,108	0,9026	112,8	530,4	643,2	41,6	491,8	0,0394	112,8	601,6	0,3471	1,3752	1,7223	1,60
1,80	305,3	1,0563	0,993	1,0070	116,5	528,0	644,5	41,9	489,1	0,0445	116,5	602,6	0,3567	1,3563	1,7130	1,80
2,00	319,5	1,0589	0,902	1,1090	119,9	525,7	645,6	42,2	486,5	0,0496	119,9	603,4	0,3651	1,3356	1,7007	2,00
2,50	348,5	1,0660	0,736	1,3610	127,2	520,3	647,5	42,9	477,4	0,0623	127,2	604,6	0,3837	1,3014	1,6861	2,50

3,00	132,0	1,0705	0,5190	1,6150	133,4	510,1	649,5	43,4	472,7	0,0725	133,4	604,1	0,3983	1,2715	1,6708	3,00
3,50	136,2	1,0755	0,5335	1,674	138,7	512,3	651,0	43,7	468,6	0,0852	138,7	607,3	0,4125	1,2459	1,6584	3,50
4,00	142,9	1,0803	0,4710	1,723	143,8	508,7	652,5	44,1	464,6	0,1012	143,8	608,4	0,4242	1,2231	1,6473	4,00
4,50	147,2	1,0848	0,4220	1,770	148,1	505,6	653,9	44,4	461,6	0,1143	148,1	609,7	0,4349	1,2037	1,6386	4,50
5,00	151,1	1,0890	0,3823	1,816	153,0	503,2	655,2	44,7	458,5	0,1275	153,0	610,4	0,4444	1,1865	1,6305	5,00
5,50	154,7	1,0933	0,3494	1,862	157,7	500,6	656,5	44,9	455,7	0,1408	157,7	611,3	0,4531	1,1704	1,6235	5,50
6,00	158,1	1,0973	0,3218	1,907	159,3	498,0	657,3	45,1	452,9	0,1542	159,3	612,3	0,4614	1,1552	1,6166	6,00
6,50	161,2	1,1011	0,2983	1,952	162,4	495,9	658,3	45,3	450,6	0,1676	162,4	612,9	0,4688	1,1421	1,6109	6,50
7,00	164,2	1,1049	0,2778	1,997	165,5	493,8	659,3	45,5	448,3	0,1811	165,5	613,6	0,4763	1,1295	1,6058	7,00
7,50	167,0	1,1085	0,2608	2,042	168,5	491,6	660,1	45,7	445,9	0,1947	168,5	614,2	0,4827	1,1173	1,6000	7,50
8,00	169,0	1,1119	0,2450	2,087	171,2	489,7	660,9	45,8	443,9	0,2083	171,2	614,9	0,4874	1,1079	1,5943	8,00
8,50	172,2	1,1153	0,2318	2,134	173,9	487,8	661,7	45,9	441,9	0,2220	173,9	615,6	0,4985	1,0987	1,5885	8,50
9,00	174,6	1,1186	0,2194	2,181	176,6	486,1	662,5	46,0	440,1	0,2357	176,6	616,3	0,5005	1,0860	1,5865	9,00
9,50	176,9	1,1208	0,2080	2,228	178,6	484,5	663,2	46,1	438,4	0,2493	178,6	616,8	0,5060	1,0769	1,5829	9,50
10,00	179,1	1,1246	0,1980	2,275	181,2	482,9	663,8	46,2	436,4	0,2634	181,2	617,6	0,5111	1,0674	1,5785	10,00
10,50	181,2	1,1278	0,1896	2,322	183,3	481,2	664,5	46,4	434,8	0,2773	183,3	617,8	0,5160	1,0594	1,5754	10,50
11,00	183,2	1,1308	0,1815	2,369	185,4	479,8	665,2	46,5	433,5	0,2913	185,4	618,4	0,5206	1,0517	1,5723	11,00
11,50	185,2	1,1337	0,1740	2,416	187,5	478,3	665,8	46,6	431,7	0,3053	187,5	618,9	0,5259	1,0439	1,5698	11,50
12,00	187,1	1,1364	0,1668	2,463	189,5	476,9	666,4	46,6	430,3	0,3193	189,5	619,5	0,5295	1,0365	1,5668	12,00
12,50	189,0	1,1382	0,1607	2,510	191,6	475,5	667,1	46,7	428,3	0,3346	191,6	620,1	0,5339	1,0292	1,5631	12,50
13,00	190,9	1,1413	0,1544	2,557	193,4	474,1	667,5	46,8	427,3	0,3500	193,4	620,4	0,5380	1,0222	1,5602	13,00
13,50	192,5	1,1447	0,1492	2,604	195,2	472,8	668,0	46,9	425,9	0,3619	195,2	620,8	0,5420	1,0156	1,5576	13,50
14,00	194,2	1,1474	0,1442	2,651	197,0	471,4	668,4	47,0	424,4	0,3762	197,0	621,0	0,5458	1,0090	1,5548	14,00
14,50	195,8	1,1500	0,1395	2,698	198,7	470,1	668,8	47,1	423,0	0,3905	198,7	621,3	0,5494	1,0027	1,5521	14,50
15,00	197,4	1,1525	0,1350	2,745	200,4	468,9	669,3	47,2	421,7	0,4049	200,4	621,7	0,5532	0,9968	1,5500	15,00
15,50	200,5	1,1560	0,1272	2,792	203,7	466,6	670,3	47,3	419,3	0,4332	203,7	622,6	0,5601	0,9884	1,5485	15,50
16,00	203,4	1,1630	0,1203	2,839	206,8	464,1	670,9	47,5	416,8	0,4530	206,8	623,0	0,5668	0,9742	1,5408	16,00
16,50	206,2	1,1670	0,1140	2,886	209,8	461,8	671,6	47,6	414,2	0,4919	209,8	623,3	0,5729	0,9637	1,5366	16,50
17,00	208,9	1,1710	0,1086	2,933	212,7	459,5	672,2	47,8	411,7	0,5211	212,7	623,5	0,5789	0,9532	1,5324	17,00
17,50	211,45	1,1760	0,1035	2,980	215,4	457,4	672,8	47,8	409,6	0,5508	215,4	624,5	0,5846	0,9442	1,5288	17,50
18,00	213,9	1,1800	0,0985	3,027	218,0	455,3	673,5	47,8	407,5	0,5803	218,0	624,5	0,5900	0,9361	1,5261	18,00
18,50	216,3	1,1840	0,0942	3,074	220,6	453,2	673,9	47,9	405,4	0,6100	220,6	625,41	0,5953	0,9284	1,5217	18,50
19,00	218,5	1,1890	0,0901	3,121	223,1	451,4	674,5	47,9	403,6	0,6404	223,1	625,98	0,6003	0,9182	1,5183	19,00
19,50	220,8	1,1930	0,0864	3,168	225,5	449,5	675,0	47,9	401,6	0,6705	225,5	626,45	0,6052	0,9103	1,5155	19,50
20,00	223,0	1,1970	0,0829	3,215	227,9	447,7	675,6	47,9	399,9	0,7006	227,9	627,02	0,6100	0,9026	1,5128	20,00
20,50	225,1	1,2010	0,0799	3,262	230,1	446,0	676,0	47,9	398,0	0,7313	230,1	627,39	0,6146	0,8956	1,5102	20,50
21,00	227,0	1,2050	0,0771	3,309	232,3	444,5	677,0	48,0	396,0	0,7619	232,3	627,55	0,6187	0,8890	1,5077	21,00
21,50	229,1	1,2090	0,0744	3,356	234,45	443,0	677,0	48,0	395,0	0,7928	234,45	628,66	0,6233	0,8823	1,5036	21,50
22,00	231,0	1,2130	0,0719	3,403	236,5	441,0	678,0	48,0	393,0	0,8238	236,5	629,68	0,6274	0,8760	1,5024	22,00
22,50	232,9	1,2160	0,0696	3,450	238,6	439,0	678,0	48,0	391,0	0,8543	238,6	629,75	0,6315	0,8678	1,4998	22,50
23,00	235,5	1,2230	0,0663	3,500	242,8	436,0	679,0	48,0	388,0	0,9165	242,8	629,58	0,6383	0,8557	1,4960	23,00

Табл. 17. Возросший шаг по Schrie (пропорция).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
34,00	229,9	1,230	0,0515	19,260	246,2	439,0	679,0	49,0	398,0	0,9704	245,22	630,23	0,6466	0,8443	1,4908	34,00
36,00	243,1	1,236	0,0498	17,182	240,8	429,5	679,0	48,0	381,5	1,0431	248,56	630,28	0,6384	0,8338	1,4893	36,00
38,00	246,3	1,243	0,0483	15,116	235,4	420,0	680,0	47,0	374,0	1,1082	252,30	630,33	0,6302	0,8193	1,4878	38,00
40,00	249,3	1,250	0,0468	13,064	230,0	410,5	680,0	46,0	367,5	1,1709	256,56	630,38	0,6220	0,8048	1,4863	40,00
42,00	252,2	1,256	0,0459	20,040	260,0	419,5	680,0	47,9	372,0	1,2354	268,76	630,76	0,6728	0,7987	1,4715	42,00
44,00	255,0	1,260	0,0476	21,003	263,0	416,5	680,0	47,8	369,0	1,3004	261,70	630,70	0,6797	0,7888	1,4675	44,00
46,00	257,7	1,263	0,0456	21,930	266,0	413,5	680,0	47,7	366,0	1,3671	264,64	630,64	0,6844	0,7792	1,4636	46,00
48,00	260,3	1,2759	0,0435	22,088	268,9	410,5	679,0	47,5	363,0	1,4332	267,47	630,47	0,6898	0,7697	1,4598	48,00
50,00	262,8	1,2810	0,0416	24,03	271,8	407,5	679,0	47,3	360,0	1,5000	270,30	630,30	0,6967	0,7605	1,4562	50,00
55,00	268,8	1,2950	0,0377	26,525	279,0	393,4	678,3	46,9	352,4	1,6680	277,36	629,76	0,7076	0,7363	1,4420	55,00
60,00	274,6	1,3090	0,0346	28,902	286,3	392,0	677,0	46,6	345,0	1,8358	283,48	628,48	0,7194	0,7160	1,4364	60,00
65,00	279,7	1,3230	0,0316	31,646	291,0	384,0	676,0	46,3	338,0	2,0139	289,01	627,01	0,7301	0,6943	1,4249	65,00
70,00	284,7	1,3360	0,0290	34,463	297,0	376,0	675,0	46,3	331,0	2,1901	294,83	625,83	0,7404	0,6742	1,4152	70,00
75,00	289,4	1,3490	0,0267	37,433	302,0	368,0	670,0	44,5	323,5	2,3692	299,64	623,14	0,7500	0,6643	1,4043	75,00
80,00	293,8	1,3620	0,0247	40,486	307,6	360,0	669,0	43,7	316,0	2,5517	305,07	621,07	0,7590	0,6531	1,3941	80,00
85,00	298,0	1,3750	0,0230	43,478	312,6	352,0	665,0	43,0	309,0	2,7381	309,89	618,89	0,7676	0,6416	1,3841	85,00
90,00	302,0	1,3880	0,0215	46,512	316,7	344,0	661,0	42,3	303,0	2,9285	313,80	615,80	0,7767	0,5963	1,3740	90,00
95,00	306,0	1,4030	0,0202	49,505	321,0	366,0	657,5	41,8	293,0	3,1214	317,90	610,90	0,7822	0,5803	1,3625	95,00
100,00	309,7	1,4180	0,0189	52,910	326,4	328,0	654,0	41,0	287,0	3,3208	323,10	610,10	0,7900	0,5639	1,3528	100,00
110,00	316,7	1,4460	0,0168	59,524	335,6	312,0	648,0	39,6	272,0	3,7250	331,90	603,96	0,8048	0,5291	1,3339	110,00
120,00	323,2	1,4800	0,0150	66,870	344,6	298,0	640,0	38,0	259,0	4,1592	340,36	598,36	0,8196	0,4965	1,3161	120,00
130,00	329,5	1,5200	0,0133	75,19	354,0	279,0	633,0	36,1	248,0	4,6276	349,40	592,40	0,8332	0,4631	1,2993	130,00
140,00	335,3	1,5660	0,0118	84,74	363,6	261,0	625,0	33,7	238,0	5,1016	358,52	586,52	0,8478	0,4281	1,2766	140,00
150,00	340,7	1,5929	0,0106	94,34	373,8	244,0	618,0	31,6	212,0	5,5925	368,23	580,23	0,8644	0,3974	1,2620	150,00
160,00	345,9	1,6310	0,0095	105,30	383,6	226,0	610,0	29,5	196,5	6,1115	377,51	574,01	0,8800	0,3652	1,2452	160,00
170,00	350,9	1,6690	0,0085	117,60	393,4	207,0	603,0	27,2	180,0	6,6885	386,72	568,72	0,8962	0,3318	1,2258	170,00
180,00	355,6	1,7300	0,0076	131,60	405,2	188,0	591,0	24,8	163,0	7,2927	395,98	558,98	0,9110	0,2991	1,2101	180,00
190,00	360,2	1,7900	0,0067	149,20	414,0	168,0	582,0	21,8	146,0	7,9649	408,06	552,06	0,9286	0,2663	1,1953	190,00
200,00	364,4	1,8900	0,0060	169,50	425,8	146,0	572,0	18,9	127,0	8,8056	417,02	544,02	0,9462	0,2291	1,1753	200,00
210,00	368,5	2,0000	0,00507	197,20	441,1	130,0	558,0	15,1	103,0	9,8361	431,59	531,59	0,9642	0,1824	1,1468	210,00
220,00	372,4	2,2650	0,00403	248,1	464,0	60,0	533,0	9,0	60,0	11,7758	452,25	512,25	1,0022	0,1086	1,1091	220,00
234,20	374,0	2,500	0,00298	344,8	486,3	0	499,3	0	0	15,2282	484,10	484,10	1,0560	0	1,0560	234,20

Табл. 16. Водяной пар по В. Моттер.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Давление abs. p kg/cm ²	Температура насыщ. °C	Удельный объем		Уд. вес сухого пара γ kg/m ³	Энтальпия			Теплосодержание		Теплота испарения			Внутренняя энергия		Давление abs. p kg/cm ²
		жид- кости v м ³ /kg	сухого пара v м ³ /kg		жид- кости s едм. энтр.	сухого пара S едм. энтр.	испа- ренная r едм. энтр.	жид- кости i_f cal	сухого пара i_g cal	пол- ная r cal	вну- трен- няя p cal	выш- шая Apv cal	жид- кости U_f cal	сухого пара U_g cal	
0,01	6,6	0,0010	131,40	0,00768	0,0399	2,1395	2,1138	6,9	568,0	581,4	560,6	30,83	6,6	576,2	0,010
0,015	12,7	0,0010	89,64	0,01116	0,0453	2,1048	2,0595	12,7	600,9	588,2	556,7	31,49	12,7	569,4	0,015
0,020	17,1	0,0010	68,27	0,01495	0,0508	2,0803	2,0194	17,1	602,9	585,8	553,8	31,88	17,1	571,0	0,020
0,025	20,7	0,0010	55,28	0,01803	0,0722	2,0614	1,9883	20,7	604,6	583,9	551,5	32,37	20,7	572,2	0,025
0,03	23,7	0,0010	46,53	0,02149	0,0833	2,0460	1,9637	23,7	605,0	582,3	549,6	32,69	23,7	573,3	0,03
0,04	26,6	0,0010	37,46	0,02520	0,0936	2,0219	1,9423	26,6	605,2	579,6	546,4	33,22	26,6	575,0	0,04
0,05	34,5	0,0010	26,73	0,03481	0,1125	2,0032	1,8907	32,5	610,0	577,5	543,9	33,64	32,5	576,4	0,05
0,06	35,9	0,0010	24,19	0,04139	0,1232	1,9880	1,8648	35,9	611,5	575,8	541,8	33,93	35,9	577,6	0,06
0,08	41,1	0,0010	18,45	0,05420	0,1403	1,9642	1,8339	41,1	614,0	572,8	538,3	34,56	41,1	579,4	0,08
0,10	45,4	0,0010	14,96	0,06688	0,1553	1,9458	1,7819	45,4	615,9	570,5	535,5	35,02	45,4	580,9	0,10
0,12	49,0	0,0010	12,60	0,07937	0,1652	1,9296	1,7657	49,0	617,6	568,5	533,1	35,40	49,0	582,2	0,12
0,15	53,6	0,0010	10,22	0,09799	0,1722	1,9126	1,7384	53,6	619,6	566,0	530,1	35,88	53,6	583,7	0,15
0,20	59,7	0,0010	7,707	0,1283	0,1976	1,8892	1,6916	59,7	622,3	562,7	526,1	36,52	59,7	585,8	0,20
0,25	64,8	0,0010	6,335	0,1581	0,2132	1,8712	1,6689	64,8	624,5	559,9	523,9	37,02	64,8	587,4	0,25
0,30	68,7	0,0010	5,331	0,1876	0,2244	1,8567	1,6523	68,7	626,3	557,6	521,2	37,45	68,7	588,8	0,30
0,35	72,3	0,0010	4,614	0,2167	0,2349	1,8441	1,6393	72,3	627,8	555,6	517,8	37,81	72,3	589,0	0,35
0,40	75,4	0,0010	4,072	0,2456	0,2439	1,8334	1,5885	75,4	629,7	553,8	515,6	38,13	75,4	591,1	0,40
0,50	80,9	0,0010	3,304	0,3027	0,2595	1,8156	1,5562	80,9	631,5	550,6	512,0	38,67	80,9	592,8	0,50
0,60	85,5	0,0010	2,785	0,3540	0,2723	1,8011	1,5288	85,5	633,4	548,0	508,9	39,12	85,5	594,3	0,60
0,70	89,5	0,0010	2,411	0,4147	0,2834	1,7889	1,5053	89,5	635,1	545,6	506,1	39,51	89,5	595,6	0,70
0,80	93,0	0,0010	2,128	0,4699	0,2931	1,7783	1,4852	93,0	636,5	543,6	503,7	39,84	93,0	596,7	0,80
0,90	96,2	0,0010	1,906	0,5246	0,3018	1,7690	1,4672	96,2	637,8	541,7	501,5	40,15	96,2	597,7	0,90

Табл. 16. Водяной пар по К. Mollter (продолжение).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1,00	99,1	0,0010	1,727	0,5790	0,3096	1,7607	1,4511	99,1	639,0	539,9	492,5	40,42	99,1	598,6	1,00
1,10	101,8	0,0010	1,580	0,6329	0,3168	1,7532	1,4364	101,8	640,1	539,3	497,6	40,68	101,8	599,4	1,10
1,20	104,2	0,0010	1,457	0,6865	0,3235	1,7464	1,4229	104,3	641,1	538,7	495,8	40,91	104,3	600,1	1,20
1,30	106,6	0,0010	1,352	0,7399	0,3297	1,7401	1,4105	106,7	642,0	535,9	494,2	41,12	106,6	600,8	1,30
1,4	108,7	0,0010	1,261	0,7931	0,3354	1,7343	1,3989	108,9	642,8	533,9	492,6	41,31	108,8	601,5	1,4
1,5	110,8	0,0016	1,182	0,846	0,3408	1,7289	1,3880	110,9	643,6	532,7	491,3	41,49	110,9	602,1	1,5
1,6	112,7	0,0010	1,113	0,898	0,3460	1,7238	1,3778	112,9	644,3	531,4	489,7	41,67	112,9	602,6	1,6
1,8	116,3	0,0010	0,997	1,003	0,3554	1,7146	1,3596	116,6	645,7	529,1	487,1	41,98	116,5	603,7	1,8
2,0	119,6	0,0040	0,903	1,107	0,3639	1,7063	1,3424	119,9	646,9	527,0	484,7	42,26	119,8	604,6	2,0
2,2	123,6	0,0010	0,826	1,210	0,3717	1,6988	1,3271	123,0	648,0	525,0	482,5	42,51	122,9	605,4	2,2
2,4	125,5	0,0011	0,7916	1,313	0,3789	1,6920	1,3131	125,8	649,0	523,1	480,4	42,75	125,8	606,2	2,4
2,6	128,1	0,0011	0,7096	1,415	0,3856	1,6857	1,3001	128,5	649,9	521,4	478,4	42,96	128,5	606,9	2,6
2,8	130,5	0,0011	0,6682	1,517	0,3919	1,6799	1,2880	131,0	650,8	519,7	476,6	43,16	131,0	607,5	2,8
3,0	132,9	0,0011	0,6180	1,618	0,3977	1,6745	1,2767	133,4	651,6	518,1	474,8	43,34	133,3	608,1	3,0
3,2	135,1	0,0011	0,5817	1,719	0,4033	1,6694	1,2661	135,7	652,3	516,6	473,1	43,51	135,6	608,7	3,2
3,4	137,2	0,0011	0,5495	1,822	0,4085	1,6646	1,2561	137,8	653,0	515,2	471,0	43,67	137,7	609,2	3,4
3,6	139,2	0,0011	0,5208	1,920	0,4135	1,6601	1,2466	139,9	653,7	513,8	470,0	43,82	139,8	609,7	3,6
3,8	141,1	0,0011	0,4951	2,020	0,4182	1,6558	1,2376	141,8	654,3	512,4	468,5	43,96	141,7	610,2	3,8
4,0	142,9	0,0011	0,4718	2,120	0,4227	1,6518	1,2291	143,7	654,9	511,1	467,0	44,09	143,6	610,7	4,0
4,5	147,2	0,0011	0,4224	2,368	0,4333	1,6425	1,2092	148,1	656,2	508,0	463,6	44,40	148,0	611,7	4,5
5,0	151,1	0,0011	0,3625	2,614	0,4428	1,6341	1,1913	152,2	657,3	505,2	460,5	44,66	152,0	612,6	5,0
5,5	154,7	0,0011	0,3497	2,860	0,4515	1,6265	1,1750	155,9	658,4	502,5	457,6	44,90	155,8	613,4	5,5
6,0	158,1	0,0011	0,3222	3,104	0,4596	1,6195	1,1599	159,4	659,3	499,9	454,8	45,12	159,2	614,1	6,0
6,5	161,2	0,0011	0,2987	3,348	0,4671	1,6131	1,1460	162,7	660,2	497,5	452,2	45,30	162,6	614,7	6,5
7,0	164,2	0,0011	0,2785	3,591	0,4742	1,6071	1,1330	165,7	660,9	495,2	449,7	45,48	165,6	615,3	7,0
7,5	167,0	0,0011	0,2609	3,833	0,4808	1,6015	1,1208	168,7	661,7	493,0	447,7	45,63	168,0	615,8	7,5
8,0	169,6	0,0011	0,2454	4,076	0,4870	1,5962	1,1093	171,4	662,3	490,9	445,1	45,77	171,2	616,3	8,0
8,5	172,1	0,0011	0,2317	4,316	0,4929	1,5913	1,0984	174,0	662,9	488,8	442,9	45,90	173,8	616,8	8,5
9,0	174,5	0,0011	0,2195	4,556	0,4985	1,5866	1,0881	176,6	663,4	486,8	440,8	46,02	176,3	617,1	9,0
9,5	176,8	0,0011	0,2085	4,797	0,5038	1,5822	1,0784	179,0	663,9	484,9	438,9	46,13	178,7	617,6	9,5
10,0	179,0	0,0011	0,1985	5,037	0,5090	1,5778	1,0689	181,3	664,4	483,1	436,8	46,23	181,0	617,9	10,0
11,0	183,2	0,0011	0,1813	5,516	0,5186	1,5699	1,0513	185,7	665,2	479,5	433,1	46,41	185,4	618,5	11,0
12,0	187,1	0,0011	0,1656	5,996	0,5275	1,5625	1,0350	189,6	665,9	476,1	429,6	46,55	189,5	619,0	12,0
13,0	190,7	0,0011	0,1545	6,474	0,5358	1,5556	1,0194	193,6	666,6	472,8	426,2	46,68	193,4	619,4	13,0
14,0	193,1	1,0012	0,1438	6,952	0,5433	1,5493	1,0057	197,3	667,0	469,7	422,7	46,78	196,9	619,8	14,0
15,0	197,4	0,0012	0,1346	7,431	0,5506	1,5432	0,9924	200,7	667,4	466,7	419,5	46,87	200,3	620,1	15,0

16,0	200,4	0,0012	0,1284	7,908	0,5577	1,5375	0,9798	204,0	667,8	483,8	416,8	46,94	203,6	620,4	16,0
17,0	203,4	0,0012	0,1192	8,389	0,5643	1,5321	0,9679	207,1	668,1	480,9	413,9	47,00	206,7	620,6	17,0
18,0	206,2	0,0012	0,1128	8,868	0,5705	1,5270	0,9565	210,1	668,5	478,2	411,2	47,04	209,8	620,8	18,0
19,0	208,8	0,0012	0,1070	9,348	0,5764	1,5220	0,9456	213,0	668,8	475,5	408,5	47,07	212,5	621,0	19,0
20,0	211,4	0,0012	0,1017	9,830	0,5821	1,5173	0,9352	215,8	668,7	472,9	405,8	47,10	215,2	621,1	20,0
22,0	216,2	0,0012	0,0927	10,79	0,5928	1,5084	0,9156	221,0	668,9	467,9	400,8	47,12	220,4	621,2	22,0
24,0	220,5	0,0012	0,0850	11,76	0,6026	1,4993	0,8974	226,0	669,0	463,0	395,9	47,10	225,3	621,2	24,0
26,0	225,0	0,0012	0,0788	12,74	0,6119	1,4923	0,8804	230,6	669,0	458,4	391,3	47,07	229,8	621,2	26,0
28,0	229,9	0,0012	0,0729	13,72	0,6205	1,4850	0,8644	235,0	668,8	453,9	386,9	47,01	234,2	621,0	28,0
30,0	234,1	0,0012	0,0680	14,70	0,6287	1,4780	0,8493	239,1	668,6	449,5	382,6	46,92	238,3	620,8	30,0
32,0	238,6	0,0012	0,0637	15,69	0,6364	1,4713	0,8350	243,1	668,3	445,2	378,4	46,83	242,2	620,6	32,0
34,0	243,1	0,0012	0,0599	16,69	0,6437	1,4650	0,8213	246,9	668,0	441,1	374,4	46,71	245,9	620,3	34,0
36,0	247,6	0,0012	0,0565	17,70	0,6507	1,4589	0,8082	250,5	667,6	437,1	370,4	46,59	249,5	619,9	36,0
38,0	252,2	0,0012	0,0534	18,71	0,6573	1,4530	0,7958	254,1	667,1	433,0	366,6	46,45	252,9	619,5	38,0
40,0	256,9	0,0012	0,0506	19,73	0,6637	1,4474	0,7837	257,4	666,6	429,2	362,9	46,30	256,3	619,1	40,0
42,0	261,7	0,0012	0,0481	20,76	0,6698	1,4418	0,7721	260,7	666,0	425,3	359,1	46,14	259,5	618,6	42,0
44,0	266,4	0,0012	0,0458	21,80	0,6757	1,4365	0,7608	263,9	665,5	421,6	355,7	45,97	262,5	618,2	44,0
46,0	271,2	0,0012	0,0437	22,84	0,6813	1,4314	0,7500	266,9	664,9	417,9	352,1	45,79	265,5	617,6	46,0
48,0	276,0	0,0012	0,0418	23,89	0,6868	1,4264	0,7396	269,8	664,1	414,3	348,7	45,61	268,4	617,1	48,0
50,0	280,7	0,0012	0,0400	24,96	0,6921	1,4215	0,7294	272,7	663,4	410,7	345,2	45,41	271,2	616,5	50,0
52,0	285,4	0,0012	0,0383	26,05	0,7046	1,4088	0,7052	275,5	661,5	407,0	341,9	44,91	274,0	615,9	52,0
54,0	290,1	0,0012	0,0368	27,16	0,7162	1,3987	0,6826	280,1	659,5	403,3	338,0	44,35	284,2	613,3	54,0
56,0	294,8	0,0012	0,0354	28,28	0,7270	1,3882	0,6612	282,2	657,5	400,0	334,5	43,77	290,2	611,7	56,0
58,0	299,5	0,0012	0,0341	29,41	0,7371	1,3781	0,6410	286,0	655,3	397,3	331,1	43,16	295,8	609,9	58,0
60,0	304,2	0,0012	0,0329	30,56	0,7467	1,3684	0,6217	289,5	653,0	394,5	328,2	42,52	301,1	608,0	60,0
62,0	308,9	0,0012	0,0318	31,72	0,7557	1,3591	0,6033	293,8	650,6	391,8	325,9	41,87	306,2	606,1	62,0
64,0	313,6	0,0012	0,0308	32,89	0,7646	1,3501	0,5856	297,3	648,1	389,2	323,1	41,19	311,1	604,1	64,0
66,0	318,3	0,0012	0,0299	34,07	0,7731	1,3413	0,5682	301,0	645,6	386,7	320,4	40,49	316,0	602,1	66,0
68,0	323,0	0,0012	0,0291	35,26	0,7813	1,3328	0,5515	304,9	643,0	384,3	317,9	39,80	320,7	600,0	68,0
70,0	327,7	0,0012	0,0284	36,46	0,7893	1,3245	0,5352	308,7	640,5	381,8	315,4	39,07	325,3	598,0	70,0
72,0	332,4	0,0012	0,0277	37,67	0,7968	1,3165	0,5198	312,5	638,1	379,4	313,1	38,34	329,8	596,0	72,0
74,0	337,1	0,0012	0,0271	38,89	0,8043	1,3087	0,5053	316,3	635,6	377,0	310,8	37,61	334,3	594,0	74,0
76,0	341,8	0,0012	0,0266	40,12	0,8118	1,3011	0,4917	320,1	633,1	374,7	308,5	36,88	338,7	592,0	76,0
78,0	346,5	0,0012	0,0261	41,36	0,8193	1,2936	0,4790	323,9	630,6	372,4	306,2	36,15	343,1	590,0	78,0
80,0	351,2	0,0012	0,0256	42,61	0,8268	1,2862	0,4672	327,7	628,1	370,1	304,0	35,42	347,5	588,0	80,0
82,0	355,9	0,0012	0,0252	43,87	0,8343	1,2789	0,4562	331,5	625,6	367,8	301,9	34,69	351,9	586,0	82,0
84,0	360,6	0,0012	0,0248	45,14	0,8418	1,2717	0,4460	335,3	623,1	365,5	299,8	33,96	356,3	584,0	84,0
86,0	365,3	0,0012	0,0244	46,42	0,8493	1,2646	0,4366	339,1	620,6	363,3	297,7	33,23	360,7	582,0	86,0
88,0	370,0	0,0012	0,0241	47,71	0,8568	1,2576	0,4279	342,9	618,1	361,1	295,6	32,50	365,1	580,0	88,0
90,0	374,7	0,0012	0,0238	49,01	0,8643	1,2507	0,4198	346,7	615,6	358,9	293,5	31,77	369,5	578,0	90,0
92,0	379,4	0,0012	0,0235	50,32	0,8718	1,2438	0,4124	350,5	613,1	356,7	291,4	31,04	373,9	576,0	92,0
94,0	384,1	0,0012	0,0232	51,64	0,8793	1,2369	0,4057	354,3	610,6	354,5	289,3	30,31	378,3	574,0	94,0
96,0	388,8	0,0012	0,0230	52,97	0,8868	1,2301	0,3996	358,1	608,1	352,3	287,2	29,58	382,7	572,0	96,0
98,0	393,5	0,0012	0,0227	54,31	0,8943	1,2234	0,3940	361,9	605,6	350,1	285,1	28,85	387,1	570,0	98,0
100,0	398,2	0,0012	0,0225	55,66	0,9018	1,2167	0,3889	365,7	603,1	347,9	283,0	28,12	391,5	568,0	100,0
102,0	402,9	0,0012	0,0223	57,01	0,9093	1,2101	0,3842	369,5	600,6	345,7	280,9	27,39	395,9	566,0	102,0
104,0	407,6	0,0012	0,0221	58,37	0,9168	1,2036	0,3799	373,3	598,1	343,5	278,8	26,66	400,3	564,0	104,0
106,0	412,3	0,0012	0,0219	59,74	0,9243	1,1971	0,3760	377,1	595,6	341,3	276,7	25,93	404,7	562,0	106,0
108,0	417,0	0,0012	0,0217	61,12	0,9318	1,1907	0,3724	380,9	593,1	339,1	274,6	25,20	409,1	560,0	108,0
110,0	421,7	0,0012	0,0215	62,51	0,9393	1,1843	0,3691	384,7	590,6	336,9	272,5	24,47	413,5	558,0	110,0
112,0	426,4	0,0012	0,0214	63,91	0,9468	1,1780	0,3660	388,5	588,1	334,7	270,4	23,74	417,9	556,0	112,0
114,0	431,1	0,0012	0,0212	65,32	0,9543	1,1717	0,3632	392,3	585,6	332,5	268,3	23,01	422,3	554,0	114,0
116,0	435,8	0,0012	0,0211	66,74	0,9618	1,1654	0,3607	396,1	583,1	330,3	266,2	22,28	426,7	552,0	116,0
118,0	440,5	0,0012	0,0210	68,17	0,9693	1,1591	0,3584	400,0	580,6	328,1	264,1	21,55	431,1	550,0	118,0
120,0	445,2	0,0012	0,0209	69,61	0,9768	1,1528	0,3562	403,8	578,1	325,9	262,0	20,82	435,5	548,0	120,0
122,0	450,0	0,0012	0,0208	71,06	0,9843	1,1465	0,3542	407,7	575,6	323,7	259,9	20,09	439,9	546,0	122,0
124,0	454,7	0,0012	0,0207	72,52	0,9918	1,1402	0,3524	411,5	573,1	321,5	257,8	19,36	444,3	544,0	124,0
126,0	459,4	0,0012	0,0206	73,99	0,9993	1,1339	0,3507	415,4	570,6	319,3	255,7	18,63	448,7	542,0	126,0
128,0	464,1	0,0012	0,0205	75,47	1,0068	1,1276	0,3491	419,2	568,1	317,1	253,6	17,90	453,1	540,0	128,0
130,0	468,8	0,0012	0,0204	76,96	1,0143	1,1213	0,3476	423,1	565,6	314,9	251,5	17,17	457,5	538,0	130,0
132,0	473,5	0,0012	0,0203	78,46	1,0218	1,1150	0,3462	426,9	563,1	312,7	249,4	16,44	461,9	536,0	132,0
134,0	478,2	0,0012	0,0202	79,97	1,0293	1,1087	0,3449	430,8	560,6	310,5	247,3	15,71	466,3	534,0	134,0
136,0	482,9	0,0012	0,0201	81,49	1,0368	1,1024	0,3437	434,6	558,1	308,3	245,2	14,98	470,7	532,0	136,0
138,0	487,6	0,0012	0,0200	83,02	1,0443	1,0961	0,3426	438,5	555,6	306,1	243,1	14,25	475,1	530,0	138,0
140,0	492,3	0,0012	0,0200	84,56	1,0518	1,0898	0,3416	442,3	553,1	303,9	241,0	13,52	479,5	528,0	140,0
142,0	497,0	0,0012	0,0199	86,11	1,0593	1,0835	0,3407	446,2	550,6	301,7	238,9	12,79	483,9	526,0	142,0
144,0	501,7	0,0012	0,0198	87,67	1,0668	1,0772	0,3400	450,0	548,1	299,5	236,8	12,06	488,3	524,0	144,0
146,0	506,4	0,0012	0,0197	89,24	1,0743	1,0709	0,3393	453,9	545,6	297,3	234,7	11,33	492,7	522,0	146,0
148,0	511,1	0,0012	0,0196	90,82	1,0818	1,0646	0,3387	457,7	543,1	295,1	232,6	10,60	497,1	520,0	148,0
150,0	515,8	0,0012	0,0196	92,41	1,0893	1,0583	0,3382	461,6	540,6	292,9	230,5	9,87	501,5	518,0	150,0
152,0	520,5	0,0012	0,0195	94,01	1,0968	1,0520	0,3378	465,4	538,1	290,7	228,4	9,14	505,9	516,0	152,0
154,0	525,2	0,0012	0,0194	95,62	1,1043	1,0457	0,3375	469,3	535,6	288,5	226,3	8,41	510,3	514,0	154,0
156,0	530,0	0,0012	0,0193	97,24	1,1										

Табл. 19. Сухой водяной пар при давлении 0,01—0,2 кг/см² (по Schüle).

Давление p		Температура °C	Удельный объем насыщ. пара v_g м ³ /кг	Удельный вес сух. насыщ. пара 1000 γ г/м ³	Теплота парообра- зования r cal/кг	Полная теплота насыщ. пара λ cal/кг
кг/см	мм ртутного столба					
0,010	7,35	6,7	131,7	7,60	591,1	597,8
0,015	11,03	12,7	89,5	11,2	588,2	600,9
0,020	14,7	17,2	68,3	14,7	586,0	603,2
0,025	18,4	20,8	55,3	18,1	583,9	604,7
0,030	22,1	23,8	46,6	21,4	582,4	605,2
0,035	25,8	26,4	40,2	24,9	581,1	607,5
0,040	29,4	28,6	35,5	28,2	580,0	608,6
0,045	33,1	30,7	31,7	31,5	578,8	609,5
0,050	36,8	32,5	28,7	34,8	578,0	610,5
0,055	40,5	34,2	26,2	38,2	577,0	611,2
0,060	44,1	35,8	24,2	41,3	576,2	612,0
0,065	47,8	37,3	22,4	44,6	575,4	612,7
0,070	51,5	38,7	20,9	47,8	574,7	613,4
0,075	55,2	39,9	19,6	51,0	574,0	613,9
0,080	58,8	41,1	18,5	54,2	573,4	614,5
0,085	62,5	42,3	17,4	57,5	572,7	615,0
0,090	66,2	43,4	16,5	60,8	572,2	615,6
0,095	69,9	44,4	15,7	63,7	571,6	616,0
0,10	73,5	45,4	15,0	66,3	571,1	616,5
0,11	80,9	47,3	13,8	72,5	570,0	617,2
0,12	88,3	49,0	12,6	79,4	569,1	618,0
0,13	95,6	50,7	11,7	85,5	568,2	618,8
0,14	103,0	52,2	10,9	91,7	567,4	619,5
0,15	110,3	53,8	10,2	97,9	566,5	620,0
0,16	117,6	55,0	9,62	103,9	565,7	620,6
0,17	115,0	56,2	9,09	140,0	565,1	621,1
0,18	132,3	57,4	8,62	116,0	564,4	621,6
0,19	139,7	53,6	8,20	121,9	563,7	622,2
0,20	147,1	56,7	7,80	128,2	563,1	622,7

Табл. 20. Сухой водяной пар при $t = +10^\circ \div +50^\circ$ C (по Schüle).

Температура t °C	Давление		Удельный объем сухого насыщ. пара v_g м ³ /кг	Уд. в. сухого насыщ. пара 1000 γ г/м ³	Теплота паро- образования r cal/кг	Полная теп- лота сухого насыщ. пара λ cal/кг
	мм рт. ст.	кг/см ²				
10	9,11	0,0125	106,4	9,40	589,5	599,5
11	9,84	0,0134	99,7	10,03	589,0	600,0
12	10,52	0,0143	98,7	10,67	588,5	600,5
13	11,23	0,0153	87,9	11,38	588,0	601,0
14	11,99	0,0163	83,0	12,08	587,5	601,5
15	12,79	0,0174	77,9	12,83	586,9	601,9
16	13,64	0,0186	73,2	13,66	586,4	602,4
17	14,5	0,0197	69,0	14,49	585,9	602,9
18	15,5	0,0211	65,1	15,38	585,4	603,4
19	16,5	0,0224	61,4	16,29	584,9	603,9
20	17,5	0,0236	57,8	17,3	584,3	604,3
21	18,6	0,0254	54,5	18,3	583,8	604,8
22	19,8	0,0270	51,4	19,4	583,3	605,3
23	21,1	0,0287	48,6	20,6	582,8	605,8
24	22,4	0,0305	45,9	21,8	582,3	606,3

Табл. 20. Сухой водяной пар при $t = +10 \div +150$ C (Schlle) (продолжение).

Температура $t, ^\circ\text{C}$	Давление		Удельный объем сухого насыщ. пара $v, \text{м}^3/\text{кг}$	Уд. в. сухого насыщ. пара $1000 \tau, \text{г}/\text{м}^3$	Теплота паро- образования $r, \text{кал}/\text{кг}$	Полная теп- лота сухого насыщ. пара $\lambda, \text{кал}/\text{кг}$
	мм рт. ст.	$\text{кг}/\text{см}^2$				
25	23,8	0,0324	43,4	23,0	581,7	606,7
26	25,2	0,0343	41,0	24,4	581,2	607,2
27	26,7	0,0363	38,8	25,8	580,7	607,7
28	28,35	0,0386	36,8	27,2	580,2	608,2
29	30,05	0,0408	34,8	28,7	579,7	608,7
30	31,8	0,0432	32,9	30,4	579,2	609,2
31	33,7	0,0458	31,2	32,0	578,7	609,7
32	35,7	0,0486	29,6	33,8	578,2	610,2
33	37,7	0,0513	28,0	35,7	577,7	610,7
34	39,9	0,0543	26,6	37,6	577,2	611,2
35	42,2	0,0573	25,2	39,6	576,6	611,6
36	44,6	0,0606	23,9	41,8	576,1	612,1
37	47,1	0,0641	22,7	44,0	575,6	612,6
38	49,7	0,0676	21,6	46,3	575,1	613,1
39	52,5	0,0715	20,5	48,8	574,6	613,6
40	55,3	0,0752	19,5	51,2	574,0	614,0
41	58,4	0,0795	18,6	53,8	573,5	614,5
42	61,5	0,0836	17,7	56,5	572,4	614,8
43	64,8	0,0882	16,8	59,5	572,4	615,3
44	68,3	0,0930	16,0	62,5	571,6	615,7
45	71,9	0,0978	15,3	65,5	571,3	616,2
46	75,7	0,103	14,6	68,5	570,7	616,6
47	79,6	0,108	13,9	71,9	570,2	617,1
48	83,7	0,114	13,2	75,8	569,6	617,5
49	88,0	0,121	12,6	79,4	596,1	618,0
50	92,5	0,126	12,0	83,2	568,5	618,4

Табл. 21. Удельные объемы V перегретого пара $\text{м}^3/\text{кг}$ (по Якоб).

$p, \text{кг}/\text{см}^2$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
$t = t_s$	1,7281	0,6182	0,3826	0,2780	0,2195	0,1852	0,1546	0,1346	0,1195	0,1071
110	1,7816	—	—	—	—	—	—	—	—	—
120	1,8302	—	—	—	—	—	—	—	—	—
130	1,8789	—	—	—	—	—	—	—	—	—
140	1,9273	0,6305	—	—	—	—	—	—	—	—
150	1,9755	0,6476	—	—	—	—	—	—	—	—
160	2,0237	0,6646	0,3923	—	—	—	—	—	—	—
170	2,0716	0,6814	0,4030	0,2833	—	—	—	—	—	—
180	2,1196	0,6981	0,4136	0,2913	0,2232	—	—	—	—	—
190	2,1674	0,7146	0,4239	0,2992	0,2296	0,1852	—	—	—	—
200	2,2152	0,7311	0,4342	0,3068	0,2359	0,1906	0,1591	0,1359	—	—
220	2,3107	0,7339	0,4544	0,3217	0,2479	0,2009	0,1683	0,1443	0,1259	0,1113
240	2,4060	0,7964	0,4744	0,3364	0,2597	0,2108	0,1770	0,1520	0,1330	0,1180
260	2,5011	0,8288	0,4942	0,3509	0,2712	0,2205	0,1853	0,1595	0,1397	0,1242
280	2,5960	0,8611	0,5140	0,3653	0,2826	0,2300	0,1935	0,1668	0,1563	0,1302
300	2,6909	0,8232	0,5337	0,3795	0,2939	0,2393	0,2016	0,1730	0,1527	0,1369
350	2,9279	0,9733	0,5824	0,4147	0,3217	0,2624	0,2214	0,1913	0,1683	0,1501
400	3,1643	1,0529	0,6306	0,4496	0,3491	0,2850	0,2407	0,2109	0,1834	0,1637
450	3,4006	1,1323	0,6786	0,4842	0,3762	0,3074	0,2597	0,2248	0,1981	0,1771
500	3,6364	1,2113	0,7262	0,5184	0,4029	0,3294	0,2785	0,2412	0,2126	0,1901
550	3,8722	1,2902	0,7738	0,5568	0,4295	0,3512	0,2971	0,2573	0,2269	0,2029

Параметры перегретого пара.

Объем перегретого пара определяется по ф-ле:

$$v = \frac{47,17}{p} - 0,016.$$

Объемы перегретого пара м. б. взяты из табл. 21.

Уд. в. перегретого пара определяется по ф-ле:

$$\gamma = \frac{1}{v}.$$

Теплота перегретого пара определяется по ф-ле:

$$\lambda = q + r + C_{pm}(t - t_s),$$

где: q —теплота жидкости, r —теплота парообразования, C_{pm} —средняя теплоемкость перегретого пара, t_s —тем-ра кипения, t —тем-ра перегретого пара.

Средняя теплоемкость перегретого пара зависит от тем-ры и давления и берется из табл. 22.

Внутренняя энергия перегретого пара:

$$U = q + r + C_{pm}(t - t_s) - Ap(v - v_s),$$

или приближенно:

$$U = q + r + (C_{pm} - 0,1)(t - t_s).$$

Энтропия перегретого пара:

$$S = 2,303 \cdot \lg \frac{T}{273} + \frac{r}{T_s} + 2,303 C_{pm} \cdot \lg \frac{T}{T_s}$$

(ф-ла приближенная).

Теплосодержание перегретого пара:

$$I = U + Apv.$$

Количество тепла, воспринятое перегретым паром в котле и в перегревателе:

$$\lambda_1 = q - t_n + rx$$

$$\lambda_2 = r(1-x) + C_{pm}(t - t_s)$$

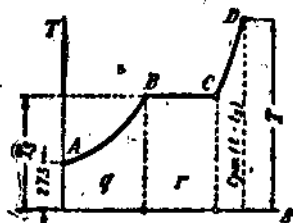
$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = q - t_n + r + C_{pm}(t - t_s)$$

где t_n —тем-ра питательной воды.

На черт. 36 дан график получения перегретого пара в системе $T-S$.

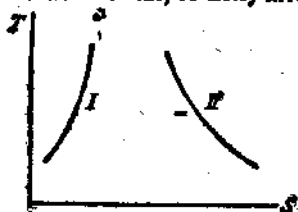
§ 25. Предельные кривые и диаграмма $T-S$ водяного пара.

Если в системах координат $P-V$ и $T-S$ нанести точки (по координатам), соответствующие горячей воде, подогретой до $t_{кип.}$ при различных давлениях, и соединить их, то получится кривая, к-рая называется нижней пре-



Черт. 36. A—холодная вода, B—горячая вода, C—сухой пар, D—перегретый, AB—процесс подогрева воды, BC—процесс парообразования, CD—процесс перегрева, AB и CD—логарифмические кривые.

в котле;
в перегревателе;
в котле и перегревателе,



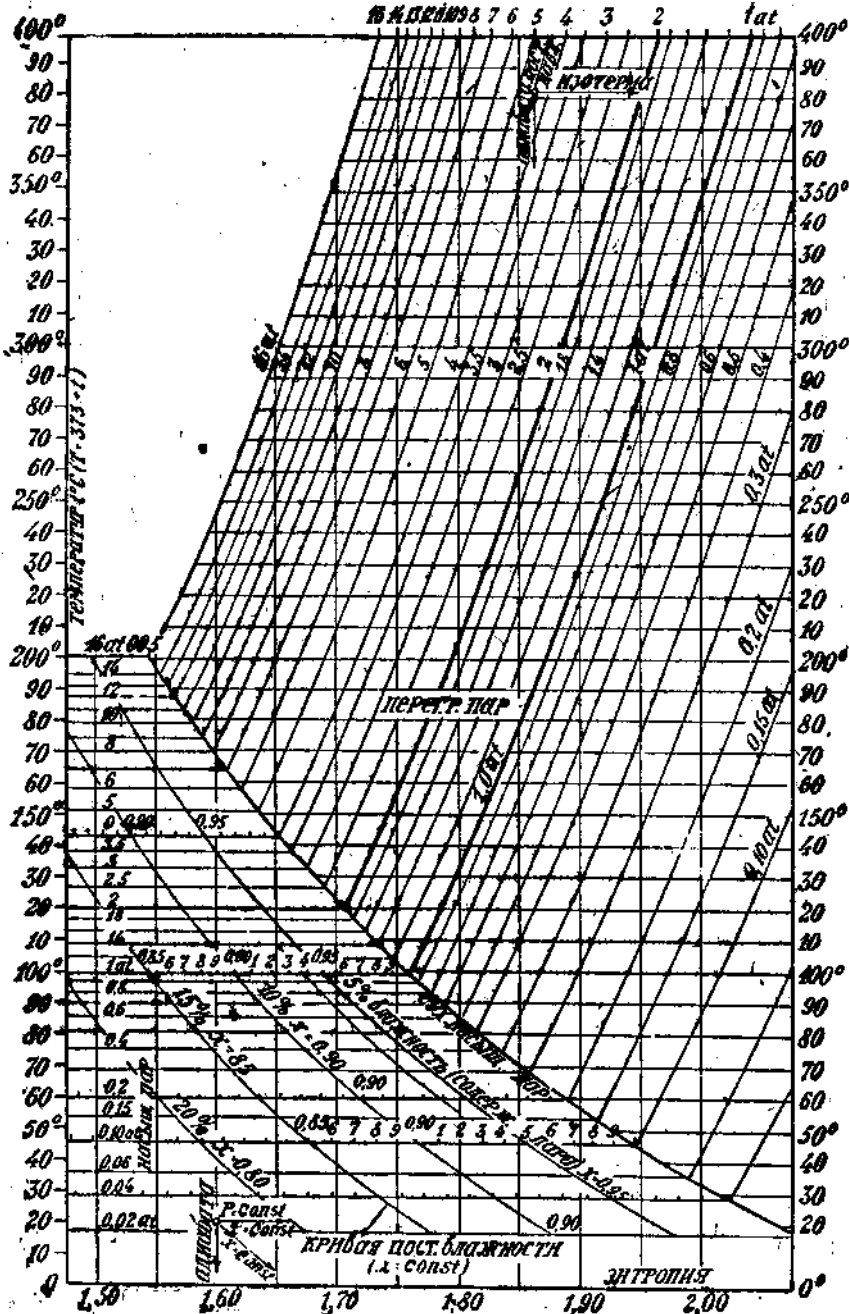
Черт. 37.



Черт. 38.

дельной, или нижней пограничной, кривой. При соединении жб точек, соответствующих сырому пару различного давления, получается кривая,

Температура t в градусах Цельсия



называемая верхней предельной, или верхней пограничной, кривой. Пограничные кривые в системе $P-V$ и $T-S$ даны на черт. 37 и 38:

- I — нижняя предельная кривая в системе $P-V$;
 I' — " " " " " " " " $T-S$;
 2 — верхняя предельная кривая в системе $P-V$;
 II — " " " " " " " " $T-S$.

Если в системе $P-S$ нанести изобары, соответствующие различным давлениям, и линии постоянной сухости пара, то полученная при этом диаграмма называется диаграммой $T-S$ водяного пара. Область, лежащая на диаграмме $T-S$ между предельными кривыми, есть область влажного пара; за верхней предельной кривой располагается область перегретого пара.

Основные термодинамические процессы пара.

§ 26. Процесс постоянного объема.

Расположение графика процесса по отношению предельных кривых дает указание на изменение состояния пара в процессе (черт. 39).

Первый случай: в начальном и в конечном состояниях пар влажный. Второй случай: в обоих конечных состояниях пар перегретый. Третий случай: в начальном состоянии пар перегретый, в конечном влажный.

Первый случай. Определение степени сухости x в конечном состоянии:

$$x_2 = x_1 \frac{v'_2}{v''_2},$$



Черт. 39.

где v'_2 и v''_2 — удельные объемы сухого пара при давлениях P_1 и P_2 .

Тепло, участвующее в процессе:

$$Q = (q_2 + p_2 x_2) - (q_1 + p_1 x_1).$$

Второй случай. Ф-ла соотношения параметров:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Тепло:

$$Q = [q_2 + p_2 + (C_{pm}'' - 0,1)(t_2 - t_s'')] - [q_1 + p_1 + (C_{pm}' - 0,1)(t_1 - t_s')].$$

Третий случай. Определение степени сухости x в конечном состоянии:

$$x = \frac{v}{v''},$$

где v — объем пара, а v'' — удельный объем пара при давлении P_2 .

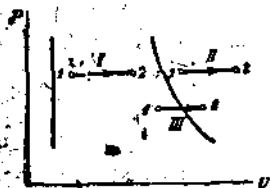
Тепло:

$$Q = (q_2 + p_2 x_2) - [q_1 + p_1 + (C_{pm}'' - 0,1)(t_1 - t_s'')].$$

§ 27. Процесс при постоянном давлении.

Возможные случаи процесса $P = \text{Const}$ даны на черт. 40:

I — в начальном и конечном состояниях пар влажный;



Черт. 40.

II—в обоих состояниях пар перегретый;

III—в начальном—влажный, в конечном—перегретый.

Первый случай. Степень сухости x_2 в конечном состоянии определяется по ф-ле:

$$x_2 = x_1 \frac{v_2}{v_1},$$

где v_1 и v_2 —объемы пара в точках 1 и 2.

Тепло: $Q = r(x_2 - x_1)$.

Работа: $L = p v_g (x_2 - x_1)$.

Второй случай. Ф-ла соотношения:

$$\frac{v_1 + 0,016}{v_2 + 0,016} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Тепло: $Q = C_{pm}^* (t_2 - t_3) - C_{pm}' (t_1 - t_3)$.

Работа: $L = p (v_2 - v_1)$.

Третий случай. Тепло: $Q = r(1 - x) + C_{pm} (T_2 - T_3)$.

Работа: $L = p (v_2 - v_1)$.

§ 28. Процесс изотермический.

Для влажных паров изотермический процесс тождествен процессу изобарическому.

Перегретый пар. Ф-ла соотношения:

$$\frac{v_1 + 0,016}{v_2 + 0,016} = \frac{p_2}{p_1}.$$

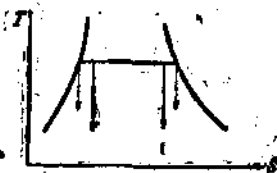
Работа определяется по ф-ле (приближенная):

$$L = 2,303 p_1 v_1 \cdot \lg \frac{p_2}{p_1}.$$

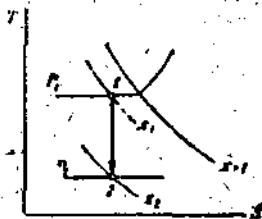
§ 29. Адиабатический процесс.

Адиабата в системе $T-S$ —вертикаль.

Как отмечает диаграмма $T-S$ (черт. 41), влажный пар ведет себя в адиабатическом процессе различно. При расширении сухого пара или влажного с большой степенью сухости пар увлажняется, при расширении влажных паров с малым содержанием x пар подсушивается. Конечное состояние пара в адиабатическом процессе очень просто определяется по диаграмме $T-S$.



Черт. 41.



Черт. 42.

Чтобы определить конечное состояние пара, находят по данным параметрам на диаграмме $T-S$ начальную точку процесса, из которой проводят вертикаль до пересечения с изобарой конечного давления; точка пересечения определяет конечную точку процесса, а положение на диаграмме $T-S$ —конечное состояние пара.

Работа пара в адиабатическом процессе определяется по ф-ле:

$$L = 427(U_1 - U_2).$$

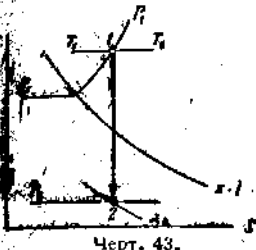
Первый случай: пар влажный в обоих состояниях (черт. 42).

$$L = 427(U_1 - U_2) = 427[(q_1 + p_1 x_1) - (q_2 + p_2 x_2)].$$

Величины q_1 , q_2 , p_1 и p_2 берутся из таблиц по давлениям P_1 и P_2 , а x_2 определяется по диаграмме $T-S$.

Второй случай: начальное состояние пар перегретый, конечное влажный (черт. 43):

$$L = 427(U_1 - U_2) = 427[(q_1 + p_1 + (C_{pm} - 0,1)(t_1 - t_s) - (q_2 + p_2 x_2)].$$

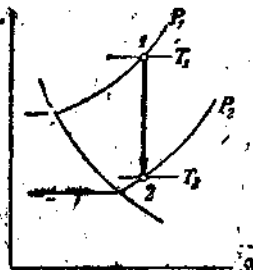


Черт. 43.

Третий случай: начальное и конечное состояния пар перегретый (черт. 44).

По диаграмме $T-S$ определяется конечная темп-ра T_2 .

Работа определяется по ф-ле:



Черт. 44.

$$L = 427(U_1 - U_2) = 427 \{ [q_1 + p_1 + (C_{pm} - 0,1)(t_1 - t_s)] - [q_2 + p_2 + (C_{pm} - 0,1)(t_2 - t_s)] \}.$$

§ 30. Диаграмма $i-s$.

В диаграмме $i-s$ по оси ординат откладывается теплосодержание пара, а по оси абсцисс—энтропия. Для каждого отдельного значения пара тепло-содержание и энтропия определяются по ф-лам:

$$\left. \begin{aligned} i' &= q \\ S &= 2,303 \cdot \lg \frac{T_1}{273} \end{aligned} \right\} \text{ для горячей воды,}$$

$$\left. \begin{aligned} i_w &= q + rx \\ S_w &= 2,303 \cdot \lg \frac{T_s}{273} + \frac{r}{T_s} x \end{aligned} \right\} \text{ для влажного пара.}$$

$$\left. \begin{aligned} i'' &= q + r \\ S_{''} &= 2,303 \cdot \lg \frac{T_2}{273} + \frac{r}{T_2} \end{aligned} \right\} \text{ для сухого пара.}$$

$$\left. \begin{aligned} i &= U + A p v \\ S &= 2,303 \cdot \lg \frac{T_s}{273} + \frac{r}{T_s} + 2,303 C_{pm} \cdot \lg \frac{T}{T_s} \end{aligned} \right\} \text{ для перегретого пара.}$$

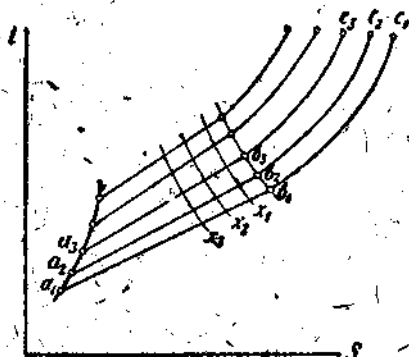
Диаграмма $i-s$ имеет большое значение при исследовании многих во-просов теплотехники.

В системе $i-s$ по точкам строится нижняя предельная кривая $a, a_1, a_2, \dots$ и верхняя кривая $b, b_1, b_2, \dots$ (черт. 45).

Между предельными кривыми располагается область влажных паров, выше верхней предельной кривой—область перегретых паров.

В области влажных паров наносятся линии постоянной сухости пара, а в области перегретых паров—изотермы различных темп-р. Каждая точка в системе $i-s$ изображает состояние пара, а координаты ее дают значения i и s для этого состояния пара.

Кроме того положение точки в системе $i-s$ определяет темп-ру для перегретых паров и степень сухости пара для паров влажных. Если точка располагается между предельными кривыми, то она изображает состояние влажного пара, а если выше верхней предельной кривой, то состояние перегретого пара. В системе $i-s$ наносятся изобары различных давлений, к-рые в области влажных паров будут прямыми линиями. Адиабаты в системе $i-s$, так же, как и в системе $T-S$, будут вертикали.



Черт. 45.

Пересечение линии процесса с предельными кривыми свидетельствует об изменении состояния пара.

Идеальный цикл паровой машины.

§ 31. Цикл Рэнкина.

За идеальный цикл паровой машины принимается цикл Рэнкина, при к-ром вода сначала нагревается до $t_{\text{наг}}$, затем испаряется при постоянном давлении, после чего адиабатически расширяется и наконец путем охлаждения при постоянном давлении возвращается в первичное состояние.

На черт. 46: BA—подогрев воды, AB—испарение, BC—адиабатическое расширение, CD—конденсация.

Работа, совершаемая 1 кг пара в цикле Рэнкина, равняется:

$$L = 427(i_1 - i_2).$$

Термический кпд цикла Рэнкина определяется по ф-ле:

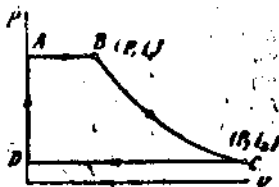
$$\eta_t = 1 - \frac{i_2}{i_1}.$$

Теоретический расход пара на 1 HP/час определяется по ф-ле:

$$B = \frac{632}{i_1 - i_2},$$

где: i_1 —теплосодержание пара в точке B, i_2 —конечное теплосодержание пара в точке C.

Определение η_t по диаграмме $i-s$ проводится сл. обр. По параметрам свежего пара наносят на диаграмму $i-s$ начальную точку, из к-рой проводят вертикаль (адиабату) до пересечения с изобарой конечного давления. Пересечение дает конечную точку процесса расширения пара. Ординаты начальной и конечной точек определяют i_1 и i_2 .

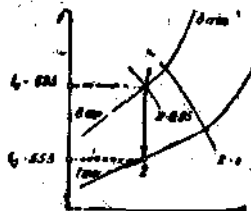


Черт. 46.

Пример. Определить термический кпд цикла Ренкина и расход пара на силу-час, если давление свежего пара $p_1 = 8 \text{ atm}$, степень сухости $x_1 = 0,95$, а давление выхлопа $p_2 = 1 \text{ atm}$. Теплосодержания i_1 и i_2 определяются по диаграмме $i-s$. Схема использования диаграммы дана на черт. 47.

$$\eta = 1 - \frac{i_1}{i_2} = 1 - \frac{555}{635} = 0,13;$$

$$B = \frac{632}{i_1 - i_2} = \frac{632}{635 - 555} = 7,9 \text{ кг,}$$



Черт. 47.

Ф-ла кпд цикла Ренкина позволяет сделать след. заключение:

- 1) кпд цикла Ренкина возрастает при увеличении давления свежего пара;
- 2) кпд увеличивается при применении перегретого пара;
- 3) кпд увеличивается при применении конденсации этого пара.

Из трех отмеченных мероприятий конденсация явного пара вызывает наибольшее увеличение кпд. Увеличение кпд при применении перегретых паров незначительно.

§ 32. Цикл Мейера.

В цикле Ренкина предполагается полное расширение пара до давления среды, в которую происходит выпуск пара. В цикле Мейера (черт. 48) расширение пара применяется неполное (что обычно в паровых машинах и имеется). Термический кпд цикла Мейера определяется по ф-ле:

$$\eta = \frac{i_1 - i_2}{i_1} + 10000 \frac{p_2 - p_1}{427 i_2} v_{g1}$$

Расход пара на силу-час:

$$B = \frac{632}{(1 - i_2) \frac{10000 (p_2 - p_1) v_{g1}}{427}}$$



Черт. 48.

§ 33. Трансформирование в паровой машине тепловой энергии в механическую.

Степень совершенства идеального цикла определяется термическим кпд:

$$\eta = \frac{i_1 - i_2}{i_1}$$

В действительной машине целый ряд обстоятельств отклоняет работу пара от теоретических условий, отмечаемых идеальным циклом. Отступления вызываются: 1) мгновенным открытием и закрытием паровых окон, что вызывает мятые пара; 2) наличием вредного пространства; 3) отступлением действительного расширения от адиабатического; 4) неполным расширением до давления холодильника; 5) предварением выпуска пара; 6) сжатием пара и т. д. Все отмеченное уменьшает работу пара. Отношение работы действительного цикла к работе пара теоретического цикла, описанное при одинаковых условиях, называется относительным индикаторным кпд. Относительный коэф-т показывает, какую часть теоретической возможной работы (максимальной) машина развивает в действительности. Относительный кпд обозначается через η_r и определяется по ф-ле:

$$\eta_r = \frac{AL_i}{i_1 - i_2}$$

Термический индикаторный кпд η_r отмечает степень совершенства преобразования тепла в работу в цилиндре машины. Индикаторный кпд определяется по ф-ле:

$$\eta_i = \eta_r \cdot \eta = \frac{AL_i}{i_1}$$

Механический кпд η_m отмечает степень совершенства механизма машины (в передаче механической энергии). Механический кпд определяется по ф-ле:

$$\eta_m = \frac{L_e}{L_i}$$

Полный эффективный кпд отмечает степень совершенства превращения тепла в работу в машине при учете всех потерь.

Эффективный кпд определяется по ф-ле:

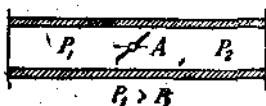
$$\eta_{эф.} = \eta_{тл} \eta_m = \eta_{тл} = \frac{AL_e}{I_1}$$

Из последней ф-лы имеем:

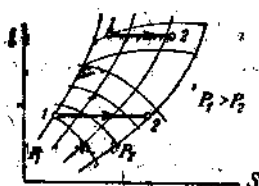
$$L_e = 427 \eta_{эф.} I_1$$

§ 34 Мятые пара.

Один из способов регулирования мощности паровой машины заключается в мятии свежего пара. Процесс мятия (дросселирования) пара, сопровождающийся падением давления пара, происходит при прохождении пара через суженное сечение. Так, напр., давление пара P_2 после заслонки A (черт. 49), вставленной в паропровод, будет зависеть от положения заслонки, уменьшаясь при ее приближении к вертикали. При мятии пара его теплосодержание не изменяется, т. е.: $i_1 = i_2 = \text{Const}$, где i_1 — теплосодержание пара до мятия при давлении P_1 , а i_2 — теплосодержание пара после мятия при давлении P_2 . Постоянство теплосодержания пара при мятии позволяет процесс мятия в диаграмме $i-s$ представить горизонталью (черт. 50). При исследовании процесса мятия пара



Черт. 49.



Черт. 50.



Черт. 51.

в системе координат, $i-s$ обнаруживается, что: 1) влажный пар при мятии подсушивается и в результате мятия может сделаться паром перегретым; 2) темп-ра перегретого пара при мятии уменьшается.

При регулировании паровой машины мятием пара происходит уменьшение термического кпд. Действительно: если давление свежего пара P_1 мятием уменьшено до P'_1 , то кпд цикла до мятия пара и после мятия при давлении выхлопа P_2 будут равны (черт. 51):

до мятия:

$$\eta_t = \frac{i_1 - i_2}{i_1} = \frac{ac}{i_1};$$

после мятия:

$$\eta'_t = \frac{i'_1 - i'_2}{i'_1} = \frac{bd}{i'_1}.$$

$ac > bd$, а следовательно:

$$\eta_t > \eta'_t.$$

§ 35. Истечение газов и паров.

При определении скорости истечения газов и паров и секундного расхода необходимо различать два случая в зависимости от величины отношения давлений, под влиянием к-рых происходит истечение. При увеличении разности давлений, а следовательно, при уменьшении величины отношения давлений среды, в к-рую происходит истечение, к давлению пара или газа скорости истечения и секундный расход увеличиваются, при нек-ром, вполне определенном, отношении давлений наступает истечение с максимальной скоростью, к-рая сохраняется и при дальнейшем увеличении разности давлений. Отношение давлений, при к-ром наступает максимальная скорость истечения, обозначается через β и определяется по ф-ле:

$$\beta = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}},$$

от чем:

для газов — $k = 1,41$ и при этом $\beta = 0,528$;

для пара — $k = 1,135$ » » » $\beta = 0,577$;

для перегретого пара — $k = 1,3$ » » » $\beta = 0,546$;

для влажного пара β зависит от степени сухости пара x , при этом $\beta = 0,535 + 0,1x$.

Табл. 28. Значения β для различных показателей k влажного пара.

k	β	k	β	k	β	k	β	k	β	k	β
1,135	0,577	1,125	0,580	1,115	0,582	1,105	0,584	1,095	0,586	1,085	0,588
1,130	0,578	1,120	0,581	1,110	0,583	1,100	0,585	1,090	0,587	1,080	0,589

Первый случай. При отношении давлений $\frac{P_2}{P_1} > \beta$, где P_1 —давление среды, в к-рую происходит истечение, P_2 —давление газа или пара, под влиянием к-рых происходит истечение, скорость истечения и секундный расход определяются по ф-лам:

Скорость (в м/сек):

$$W = \sqrt{2g \frac{k}{k-1} P_1 V_1 \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]} =$$

$$= \sqrt{2g \frac{k}{k-1} R T_1 \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]},$$

секундный расход (в кг/сек):

$$G = f \sqrt{2g \frac{k}{k-1} \cdot \frac{P_1}{V_1} \left[\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{k}{k-1}} - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \right]},$$

где: $g = 9,81$, P_1 и P_2 в кг/м², V_1 —начальный удельный объем, T_1 —начальная темп-ра, коэф-т $k = \frac{C_p}{C_v}$ имеет отмеченные выше значения, R —газовая постоянная, f —площадь выходного сечения в м².

В первом случае истечения, при к-ром $\frac{P_2}{P_1}$ больше β (примерно 0,5), газ

или пар успевают при истечении полностью расшириться, т. е. потерять свое давление с P_1 до P_2 . След., в этом случае истечения рабочее тело вылетает в среду, имея давление среды. Обозначая давление газа или пара через P_2' , в первом случае истечения имеем:

$$P_2' = P_2.$$

Темп-ра газа после истечения определяется по ф-ле:

$$T_2' = T_1 \left(\frac{P_2'}{P_1} \right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Скорость истечения м. б. определена также по теплосодержанию. В первом случае истечения при $\frac{P_2}{P_1} > \beta$ скорость истечения по теплосодержанию определяется по ф-ле:

$$W = 91,53 \sqrt{i_1 - i_2},$$

где: i_1 — теплосодержание пара до истечения при давлении P_1 , i_2 — теплосодержание пара после истечения при давлении P_2 . Схема использования диаграммы $i-s$ при определении скорости истечения по теплосодержанию дана на черт. 52.

Второй случай истечения. Ко второму случаю относятся все случаи истечения, при к-рых имеется большая разность давлений P_1 и P_2 , что наблюдается при

$\frac{P_2}{P_1} < \beta$. При этом случае истечения полного расширения тела не происходит и давление его не уменьшается от P_1 до P_2 . Давление тела, с к-рым оно врывается в этом случае в среду, определяется по ф-ле:

$$P_2' = \beta P_1.$$

Темп-ра газа после истечения определяется по ф-ле:

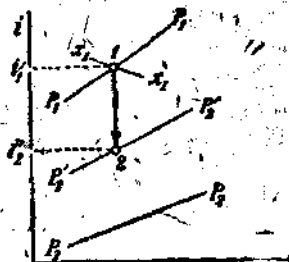
$$T_2' = T_1 \left(\frac{P_2'}{P_1} \right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Скорость истечения (в м/сек):

$$W = \sqrt{2g \frac{k}{k+1} P_1 v_1} = \sqrt{2g \frac{k}{k+1} R T_1}.$$

Секундный расход (в кг/сек):

$$G = f \sqrt{2g \frac{k}{k+1} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k+1}} \frac{P_1}{v_1}}.$$



Черт. 53.

В последнем случае скорость истечения м. б. определена также по теплосодержанию по ф-ле:

$$W = 91,53 \sqrt{i_1 - i_2'},$$

в к-рой i_1 — теплосодержание пара до вытекания, а i_2' — теплосодержание пара после вытекания при давлении $P_2' = \beta P_1$, с к-рым пар вытекает в среду.

Схема использования диаграммы $i-s$ при определении скорости истечения дана на фиг. 53. Т. к. коэф-т k для каждого тела имеет вполне определенное значение, то во всех случаях истечения, при к-рых $\frac{P_2}{P_1} < \beta$, скорость истечения м. б. определена по ф-лам:

перегретый пар:
$$W = 3,33 \sqrt{P_1 v_1} = 3,33 \sqrt{RT_1};$$

сухой пар:
$$W = 3,33 \sqrt{P_1 v_1};$$

сухой пар:
$$W = 3,23 \sqrt{P_1 v_1}.$$

Во всех ф-лах давление P_1 — в кг/м², а удельный объем — в м³/кг.

§ 36. Распиряющееся сопло Лавалья.

Как отмечалось выше, при большой разности давлений, когда $\frac{P_2}{P_1} > \beta$, давление пара при истечении из отверстий не м. б. меньше критического, т. е. примерно половины начального P_1 . В последнем случае скорость является максимальной возможной скоростью истечения, определяемой по ф-лам:

$$W = \sqrt{2g \frac{k}{k+1} P_1 v_1},$$

но при этом в кинетическую энергию струи переводится только часть энергии, к-рой располагает пар, т. к. полного расширения пара от P_1 до P_2 не наблюдается: расширение пара, как указывалось, происходит только от давления P_1 до давления $P_2 = P_1 \beta$.

Для использования полной энергии пара, к-рое будет при полном расширении пара, от P_1 до P_2 , необходимо создание дополнительного расширения пара за критическим давлением; последнее осуществляется в слабо расширяющейся насадке Лавалья (фиг. 54). В наименьшем сечении сопла Лавалья наблюдается критическое давление $P_2 = P_1 \beta$, а также скорость и секундный расход, определяемые по ф-лам:

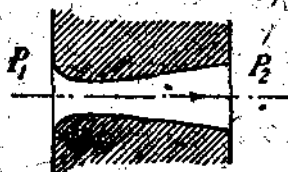
$$W = \sqrt{2g \frac{k}{k+1} P_1 v_1};$$

$$G = \sqrt{2g \frac{k}{k+1} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k+1}} \frac{P_1}{v_1}}.$$

В сечениях, расположенных за наименьшим сечением, секундный расход будет тот же самый, но скорость будет зависеть от давления пара в этих сечениях. При определении скорости истечения через сопло Лавалья можно пользоваться ф-лой:

$$W = 91,53 \sqrt{i_1 - i_2},$$

где: i_1 — теплосодержание пара до истечения, i_2 — теплосодержание пара при истечении, соответствующее давлению среды, в к-рую происходит истечение.



Черт. 54.

§ 37. Потери давления пара в паропроводах.

При прохождении пара через паропроводы давление его за счет существующих в паропроводе потерь уменьшается. Падение давления пара в паропроводе, зависящее от целого ряда факторов, определяется по формуле (в кг/см²):

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \beta \frac{l}{d} \gamma w^2.$$

Коэф-т β для обычных паропроводов равняется:

$$\beta = \frac{10,5}{10^6},$$

где: l —длина трубопровода (в м), d —диаметр трубопровода (в м); γ —уд. в. пара (в кг/м³); w —скорость пара (в м/сек).

ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ.

§ 1. Условные обозначения, единицы измерений.

Величина	Сим-вол	Практическая единица измерения	Знак	Величина	Сим-вол	Практическая единица измерения	Знак
Электродвижущая сила (или напряжение) . . .	E	Вольт	V	Магнитная индукция	B	Гаусс	
Сила тока	I	Ампер	A	Напряжение магнитного поля	H	Гаусс	
Эл. сопротивление	R	Ом	Ω	Магнитное сопротивление	S	Эрстед	
Количество электричества	Q	Кулон	C	Магнитодвижущая сила		Ампер-виток	AW
Удельное сопротивление	ρ	Ом	Ω	Магнитная проницаемость	μ		
Емкость	C	Фарада	F	Электрическая мощность	W	Ватт	W
Коэф-т самоиндукции	L	Генри	H	Электрическая мощность	A	Вольт-ампер	VA
Коэф-т взаимной индукции	M	Генри	H	Электрическая энергия	A	Джоуль	J
Магнитный поток	Φ	Максвелл					

§ 2. Основные законы постоянного тока.

1. Закон Ома. Сила тока в замкнутой цепи прямо пропорциональна разности потенциалов (напряжению) на концах проводника E и обратно пропорциональна его сопротивлению R :

$$I = \frac{E}{R}.$$

2. Первый закон Кирхгофа. В разветвленной эл. цепи сумма токов, приходящих к точке разветвления, равна сумме токов, уходящих от точки разветвления:

$$\sum I = \sum i,$$

где I —подходящие к точке разветвления токи, i —уходящие от точки разветвления токи.

3. Второй закон Кирхгофа. Во всяком замкнутом контуре алгебраическая сумма произведений из сил токов на сопротивления равна алгебраической сумме всех эдс:

$$\sum ir = \sum e.$$

При составлении ур-ния цепи следует строго следить за тем, чтобы токи и эдс, направленные по направлению обхода, считать положительными, а токи и эдс, направленные против обхода,—отрицательными.

4. Закон Джоуля-Ленца. Количество тепла Q , выделяемое эл. током в проводнике, пропорционально квадрату силы тока I , сопротивлению проводника R и времени t , в течение которого проходит по проводнику ток:

$$Q = 0,24 I^2 R t = 0,24 \frac{E^2}{R} t = 0,24 E I t,$$

где: Q —количество тепла (в cal), I —сила тока (в A), R —сопротивление (в Ω), t —время (в сек).

5. Мощность постоянного эл. тока, W , поглощаемая в цепи, равна произведению V на A и выражается в W :

$$W = EI = I^2 R.$$

6. Работа эл. тока A равна произведению эл. мощности на время:

$$A = Wt = EIt = I^2 R t.$$

Практической единицей работы эл. тока является джоуль = ватт-секунде.

§ 3. Электрическое сопротивление и законы соединения сопротивлений.

1. Величина эл. сопротивления R зависит от длины проводника l , сечения проводника S и качества материала, характеризуемого коэф-том ρ :

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S},$$

Табл. 1. Уд. сопротивления, уд. проводимости, температурные коэф-ты и уд. веса для некоторых металлов.

Материал	Уд. сопр.	Уд. провод.	Уд. вес	Температурн. коэф-т
Алюминий вальцовый	0,02874	34,8	2,7	0,0030
» прокатный	0,0305	32,8	2,7	0,0037
Висмут прессованный	1,1	0,9	9,8	0,0035
Железная проволока	0,14	7,15	7,8	0,0047
Стальная проволока	0,172	5,8	7,9	0,0052
Железная телеграфная проволока	0,135	7,4	7,65	—
Графит и ретортный уголь	13—100	0,08—0,01	2,3—1,9	0,0008—0,0002
Железо 99%	0,15	6,7	—	—
» 99,5%	0,125	8	—	—
» 99,6%	0,10	10	—	—
Медь чистая	0,01667	60	8,9	0,004
» мягкая	0,0172	58,1	8,9	0,004
» твердая	0,0175	57	8,9	0,004
Золото	0,022	45	19,32	0,0035
Кадмий	0,068	14,7	8,6	0,0038
Никель	0,11	9	8,9	0,004
Олово	0,11	9	7,3	0,0045
Платина	0,094	10,7	21,5	0,0024
Ртуть	0,9532	1,049	13,55	0,00067
Серебро мягкое	0,0158	63,5	10,35	0,0036
» твердое	0,0175	57	10,55	0,0036
Свинцов прессованный	0,26	5	11,37	0,0037
Цинк прессованный	0,049	17	7,2	0,0039
Тантал	0,165	6,06	16,8	0,003
Вольфрам	0,05	20	18	0,006

где ρ —уд. сопротивление проводника, l —длина в м , S —сечение в мм^2 .

2. Уд. сопротивление проводника есть сопротивление проводника из данного металла длиной в 1 м и сечением в 1 мм^2 .

3. Уд. проводимость представляет величину, обратную уд. сопротивлению:

$$K = \frac{1}{\rho}.$$

Зависимость сопротивления проводника от температуры дается ф-лой:

$$R_t = R_0 (1 + \alpha t),$$

где α —температурный коэф-т, R_0 —сопротивление проводника при температуре 0°C .

Табл. 2. Характеристика сплавов, применяемых для изготовления реостатов и нагревательных приборов.

Сплав	Состав сплава (в %)	Уд. со- прот.	Темп-ный коэф-т	Макс. раб. тем- ра в °С
Константан	Медь 60, никель 40	0,480	0,0003	500
Адванс	Медь 54, никель 44, железо 0,45	0,488	0,0000018	500
Нейзильбер	Медь 60,16, никель 14,03, цинк 25,37	0,300	0,00036	200
Никелин	Медь 62, никель 18, цинк 20	0,420	0,0003	200
Реотан	Медь 53,4, никель 25,3, цинк 16,9, железо 4,5	0,470	0,00041	200
Кремнистый чугун	—	0,520	0,001	400
Хромалой IV	Никель 80, хром 20	1	0,00019	1100
Нихром	Никель 62, хром 12, железо и др. 26	1,1	0,00017	1000
Платино-иридиевый сплав	—	0,310	0,00082	1500
Манганин	—	0,43	—	200
Русский нихром 3 до «Электросталь»	Медь 84, никель 12, марганец 4	0,846	—	—
Сплав № 193	Хром + никель + железо Железо 67, никель 30, хром 3	1,1	—	—

4. При последовательном соединении сопротивлений общее сопротивление R цепи равно сумме отдельных сопротивлений (черт. 1):

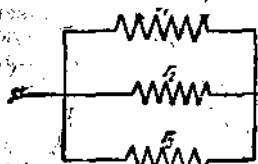
$$R = r_1 + r_2 + r_3.$$



Черт. 1.

5. При параллельном соединении сопротивлений общая проводимость (обратная величина сопротивлению) равна сумме отдельных проводимостей (черт. 2):

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}.$$



Черт. 2.



Черт. 3

6. При смешанном соединении сопротивлений общее сопротивление подсчитывается так, как при последовательном и параллельном (черт. 3):

$$R = r_1 + \frac{1}{\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}}.$$

§ 4. Материалы, чаще всего употребляемые в качестве проводников эл. тока.

Табл. 3. Характеристика различных сортов меди.

Характеристика	Мягкая	Полутвердая	Твердая
Уд. вес	8,9	8,95	8,96
Уд. сопротивление	0,0172	0,0173	0,0174
Временное сопротивление при растяжении (в кг/мм ²)	24—26	30—38	40—45
Предел упругости (в кг/мм ²)	8—12	21—27	28—35
Модуль упругости (в кг/см ²)	1 · 10 ⁸	1,25 · 10 ⁸	1,32 · 10 ⁸
Коэф-т растяжения	1 · 10 ⁻⁴	0,8 · 10 ⁻⁴	0,76 · 10 ⁻⁴
Допустимая нагрузка (в кг/мм ²)	5	10—13	14—18

Теплопроводность м. в $\text{cal}/\text{cm}/\text{cm}^2/1^\circ\text{C}$ принимают: при 15°C — 0,918; при 100°C — 0,908.

Табл. 4. Значения темп-ных коэф-тов меди для различных темп-р.

t	0	5	10	15	20	25	30	35	40
α	0,00427	0,00416	0,00409	0,00401	0,00393	0,00385	0,00378	0,00371	0,00364

1. Бронза—применяется в качестве проводника эл. тока там, где проводу надо придать большую механическую прочность. Чаще всего бронза применяется для изготовления контактных и телефонных проводов.

Бронза в основном состоит из сплава меди и олова. Др. примеси, как, напр., фосфор, кремний, кадмий, сильно увеличивают механическую прочность бронзы, но одновременно с этим увеличивают уд. сопротивление.

Табл. 5. Данные для различных сортов бронзы.

Название сорта бронзы	Состав бронзы	Врем. сопротив. на растяж. (в кг/мм ²)	Уд. сопротивление
Фосфористая	Медь + олово + фосфор	40—90	0,018—0,22
Кремнистая	Медь + олово + кремний	60—70	0,034—0,040
Кадмиевая	Медь + олово + кадмий	60—60	0,018—0,020

Твердость бронзы возрастает с увеличением содержания олова до 27%; дальнейшее увеличение содержания олова делает б. ломкой и мало-пригодной для изготовления проводов.

Бронза с содержанием олова не более 15% обладает большой прочностью и тягучестью и в нагретом состоянии—хорошей ковкостью.

2. Латунь—представляет в основном сплав меди и цинка, с содержанием цинка от 30 до 46%.

Латунь с содержанием меди до 85% носит название томпака. Латунь тверже меди, хорошо поддается обработке и идет на изготовление всевозможной эл.-техн. аппаратуры и установочного материала. Сплав меди с цинком, где цинк достигает 50—80%, носит название белого сплава и применяется для всевозможных отливок. За отсутствием данных по латунь,

изготавливаемой в СССР, приводим данные по латуни, изготавливаемой немецкой фирмой АЕО.

3. Алюминий в последнее время начинают очень часто применять для изготовления воздушных проводов для передачи электрической энергии.

Алюминий обладает очень малым уд. весом, — примерно в 3,3 раза меньшим, чем медь, а уд. сопротивление алюминия в 1,7 раза больше, чем уд. сопротивление меди.

Чистый алюминий в присутствии воздуха очень быстро покрывается слоем окиси алюминия (Al_2O_3), которая является непроводником эл. тока. Поэтому иногда алюминевую проволоку пускают на изготовление всевозможных катушек без изоляционного материала или какой-либо др. изоляции, так как окись алюминия является вполне достаточной изоляцией.

Обладая по отношению к меди целым рядом преимуществ, алюминий имеет и ряд недостатков, к-рые заключаются в след.:

- а) мягкость и малая механическая прочность на разрыв;
- б) невозможность спайки обыкновенными припоями и необходимость применения специальных соединительных клемм.

Табл. 6. Данные для латуни, изготавливаемой немецкой фирмой АЕО.

№ по порядку	Название латуни	Состав латуни (в %)	Уд. вес	Врем. сопротив. на раст. (в кг/мм ²)	Уд. сопротивление
1	Красный томпак . . .	Медь 91, цинк 9			
	а) мягкий		8,8	25	0,42
	б) полутвердый		8,8	30—35	0,42
	в) твердый		8,8	40	0,42
2	Листовая латунь . . .	Медь 64, цинк 36			
	а) мягкая		8,6	30	0,70
	б) полутвердая		8,6	40	0,70
	в) твердая		8,6	45	0,70
	г) особо твердая		8,6	60—70	0,70
3	Круглая латунь	Медь 58, цинк 40, свинец 2			
	а) мягкая		8,5	40	0,60
	б) полутвердая		8,5	50	0,60

Табл. 7. Электрические, тепловые и механические свойства алюминия.

№ по порядку	Название величины	Значение величины	№ по порядку	Название величины	Значение величины
1	Т-ра плавления	660° С	7	Темперн.-ый. коэф-т	0,0089
2	Уд. вес алюминия	2,7	8	Временное сопротивление при растяжении в кг/мм ²	10—20
3	Уд. сопротивление	0,0305	9	Предел упругости (в кг/мм ²)	7—10
4	Коэф-т линейного расширения в пределах от 0° до 100° С	0,0000234	10	Модуль упругости в кг/см ²	715 000
5	Теплоемкость в пределах от 0° до 100° С	0,2089—0,2226	11	Коэф-т растяжения	23—30
6	Теплопроводность при 18° С на 1° С на 1 см в сек/кал	0,504			

Для изготовления проводов надо пользоваться только материалом, содержащим алюминия не ниже 98%; кремния д. б. не более 0,3%, железа — не более 0,2%.

Алюминиевые провода делаются только многопроволочными, в виде кабелей, свитых из отдельных проволок, т. к. невозможно получить однородный состав алюминия при больших сечениях. Для увеличения механической прочности алюминиевых проводов внутрь провода вводят прочную стальную жилу, к-рая и является несущей всю тяжесть провода, а окружающие ее алюминиевые жилы являются проводником эл. тока.

Многожильные алюминиевые провода со стальной жилой внутри носят название стале-алюминиевых проводов.

Табл. 8. Сравнение медных, алюминиевых и стале-алюминиевых проводов (считая эквивалентные величины для меди за единицу).

Наименование величины	Медь	Алюминий	Стале-алюминий	
			7 проводов	37 проводов
Отношение сечений проводников при одинаковой эл. проводимости	1	1,66	1,943	2,05
Отношение диам. проводников при одинаковой эл. проводимости	1	1,29	1,395	1,43
Отношение весов при одинаковой эл. проводимости	1	0,5	0,73	0,84
Отношение усилий на разрыв при одинаковой эл. проводимости	1	0,78	1,34	1,56

Из сплавов алюминия в электротехнике находит себе применение алюминиевая бронза, состоящая из 5—10% чистого алюминия и 95—90% меди.

4. Железо—мало применяется в качестве проводов для передачи электрической энергии в большом количестве. Чаще всего железные провода применяются для телеграфных и телефонных линий. Железные провода, обладая очень большой механической прочностью, имеют тот недостаток, что под действием воздуха сильно окисляются (ржавеют), причем ржавление идет очень глубоко, отчего механическая прочность проводов сильно падает. Для предохранения железных проводов от ржавчины их приходится сильно оцинковывать.

Табл. 9. Электрические, тепловые и механические свойства цинковых и стальных проводов.

Наименование величины	Провода из мягк. жел.	Стальн. провода	Провода из спец. стали
Уд. вес	7,8	7,9	7,9
Уд. сопротивление	0,1257	0,172	0,204
Коэф-т линейного расширения	0,00001	0,000012	0,000011
Температурный коэф-т	0,0045	0,0052	0,0052
1° пл.	1350°	1300°	1400°
Средняя теплоемкость	0,117	0,12	0,12
Врем. сопротивление при растяжении (в кг/мм ²)	40	60	130
Предел упруг (в кг/мм ²)	14—25	30	—
Модуль упругости	1 900 000	2 100 000	2 150 000

Провода делаются как железные, так и стальные и для некоторых случаев применяются особые сорта специальной стали.

5. Свинец—для изготовления проводов не применяется, а находит себе применение гл. обр. в аккумуляторах. Кроме того он применяется для защиты кабелей от проникновения влаги, покрывая кабель в виде сплошной оболочки. Помимо того свинец применяется для устройства предохранителей. Уд. сопротивление свинца 0,2, т. е. почти в 11 раз больше уд. сопротивления меди.

Свинец очень мягок и имеет очень малое сопротивление на разрыв; $\rho_{\text{пл. свинца}} 327^\circ \text{C}$; уд. вес—11,37.

6. Цинк—в чистом виде для изготовления проводов не применяется, а идет гл. обр. в виде сплава с другими металлами для изготовления проводов, обладающих большим уд. сопротивлением (нейзильбер, никелин, реотан и др.). Кроме того ц. применяется в качестве отрицательного электрода во многих гальванических элементах. В чистом виде ц. не разъедается серной к-той, но т. к. в нем всегда имеются примеси железа или свинца, то при опускании в раствор серной к-ты получаются местные элементы, токи к-рых и разъедают ц. Поэтому для изготовления гальванических элементов цинковые электроды покрывают слоем ртутной амальгамы или же к цинку делают 4%-ную примесь ртути при отливке электродов. Уд. вес ц. 7,2, уд. сопротивление 0,059; $\rho_{\text{пл.}} 419^\circ \text{C}$.

7. Вольфрам—применяется для изготовления волосков ламп накаливания, т. к. имеет очень высокую $\rho_{\text{пл.}}$. Получение вольфрамовых нитей производится сложным технологическим процессом непосредственно из вольфрамовых руд. Уд. вес в.—ок. 18, уд. сопротивление 0,05; $\rho_{\text{пл.}} 3000-3100^\circ \text{C}$.

§ 5. Материалы, чаще всего употребляемые в качестве изоляторов эл. тока.

Каждый изолирующий материал характеризуется след. свойствами.

1. Объемное уд. сопротивление—представляет сопротивление 1 см³ данного материала и выражается так:

$$\rho_v = \frac{RS}{d},$$

где: ρ_v —объемное уд. сопротивление, R —сопротивление 1 см², S —сечение (в см²), d —толщина (в см). Объемное уд. сопротивление зависит от темп-ры, влажности и гигроскопичности материала.

Табл. 10. Свойства наиболее ходовых изолирующих материалов при 15° С.

2. Поверхностное уд. сопротивление—представляет сопротивление поверхности данного материала, к-рое получается между двумя электродами, помещенными на поверхности, длиной в 1 см на расстоянии 1 см. Значение поверхностного уд. сопротивления очень сильно зависит от влажности и гигроскопичности материала.

3. Эл. прочность изолирующего материала—представляет отношение пробивного напряжения изолятора к его толщине и выражается в В или кВ на 1 мм. Эл. прочность зависит от темп-ры, давления, влажности и толщины изолятора.

Наименование материала	Объемное уд. сопротивление	Поверхн. уд. сопротивл. при влаж. в 30%	Пробивн. напряжен. в кВ/мм	Диэлектр. постоянная
Бумага сухая	10 ¹¹	—	6—9	2,3—3,5
в пропитанная	10 ¹²	—	10—25	3,4—3,7
Дубовое дерево	10 ¹²	10 ¹²	4—7	4,5—5
Масло трансформат.	10 ¹²	—	5—15	2,15—2,5
Миканит	10 ¹²	10 ¹²	15—20	4,5—6
Мрамор	10 ⁹	10 ¹¹	3,5—5,5	8,3
Прессшпан	10 ¹¹	—	9—14	2,5—4
Сера	10 ¹⁷	10 ¹²	—	2,4—4
Слюда	10 ¹⁴	10 ¹²	80—200	4—7,5
Стекло	10 ¹¹	10 ¹²	10—40	5,5—10
Фибра	10 ⁹	3,10 ¹²	5—11	2,5—8,3
Фарфор	10 ¹²	10 ¹²	6—15	4,5—6,5
Шифер	10 ⁹	2,10 ⁹	1,5—3	6—7,5
Эбонит	10 ⁹	6,10 ¹²	8—10	2—3,5

4. Диэлектрическая постоянная—представляет отношение емкости конденсатора, диэлектриком к-рого является данный изолирующий материал, к емкости того же конденсатора, когда диэлектриком является воздух, диэлектрическая постоянная к-рого равна единице.

5. Бумага—применяется в электротехнике двух видов: а) хлопчатая и б) приготовляемая из древесной массы.

Бумажная изоляция применяется гл. обр. для изоляции проводов и кабелей, а также для изготовления конденсаторов. Являясь хорошим изолятором, особенно в сухом виде, бумага имеет тот недостаток, что не выдерживает темп-ры выше 50°C .

Для получения более стойкой в отношении темп-ры бумаги ее пропитывают разлчными изолирующими составами. Пропитанная бумага идет для изоляции кабелей и в таком виде она допускает более высокую темп-ру, нежели резина.

6. Дерево—в качестве изолирующего материала благодаря большой гигроскопичности и возгораемости не везде м. б. применяемо. Однако, несмотря на это, дерево нашло очень широкое применение в качестве изолирующего материала в машиностроении и аппаратостроении. В этих случаях применяют только твердые сорта дерева, как-то: дуб, клен, орех, красное дерево и др., при чем их пропитывают различными изолирующими составами.

Эл. свойства дерева являются далеко не постоянными и зависят от целого ряда причин, а потому дать какие-либо определенные данные не представляется возможным.

7. Трансформаторное масло минеральное—представляет собой известную переработку нефти. Для русских условий установлены два сорта масла, «А» и «В». Сорт «А» применяется для трансформаторов, в к-рых производится контроль темп-ры, а сорт «В»—для трансформаторов без контроля темп-ры и для масляных выключателей.

Русские ту на поставку трансформаторных масел установлены в след. виде.

Табл. 11. Технические условия на поставку трансформаторных масел.

Наименование величин	Значение величин	Наименование величин	Значение величин
Вязкость масла в градусах Энглера:		Пробивное напряжение (в V) между двумя дисками diam. 25 мм при расстоянии 2,5 мм и 15°C .	22 000
для сорта «А» не более	1,8	Содержание примесей, к-т, щелочей и серы	0
для сорта «В» не более	2,3	Содержание золы (в %)	0,008
Темп-ра вспышки в $^{\circ}\text{C}$:		Кислотное число не более	0,2
для сорта «А» не ниже	140	Содержание осадков (в % по весу) не выше	0,2
для сорта «В» не ниже	165	Гистывания не выше в $^{\circ}\text{C}$	— 18

8. Слюда—представляет листовый кристаллический минерал, к-рый является одним из лучших изолирующих материалов, применяемых в электротехнике.

Слюда бывает различных видов и обладает различными свойствами. Русская с., добываемая в Сибирь, около Иркутска, имеет название мусковита и применяется для изоляции коллекторных пластин, устройства конденсаторов, нагревательных приборов и др. аппаратов. Рабочая темп-ра с. может быть допущена до 600°C , а для нек-рых сортов слюды (флогопит) до 1000°C . Слюда совершенно негигроскопична и плавится при $1200\text{—}1300^{\circ}\text{C}$.

9. Миканит—является фабрикатом слюды и представляет собой листочки слюды, склеенные между собой шеллаком. В зависимости от качества шеллака м. разделяют на белый и желтый. Миканит более дешев, нежели слюда, но и по свойствам хуже слюды. Миканит употребляется там же, где и слюда, но только для изготовления менее ответственных устройств.

10. Мрамор—представляет горный минерал, состоящий из кристаллов кальцита. В качестве изолирующего материала мрамор можно применять только в сухих помещениях и для низкого напряжения, т. к. он обладает очень большой гигроскопичностью. В сырых помещениях, впитывая в себя влагу, теряет изолирующие свойства. Для уменьшения гигроскопичности мрамор шлифуется, а если применяется не шлифованный мрамор, то рекомендуется покрывать его масляным лаком, к-рый предохраняет от впитывания влаги. При нагревании свыше 100°C мрамор становится хрупким. М. широко применяется для изготовления распределительных щитов станций, групповых щитков, реостатов и др. устройств низкого напряжения.

11. Шифер—представляет горную породу слюистого строения, серого цвета. Шифер весьма хрупок, а потому может применяться только там, где не подвергается механическим действиям ударов. Шифер очень гигроскопичен, а потому может применяться только в сухих местах и только при низком напряжении. Шифер применяется для изготовления распределительных щитов станций, групповых щитков, оснований для рубильников, реостатов и др. сравнительно неответственных устройств.

12. Фарфор—представляет смесь полевого шпата, кварца и каолина, обожженную при $1350\text{--}1450^{\circ}\text{C}$; т° пл. отдельных входящих в смесь составов различны. При 1350° полевой шпат плавится и скрепляет собой два других состава. В зависимости от состава и методов обработки, фарфор обладает различными эл. свойствами. Поэтому различают фарфор низковольтный и высоковольтный. Фарфор идет гл. обр. для изготовления изоляторов и роликов, к к-рым подвешиваются провода, а также для изготовления всевозможных втулок, воронок для изоляции проводов, пропускаемых через стены. Для увеличения поверхностного сопротивления и уменьшения гигроскопичности фарфоровые изоляторы снаружи покрывают глазурью.

Табл. 12. Электрические и механические свойства фарфора.

Наименование величин	Значение величин	Наименование величин	Значение величин
Уд. объемн. сопротивлен.	$10^{10}\text{--}10^{11}$	Временное сопротивление изгибу (в кг/см ²)	400—650
Поверхн. уд. сопротив. при влажности в 60%	$10^{10}\text{--}10^{11}$	Времен. сопротивление при растяжении (в кг/см ²)	180—250
Электрическая прочность (в В/мм)	25 000	Коефф. линейного расширения на 1°C	$4,10^{-4}\text{--}6,10^{-4}$
Диэлектрич. постоянная	4,5—6,5	Гигроскопичность	Исчезающе мала
Времен. сопротивление при сжатии (в кг/см ²)	1 000—4 000		

13. Стекло—представляет смесь кварцевого песка с целым рядом других примесей. Стекло является хорошим изолятором и применяется в эл. технике для изготовления баллонов ламп накаливания, ртутных выпрямителей небольшой мощности, роликов и изоляторов. Недостатком стекла являются чрезвычайная хрупкость и низкое поверхностное сопротивление во влажном воздухе.

Табл. 13. Электрические и механические свойства стекла.

Наименование величин	Значение величин	Наименование величин	Значение величин
Уд. объемн. сопротивление	10^{11} — 10^{12}	Времен. сопротивление при сжатии (в кг/см ²)	6 000—13 000
Уд. поверхностное сопротивление	10^{11}	Временное сопротивление при растяжении (в кг/см ²)	300—600
Электрическая прочность (в В/мм)	10 000—50 000	Кэф-т линейного расширения	$8,8 \cdot 10^{-6}$
Диэлектрич. постоянная	5,5—10		

14. **Прессшпан**—представляет особого вида картон, пропитанный пыльным маслом. Существенным отличием п. от обыкновенного картона является то, что обработка п. происходит под большим давлением, отчего он имеет более твердое строение и гляцеватую поверхность. П. впитывает в себя влагу, отчего изолирующие свойства его сильно снижаются во влажных помещениях. П. применяется гл. обр. в электромашиностроении и аппаратостроении.

15. **Фибра**—представляет собой бумажный картон, обработанный или серной к-той, или хлористым цинком под большим давлением. Фибра, как и прессшпан, очень гигроскопична, а потому может применяться в качестве изолирующего материала только в сухих помещениях. Достоинством фибры является то, что она легко поддается обработке как от руки, так и на станках. При нагревании фибра становится ломкой. Фибра применяется гл. обр. для изготовления клиньев, укрепляющих обмотки в машинах, всевозможных втулок, ручек и пр.

16. **Каучук**—добывается из сока тропических растений, растущих в Америке, Индии и Африке. В последнее время в СССР найден целый ряд каучуконосных растений, как-то: хондрилла, гваюла и др., к-рые содержат очень высокий процент каучука. Чистый каучук при нагревании размягчается, а при низких темп-рах становится хрупким. Для придания каучуку большей прочности его химическим способом соединяют с серой—вулканизируют. Вулканизированный каучук носит название резины. В зависимости от примесей резина бывает различных цветов. В мягкой резине содержание серы бывает не выше 4%. Резина обладает очень высокими изолирующими свойствами и идет гл. обр. для изоляции проводов, кабелей, на изготовление трубок, перчаток и пр.

17. **Эбонит**—представляет собой твердый каучук и получается путем добавления к каучуку большого количества серы: примесь серы в э. доходит до 30—40%. Обладая хорошими изолирующими свойствами и негигроскопичностью, э. имеет тот недостаток, что не выдерживает высоких темп-р (свыше 50° С). Эбонит применяется гл. обр. для изготовления изолирующих трубок.

§ 6. Источники электрической энергии.

1. **Термоэлектричество.** Термоэлемент представляет два сваренных или спаянных разнородных металла, к-рые называются термопарой. При разности темп-р металлов между ними возникает эдс, носящая название термоэлектродвижущей силы. Величина термоэлектродвижущей силы зависит от свойств металлов, от разности темп-р металлов и не зависит от длины спаиваемых проводников.

Термоэлектричество имеет большое применение при измерении высоких темп-р.

2. Контактное электричество.

Контактная эдс представляет электродвижущую силу, к-рая возникает при соприкосновении двух разнородных металлов. Эдс контакта характеризуется рядом Вольты сл. порядка: + Al, Zn, Sn, Cd, Pb, Sb, Bi, нейзильбер, латунь, Hg, Fe, сталь, Cu, Ag, Au, уголь, Uг, Te, Pt, P1. Всякое тело этого ряда электризуется положительно, если соприкасается с телом, стоящим в ряду ниже, и электризуется отрицательно, если соприкасается с телом, стоящим в ряду выше.

Табл. 14. Значения термоэлектродвижущей силы для различных металлов при разности темп-р 100° С.

Наименование металлов	Эдс (в В) при разн. темп-р 100° С
Медь—константан	0,0041
Висмут—сурьма	0,011
Медь—железо	0,001
Серебро—константан	0,0037
Нихром—константан	0,0056
Платина—платина-родий	0,001

Табл. 15. Значения контактных эдс для некоторых металлов (по Томсону) при соприкосновении с углем.

Наименование металла	Zn	Pb	Sn	Fe	Cu
Значение эдс (в В)	0,210	0,069	0,313	0,146	0,238

3. Гальванические элементы. Гальванические элементы представляют источники тока, в к-рых химическая энергия преобразуется в энергию электрическую.

1) Эдс гальванического элемента зависит от качества электродов и электролита.

2) Внутреннее сопротивление гальванических элементов прямо пропорционально расстоянию между электродами и обратно пропорционально их поверхности. Помимо того оно зависит от качества, концентрации и темп-ры электролита. В среднем можно считать, что понижение темп-ры на 1° С вызывает увеличение внутреннего сопротивления на 2,5%.

3) Поляризацией элементов называется появление на электродах газов, к-рые, образуя между электродами и электролитом газовую пленку, тем самым создают обратную эдс, понижающую напряжение на зажимах элементов.

Для правильной работы элементов образующиеся газы уничтожают химическим действием, вводя в элемент составы, поглощающие выделяемые газы. Эти составы носят название деполяризаторов.

4) В зависимости от выполнения деполяризаторов г. э. разделяются на три типа: а) элементы без деполяризации; б) элементы с совершенной деполяризацией; в) элементы с несовершенной деполяризацией.

В зависимости от способа содержания жидкости г. э. различаются трех типов: а) сухие элементы; б) сухо-наливные элементы; в) мокрые элементы.

5) Сухими элементами называются такие гальванические элементы, в к-рых электролитическая жидкость превращена в студенистую массу путем добавления в электролит древесных опилок, асбеста, гипса, желатина, пищевинной муки и др. веществ. В качестве возбудительной массы могут применяться различные составы, как-то:

а) разведенная серная или соляная к-ты, сгущенные гипсом или бумажной массой;

б) раствор сернистого калия, сгущенный древесными опилками;

в) смесь 10 весовых частей глауберовой соли или нашатыря с 30 весовыми частями воды, загущенных гипсом или опилками;

г) нашатырь с хлористым цинком, к-рый чаще всего и применяется.

Табл. 16. Сведения о гальванических элементах различных систем с указанием их характерных данных.

Наименование элемента	Составные части: положительный электрод—электролит—отрицательный электрод	ЭДС (в В)	Внутр. сопротив. (в Ω)	Химические реакции и примечания
1. Элементы без деполаризации.				
Даниэля	Медь в растворе медного купороса, налитого в пористый горшок, цинк в растворе цинкового купороса или английской горькой соли	1,1	0,7—1,2	$Zn + CuSO_4 = ZnSO_4 + Cu$
Мейллингера	Медь в растворе медного купороса в нижней части сосуда, цинк в растворе цинкового купороса в верхней части сосуда .	1,1	6—8	$Zn + CuSO_4 = ZnSO_4 + Cu$
Крюгера	Кристаллы медного купороса на свинцовом диске на дне элемента, цинк в растворе цинкового купороса	1	5	$Zn + CuSO_4 = ZnSO_4 + Cu$
2. Элементы с совершенной деполаризацией.				
Грова	Платина в крепкой азотной к-те, цинк в растворе серной к-ты	1,7—2	0,15	$Zn + H_2SO_4 + 2HNO_3 = ZnSO_4 + 2H_2O + 2NO_2$
Бунзена	Уголь в азотной к-те, помещенной в пористый сосуд, цинк в растворе серной к-ты	1,8—1,9	0,2	$Zn + H_2SO_4 + 2HNO_3 = ZnSO_4 + 2H_2O + 2NO_2$
Фулер	Уголь в растворе смеси из трех частей двухромановой соли, одной части серной к-ты и девяти частей воды, цинк в пористом сосуде с 50%-ным раствором серной к-ты	2	0,5	Дает вредные испарения. Может дать кратковременно ток до 10—15 А.
Де-ла-Рива, Оотер-Донати	Свинцовая пластина с перекисью свинца (деполаризатор)—серная к-та—цинк	2,45	—	Израсходованный деполаризатор может восстанавливаться посторонним током наподобие аккумуляторов.
Лейланд—Эдиссон	Медь с окисью меди между двумя цинковыми полюсами в растворе едкого калия или едкого натрия крепостью 22° по Боде. Раствор во избежание испарения покрывают слоем минерального масла	0,7	0,03—0,10	Очень сильный элемент, емкостью 100—600 Ач. Максимальный ток 14 А выдерживает короткое замыкание.
Купрон-элемент	Медь с окисью меди—едкий калий или едкий натрий с серноватистокислым натрием—цинк .	0,8	0,01—0,06	При разряде слабым током обладает емкостью до 400 Ач.

Табл. 16. (Продолжение.)

Наименование элемента	Составные части: положительный электрод—электролит—отрицательный электрод	Эдс (в В)	Внутр. сопротив. (в Ω)	Химические реакции и примечания
Гренье	3. Элементы с несовершенной деполаризацией. Уголь—раствор серной к-ты с двуххромосилим калием или натрием—цинк	2	—	Дает большой ток, но в силу несовершенной деполаризации быстро ослабевает.
Лекланше с пористым сосудом	Уголь с деполаризатором, перекись марганца—насыщенный раствор нашатыря—цинк . . .	1,4	2—7	Емкость элемента в зависимости от размеров колеблется от 9 до 45 Ач и более. $\text{Zn} + 2\text{NH}_4\text{Cl} + 2\text{MnO}_2 = \text{ZnCl}_2 + 2\text{NH}_3 + \text{H}_2\text{O} + \text{Mn}_2\text{O}_3$
Лекланше мешковом	То же	1,4	0,6—1,4	
Лекланше сухой или наливной	То же	1,5	0,1—0,45	

В качестве деполаризаторов чаще всего употребляются:

а) перекись марганца или свинца, замешанные в растворе гумми-арабика или крахмала;

б) раствор хлористого железа в смеси с глиной или мелом;

г) азотная или хромовая к-та, загущенная кремневой к-той;

д) углекислая медь, загущенная раствором клея.

Приготовление смеси возбуждательной массы и деполаризатора требует смешивания в строго определенном порядке, в противном случае смесь оказывается непригодной.

б) Сухо-наливные элементы отличаются от сухих тем, что хим. состав электролита в них заключается в твердом виде и растворяется после заливки элемента водой.

Емкость сухо-наливных элементов почти в два раза больше емкости сухих элементов при одних и тех же размерах элементов.

Табл. 17. Нормы НКПС на сухие элементы.

№ элемента	Размеры элемента (в мм)	Внеш. сопротив., при к-ром разряж. элемент (в Ω)	Внутр. сопротив. элем. (в Ω)	Емкость (в Ач)	Емкость (в Втч)	Падение напряж. при включении на внешнюю цепь
1	40 × 40 × 95	10	0,3	9	7,5	0,06
2	55 × 55 × 125	15	0,18	23	20	0,05
3	90 × 45 × 175	20	0,16	50	45	0,04

4. Аккумуляторы представляют устройства, в к-рых может запасаться эл. энергия, а затем по мере надобности расходоваться. А. бывают двух типов: А) свинцовые; Б) щелочные — а. Эдиссона и Юнгера.

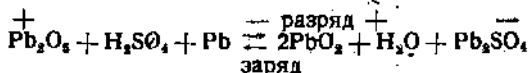
А. Свинцовые аккумуляторы. 1) Свинцовые а. представляют сосуд, наполненный раствором серной к-ты, в к-ром помещены изолированно друг от друга свинцовые пластины двух типов.

2) Положительная пластина имеет активную массу—перекись свинца (PbO_2)—коричневого цвета.

3) Отрицательная пластина состоит из губчатого свинца серого цвета.

4) Сосуды аккумуляторных элементов для малой емкости делаются или стеклянные, или эбонитовые, или же целлулоидные, для больших емкостей—деревянные, выложенные внутри листовым свинцом.

5) Химическая реакция при разряде а. представляется в сл. виде:



6) Электролит, раствор серной к-ты, как видно из приведенных реакций, меняет свою крепость и уд. вес во время зарядки и разрядки.

7) Пределы изменения уд. в. электролита колеблются от 1,18 до 1,25, и при этой концентрации он обладает наименьшим эл. сопротивлением, или наибольшей эл. проводимостью. Повышения концентрации раствора следует избегать, т. к. это ведет к порче а. и к уменьшению его кпд из-за увеличения сопротивления электролита.

Табл. 18. Данные о растворах серной к-ты.

Процентное содержание	Уд. в.	Град. Боме	$\rho_{\text{вст.}}$	$\rho_{\text{кип.}}$	Электр. провод.	Процентное содержание	Уд. в.	Град. Боме	$\rho_{\text{вст.}}$	$\rho_{\text{кип.}}$	Электр. провод.
10	1,069	9,2	— 5	102	0,3915	40	1,307	33,9	—	114	0,6800
15	1,107	13,9	— 8	108,5	0,5432	50	1,399	41,1	—	124	0,5405
20	1,147	18,5	— 12	105	0,6527	60	1,503	48,3	—	141,5	0,3727
25	1,184	22,5	— 25	106,5	0,7171	70	1,615	55	—	170	0,2157
30	1,224	26,4	— 46	108	0,7388	80	1,733	61	—	207	0,1105
35	1,265	30,2	—	110	0,7243	90	1,818	65	—	262	0,1075

Для аккумуляторов применяется к-та, не имеющая никаких органических примесей. Содержание примесей допускается при 66° по Боме не более:

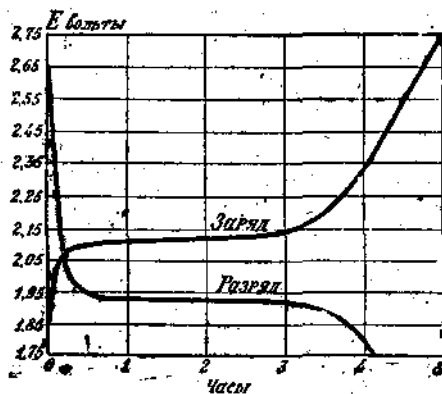
азотных продуктов—0,01%, железа—0,01%. Примесей пр. металлов и хлора совершенно не допускается. Вода для доливки аккумуляторов и раствора применяется исключительно дистиллированная, химически чистая.

8) Максимальное значение эдс аккумулятора в конце заряда 2,7 V.

9) Минимальное значение эдс аккумулятора в конце разряда 1,83 V.

Кривая изменения напряжения при заряде и разряде представляется в виде диаграммы черт. 4.

Разряжать аккумуляторы ниже 1,8 V нельзя, т. к. аккумулятор сильно портится. В конце заряда, начиная с 2,2 V, с аккумуляторных пластин начинается сильное газообразование (кислород), которое в конце заряда идет наиболее интенсивно.



Черт. 4.

В конце заряда, начиная с 2,2 V, с аккумуляторных пластин начинается сильное газообразование (кислород), которое в конце заряда идет наиболее интенсивно.

10) Зарядным или разрядным током аккумулятора называется тот максимальный ток, к-рым можно заряжать или разряжать а.

11) Величина зарядного и разрядного тока зависит от размера поверхности пластин и от их конструкции. Она не должна превосходить величины тока, установленного аккумуляторным э-дом, т. к. в противном случае а. быстро разрушается.

12) Емкость аккумулятора представляет произведение из силы разрядного тока на время, в течение к-рого производится разряд до минимально допустимого напряжения, и выражается в Аh. Емкость а. есть далеко не постоянная величина и зависит очень сильно от темп-ры электролита и времени разряда батарей.

С уменьшением темп-ры электролита емкость резко уменьшается, а потому э-ды всегда относят емкость в какой-либо определенной темп-ре. Для аккумуляторов вагонного освещения емкость относят к темп-ре $+25^{\circ}$.

13) Зависимость емкости батарей от темп-ры представляется кривой черт. 5.

14) Зависимость емкости батарей от величины разрядного тока м. б. выражена ф-лой Пейджерта:

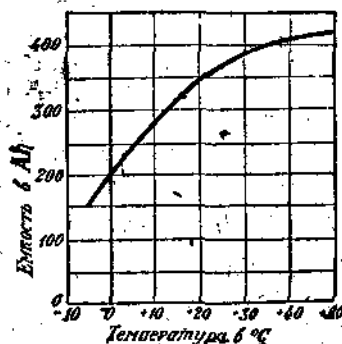
$$C_1 = C \left(\frac{I}{I_1} \right)^{n-1},$$

где: C_1 — емкость при разрядном токе I_1 ,
 C — емкость при разрядном токе I ; n — постоянный коэф-т, зависящий от системы аккумуляторов, к-рый в среднем колеблется от 1,35 до 1,72.

15) Кпд аккумуляторов дают по емкости и по работе, т. е. по Аh и по Wh. Кпд по Аh для хороших систем а. имеет значение от 0,92 до 0,96. Кпд по Wh не превосходит значений 0,75—0,85.

Типы аккумуляторов, применяемых для освещения поездов, указаны в разделе «Освещение поездов».

Стационарные аккумуляторы выпускаются ВЭО следующих типов: 1) тип «J» для разряда от 3 до 10 часов, 2) тип «JS» для разряда от 1 до 2 часов. Емкости этих аккумуляторов изменяются примерно от 20 до 10 000 Аh. Аккумуляторы для электрических тележек идут под маркой ГО39 емкостью 42 и 63 Аh.



Черт. 5.

Табл. 19. Данные об аккумуляторных батареях, применяемых зарубежными фирмами для электротележек.

Фирма	Подъемная сила (в т)	Скорость (км/ч)	Число и мощн. мотор. (в kW)	Число элем. батарей	Емк. бат. (в Аh)	Отдача бат. (в kW/h)	Полезн. пробег между двумя зарядками (в км)
Эмекс-Шуккарт	1500 750	3—10 —	2 × 0,65 1 × 1,1	40 20	63—200 63—132	5,04—16 2,52—5,28	20—62 20—42
Дейхерт	1500 750	4,5—10 4 — 9	1 × 2,2 1 × 1,66	20 20	140—320 132	6,6—12,8 5,28	32—73 42
Мак	1500	4,5—9	2 × 0,74	42	80	6,4	—
Hansa-Lloyd	1800	4 — 12	1 × 3,7	20	240	9,6	—

Б. Щелочные аккумуляторы—бывают двух типов: а) тип Эдиссона, б) тип Юнгнера. В обоих типах в качестве электролита служит 22-процентный раствор едкого калия (KOH), к которому в аккумуляторе Эдиссона добавляется небольшое количество водной окиси лития.

1) Активная масса положительных пластин в обоих типах состоит из водной окиси никеля $[Ni(OH)_2]$, к которой для уменьшения эл. сопротивления прибавляют металлический никель или графит.

2) Активная масса отрицательных пластин в а. Эдиссона состоит из порошкообразного железа с примесью ртути, а в а. Юнгнера—из водной окиси железа и кадмия $[Cd(OH)_2]$. Оба типа чаще всего называются железно-никелевыми аккумуляторами.

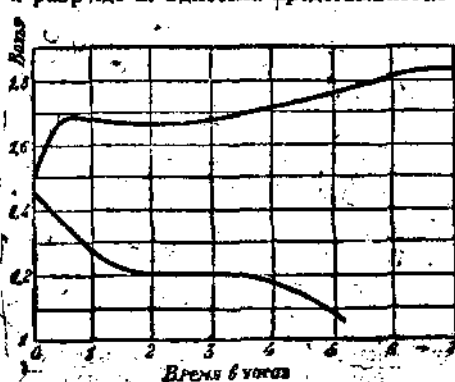
3) Сосуд и рамки пластин изготавливаются из никелированной стали.

Химическая реакция при разряде и заряде точно не выяснены.

4) Максимальное значение эдс в конце заряда—1,8 В.

5) Минимальное значение эдс в конце разряда рекомендуется доводить до 0,9—1 В.

6) Кривые изменения напряжения в зависимости от времени при заряде и разряде а. Эдиссона представляются в виде диаграммы черт. 6.



Черт. 6.

7) Емкость щелочных а. в очень сильной степени зависит от темп-ры. Изменение емкости при изменении темп-ры от -5 до $+45^{\circ}\text{C}$ обуславливается изменением вязкости электролита и его концентрацией. При более высоких темп-рах происходит большое понижение емкости благодаря разложению окисей никеля и быстрого окисления. Чтобы новые аккумуляторы дали свою нормальную емкость, нужно произвести 8—10 зарядов и разрядов. При разряде аккумулятора до 0 напряжения емкость снижается на 10%. При последующих зарядах и разрядах она вновь восстанавливается.

При понижении темп-ры от 15°C и ниже уменьшение емкости идет по с.з. закону: на 1°C 1,5%. Емкость а. обычно дается фирмами при 15°C .

8) Кпд щелочных аккумуляторов при нормальных режимах заряда и разряда и при 15°C обычно составляет: кпд по емкости (Ah) от 72 до 80%; кпд по работе (Wh)—от 52 до 55%.

Табл. 20. Данные об аккумуляторах Юнгнера малой емкости.

Тип элементов	Емк. (в Ah)	Внутр. сопр. (в Ω)	Макс. сила тока (в А)		Наружные размеры (в мм)			Вес (в кг)	
			при зар.	при разр.	Длина	Шир.	Выс.	с элем-трит.	без элект-ролита
1	10	0,05-	4	2,5	64	80	110	1,33	0,2
2	20	0,01	8,5	5	32	105	157	1,3	0,2
4	23	0,007	10	6	32	105	198	1,7	0,25
5	45	0,003	20	11	60	105	165	2,7	0,42
6	100	0,001	43	25	77	130	270	5,5	0,85

9) Преимущества щелочных аккумуляторов перед свинцовыми: а) большая механическая прочность; б) большая выносливость тряски и перегрузки; в) менее вредные для обслуживающего персонала выделения; г) большая, примерно в 3 раза, продолжительность службы; д) меньший вес; ж) менее требовательны в эксплуатации.

10) Недостатки щелочных аккумуляторов перед свинцовыми: а) пониженный кпд; б) дороговизна—примерно на 40%; в) пониженное напряжение.

Поэтому для стационарных установок почти исключительно применяются свинцовые а.

В. Правила эксплуатации для аккумуляторных установок. 1) Аккумуляторные помещения во время зарядки должны быть хорошо вентилируемы. Присутствие в аккумуляторных помещениях открытого пламени или раскаленных тел, особенно в конце заряда или вскоре после его окончания, м. б. допущено только в случае производства необходимых исправлений при условии применения соответствующих мер предосторожности.

2) Части здания и эксплуатационные принадлежности, включая провода, а также и изолирующие служебные ходы, должны быть защищены от вредного действия к-ты; время от времени следует проверять их надлежащее состояние.

3) Пролитая к-та д. б. как можно скорее сделана безвредной.

4) Для рабочих, занятых в аккумуляторных установках, должны иметься наготове соответствующие предохранительные средства.

5) Еда, питье и курение в аккумуляторных помещениях воспрещаются. Обслуживающий персонал аккумуляторных установок следует приучать к чистоте и объяснять им опасность, представляемую к-той и солями свинца. Следует заботиться о том, чтобы имелось достаточное количество приспособлений и принадлежностей для умывания.

§ 7. Схема соединения источников тока.

1. Последовательным соединением источников тока называется такое соединение, когда отдельные источники тока соединены между собою разноименными полюсами.

2. Общая эдс цепи источников тока, соединенных последовательно, равна сумме эдс отдельных элементов:

$$E = \sum e.$$

3. Сила тока во внешней цепи при последовательном соединении элементов выражается:

$$I = \frac{E}{R_0 + R_1},$$

где: I —сила тока во внешней цепи, e —эдс одного элемента, n —число элементов, соединенных последовательно, R_0 —внутреннее сопротивление одного элемента; R_1 —сопротивление внешней цепи.

4. Параллельным соединением источников тока называется такое соединение, когда отдельные источники тока соединены между собою одноименными полюсами. Параллельно могут быть соединены только источники тока с одинаковыми эдс. Общая эдс цепи источников тока, соединенных параллельно, равна эдс одного элемента:

$$E = e.$$

5. Сила тока во внешней цепи при параллельном соединении источников тока выражается:

$$I = \frac{e}{\frac{r_0}{n} + r_1},$$

где: I —сила тока во внешней цепи, e —эдс одного элемента, r_0 —внутреннее сопротивление одного элемента, n —число элементов, соединенных параллельно, r_1 —сопротивление внешней цепи.

6. Смешанным соединением источников тока называется такое соединение, когда часть элементов соединена между собою последовательно, а отдельные группы последовательно соединенных элементов соединяются между собою параллельно.

7. Общая эдс при смешанном соединении элементов равна эдс последовательно соединенных элементов:

$$E = ne,$$

где E —эдс цепи, e —эдс одного элемента, n —число элементов, соединенных последовательно.

8. Сила тока во внешней цепи при смешанном соединении элементов выражается:

$$I = \frac{ne}{n \frac{r_0}{m} + r_1},$$

где: I —сила тока во внешней цепи, e —эдс одного элемента, n —число элементов, соединенных последовательно, m —число цепей, соединенных параллельно, r_0 —внутреннее сопротивление одного элемента, r_1 —сопротивление внешней цепи.

§ 8. Магнетизм и электромагнетизм.

1. Магнитным полем называется пространство, в котором обнаруживаются магнитные силы, и обозначается буквой Φ .

2. Напряжением магнитного поля называется сила взаимодействия магнита на единицу магнитной массы и выражается:

$$H = \frac{m}{r^2}$$

или же напряжением магнитного поля называется число силовых линий, проходящих через 1 см^2 поверхности, перпендикулярной к направлению силовых линий. Единицей напряжения магнитного поля является единица, к-рая носит название гаусс.

3. Магнитной индукцией называется число силовых линий, приходящихся на 1 см^2 внутри намагничиваемого тела, и обозначается латинской буквой B .

4. Магнитной проницаемостью называется число, показывающее, во сколько раз магнитная индукция больше напряжения магнитного поля, и обозначается буквой μ :

$$\frac{B}{H} = \mu.$$

5. Направление магнитного поля, возбуждаемого эл. током в проводнике, определяется правилом бурава: если бурав ввинчивать по направлению тока, то направление вращения ручки бурава показывает направление магнитных силовых линий.

6. Величина магнитного потока, возбуждаемого вокруг проводника, прямо пропорциональна силе тока в проводнике.

$$\Phi = LI,$$

где L — коэф-т самоиндукции.

7. Величина магнитного потока электромагнита выражается:

$$\Phi_m = BS = H\mu S = \frac{0,4\pi I}{l} \mu S,$$

где: n — число витков, I — сила тока (в А), l — длина магнитной цепи (в см), μ — магнитная проницаемость, S — сечение железа электромагнита (в см²).

Это выражение магнитного потока можно представить иначе:

$$\Phi_m = \frac{0,4\pi n I}{\frac{l}{\mu S}} \mu S = \frac{0,4\pi n I}{\frac{l}{\mu S}}.$$

Величина $0,4\pi n I$ называется магнитодвижущей силой.

Величина $\frac{l}{\mu S}$ называется магнитным сопротивлением.

Поэтому эту ф-лу можно выразить так:

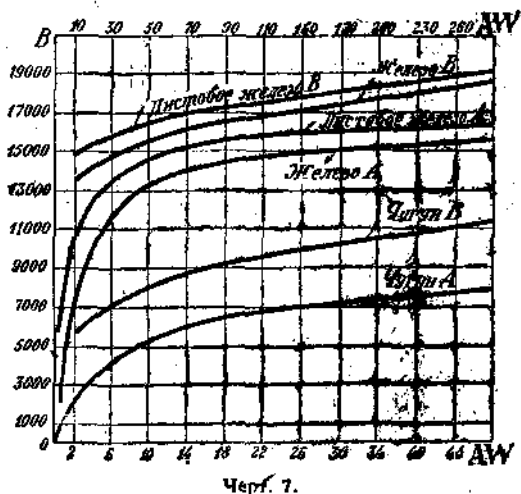
магнитный поток = $\frac{\text{магнитодвижущая сила}}{\text{магнитное сопротивление}}$, к-рая и носит название ф-лы Ома для магнитной цепи. В том случае, когда магнитная цепь состоит из разнородных металлов, с различными магнитными проницаемостями, тогда:

$$\Phi_m = \frac{0,4\pi n I}{\frac{l_1}{\mu_1 S_1} + \frac{l_2}{\mu_2 S_2} + \frac{l_3}{\mu_3 S_3} + \dots}$$

8. При расчете магнитных цепей для создания определенного магнитного потока пользуются кривыми намагничивания. Кривая намагничивания представляет зависимость магнитной индукции от числа ампервитков (AW) на 1 п. см пути магнитопровода. Кривые намагничивания для различных сортов материала различны и зависят от магнитной проницаемости.

Ниже приведены кривые намагничивания для чугуна, железа и листового железа (черт. 7), причем кривые со значком А отнесены к нижнему масштабу ампервитков, а кривые со значком В — к верхнему масштабу, большему.

9. Остаточным магнетизмом называются те остающиеся магнитные свойства, к-рые имеют место в намагничиваемых телах после того, как внешнее магнитное действие закончится. Величина остаточного магнетизма



Черт. 7.

различна для различных тел. Для стали остаточный магнетизм больше, нежели для железа, особенно для мягкого.

10. Козроцетивной, или задерживающей, силой называется напряжение поля, к-рое надо возбудить в катушке навстречу остаточному магнетизму, чтобы его уничтожить, т. е. чтобы намагниченное тело размагнитилось.

11. Подъемная сила электромагнита выражается так (в кг):

$$F = \left(\frac{B}{5000} \right)^2 S,$$

где: F —сила притяжения (в кг), B —магнитная индукция, S —сечение одного полюса (в см²).

Для случаев, когда подъемная сила создается двумя полюсами, значение силы удваивается.

§ 9. Электромагнитная индукция.

1. Когда контур проводников пересекает силовые линии или силовые линии пересекают проводники, в обоих этих случаях в проводнике наводится или, как говорят, индуцируется эдс.

По закону Фарадея величина индуцированной эдс в одном витке выражается:

$$E = - \frac{d\Phi}{dt} \cdot 10^{-8} \text{ V},$$

а для контура с числом витков n :

$$E = - n \frac{d\Phi}{dt} \cdot 10^{-8} \text{ V}.$$

2. Величина индуцированной эдс в линейном проводнике выражается:

$$E = Blv \cdot 10^{-8},$$

где: E —индуцированная эдс (в V), B —магнитная индукция, l —длина проводника (в см), v —скорость, перпендикулярная к направлению магнитных силовых линий (в см/сек), 10^{-8} —переводный коэф-т от абсолютных единиц эдс к практическим,—вольтам.

3. Направление индуцированной эдс определяется по правилу правой руки сл. обр.: ладонь правой руки ставят так, чтобы силовые линии входили в ладонь, т. е. чтобы ладонь была обращена к северному полюсу, большой палец руки направляют по направлению движения проводника,—тогда направление остальных четырех пальцев покажет направление эдс, возникающей в проводнике.

§ 10. Переменный ток.

А. Определения.

1. Переменным током, или переменной эдс, называется такой ток, к-рый периодически изменяется от 0 до max , от max до 0, от 0 до $(-\text{max})$, от $(-\text{max})$ до 0 и т. д.

2. Периодом называется время, за к-рое эдс изменяется от какого-либо значения до такого же самого, т. е. пройдя все значения синусоиды. Время периода обозначается буквой T .

3. Частотой, или периодичностью, называется число периодов в 1 сек и представляется величиной, обратной времени одного периода. Частота обозначается:

$$f = \frac{1}{T}.$$

4. Угловая скорость переменного тока выражается:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f.$$

5. Мгновенное значение эдс выражается:

$$E_t = E_{\max} \cdot \sin \omega t.$$

6. Углом сдвига фаз, или углом разности фаз, называется угол между аналогичными точками двух разных синусоид:

$$E'_t = E_{\max} \cdot \sin \omega t;$$

$$E''_t = E_{\max} \cdot \sin (\omega t \pm \varphi),$$

где φ — угол разности фаз.

В том случае, когда имеем $+\varphi$, синусоида E'_t опережает синусоиду E''_t .

Если угол φ отрицательный, синусоида E''_t отстает от синусоиды E'_t .

7. Среднее значение синусоидальной переменной величины выражается:

$$I_{cp.} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_{\max} \cdot \sin \omega t dt = 0,636 I_{\max};$$

$$E_{cp.} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} E_{\max} \cdot \sin \omega t dt = 0,636 E_{\max}$$

8. Эффективное, или действующее, значение синусоидальной переменной величины выражается:

$$I_{эф.} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_{\max}^2 \cdot \sin^2 \omega t dt} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} = 0,707 I_{\max};$$

$$E_{эф.} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T E_{\max}^2 \cdot \sin^2 \omega t dt} = \frac{E_{\max}}{\sqrt{2}} = 0,707 E_{\max}$$

Эффективное, или действующее, значение переменного тока представляет собой такой ток, к-рый по тепловому эффекту эквивалентен току постоянному.

Формфактор представляет отношение эффективного значения периодической ф-ны к ее среднему значению. Для синусоидального переменного тока формфактор равен:

$$k = \frac{E_{эф.}}{E_{cp.}} = \frac{0,707 E_{\max}}{0,636 E_{\max}} = 1,11.$$

Для др. форм кривых формфактор имеет другие значения и для встречающихся в электротехнике форм кривых колеблется от 1 до 1,44.

9. Эдс самоиндукции появляется в катушке тогда, когда внутри катушки изменяется магнитный поток, возбуждаемый этой же самой катушкой. Величина эдс самоиндукции выражается:

$$E_s = -n \frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di}{dt},$$

где L — коэф-т самоиндукции.

10. ЭДС взаимной индукции появляется в катушке тогда, когда внутри ее существует переменный магнитный поток, создаваемый др. катушкой. Величина ЭДС взаимной индукции выражается:

$$E = -n_1 \frac{d\Phi_2}{dt} = -M \frac{di}{dt},$$

где M —коэф-т взаимной индукции.

11. Емкостью называется способность данного устройства собирать в себе эл. заряды.

12. Величина емкости равна отношению количества эл-ства, собранного в конденсаторе, к разности потенциалов на обкладках конденсатора:

$$C = \frac{Q}{V}.$$

13. При последовательном соединении емкостей общая емкость получается:

$$\frac{1}{C_{об.}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots; \quad \frac{1}{C_{об.}} = \sum \frac{1}{C},$$

где $C_{об.}$ —общая емкость, C_1, C_2, C_3 —частичные емкости.

14. При параллельном соединении емкостей общая емкость равна:

$$C_{об.} = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + \dots; \quad C_{об.} = \sum C,$$

где $C_{об.}$ —общая емкость, C_1, C_2, C_3, C_4 —частичные емкости.

15. При смешанном соединении емкостей общая емкость учитывается так же, как при последовательном и параллельном.

16. Ваттным сопротивлением называется сопротивление, к-рое оказывает проводник переменному току. Ваттное сопротивление больше омического из-за того, что переменный ток проходит благодаря скин-эффекту не по всему сечению, а большей частью только по поверхности. По ф-ле Стефана отношение ваттного сопротивления R_s к омическому сопротивлению R_0 представляется сл. соотношением:

$$K = \frac{R_s}{R_0} = \pi \cdot 10^{-5} \sqrt{\frac{\mu f d}{0,4\pi}}.$$

Табл. 21. Величина коэф-та K в зависимости от периодичности и диаметра провода.

fd^2	K	fd^2	K	fd^2	K
20	1,0060	720	1,3180	2 880	2,3037
80	1,0001	960	1,4920	5 120	3,0958
180	1,0258	1 280	1,6778	8 000	3,7940
320	1,0805	1 620	1,8628	18 000	5,5732
500	1,1747	2 000	2,0430	32 000	7,3259

где: μ —магнитная проницаемость, f —периоды в сек., d —диам. провода (в см²), ρ —уд. сопротивление провода, отнесенное к 1 см².

По подсчетам Hospitalier, величина коэф-та K для круглого провода из чистой меди получается сл. значений в зависимости от fd^2 , где f —периодичность, d —диам. провода (в см) (см. табл. 21).

Для нормальной частоты 50 пер./сек для медных проводов диам. до 1 см влияние скин-эффекта мало заметно.

17. Индуктивное сопротивление. Величина индуктивного сопротивления зависит от коэф-та самоиндукции и угловой скорости и выражается в Ω :

$$X_L = \omega L,$$

где L —коэф-т самоиндукции, выраженный в Н.

18. Емкостное сопротивление. Величина емкостного сопротивления зависит от величины емкости и угловой скорости переменного тока и выражается в Ω :

$$X_C = \frac{1}{\omega C},$$

где C — емкость, выраженная в F .

Б. Основные законы переменного тока

1. При последовательном соединении ваттного и индуктивного сопротивления.

Общее сопротивление цепи (в Ω):

$$Z = \sqrt{r^2 + (\omega L)^2}.$$

Сила тока в цепи (в A):

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{E}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}}.$$

Угол сдвига фаз между током и напряжением $\angle \varphi$:

$$\cos \varphi = \frac{r}{Z} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}};$$

$$\sin \varphi = \frac{\omega L}{Z} = \frac{\omega L}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}};$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{r}.$$

Мощность, потребляемая в цепи (в W):

$$W = E_{\text{эф.}} I_{\text{эф.}} \cdot \cos \varphi = I_{\text{эф.}}^2 r.$$

Сила тока отстает от напряжения на угол φ .

Ваттный ток цепи, совпадающий по фазе с напряжением:

$$I_y = I \cdot \cos \varphi.$$

Безваттный ток цепи, отстающий на $\angle 90^\circ$ от напряжения:

$$I_{cy} = I \cdot \sin \varphi.$$

Ваттная проводимость (в mo):

$$g = \frac{r}{Z^2}.$$

Безваттная проводимость (в mo):

$$b = \frac{\omega L}{Z^2}.$$

Полная проводимость всей цепи (в mo):

$$y = \frac{1}{Z} = \sqrt{g^2 + b^2} = \sqrt{\frac{r^2 + (\omega L)^2}{[r^2 + (\omega L)^2]^2}}.$$

2. При последовательном соединении ваттных и емкостных сопротивлений.

Общее сопротивление цепи (в Ω):

$$Z = \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Сила тока в цепи (в А):

$$I_{\text{эф.}} = \frac{E_{\text{эф.}}}{Z} = \frac{E_{\text{эф.}}}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\omega c}\right)^2}}.$$

Сила тока цепи опережает напряжение на угол сдвига φ :

$$\cos \varphi = \frac{r}{Z} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\omega c}\right)^2}};$$

$$\sin \varphi = \frac{\frac{1}{\omega c}}{Z} = \frac{\frac{1}{\omega c}}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\omega c}\right)^2}};$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\omega c r}.$$

Мощность, потребляемая в цепи (в Вт):

$$W = E_{\text{эф.}} I_{\text{эф.}} \cdot \cos \varphi = I_{\text{эф.}}^2 r.$$

Ваттный ток цепи, совпадающий по фазе с напряжением:

$$I_y = I \cdot \cos \varphi.$$

Безваттный ток в цепи, опережающий напряжение на $\angle 90^\circ$:

$$I_{\text{бв}} = I \cdot \sin \varphi.$$

Ваттная проводимость (в мо):

$$g = \frac{r}{Z^2} = \frac{r}{r^2 + \left(\frac{1}{\omega c}\right)^2}.$$

Безваттная проводимость (в мо):

$$b = \frac{-\frac{1}{\omega c}}{Z^2} = \frac{-\frac{1}{\omega c}}{r^2 + \left(\frac{1}{\omega c}\right)^2}.$$

Полная проводимость всей цепи (в мо):

$$y = \frac{1}{Z} = \sqrt{g^2 + b^2} = \sqrt{\frac{r^2 + \left(\frac{1}{\omega c}\right)^2}{\left[r^2 + \left(\frac{1}{\omega c}\right)^2\right]^2}}.$$

3. При последовательном соединении ваттных, индуктивных и емкостных сопротивлений.

Общее сопротивление цепи (в Ω):

$$Z = \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)^2}.$$

Сила тока в цепи (в А):

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{E}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)^2}}.$$

Сила тока цепи может опережать напряжение, когда $\frac{1}{\omega C} > \omega L$, отставать от напряжения, когда $\frac{1}{\omega C} < \omega L$, и совпадать с напряжением, когда $\frac{1}{\omega C} = \omega L$.

Угол сдвига фаз между током и напряжением равен:

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{r}{Z} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}; \\ \sin \varphi &= \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{Z} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}; \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r}.\end{aligned}$$

Мощность, потребляемая в цепи (в Вт):

$$W = E_{\text{эф}} \cdot I_{\text{эф}} \cdot \cos \varphi = I_{\text{эф}}^2 r.$$

Ваттный ток в цепи, совпадающий с напряжением:

$$I_y = I \cdot \cos \varphi.$$

Безваттный ток в цепи, опережающий или отстающий от напряжения на $\angle 90^\circ$:

$$I_{\text{бв}} = I \cdot \sin \varphi.$$

Ваттная проводимость (в мо):

$$g = \frac{r}{Z^2} = \frac{r}{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Безваттная проводимость (в мо):

$$b = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{Z^2} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Полная проводимость цепи (в мо):

$$y = \frac{1}{Z} = \sqrt{g^2 + b^2} = \sqrt{\frac{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}{\left[r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right]^2}}.$$

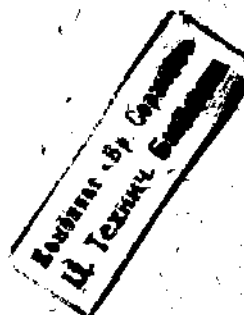
Резонанс напряжений—частный случай этой цепи, когда емкостное сопротивление равно индуктивному сопротивлению.

Для случая резонанса напряжений имеют место сл. соотношения:

сила тока: $I = \frac{E}{r}$; угол сдвига фаз $\cos \varphi = 1$, $\angle \varphi = 0$; мощность цепи $W = EI$.

В условиях резонанса имеют место максимальный ток в цепи и максимальные напряжения на емкости и самоиндукции.

Напряжение на клеммах самоиндукции м. б. во много раз больше напряжения, приложенного от внешней сети к данной цепи.



Величина этого напряжения:

$$I\omega L = I \frac{1}{\omega c} = \frac{E}{Z} \sqrt{\frac{L}{c}}.$$

4. При последовательном соединении целого ряда ваттных, индуктивных и емкостных сопротивлений имеют место след. соотношения: общее сопротивление цепи (в Ω):

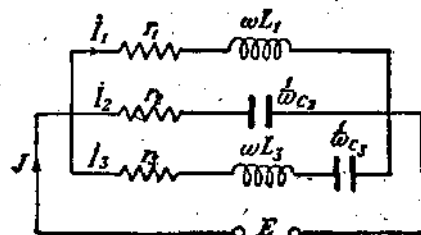
$$Z = \sqrt{(\Sigma r)^2 + \left(\Sigma \omega L - \Sigma \frac{1}{\omega c}\right)^2};$$

сила тока в цепи (в А):

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{E}{\sqrt{(\Sigma r)^2 + \left(\Sigma \omega L - \Sigma \frac{1}{\omega c}\right)^2}};$$

угол сдвига фаз между током и напряжением:

$$\cos \varphi = \frac{\Sigma r}{Z} = \frac{\Sigma r}{\sqrt{(\Sigma r)^2 + \left(\Sigma \omega L - \Sigma \frac{1}{\omega c}\right)^2}}.$$



Черт. 8.

Все остальные значения определяются так же, как и в предыдущей цепи.

5. При параллельном соединении нескольких приемников эл. энергии с различными сопротивлениями имеют место след. соотношения (черт. 8).

Общая сила тока I цепи равна геометрической сумме токов в отдельных параллельных цепях

$$I = I_1 + I_2 + I_3.$$

Ток каждой цепи равен напряжению E , деленному на общее сопротивление данной цепи:

$$I_1 = \frac{E}{Z_1} = \frac{E}{\sqrt{r_1^2 + (\omega L_1)^2}};$$

$$I_2 = \frac{E}{Z_2} = \frac{E}{\sqrt{r_2^2 + \left(\frac{1}{\omega c_2}\right)^2}};$$

$$I_3 = \frac{E}{Z_3} = \frac{E}{\sqrt{r_3^2 + \left(\omega L_3 - \frac{1}{\omega c_3}\right)^2}}.$$

Ваттный ток I_y каждой цепи равен напряжению, умноженному на ваттную проводимость g цепи:

$$I_{y1} = I_1 \cdot \cos \varphi_1 = \frac{E}{Z_1} \cdot \frac{r_1}{Z_1} = E \frac{r_1}{Z_1^2} = E g_1;$$

$$I_{y2} = I_2 \cdot \cos \varphi_2 = \frac{E}{Z_2} \cdot \frac{r_2}{Z_2} = E \frac{r_2}{Z_2^2} = E g_2;$$

$$I_{y3} = I_3 \cdot \cos \varphi_3 = \frac{E}{Z_3} \cdot \frac{r_3}{Z_3} = E \frac{r_3}{Z_3^2} = E g_3.$$

Безваттный ток i_{by} каждой цепи равен напряжению, умноженному на безваттную проводимость b цепи:

$$i_{by} = i_1 \cdot \sin \varphi_1 = \frac{E}{Z_1} \cdot \frac{\omega L_1}{Z_1} = E \frac{\omega L_1}{Z_1^2} E b_1;$$

$$i_{by} = i_2 \cdot \sin \varphi_2 = \frac{E}{Z_2} \left(\frac{-\frac{1}{\omega C_1}}{Z_2} \right) = -E \frac{\frac{1}{\omega C_2}}{Z_2^2} = -E b_2;$$

$$i_{by} = i_3 \cdot \sin \varphi_3 = \frac{E}{Z_3} \left(\frac{\omega L_3 - \frac{1}{\omega C_3}}{Z_3} \right) = E \frac{\omega L_3 - \frac{1}{\omega C_3}}{Z_3^2} = \pm E b_3.$$

Полный ваттный ток I_y всей цепи равен алгебраической сумме ваттных токов отдельных параллельных цепей:

$$I_y = i_{1y} + i_{2y} + i_{3y} = E g_1 + E g_2 + E g_3 = E (g_1 + g_2 + g_3),$$

или в общем случае:

$$I_y = E \cdot \Sigma g.$$

Полный безваттный ток i_{by} всей цепи равен алгебраической сумме безваттных токов отдельных параллельных цепей:

$$I_{by} = i_{1by} + i_{2by} + i_{3by} = E b_1 + E b_2 + E b_3 = E (b_1 + b_2 + b_3),$$

или в общем случае:

$$I_{by} = E \Sigma b.$$

Полный ток I всей цепи равен геометрической сумме ваттного I_y и безваттного I_{by} токов всей цепи:

$$I = I_y + I_{by}.$$

или, т. к. ваттный и безватный токи сдвинуты на $\angle 90^\circ$:

$$I = \sqrt{I_y^2 + I_{by}^2}.$$

Подставляя значения токов через проводимости, получаем:

$$I = \sqrt{[E(g_1 + g_2 + g_3)]^2 + [E(b_1 + b_2 + b_3)]^2} = E \sqrt{(g_1 + g_2 + g_3)^2 + (b_1 + b_2 + b_3)^2},$$

или в общем случае:

$$I = E \sqrt{(\Sigma g)^2 + (\Sigma b)^2}.$$

Мощность, расходуемая в отдельных цепях, выразится:

$$W_1 = E i_1 \cdot \cos \varphi_1 = E i_{1y} = E \cdot E g_1 = E^2 g_1;$$

$$W_2 = E i_2 \cdot \cos \varphi_2 = E i_{2y} = E \cdot E g_2 = E^2 g_2;$$

$$W_3 = E i_3 \cdot \cos \varphi_3 = E i_{3y} = E \cdot E g_3 = E^2 g_3.$$

Мощность, расходуемая во всей цепи, получается:

$$W = E I \cdot \cos \varphi = E I_y = E \cdot E (g_1 + g_2 + g_3) = E^2 \Sigma g.$$

В. Многофазные переменные токи.

1. Многофазной системой переменного тока называется такая система, в которой одновременно действует несколько адс одного и того же периода, но сдвинутых по фазе на определенные углы.

2. Симметричной многофазной системой называется такая система, когда во всех фазах действуют эдс равных амплитуд и одинаковой периодичности, при чем эдс отдельных фаз сдвинуты между собой на равные углы. Из всех многофазных систем наибольшее распространение имеет трехфазная система.

3. Соединением трехфазной системы в звезду называется такое соединение, когда в одну общую точку соединены все одноименные концы фаз, а от др. концов энергия или отводится (в случае генератора), или подводится (в случае потребителя).

4. Фазовым напряжением называется напряжение между началом и концом какой-либо фазы.

5. Линейным, или междуфазовым, напряжением называется напряжение между проводами, отходящими к потребителю. В случае симметричной трехфазной системы линейное напряжение при соединении в звезду в 1,73 раза больше фазового напряжения:

$$E_{\text{л}} = \sqrt{3} E_{\text{ф}} = 1,73 E_{\text{ф}}.$$

6. Линейный ток при соединении в звезду равен фазовому току: $I_{\text{л}} = I_{\text{ф}}$.

7. Нулевой точкой трехфазной системы называется общая точка соединения всех трех фаз.

8. Нулевым проводом трехфазной системы называется провод, отходящий от нулевой точки звезды.

9. Неравномерной трехфазной системой называется такая система, когда напряжения фаз и углы сдвига между отдельными фазами не равны. При неравномерной трехфазной системе сумма трех фазовых токов равна току в нулевом проводе с обратным знаком:

$$\vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 = -\vec{I}_0.$$

или:

$$\vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 + \vec{I}_0 = 0.$$

При неравномерной трехфазной системе потребителя, питаемого от равномерной системы генератора или трансформатора, между нулевыми точками генератора и потребителя имеет место разность потенциалов E_0 :

$$E_0 = \frac{E_1 \vec{y}_1 + E_2 \vec{y}_2 + E_3 \vec{y}_3}{y_0 + y_1 + y_2 + y_3},$$

где E_1, E_2, E_3 — фазовые напряжения источника тока, y_0, y_1, y_2, y_3 — проводимости фаз потребителя.

Напряжение на фазах потребителя E'_1, E'_2, E'_3 и токи фазовые потребителя выражаются сл. обр.:

$$\vec{E}'_1 = \vec{E}_1 - \vec{E}_0; \quad \vec{I}_1 = \frac{\vec{E}_1 - \vec{E}_0}{\vec{Z}_1} = (\vec{E}_1 - \vec{E}_0) \vec{y}_1;$$

$$\vec{E}'_2 = \vec{E}_2 - \vec{E}_0; \quad \vec{I}_2 = \frac{\vec{E}_2 - \vec{E}_0}{\vec{Z}_2} = (\vec{E}_2 - \vec{E}_0) \vec{y}_2;$$

$$\vec{E}'_3 = \vec{E}_3 - \vec{E}_0; \quad \vec{I}_3 = \frac{\vec{E}_3 - \vec{E}_0}{\vec{Z}_3} = (\vec{E}_3 - \vec{E}_0) \vec{y}_3;$$

$$\vec{I}_0 = \frac{\vec{E}_0}{\vec{Z}_0} = -E_0 y_0.$$



Черт. 9.

10. Соединением трехфазной системы в треугольник называется такое соединение, когда фазы соединены между собой попарно разноименными концами. При соединении симметричной системы в тр-к имеют место след. соотношения (черт. 10).

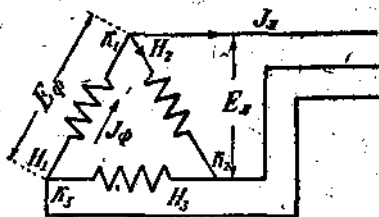
а) Фазовое напряжение равно линейному напряжению: $E_A = E_\phi$.

б) Линейный ток больше фазового в $\sqrt{3}$ раз: $I_A = \sqrt{3} I_\phi = 1,73 I_\phi$.

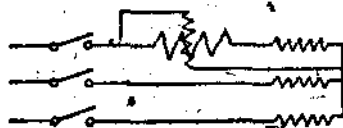
При неравномерной нагрузке трехфазной системы, соединенной в тр-к, линейный ток I_A равен геометрической разности двух фазовых токов.

11. Мгновенная сумма трехлинейных токов при всех условиях нагрузки равна нулю.

12. Мгновенная сумма трехфазовых токов равна нулю только при равномерной нагрузке; при неравномерной нагрузке мгновенная сумма трех фазовых токов не равна нулю.



Черт. 10.



Черт. 11.

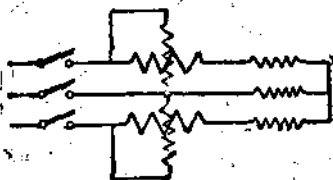


Черт. 12.

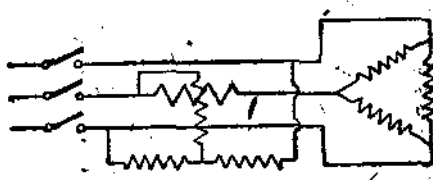
13. Мощность трехфазной системы при равномерной нагрузке и при схеме соединения в звезду и при схеме соединения в тр-к выражается:

$$W = 3E_\phi I_\phi \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} E_A I_A \cdot \cos \varphi.$$

14. Измерение мощности трехфазной системы в различных случаях м. б. произведено ваттметрами, включенными по след. схемам соединений:



Черт. 13.



Черт. 14.

а) При равномерной нагрузке, соединенной в звезду, когда нулевая точка доступна (черт. 11).

Примечание. Ваттметр измеряет мощность одной фазы. Общая мощность равна утроенному показанию ваттметра.

б) При неравномерной нагрузке, соединенной в звезду, когда нулевая точка доступна и когда имеется нулевой провод (черт. 12).

Примечание. Каждый ваттметр учитывает фазовую мощность. Общая мощность равна сумме показаний трех ваттметров.

в) При неравномерной и равномерной нагрузках трехфазной системы независимо от схемы соединения потребителя, но при условии, что нет нулевого провода (черт. 13) (схема Арона).

П р и м е ч а н и е. Алгебраическая сумма показаний ваттметров даст полную мощность трехфазной системы. При угле сдвига фаз $\varphi < 60^\circ$ оба ваттметра показывают в одну сторону и показания их надо складывать. При угле сдвига $\varphi = 60^\circ$ один из ваттметров показывает нуль. При угле сдвига $\varphi > 60^\circ$ один из ваттметров показывает отрицательно и его показания надо вычитать.

г) При равномерной нагрузке трех фаз в отсутствии нулевой точки. **П р и м е ч а н и е.** Ваттметр показывает мощность одной фазы. Общая мощность равна утроенному показанию ваттметра (черт. 14).

§ 11. Потери на гистерезис и вихревые токи Фуко.

1. В случае прохождения переменного тока по катушке, внутри которой имеется железо, железо подвергается перемагничиванию. На перемагничивание железа затрачивается определенное количество энергии, величина которой, по исследованиям Штейнметца, выражается в W :

$$W_{\Gamma} = \sigma_{\Gamma} \left(\frac{f}{100} \right) \left(\frac{B_{\max}}{1000} \right)^{1,6} \cdot V$$

где: σ_{Γ} — коэф-т, зависящий от сорта железа, f — число периодов в ск., $B_{\max}$ — максимальная магнитная индукция, V — объем перемагничиваемого железа (в дм^3).

Однако, по позднейшим исследованиям Рихтера, оказалось, что при индукциях больше 10 000 ф-ла Штейнметца не вполне верна и потери пропорциональны квадрату индукции. По Рихтеру (в W):

$$W_{\Gamma} = \sigma_{\Gamma} \left(\frac{f}{100} \right) \left(\frac{B_{\max}}{1000} \right)^2 \cdot V,$$

где все значения те же, что и в ф-ле Штейнметца.

Потери на перемагничивание носят название потерь на гистерезис.

2. Потери на токи Фуко возникают в перемагничиваемом железе в силу изменения в железе магнитного тока. Величина потерь на токи Фуко в железе выражается для круглых проводов (в W):

$$W_f = 0,62 f^2 d^2 B_{\max}^2 V \cdot 10^{-12},$$

Табл. 22. Значение постоянных коэф-тов для различных сортов железа при подсчете потерь на гистерезис и токи Фуко.

Наименование железа	Толщина листов (в мм)	σ_{Γ} в ф-ле Штейнметца	σ_{Γ} в ф-ле Рихтера	σ_f в ф-ле потерь на токи Фуко
Обыкновенное якорное железо	0,5	0,85	0,336	1,31
То же	0,35	0,775	0,308	1,97
Легированное железо	0,5	0,571	0,227	0,373
Высоколегиров.	0,5	0,460	0,183	0,373
Электролитическ. "	0,25	0,388	0,154	3,43

а для железных листов:

$$W_f = 1,64 f^2 d^2 B_{\max}^2 V \cdot 10^{-12},$$

где: f — число периодов в ск., d — диам. провода или толщина листа (в мм), $B_{\max}$ — максимальная магнитная индукция, V — объем железа (в см^3).

В общем виде ф-лу потерь на токи Фуко можно написать:

$$W_f = \sigma_f \left(d \cdot \frac{f}{100} \cdot \frac{B_{\max}}{1000} \right)^2 \cdot V,$$

где σ_f — постоянный коэф-т.

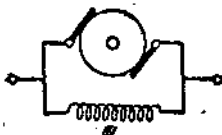
§ 12. Генераторы постоянного тока.

1. Составными частями генератора постоянного тока являются: а) якорь,—вращающаяся часть; б) электромагниты,—неподвижная часть.

2. По принципу возбуждения магнитного потока машины постоянного тока бывают трех основных типов: а) машина последовательного, или серийного, возбуждения (черт. 15); б) машина параллельного, или шунтового, возбуждения (черт. 16); в) машина смешанного возбуждения, или компаунд.



Черт. 15.



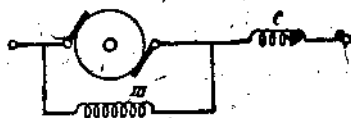
Черт. 16

Машины смешанного возбуждения в свою очередь разбиваются на два вида: а) машины с длинным шунтом (черт. 17); б) машины с коротким шунтом (черт. 18).

По направлению действия магнитных потоков машины компаунд различаются: а) машины с согласным направлением магнитных потоков,—когда



Черт. 17.



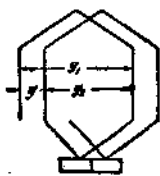
Черт. 18.

магнитные потоки шунтовой и серийной обмоток направлены в одну сторону; б) машины с встречным действием магнитных потоков,—когда шунтовой поток направлен против магнитного потока, создаваемого серийной обмоткой; в) машины с независимым возбуждением,—когда магнитный поток создается не самой машиной, а посторонним источником энергии.

3. Барабанные якоря выполняются так, что все проводники лежат на внешней поверхности якоря, а потому вся длина провода, за исключением торцовых соединений, является активной.



Черт. 19.



Черт. 20.



Черт. 21.

По типу выполнения барабанные обмотки разделяются на петлевые (черт. 20) и волновые (черт. 21).

4. Петлевой обмоткой называется такая обмотка, при которой отдельные проводники соединяются между собой последовательно то вперед, то назад, образуя при развернутой обмотке подобие незамкнутых петель. Петлевая обмотка применяется большей частью у машин с большой силой тока и с малым числом полюсов, т. е. у низковольтных и быстроходных машин.

5. Волновой обмоткой называется такая обмотка, у которой отдельные проводники соединяются между собой последовательно, все время располагая обмотку в одном направлении.

Волновые обмотки применяются большей частью у многополюсных машин малой силы тока, т. е. у машин тихоходных и большого напряжения.

Величина эдс, индуцируемой в якоре, выражается:

$$E = Z\Phi \frac{n}{60} \cdot \frac{p}{a} \cdot 10^{-8},$$

где: Z —число активных проводников, Φ —магнитный поток, вступающий в якорь под одним полюсом,

n —число оборотов якоря в минуту, p —число пар полюсов, a —число пар параллельных цепей.

6. Реакция якоря—это тот магнитный поток, который создается током в проводниках якоря.

7. Направление поля реакции якоря всегда совпадает с линией щеток.

8. Продольная составляющая поля реакции якоря направлена навстречу полю магнитов и его размагничивает.

9. Поперечная составляющая поля реакции якоря направлена перпендикулярно к главному потоку полюсов и вызывает смещение поля.

10. Добавочные, или дополнительные, полюсы предназначены для уничтожения поля реакции якоря.

Добавочные полюсы включаются последовательно с якорем, чтобы при любой нагрузке была компенсация поля реакции якоря полем добавочных полюсов. В случае отсутствия добавочных полюсов получение правильной, безыскровой, коммутации достигается сдвигом щеток.

11. Сила тока в одной параллельной цепи допускается в 250 ампер при напряжении до 120 вольт, в 200 ампер при напряжении свыше 120 вольт.

12. Свойства машин постоянного тока.

1) Свойства машин постоянного тока выявляются путем получения различных характеристик. Наиболее важными из них являются:

а) Характеристика холостого хода—представляет зависимость изменения эдс машины от тока в обмотке возбуждения при постоянном числе оборотов и в отсутствии тока в якоре:

$$E = f(I_a); I_k = 0; n = \text{const.}$$

б) Внешняя характеристика—представляет зависимость изменения напряжения на клеммах машины от силы тока в якоре:

$$E_k = f(I_k) \text{ при } n = \text{const}; I_a = \text{const.}$$

2) Свойства сериесгенератора. Схема соединения сериесгенератора выполняется как показано на черт. 22.



Черт. 22.



Черт. 23.

Характеристики сериесгенератора. С уменьшением нагрузки напряжение на клеммах машины увеличивается, т. к. ток в обмотке возбуждения увеличивается, а после определенной нагрузки начинает падать. Это объясняется тем, что при большой нагрузке потеря напряжения в якоре растет быстрее, нежели растет ЭДС.

В силу резкого изменения напряжения машины при нагрузке машины сериесного возбуждения почти никогда не применяются в качестве генераторов, т. к. от каждой машины нам необходимо бывает получить более или менее постоянное напряжение.

3) Свойства шунтовых генераторов. Характеристика холостого хода шунтовой машины представляет кривую намагничивания.

Падение напряжения с нагрузкой обуславливается потерей напряжения в якоре и размагничивающим действием потока реакции якоря, к-рые с увеличением нагрузки возрастают. Потеря напряжения в якоре равна:

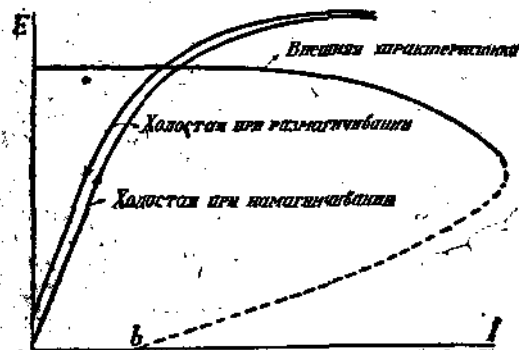
$$e = I_a R_a + e_p,$$

где I_a — ток в якоре, R_a — сопротивление якоря, e_p — потеря напряжения от реакции якоря.

Схема соединения шунтмашины при нормальной работе выполняется по черт. 24.

Для регулирования напряжения в цепь шунтовой обмотки включается последовательно шунтовой реостат. При положении ручки реостата на контакте *a* обмотка возбуждения замыкается на себя, что уменьшает искру при размыкании цепи машины.

Характеристики шунтгенератора (черт. 25). Внешняя характеристика с увеличением нагрузки медленно падает. При очень больших нагрузках внешняя характеристика перегибается и пересекает ось тока в точке *b*. За перегибом машина имеет неустойчивый режим работы и отрезок *об* представляет ток короткого замыкания машины.

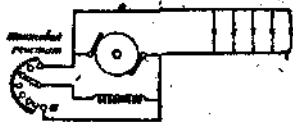


Черт. 25.

Благодаря тому, что напряжение машины мало изменяется с нагрузкой, шунтовые машины нашли широкое применение на эл. станциях, снабжающих энергией как моторы, так и лампы накаливания, а равно и для зарядки аккумуляторов.

4) Свойства компаунд-генераторов. У машин компаунд магнитный поток возбуждается двумя обмотками, одна из к-рых включается последовательно с якорем, а другая параллельно к якорю.

Генераторы компаунд нормального типа (не специальные) соединяются так, что магнитные потоки, возбуждаемые шунтовой и сериесной обмотками, складываются.



Черт. 24.

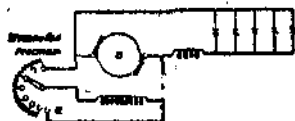
Табл. 23. Потери напряжения при полной нагрузке у шунтовых генераторов.

Генераторы с независимым возбуждением	Потеря напряжения (в %)	Генераторы с самовозбуждением	Потеря напряжения (в %)
Без дополнительных полюсов	8—12	Без дополнительных полюсов	15—20
С дополнительными полюсами	6—10	С дополнительными полюсами	10—15
Турбогенераторы	6—8	Турбогенераторы	8—12

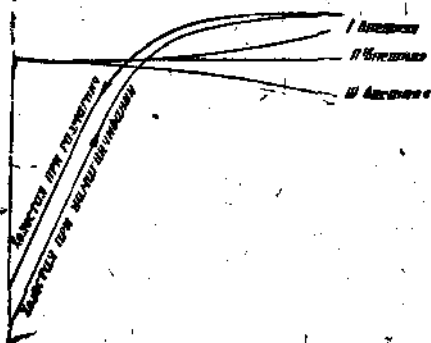
В машинах компаунд с длинным и коротким шунтом большой разницы в свойствах нет.

Схема соединения машины компаунд при нормальной работе выполняется по черт. 26. Для регулирования напряжения в цепь шунтовой обмотки включается шунтовой реостат. Контакт *a* на шунтовом реостате служит для искрогашения.

Характеристики компаунд-машины (черт. 27). Характеристика холостого хода компаунд-машины такая же, как и у др. типов машин. Что же касается внешней характеристики, то



Черт. 26.



Черт. 27.

она получается различная в зависимости от величин магнитных потоков, создаваемых шунтовой и серийной обмотками.

Обычно напряжение на клеммах компаунд-машины поддерживается с нагрузкой более постоянно, нежели у машины шунтовой, поэтому машина компаунд должна бы применяться там, где и шунт, но благодаря некоторым недостаткам при параллельной работе компаунд-генераторы сравнительно мало распространены на эл. станциях.

§ 13. Генераторы постоянного тока специального назначения.

1. **Электросварочные генераторы постоянного тока системы Кремера.** При дуговой сварке один полюс машины соединяется со свариваемым предметом, а др. полюсом является электрод. При зажигании дуги происходит короткое замыкание, к-рое на машину нормального типа отразилось бы очень пагубно. В силу этих причин для эл. сварки применяют машины, у к-рых ток короткого замыкания каким-либо способом ограничивается. В машинах Кремера, изготавливаемых заводами Всесоюзного эл.-технического объединения, это достигается тем, что кроме шунтовой обмотки возбуждения имеется еще последовательная обмотка, к-рая создает магнитный поток, направленный против магнитного потока, создаваемого шунтовой обмоткой.

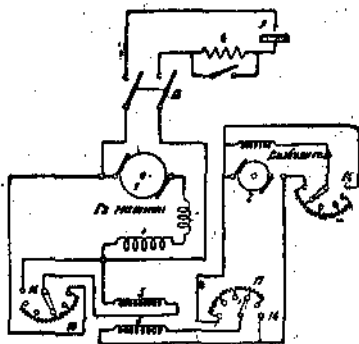
При зажигании дуги по серийной обмотке проходит большой ток, к-рый полностью уничтожает магнитный поток, создаваемый шунтовой обмоткой, и этим самым ток короткого замыкания уменьшается. После зажигания дуги ток короткого замыкания уменьшается, начинает преобладать магнитный поток шунтовой обмотки и машина начинает медленно увеличивать напряжение.

Для ускорения возбуждения машины в машинах Кремера помимо двух ранее названных обмоток имеется еще третья обмотка — независимого возбуждения, питаемая от постороннего источника тока.

Обмотка независимого возбуждения может питаться непосредственно от заводской сети постоянного тока с напряжением в 110 или 220 В, в том же случае, когда на 3-де постоянного тока нет, машины Кремера снабжаются отдельными шунтовыми машинами (возбудителями), сидящими на одном валу с главной машиной. В цепи главного тока машины никаких реостатов не ставится и необходимые свойства машины и внешняя характеристика устанавливаются системой реостатов в цепи тока возбуждения и подбором вытков отдельных катушек возбуждения при расчете машины.

Схема соединения машины системы Кремера.

Обозначения схемы соединения: 1—якорь машины Кремера; 2—якорь возбудителя; 3—обмотка добавочных полюсов для улучшения коммутации; 4—серийная (последовательная) обмотка; 5—шунтовая (параллельная) обмотка; 6—обмотка независимого возбуждения; 7—шунтовая обмотка возбудителя; 8—стабилизатор для спокойного горения дуги с приспособлением для отключения в виде рубильника; 9—вольтова дуга; 10—шунтовой реостат обмотки самовозбуждения; 11—шунтовой реостат независимой обмотки возбуждения; 12—шунтовой реостат возбудителя; 13—двухполюсный рубильник; 14—искрогасящие контакты шунтовых реостатов.

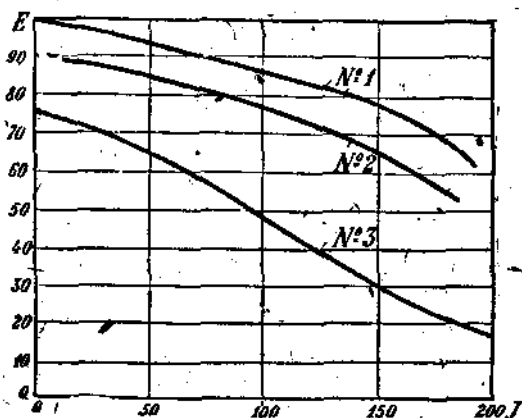


Черт. 28.

Внешние характеристики машины Кремера могут быть различны, в зависимости от положения шунтовых реостатов. На выполненных машинах были получены сл. характеристики черт. 29.

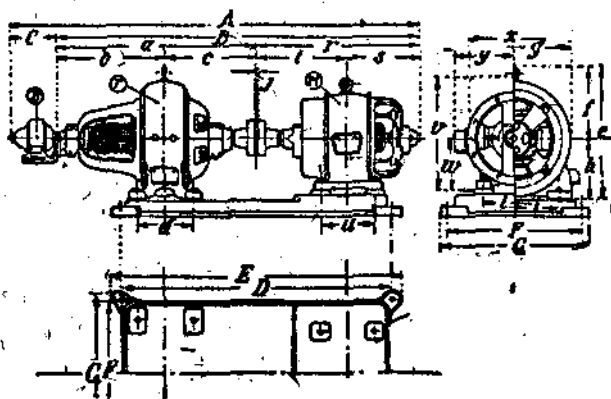
Табл. 24. Данные сварочных машин системы Кремера, изготовляемых ВЭО.

Тип	Максимальные:			Для каких работ рекомендуется	Какими электродами работает и макс. диам. электродов	Мощность привода двигателя НР	Вес генера- тора (в кг)
	сила тока в А		Работа на- пряж. в В				
	при сварке	про- должи- тель- ная					
СМ 1	200	150	35	Холодная сварка	Проволочным, диа- метром до 5 мм	10	340
СМ 2	300	200	60	То же и малая горя- чая сварка	То же до 6 мм, чу- гунным до 8 мм, угольным до 15 мм	28	580
СМ 3	600	460	65	То же и крупная го- рячая сварка и резка	То же чугуными др 15 мм, угольными до 30 мм	65	980



Черт. 29.

к-рого установлены две пары щеток. Одна пара расположена в нейтральном положении, а другая под серединой полюсов. Пара щеток, находящаяся в нейтральной, замкнута накоротко, а от др. пары (рабочие щетки) энергия отводится к потребителю.



Черт. 30.

Полюсы машины имеют обмотку, к-рая присоединена параллельно к рабочим щеткам.

Принцип действия машины заключается в след. При вращении якоря в магнитном потоке главных полюсов на короткозамкнутых щетках получается эдс, к-рая создает в якоре нек-рый ток. Ток, проходя по проводникам якоря, создает свое магнитное поле, к-рое будет направлено перпендикулярно к магнитному потоку главных полюсов. Проводники якоря, пересекая этот магнитный поток, создают на рабочих щетках новую эдс, к-рая и отводится в сеть потребителя.

Генераторы типа СМ изготавливаются для непосредственного соединения с электромотором как постоянного, так и переменного тока, а также для привода и от трансмиссии.

Для особо крупных работ генераторы могут включаться параллельно на одну дугу.

2. Машины поездного освещения системы Розенберга. Машина сист. Розенберга имеет два полюса, к-рым придана несколько особая форма, нежели в машинах нормального типа. В междуполюсном пространстве помещен якорь, на коллекторы

Табл. 24а. Размеры статорных машин (М. ш. 100).

Типы		Размеры (в миллиметрах)																												
агрегат	возбудитель	генератор	двигатель	мощность эл. (в НР)	общие					генератора								электродвигателя												
					A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
СМ-1	П-0,25	СМ-1	ПМ-105	11,5	1948	1658	290	1300	1400	600	700	6	824	434	390	265	625	350	530	275	400	828	373	455	270	543	265	452	305	309
СМ-2	П-0,25	СМ-2	ПМ-163	30	2367	2086	290	1556	1680	784	878	7	1028	535	493	315	574	416	640	330	495	1022	477	545	330	725	330	593	390	400
СМ-3	П-0,25	СМ-3	ПМ-195	60	2700	2410	290	1776	1872	844	940	7	1286	693	593	375	879	484	750	395	580	1125	513	612	390	829	370	678	435	460

машина всё время саморегулируется на постоянную силу тока во внешней цепи.

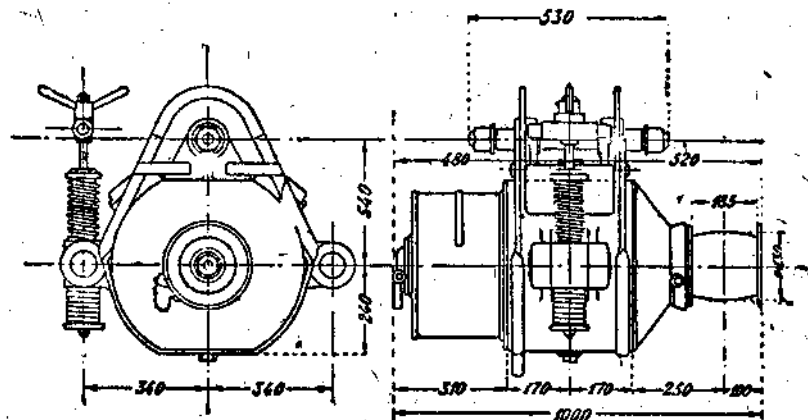
Характеристики машин Розенберга, изготавливаемых заводами Всесоюзного электротехнического объединения с одной только шунтовой обмоткой, представляются в виде, показанном на черт. 32.

Табл. 25. Типы машин сист. Розенберга для поездного освещения.

Т и п	РЕГ-26	РЕГ-35	РЕГ-76	РЕГ-86	РЕГ-117
Мощность (в Вт)	640	1000	1500	2000	3500
Напряжение (в В)	32	50	50	50	50
Сила тока (в А)	20	20	30	40	70

Как показывают характеристики, при малых числах оборотов машины ток в короткозамкнутых щетках достигает очень большой величины, опасной для обмотки якоря. Для уменьшения тока в короткозамкнутых щетках при малом числе

оборотов машины в машинах последнего выпуска устраивают не шунтовое, а смешанное возбуждение, включая еще добавочную серийную обмотку. В этом случае максимум тока в короткозамкнутых щетках резко понижается.



Черт. 33.

В условиях нормальной скорости ток в короткозамкнутых щетках не превосходит нормального тока.

Всесоюзным электротехническим объединением изготавливается тип машин сист. Розенберга для поездного освещения, показанный на черт. 33.

§ 14. Моторы постоянного тока.

А. Определения.

1. По типу возбуждения магнитного потока моторы постоянного тока, так же, как и генераторы, различаются:

- а) моторы последовательного возбуждения, или сериесмоторы;
- б) моторы параллельного возбуждения, или шунтовые;
- в) моторы смешанного возбуждения, или компаунд.

2. Противозлектродвижущая сила E_a , развиваемая в якоре мотора (в В):

$$E_a = E_k - I_a R_a = Z \frac{p}{a} \Phi \frac{n}{60} \cdot 10^{-8},$$

где: E_k —подведенное к мотору напряжение, I_a —ток якоря, R_a —сопротивление якоря, p —число пар полюсов, a —число пар параллельных цепей, Φ —магнитный поток одного полюса, n —число оборотов в мин., Z —число активных проводников якоря.

3. Направление вращения мотора определяется правилом левой руки: помещаем ладонь левой руки так, чтобы она была обращена к северному полюсу, по направлению четырех пальцев руки располагаем направление тока в проводниках якоря, тогда направление большого пальца руки укажет направление движения проводника.

4. Изменение направления движения мотора можно произвести или: а) за счет изменения направления тока в проводниках якоря; или же б) за счет изменения направления магнитного потока, изменяя направление тока в магнитах.

При одновременном изменении тока в якоре и тока в магнитах направление движения якоря не изменяется.

5. Число оборотов мотора выражается:

$$n = \frac{E_k \cdot 60 \cdot 10^8}{\Phi \cdot Z} = \frac{(E_k - I_a R_a) \cdot 60 \cdot 10^8}{\Phi \cdot Z}.$$

6. Регулирование скорости моторов производится за счет изменения магнитного потока. С увеличением магнитного потока скорость уменьшается, с уменьшением магнитного потока скорость увеличивается.

7. Вращающий момент мотора зависит (в кг/м):

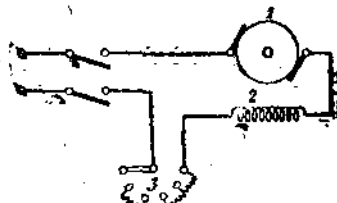
$$M = \frac{p}{a} \cdot \frac{Z}{2\pi \cdot 9,81} \cdot I_a \cdot \Phi \cdot 10^{-8},$$

т. е. вращающий момент пропорционален произведению тока якоря на величину магнитного потока.

Б. Схема пуска и свойства моторов постоянного тока серийного возбуждения.

1. Схема пуска двигателя с последовательным возбуждением выполняется по черт. 34, где 1—якорь мотора, 2—обмотка возбуждения мотора, 3—пусковой реостат.

В последовательном двигателе сила тока в обмотке возбуждения равна силе



Черт. 34.



Черт. 35.

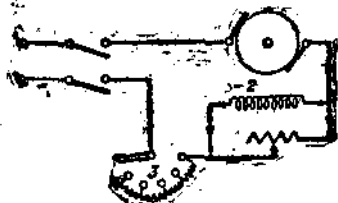
тока в якоре, поэтому с изменением нагрузки мотора изменяется и магнитный поток.

2. Характеристики числа оборотов вращающего момента и силы тока в якоре в зависимости от полезной мощности на валу представляются для мотора в 6,5 НР при напряжении в 110 В в изображенном на черт. 35 виде.

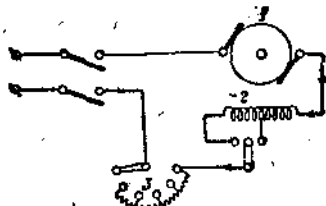
3. Вращающий момент последовательного двигателя увеличивается пропорционально квадрату тока в якоре, а скорость с увеличением нагрузки уменьшается, т. к. увеличивается магнитный поток. Отличительной — и чрезвычайно важной — чертой двигателей последовательного возбуждения является то, что они развивают большой вращающий момент и малую скорость при большой нагрузке. В силу этих причин сериесдвигатели нашли широкое применение для целей эл. тяги, привода кранов, в подъемниках и др. механизмах, требующих большого вращающего момента при пуске.

4. Регулирование скорости сериесдвигателей производится изменением магнитного поля, к-рое производится: или 1) изменением тока серийной обмотки путем параллельного включения к обмотке реостата, или же 2) за счет изменения числа витков обмотки возбуждения.

5. Схемы соединения сериесдвигателя с регулировкой скорости представляются в следующем виде (черт. 36 и 37):



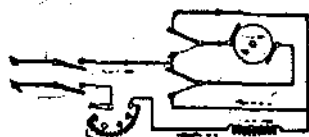
Черт. 36.



Черт. 37.

6. Схема изменения направления вращения сериесмотора с переключением. Изменение направления вращения достигается изменением направления тока в якоре (черт. 38).

В обмотке возбуждения направление тока не изменяется.



Черт. 38.

В. Крановые двигатели.

1. Крановые двигатели постоянного тока з-дов ВЭО идут под серией КП.

2. Режим работы крановых двигателей КП повторно-кратковременный с сокращен-

ными обозначениями ЕД%, (от начальных букв немецкого обозначения «Einschalt Dauer»). Моторы рассчитываются для работы 15% ЕД, 25% ЕД, и 40% ЕД.

3. Повторно-кратковременный режим определяется так:

$$\text{ЕД}\% = \frac{t}{T} = \frac{\text{время включения}}{\text{время включения} + \text{пауза}} \cdot 100.$$

Так, напр., если мотор работает 9 мин. в течение часа, то:

$$\frac{9}{60} \cdot 100 = 15\% \text{ ЕД.}$$

4. Мощность мотора определяется ф-лой:

$$W = \frac{Qv}{102\eta}, \text{ или: } W = \frac{M\omega}{975},$$

где: Q —максимальный поднимаемый груз, включая сюда крюк или грейфер и пр., v —скорость подъема (в м/сек), η —кпд. крановой установки, который м. б. принят, в зависимости от системы передачи, от 0,4 до 0,75; n —число об/мин., M —вращающий момент на валу мотора.

5. Напряжение моторов серии КП нормально рассчитывается на 500, 440 и 220 В. Напряжение в 110 В не считается нормальным и моторы выполняются по особому заказу.

6. Число оборотов моторов уменьшается по мере увеличения мощности. В качестве максимального числа оборотов выбрано 1000 об./мин. Моторы испытываются на максимальное число оборотов, равное трехкратному нормальному.

7. По типу возбуждения моторы всегда делаются серийными. Шунтовое возбуждение изготавливается по особому заказу. Нормально моторы изготавливаются четырехполюсными с дополнительными полюсами.

8. Корпус мотора делается из литой стали. Подшипники — скользящие. Вентиляции в моторах нет, т. к. они выполняются закрытой конструкции, однако во всех типах предусмотрена возможность перехода на вентиляционный тип путем установки на валу вентилятора и открытия люков на боковых щитах. Открытый мотор увеличивается по мощности против закрытого. Моторы для режима включения 25% ЕД на 13—15%. Моторы для режима работы 40% ЕД на 18—25%. При режиме работы 15% ЕД увеличение мощности при открытых люках незначительно.

Табл. 26. Технические данные (временные) крановых моторов КП закрытого типа при напряжении 220 В. Режим работы повторно-кратковременный (ВД).

Величина	Тип	15% ЕД				25% ЕД				40% ЕД				Вс (в м)
		P_s	kW	n	I	P_s	kW	n	I	P_s	kW	n	I	
I	КП 11/1501	1,7	1,26	1340	8,1	1,5	1,1	1450	7,1	1,1	0,8	1740	5,2	—
	КП 15/1601	2,3	1,7	1340	10,8	2	1,5	1450	9,4	1,5	1,1	1740	6,85	—
II	КП 22/1002	3,7	2,7	910	16,4	3	2,2	1000	13,2	2,5	1,83	1100	11,2	150
	КП 30/1002	5	3,7	920	22	4,1	3	1000	17,5	3,4	2,5	1075	14,4	165
III	КП 33/1003	9,2	6,8	920	39	7,6	5,5	1000	31,2	8,1	4,8	1075	25,2	240
	КП 75/1003	12,8	9,4	930	52	10,2	7,5	1000	41,	11,7	8,1	1025	32,8	285
IV	КП 110/734	19,2	14,1	655	78	15	11	730	59	15,7	8,6	850	46	420
	КП 150/704	26,5	19,5	650	105	20,4	15	700	79	15,	11	830	57	500
V	КП 220/515	39,0	28,7	560	143	30	22	615	115	21,8	16	695	82	745
	КП 300/496	53,4	39,2	505	206	41	30	550	156	30	22	622	112	865
VI	КП 400/316	71	52	470	274	54,5	40	615	206	40	29,2	570	148	1220
	КП 500/496	88,5	65	445	340	68	50	490	256	50	36,5	555	183	1405
VII	КП 640/487	114	83,5	425	430	87	64	456	324	63	46,5	520	232	1735
	КП 800/447	136,5	100,4	405	510	109	80	440	396	66	48,5	490	292	2055
VIII	КП 1000/428	172,5	127	385	640	136	100	420	500	103	76	455	376	—
	КП 1250/418	217	160	375	800	170	125	410	620	129	95	440	470	—

P_s —мощность на валу в HP; kW—мощность на валу в kW; n —число об./м.; I —сила тока в якоре (в А).

Табл. 27. Технические данные (временные) крановых моторов КП закрытого типа при напряжении в 440 В. Режим работы повторно-кратковременной (ЕД).

Величина	Тип	15% ЕД				25% ЕД				40% ЕД				Вес (в кг)
		P _с	kW	n	I	P _с	kW	n	I	P _с	kW	n	I	
I	КП 11/1501	1,7	1,26	1340	4,1	1,5	1,1	1450	3,55	1,1	0,8	1740	2,6	—
	КП 15/1501	2,3	1,7	1340	5,1	2	1,5	1450	4,7	1,5	1,1	1740	3,45	—
II	КП 22/1002	3,7	2,7	910	8,2	3	2,4	1000	6,6	2,5	1,8	1100	5,6	150
	КП 30/1002	5	3,7	920	11	4,1	3	1000	8,75	3,4	2,5	1075	7,2	165
III	КП 55/1003	9,2	6,8	920	19,5	7,5	5,5	1000	15,6	6,1	4,5	1075	12,6	240
	КП 75/1003	12,8	9,4	930	26	10,2	7,5	1000	20,5	8,1	6,0	1025	16,4	285
IV	КП 110/734	19,2	14,1	655	39	15	11	730	29,5	11,7	8,6	850	23	420
	КП 150/704	26,5	19,5	650	52,5	20,4	15	706	39,5	15	11	830	28,5	600
V	КП 220/615	39,0	28,7	560	71,5	30	20	615	57,5	22	16	695	41	745
	КП 300/555	53,4	39,2	505	103	41	30	550	77,5	30	22	622	56	895
VI	КП 400/516	71	52	470	137	54,5	40	515	103	40	29,2	570	74	1220
	КП 500/496	88,5	65	445	170	68	50	496	128	50	36,5	555	91,5	1405
VII	КП 640/467	114	83,5	425	215	87	64	465	162	63	46,5	520	116	1735
	КП 800/447	136	100,4	405	255	109	80	446	198	66	58,5	490	146	2055
VIII	КП 1000/428	172	127	385	320	136	106	420	250	103	76	455	188	—
	КП 1250/418	217	160	357	400	170	125	410	310	129	96	440	235	—

Табл. 28. Технические данные крановых моторов КП закрытого типа при напряжении в 220 В. Режим работы кратковременный.

Величина	Тип	30 минут				60 минут				90 минут			
		P _с	kW	n	I	P _с	kW	n	I	P _с	kW	n	I
II	КП 22/1002	4,28	3,15	840	19,6	3	2,2	1000	13,2	2,37	1,74	1175	10,4
	КП 30/1002	5,85	4,3	815	26,2	4,1	3	1000	17,5	3,22	2,37	1100	14
III	КП 55/1003	10,7	7,85	915	47,4	7,5	5,5	1000	31,2	5,9	4,35	1100	24,6
	КП 75/1003	17,6	10,7	910	61	10,2	7,5	1000	41	8	5,9	1040	31,4
IV	КП 110/734	19,7	14,5	640	80	15,9	11,7	720	62	13,1	9,65	800	50
	КП 150/704	26,9	19,8	620	114	21,8	16	675	85	17,8	13,1	750	68
V	КП 220/615	41,8	30,8	510	188	31,3	23,8	600	120	25,2	18,5	670	96
	КП 300/555	57,2	42	490	224	44,1	32,4	540	170	34,3	25,2	600	130
VI	КП 400/516	73,5	54	450	288	59	43,3	485	226	47	34,6	530	180
	КП 500/496	93,9	69	430	360	73,7	54,2	465	280	59,2	43,5	515	220
VII	КП 640/467	124,5	91,5	415	480	98	72	445	370	79,5	58,5	470	300
	КП 800/447	165	114	390	580	123,5	91	415	464	100	74	440	376

[illegible]

Таблица габаритных размеров проводов типа КП (сер. 39)

Типы	А	А ₁	А ₂	Б	Б ₁	В	В ₁	Г	Г ₁	Г ₂	Г ₃	Д	Д ₁	Д ₂	Д ₃	Е	Е ₁	Ж	Ж ₁	Ж ₂	Ж ₃	И	И ₁	И ₂	И ₃
КП 29/1002	—	—	790	—	—	—	354	—	—	90	85	—	—	3	3	—	—	—	—	38	35	—	—	35	32
КП 29/1003	—	—	—	—	348	—	354	—	—	90	—	—	—	3	3	—	—	—	—	38	35	—	—	35	—
КП 29/1002	—	—	830	—	—	—	374	—	—	90	85	—	—	3	3	—	—	—	—	38	35	—	—	35	32
КП 29/1003	—	—	—	—	368	—	374	—	—	90	—	—	—	3	3	—	—	—	—	38	35	—	—	35	—
КП 55/1002	—	—	850	—	—	—	387,5	—	—	100	90	—	—	3	4	—	—	—	—	45	38	—	—	42	35
КП 55/1003	—	—	—	—	368,5	—	387,5	—	—	100	—	—	—	3	3	—	—	—	—	45	38	—	—	42	—
КП 75/1002	—	—	905	—	—	—	415	—	—	100	90	—	—	3	4	—	—	—	—	45	38	—	—	42	35
КП 75/1003	—	—	—	—	396	—	415	—	—	100	—	—	—	3	3	—	—	—	—	45	38	—	—	42	—
КП 119/724	1 030	—	—	—	—	465	—	120	115	—	—	5	5	—	—	30	30	55	50	—	—	—	46	41,5	—
КП 119/724	—	970	—	505	—	465	—	120	—	—	—	5	—	—	—	30	—	55	—	—	—	—	46	—	—
КП 150/704	1 150	—	—	—	—	495	—	120	115	—	—	5	5	—	—	30	30	55	50	—	—	—	46	41,5	—
КП 150/704	—	1 030	—	535	—	495	—	120	—	—	—	5	—	—	—	30	—	55	—	—	—	—	46	—	—
КП 220/612	1 390	—	—	—	—	618	—	170	155	—	—	6	5	—	—	45	40	80	70	—	—	—	67,5	58,5	—
КП 220/612	—	1 230	—	612	—	618	—	170	—	—	—	6	—	—	—	45	—	80	—	—	—	—	67,5	—	—
КП 220/555	1 480	—	—	—	—	663	—	170	155	—	—	6	5	—	—	45	40	80	70	—	—	—	67,5	58,5	—
КП 220/555	—	1 320	—	657	—	663	—	170	—	—	—	6	—	—	—	45	—	80	—	—	—	—	67,5	—	—
КП 400/416	1 615	—	—	—	—	690	—	190	170	—	—	7,5	8	—	—	50	45	90	80	—	—	—	76	67,5	—
КП 400/416	—	1 437	—	747	—	690	—	190	—	—	—	7,5	—	—	—	50	—	90	—	—	—	—	76	—	—
КП 500/404	1 695	—	—	—	—	730	—	190	170	—	—	7,5	8	—	—	50	45	90	80	—	—	—	76	67,5	—
КП 500/404	—	1 517	—	787	—	730	—	190	—	—	—	7,5	—	—	—	50	—	90	—	—	—	—	76	—	—
КП 500/404	—	—	—	—	—	775	—	210	190	—	—	10	8	—	—	55	50	100	90	—	—	—	84,5	76	—
КП 640/407	1 785	—	—	—	—	775	—	210	—	—	—	10	—	—	—	55	—	100	—	—	—	—	84,5	—	—
КП 640/407	—	1 587	—	812	—	775	—	210	—	—	—	10	8	—	—	55	—	100	—	—	—	—	84,5	76	—
КП 600/447	1 895	—	—	—	—	830	—	210	190	—	—	10	—	—	—	55	50	100	90	—	—	—	84,5	76	—
КП 600/447	—	1 697	—	867	—	830	—	210	—	—	—	10	—	—	—	55	—	100	—	—	—	—	84,5	—	—

Таблица габаритных размеров моторов типа КП. (Продолжение)

Типы	К	К ₁	Л	М	Н	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ю	Ю ₁	Ю ₂	Ю ₃	Я	Я ₁	Я ₂	Я ₃	Э
КП 23/1002	—	—	75	190	250	440	180	260	180	180	360	11	25	80	300	380	—	—	38,5	35	—	—	—	12	10
КП 29/1002	—	—	75	190	250	440	180	260	180	180	360	17	25	80	300	380	—	—	38,5	—	—	—	—	12	—
КП 30/1002	—	—	75	230	290	440	180	260	180	180	360	17	25	80	300	380	—	—	38,5	35	—	—	—	12	10
КП 30/1002	—	—	75	230	290	440	180	260	180	180	360	17	25	80	300	380	—	—	38,5	—	—	—	—	12	—
КП 55/1002	—	—	85	215	275	540	230	310	225	230	455	21	30	90	390	480	—	—	46	38,5	—	—	—	14	12
КП 55/1002	—	—	85	215	275	540	230	310	225	230	455	21	30	90	390	480	—	—	46	—	—	—	—	14	—
КП 75/1002	—	—	85	270	330	540	230	310	225	230	455	21	30	90	390	480	—	—	46	—	—	—	—	14	12
КП 75/1002	—	—	85	270	330	540	230	310	225	230	455	21	30	90	390	480	—	—	46	—	—	—	—	14	—
КП 110/224	ТР 1"	ТР 1"	100	270	350	605	255	350	260	255	505	24	35	100	430	530	53	48,3	—	—	—	16	16	—	—
КП 110/224	ТР 1"	—	100	270	350	605	255	350	250	255	505	24	35	100	430	530	53	—	—	—	—	16	—	—	—
КП 150/264	ТР 1"	ТР 1"	100	330	410	605	255	350	260	255	505	24	35	100	430	530	53	48,3	—	—	—	16	16	—	—
КП 150/264	ТР 1"	—	100	330	410	605	255	350	250	255	505	24	35	100	430	530	53	—	—	—	—	16	—	—	—
КП 180/264	ТР 1 1/2"	ТР 1 1/2"	115	340	430	660	285	375	280	285	565	28	40	110	480	590	77,2	67,2	—	—	—	24	20	—	—
КП 180/264	ТР 1 1/2"	—	115	340	430	660	285	375	280	285	565	28	40	110	480	590	77,2	—	—	—	—	24	—	—	—
КП 200/264	ТР 1 1/2"	ТР 1 1/2"	115	430	520	660	285	375	280	285	565	28	40	110	480	590	77,2	67,2	—	—	—	24	20	—	—
КП 200/264	ТР 1 1/2"	—	115	430	520	660	285	375	280	285	565	28	40	110	480	590	77,2	—	—	—	—	24	—	—	—
КП 300/264	ТР 2"	ТР 2"	130	380	480	770	325	445	320	325	645	31	45	120	550	670	86,5	77,2	—	—	—	24	24	—	—
КП 300/264	ТР 2"	—	130	380	480	770	325	445	320	325	645	31	45	120	550	670	86,5	—	—	—	—	24	—	—	—
КП 400/264	ТР 2"	ТР 2"	130	460	560	770	325	445	320	325	645	31	45	120	550	670	86,5	77,2	—	—	—	24	24	—	—
КП 400/264	ТР 2"	—	130	460	560	770	325	445	320	325	645	31	45	120	550	670	86,5	—	—	—	—	24	—	—	—
КП 500/264	ТР 2 1/2"	ТР 2"	145	420	530	890	380	510	380	380	760	35	50	140	650	790	96,3	86,5	—	—	—	28	24	—	—
КП 500/264	ТР 2 1/2"	—	145	420	530	890	380	510	380	380	760	35	50	140	650	790	96,3	—	—	—	—	28	—	—	—
КП 600/264	ТР 2 1/2"	ТР 2"	145	530	640	890	380	510	380	380	760	45	50	140	650	790	96,3	86,5	—	—	—	28	24	—	—
КП 600/264	ТР 2 1/2"	—	145	530	640	890	380	510	350	380	760	35	50	140	650	790	96,3	—	—	—	—	28	—	—	—

Табл. 29. Технические данные новых моторов КП закрытого типа при напряжении в 440 В. Режим работы кратковременный.

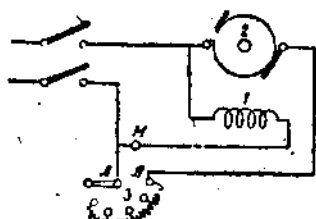
Величина	Тип	30 минут				60 минут				90 минут			
		P_s	kW	η	I	P_s	kW	η	I	P_s	kW	η	I
II	КП 22/1002	4,28	3,15	840	9,8	3	2,2	1000	6,6	2,37	1,74	1175	6,2
	КП 30/1002	5,85	4,3	815	13,1	4,1	3	1000	8,75	3,22	2,37	1100	7
III	КП 55/1003	10,7	7,85	915	23,7	7,5	5,5	1000	15,6	5,9	4,35	1100	12,3
	КП 75/1003	14,6	10,7	910	30,5	10,2	7,5	1000	20,5	8	5,9	1140	15,7
IV	КП 110/734	19,7	14,5	640	40	15,9	11,7	720	31	13,1	9,65	800	25
	КП 150/704	26,9	19,8	620	57	21,8	16	675	42,5	17,8	13,1	750	34
V	КП 220/615	41,8	30,8	510	84	31,3	23,8	600	60	25,2	18,5	670	48
	КП 300/555	57,2	42	490	112	44,1	32,4	540	85	34,3	25,2	600	65
VI	КП 400/516	73,5	54	450	144	59	43,3	485	113	47	34,6	530	90
	КП 500/496	93,9	69	430	180	73,7	54,2	465	140	59,2	43,5	515	110
VII	КП 640/467	124,5	91,5	415	240	98	72	445	185	79,5	58,5	470	150
	КП 800/447	155	114	390	290	123,5	91	415	232	100	74	440	188

Г. Схема пуска и свойства моторов постоянного тока шунтового возбуждения.

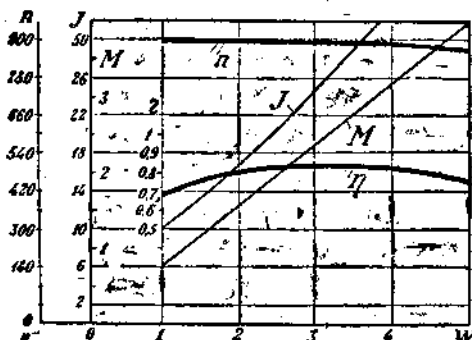
1. Схема пуска двигателя с шунтовым возбуждением выполняется в по черт. 40, где 1—обмотка возбуждения мотора, 2—якорь мотора, 3—пусковой реостат.

В шунтовом двигателе сила тока в обмотке возбуждения не зависит от силы тока в якоре и при постоянном напряжении сети не изменяется с изменением нагрузки мотора.

Характеристика числа оборотов вращающего момента и силы тока в якоре в зависимости от полезной мощности.



Черт. 40.



Черт. 41.

на валу представляется для мотора 3,5 НР при напряжении в 110 В в изображенном на черт. 41 виде.

2. Вращающийся момент шунтового двигателя изменяется прямо пропорционально току, т. к. величина магнитного потока не зависит от нагрузки. В силу этих причин число оборотов мотора остается почти постоянным при различных условиях нагрузки.

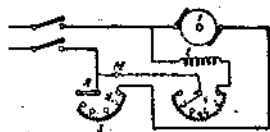
Отличительной чертой шунтовых двигателей является:

- а) постоянство числа оборотов;
- б) небольшой вращающий момент с места.

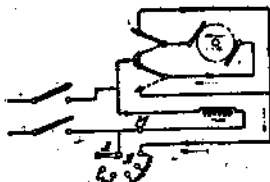
Шунтовые моторы нашли широкое применение там, где приводимые в движение механизмы требуют небольшого вращающего момента с места и постоянство скорости.

3. Регулирование скорости шунтовых двигателей производится изменением величины магнитного поля, которое производится за счет введения в цепь шунтовой обмотки шунтового реостата.

Схема шунтового двигателя с регулировкой скорости выполняется по черт. 42, где 1—якорь мотора, 2—шунтовая обмотка возбуждения, 3—пусковой реостат, 4—шунтовой реостат.



Черт. 42.

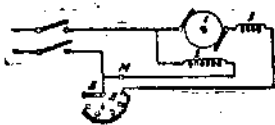


Черт. 43.

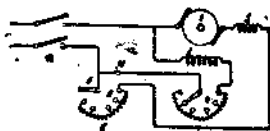
4. Схема пуска для изменения направления вращения мотора с переключателем (черт. 43). Изменение направления вращения достигается изменением тока в якоре. Ток в обмотке возбуждения не изменяется.

5. Схемы пуска и свойства моторов компаунд (смешанного возбуждения). Схема пуска двигателя компаунд выполняется по черт. 44, где 1—якорь мотора, 2—шунтовая обмотка мотора, 3—серийная обмотка мотора, 4—пусковой реостат.

В двигателе компаунд магнитный поток создается одновременно двумя обмотками—серийной и шунтовой. Направление этих магнитных по-



Черт. 44.



Черт. 45.

токов м. б. или согласно, или встречно, при чем магнитный поток шунтовой обмотки остается почти неизменным, а поток серийной обмотки с увеличением нагрузки увеличивается.

В зависимости от направления действия магнитных потоков и их отношения свойства компаунд-моторов бывают различны.

Обыкновенно величина серийного потока бывает не велика по сравнению с потоком шунтовой обмотки, поэтому моторы компаунд по свойствам подходят ближе к шунтовым моторам, нежели к серийным моторам.

6. Регулирование скорости компаунд-моторов чаще всего производится за счет изменения магнитного потока шунтовой обмотки путем включения в ее цепь шунтового реостата, или, как его еще называют, магнитного регулятора.

Схема соединения в этом случае выполняется по черт. 45, где 1—якорь мотора, 2—шунтовая обмотка мотора, 3—серийная обмотка мотора, 4—шунтовой реостат, 5—пусковой реостат.

1. Кпд у динамомашины называется отношением:

$$\eta = \frac{\text{отдаваемая мощность}}{\text{подводимая мощность}}$$

2. Кпд генератора выражается:

$$\eta = \frac{\text{отдаваемая эл. мощность}}{\text{отдаваемая эл. мощность} + \text{потери}}$$

3. Кпд для мотора:

$$\eta = \frac{\text{подводимая эл. мощность} - \text{потери}}{\text{подводимая эл. мощность}}$$

По Гольдшмидту средними значениями кпд можно считать след. величины.

Табл. 30. Значение (в процентах) кпд машин постоянного тока небольшой мощности при полной нагрузке.

Мощность P_2	Число оборотов в минуту					Мощность P_2	Число оборотов в минуту				
	62½	125	250	500—2000	3000		62½	125	250	500—2000	3000
1	—	—	67	73	73	50	84	87,5	90	91,8	90,8
2	—	68	73	78,5	78	60	85	88,8	90,5	92	90,9
5	70	76	79,5	83	82,5	70	85,8	89,2	90,5	92	91
10	75	80	84,5	87	86,5	80	86,5	89,7	91	92	91
20	79	84	87	90	89,5	90	87	90	91	92	91
30	81,5	85,5	88	91	90	100	87,8	90	91,2	92	91
40	83	86,5	89	91,5	90,5	110	88,1	90	91,3	92	91

Табл. 31. Значения (в процентах) кпд машин постоянного тока большой мощности при полной нагрузке.

Мощность (в кВт)	Число об./мин.						Мощность (в кВт)	Число об./мин.					
	625	125	250	500—1500	2000	3000		625	125	250	500—1500	2000	3000
100	88	90,5	92	93	92	91	1500	94,5	95,2	95,7	95	—	—
250	90	92	93,5	94	92,8	91,2	2000	—	96,6	96	95,2	—	—
500	92	93,5	94,5	94,5	93	91,7	3000	—	96	96	95,2	—	—
750	93	94	95	94,8	93	91,8	5000	—	—	95,7	95	—	—
1000	93,7	94,7	95,4	95	93,2	—							

У хорошо рассчитанной и хорошо сконструированной машины максимальное значение кпд получается при полной нагрузке. При нагрузке от 50 до 125% полной значение кпд изменяется незначительно.

В машинах с дополнительными полюсами кпд может понизиться на 1—2% из-за потерь в обмотке добавочных полюсов.

Табл. 32. Технические данные динамомашин и электродвигателей постоянного тока типа HN и NHG, изготавливаемых ВЭО.

Тип	Динамомашины				Электродвигатели				Вес (в кг) без салазок и без шкива	Цена (в руб.)	
	напряж. (в В)	сила тока (в А)	полез- ная мощн. (в кВт)	Об./м.	на- пряж. (в В)	эффе́ктивн. мощность		Об./м			сила тока (в А)
						(в кВт)	(в НР)				
HN 4	115	2,2	0,25	1 900	110	0,18	0,25	1 050	2,45	22	125
	230	1,1	0,25	2 000	220	0,18	0,25	1 250	1,23	22	125
HN 5	115	4,3	0,5	2 450	110	0,37	0,5	1 750	4,5	22	138
	115/160	4,3/3,1	0,5	2 950	220	0,37	0,5	1 850	2,3	22	138
	230	2,2	0,5	2 600	440	0,37	0,5	1 850	1,14	22	138
	470	1,05	0,5	2 750							
HN 10	115	8,7	1	2 500	110	0,74	1	1 750	8,5	33	162
	115/160	8,7/5,2	1	3 000	220	0,74	1	1 750	4,3	33	162
	230	4,35	1	2 500	440	0,74	1	1 800	2,15	33	162
	470	2,1	1	2 700							
HN 20	115	17,4	2	2 400	110	1,47	2	1 700	17	49	235
	115/160	17,4/12,5	2	2 850	220	1,47	2	1 700	8,25	49	235
	230	8,7	2	2 400	440	1,47	2	1 860	4,15	49	235
	470	4,25	2	2 650							
HN 30	115	26	3	2 350	110	2,21	3	1 650	24	65	289
	115/160	26/18,8	3	2 850	220	2,21	3	1 650	11,8	65	289
	230	13	3	2 300	440	2,21	3	1 680	5,9	65	289
	470	6,4	3	2 350							
HN 40	115	30	3,5	2 250	110	3	4	1 580	32,5	79	352
	115/160	30/22	3,5	2 750	220	3	4	1 580	16	79	352
	230	15,2	3,5	2 250	440	3	4	1 580	7,95	79	352
	470	7,5	3,5	2 250							
HN 60	115	43,5	5	2 000	110	4,42	6	1 400	48	124	460
	115/160	43,5/31,5	5	2 420	220	4,42	6	1 400	23,5	124	460
	230	21,7	5	2 000	440	4,42	6				
	470	10,6	5	2 120							
HN 80	115	60,8	7	1 700	110	5,9	8	1 250	6,2	234	630
	115/160	60,8/43,5	7	1 350	220	5,9	8	1 250	31	234	630
	230	30,4	7	1 700	440	5,9	8	1 250	15,5	234	630
	470	14,9	7	1 700							

Табл. 33. Технические данные динамомашин и электродвигателей постоянного тока типа HN и NHG, изготавливаемых ВЭО.

Тип	Динамомашины				Электродвигатели				Вес (в кг) без салазок и без шкива	Цена (в руб.)	
	напряж. (в V)	сила тока (в A)	полез- ная мощн. (в kW)	Об./м	на- пряж. (в V)	эффективн. мощность		Об./м.			сила тока (в A)
						(в kW)	(в HP)				
HN 110	115	87	10	1600	110	8,1	11	1130	85	299	767
	115	65	7,5	1220	110	6,26	8,5	870	67	299	767
	115/160	65/47	7,5	1460	220	8,1	11	1130	42,4	299	767
	230	43,5	10	1600	440	8,1	11	1130	21,2	299	767
HN 140	470	21,3	10	1600							
	115	108	12,5	1450	110	10,3	14	1100	110	345	895
	115	87	10	1230	110	8,5	11,5	900	92	345	895
	115/160	87/62,5	10	1450	220	10,3	14	1100	57	345	895
HN 180	230	54	12,5	1400	440	10,3	14	1100	27	345	895
	470	26,5	12,5	1400							
	115	139	16	1400	110	13,2	18	1070	140	440	1054
	115	109	12,5	1140	110	10,3	14	830	112	440	1054
	115/160	109/78	12,5	1330	220	13,2	18	1070	69	440	1054
	230	70	16	1400	440	13,2	18	1070	34,5	440	1054
	470	34	16	1370							

Табл. 33. (Продолжение.)

Тип	Динамомашинны				Электродвигатели				Вес (в кг) без салазок и без шкива	Цена (в руб.)	
	напряж. (в В)	сила тока (в А)	полез- ная мощн. (в кВт)	Об./м.	на- пряж. (в В)	эффективн. мощность		Об./м.			сила тока (в А)
						(в кВт)	(в НР)				
НН 200	115	174	20	1320	110	17	23	1000	176	535	1202
	139	139	16	1180	100	13,2	16	890	140	535	1222
	115/160	180/100	16	1360	220	17	23	1000	87	535	1222
	230	87	20	1320	440	17	23	1620	43,5	535	1222
НН 250	470	42,5	20	1320							
	115	217	25	1250	110	21,3	29	620	222	690	1573
	115	174	20	1020	110	17	23	740	178	690	1573
	115/160	174/125	20	1170	220	21,3	29	620	109	690	1573
НН 300	230	109	25	1250	440	21,3	39	830	54,5	690	1573
	470	53	25	1250							
	115	260	30	1100	110	26	35	800	265	875	1928
	115	217	25	900	110	20,6	28	650	215	875	1928
НН 350	115/160	217/156	25	1050	220	26	35	800	130	875	1928
	230	130	30	1100	440	26	35	800	65	875	1928
	470	64	30	1120							

Табл. 34. Технические данные динамомашин и электродвигателей постоянного тока типа НН и ННЮ, изготовляемых ВЭО.

Режим работы продолжительный.

Тип	Динамомашинны				Электродвигатели				Вес машины (в кг) без са- лазок и без шкива	Цена (в руб.)	
	напряж. (в В)	сила тока (в А)	полез- ная мощн. (в кВт)	Об./м.	на- пряж. (в В)	эффективн. мощность		сила тока (в А)			
						(в кВт)	(в НР)				
НН 400	115	348	40	1050	110	34,6	47	740	354	1105	2 480
	115	278	32	840	110	28	38	620	288	1105	2 480
	115/160	278/200	32	990	220	34,6	47	740	175	1105	2 480
	230	174	40	1050	440	34,6	47	750	87,5	1105	2 480
НН 500	470	85	40	1000							
	115	478	40	820	110	44,2	60	680	445	1566	3 029
	115/160	478/343	55	1080							
	230	239	55	930	220	44,2	60	690	220	1566	3 029
НН 700	470	117	55	930	440	44,2	80	690	110	1566	3 029
	115	660	85	820	110	59	80	610	600	2 009	3 726
	115/160	650/470	75	970							
	230	328	75	820	220	59	80	610	295	2 009	3 726
НН 800	470	159	75	820	440	59	80	610	147	2 009	3 726
	115	800	92	600	110	81	110	530	800	2 850	5 724
	230	460	92	600	220	81	110	530	400	2 850	5 724
	470	196	92	600	440	81	110	530	201	2 850	5 724
НН 800	115	1000	115	750	110	99,3	135	660	900	2 900	6 123
	230	500	115	750	220	99,3	135	660	485	2 900	6 123
	470	299	115	750	440	99,3	135	660	248	2 900	6 123
	115	1045	120	600	110	103	140	530	1630	3 250	6 568
НН 1000	230	523	120	600	220	103	140	530	515	3 250	6 568
	470	258	110	600	440	103	140	530	257	3 250	6 568
	115	1360	125	750	110	129	175	660	1280	3 300	6 808
	230	650	175	750	220	129	175	660	640	3 300	6 808
НН 1000	470	379	175	750	440	129	175	660	320	3 300	6 808

§ 15. Генераторы трехфазного переменного тока

1. Составными частями генератора являются: 1) статор—неподвижная часть; 2) ротор,—вращающаяся часть.

2. Для малых мощностей низкого напряжения генераторы выполняются с вращающейся обмоткой и неподвижными полюсами.

3. Для больших мощностей и высокого напряжения г. выполняются с вращающимися полюсами и неподвижной обмоткой.

4. Генераторы с вращающимися полюсами обычно выполняются так, что полюсы располагаются внутри машины, хотя в нек-рых случаях располагаются и вне для увеличения махового момента.

5. Конструкция генераторов меняется в зависимости от числа оборотов: тихоходные—имеют большое число полюсов, быстроходные—малое число полюсов.

6. Число периодов генератора зависит от числа оборотов и числа пар полюсов:

$$f = \frac{pn}{60},$$

где: f —число периодов, p —число пар полюсов, n —число об./м.

7. Обмотка генераторов выполняется или в виде катушек, или в виде стержней.

8. Число пазов генератора делится на число фаз, умноженное на число полюсов. Пазы, принадлежащие к одному полюсу, распределяются поровну на число фаз.

9. Обмотки генераторов трехфазного тока обычно соединяются или в треугольник, или в звезду.

10. Число колец трехфазного генератора бывает или три, или четыре, или два. Четвертое кольцо получается для случая соединения генератора в звезду, когда выводится нулевой провод; два кольца—тогда, когда в генераторе вращаются полюсы.

11. Генераторы переменного тока возбуждаются посторонним источником энергии постоянного тока или возбудителем, сидящим на одном валу с генератором.

12. Эдс генератора выражается сл. о.:

$$E_{\phi\phi} = 4,44 f n \cdot \Phi \cdot 10^{-8},$$

где: f —число периодов; n —число витков в фазе; Φ —поток одного полюса; $E_{\phi\phi}$ —фазовая эдс.

Табл. 35. Стандартные генераторы для соединения с паровыми турбинами (турбогенераторы).

Мощность в кВ при $\cos \varphi = 0,7$	Мощность (в кВ) при $\cos \varphi = 1$	Об./м.	Напряжение (в В)	Мощность (в кВ) при $\cos \varphi = 0,7$	Мощность (в кВ) при $\cos \varphi = 1$	Об./м.	Напряжение (в В)
1000	1430	3000	3300 — 6600	1000	14285	3000	6600 — 11000
2000	2860	3000	3300 — 6600				
3000	4285	3000	3300 — 6600				
5000	7140	3000	3300 — 6600				
		1500	3300 — 6600	15000	21430	1500	6600 — 11000
				20000	28570	1500	6600 — 11000

Табл. 36. Стандартные генераторы трехфазного тока, предназначенные для ременного и непосредственного соединения с паровыми машинами, двигателями вы. сгорания и водяными турбинами (мощности выражены в киловатт-амперах).

Мощность (в kVA)	Обороты в минуту		Напряжение (в V)	Форма исполнения	
	при ремен- ной пере- даче	при не- посред- ственном соедине- нии		для ременной передачи	для непосредствен- ного соединения
10	1500—1000	500	220—550	Два щитовых подшипника с нор- мальным ремен- ным шкивом.	Два щитовых под- шипника со свободным концом вала.
25	1500—1000	375	220—550		
50	1500—1000	375	220—550—3300		
75	1000—750	300	220—550—3300		
100	1000—750	300	{ 220—550 3300—6600 550—3300 6600	Два щитовых подшипника; один стоячий подшип- ник на общей чу- гунной плите. Шкив между стоя- чим подшипником и одним из щито- вых подшипников.	1) Два щитовых подшипника со свобод- ным концом вала. 2) Один наружный стоячий подшипник, укороченная фунда- ментная плита; жест- кое соединение. 3) Как п. 2, но из- мененная фундамен- тная плита для уста- новки на ней подшип- ника двигателя.
150	750—600	300—250			
200	750—600	300—225			
300	—	300	550	—	1) Один наружный подшипник стоячий, укороченная фунда- ментная плита; жест- кое соединение. 2) Один наружный стоячий подшипник, измененная фунда- ментная плита для установки на ней под- шипника двигателя; жесткое соединение.
500	—	250	3300	—	
		214	6600	—	
		250	3300	—	
750	—	214	6600	—	
		178	6600	—	
		214	3300	—	
1000	—	187	6600	—	
		125	6600	—	
		187	3300	—	
		125	6600	—	
		107	6600	—	

Табл. 37. Значения кпд генераторов трехфазного тока 50 пер./сек, при $\cos \varphi = 1$, при полной нагрузке.

Мощность (в kW)	Число оборотов в мин.						Мощность (в kW)	Число оборотов в мин.					
	125	250	500	750	1500	3000		125	250	500	750	1500	3000
10	75	78	82	83	83	80	1000	94	94,5	94,5	96	95	93
25	83,5	84,5	86	86,5	86,5	85	1500	95	95,5	95,5	96,5	95,5	94
50	86,5	87,5	89	89	89	88	2000	96	96	96	96,5	95,5	—
100	89	89,5	90	91	91	89,5	3000	96,5	96,5	96,5	96,5	—	—
250	90,5	91	92	93,5	92,5	91	5000	96,5	96,5	96,5	97	—	—
500	92,5	93	93	94,4	93,5	92							

13. Кдд при $\cos \varphi = 0,85$ м. б. подсчитан по эмпирической ф-ле Гольдшмидта:

$$\eta_{0,85} = \frac{\eta_1}{1,3 - 0,3\eta_1},$$

где: $\eta_{0,85}$ — кдд при $\cos \varphi = 0,85$, η_1 — кдд при $\cos \varphi = 1$.

14. Кдд однофазных генераторов подсчитывается след. ф-лой:

$$\eta_1 = \frac{\eta_3}{1,5 - 0,3\eta_3},$$

где: η_1 — кдд однофазного генератора, η_3 — кдд трехфазного генератора.

15. С изменением нагрузки кдд также изменяется. За отсутствием данных изменения кдд с изменением нагрузки для русских машин приводим данные фирмы Симекс-Шуккерт.

Табл. 88. Данные об изменении кдд с изменением нагрузки.

При на- грузке 25%	При на- грузке 50%	При на- грузке 75%	При на- грузке 100%	При на- грузке 125%	При на- грузке 150%	При на- грузке 25%	При на- грузке 50%	При на- грузке 75%	При на- грузке 100%	При на- грузке 125%	При на- грузке 150%
0,88	92,5	93,5	94	93,3	92,5	0,77	84,5	86	86	84,5	82
0,87	91,5	92,5	93	92,5	91,5	0,76	83,5	85	85	83,5	81
0,86	91	92	92	91,5	90	0,745	82,5	84	84	82,5	80
0,85	90	91	91	90	88,5	0,73	81,5	83	83	81,5	79
0,83	89	90	90	89	87	0,715	80,5	82	82	80	77
0,82	88	89	89	88	86	0,705	79,5	81	81	79	76
0,80	87	88	88	87	85	0,69	78,5	80	80	78	75
0,79	86	87	87	86,5	83	0,67	77	79	79	77	74

§ 18. Асинхронные двигатели (моторы) трехфазного переменного тока.

1. Составными частями асинхронного мотора являются: а) статор — неподвижная часть; б) ротор — вращающаяся часть.

2. Принцип действия асинхронного мотора основан на воздействии вращающегося магнитного поля статора на ротор.

Три катушки, сдвинутые между собой на угол в 120° , создают в случае питания их трехфазным переменным током вращающееся магнитное поле.

3. Скорость вращения поля зависит от числа периодов питающего тока и числа полюсов двигателя:

$$n = \frac{60}{p},$$

где: n — число оборотов поля в мин.,
 f — число периодов питающего тока в сек,
 p — число пар полюсов двигателя.

4. Величина вращающегося магнитного поля все время остается неизменной и численно равной $1\frac{1}{2} \Phi_{\max}$, создаваемого одной фазой.

5. Скольжением мотора называется отношение разности чисел оборотов поля статора и поля ротора к числу оборотов поля статора:

$$S = \frac{n_1 - n_2}{n_1}.$$

Табл. 39. Скольжение асинхронных моторов при полной нагрузке.

Мощн. мотора HP	Скольжение двига- телей (в %)	
	с коль- цами	коротко- взвкну- тыми
1	6,5—7,5	10—12
10	4—5	7—9
50	2—3	5—6
100	1,5—2	4—5

6. Начальный вращающий момент асинхронного мотора выражается:

$$M_{\text{нач. max}} = k \frac{E_1^2}{f_1} \cdot \frac{1}{2X_{2h}},$$

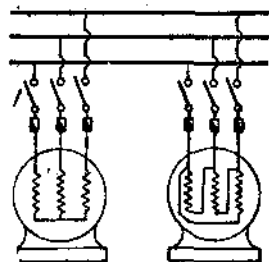
а вращающий момент при работе:

$$M = k \frac{E_1^2}{f_1} \cdot \frac{\frac{R_2}{S}}{\left(\frac{R_2}{S}\right)^2 + X_{2h}^2},$$

где: k — постоянный коэф-т для данного мотора, E_1 — эдс статора, f_1 — частота питающего тока, R_2 — активное сопротивление фазы статора, S — скольжение, X_{2h} — индуктивное сопротивление фазы статора.

7. Асинхронные моторы по типу выполнения ротора разделяются на: а) моторы с короткозамкнутым ротором; б) моторы с пусковым ротором.

Все схемы пуска а. м. можно разделить на след. типы:



Черт. 46.

1) непосредственное включение в сеть; этот метод обычно применяется только для небольших двигателей — меньше 5 л. с.;

2) введение пускового реостата в цепь ротора; этот метод применим лишь к двигателям, имеющим на роторе фазные обмотки и контактные кольца, на к-рые наложены щетки;

3) введение внутреннего пускового сопротивления в цепь ротора; этот метод применим лишь к двигателям, имеющим на роторе фазные обмотки, включение и выключение сопротивлений происходит автоматически;

4) применение трансформатора, у к-рого на низком напряжении можно получить напряжение ниже того, к-рое для двигателя является нормальным; при пуске двигатель сначала включается на низкое напряжение, а затем переключается на нормальное;

5) применение автотрансформатора; этот метод аналогичен трансформаторному пуску;

6) переключение фаз обмоток статора на звезду, а затем на треугольник; этот метод пригоден для моторов с короткозамкнутым ротором для случаев, когда нормальная схема работы мотора — треугольник;

7) специальные схемы пуска путем переключения обмоток ротора.

8. Схема пуска асинхронного мотора с короткозамкнутым ротором (черт. 46). В виду того, что ток при пуске очень велик и нормальные предохранители будут сгорать, практикуют еще одну схему, — когда в период пуска мотор замыкается через пусковые предохранители, а затем переключается на нормальные предохранители (черт. 47).

9. Схема пуска асинхронного мотора с введением пускового реостата в цепь ротора:

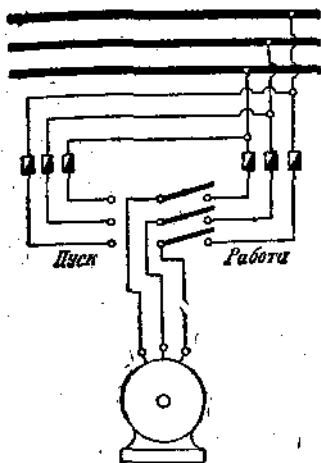
а) схема соединения статора и ротора в звезду (черт. 48);

б) схема соединения статора в треугольник, ротора в звезду (черт. 49).

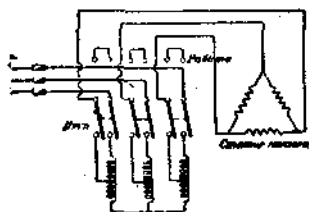
10. Схема пуска асинхронного мотора с автотрансформатором для короткозамкнутых моторов (черт. 50). При нижнем положении переключателя статор мотора включен на пониженное напряжение, при верхнем положении — на полное нормальное напряжение сети.

11. Схема пуска короткозамкнутых моторов с переключателем со звезды

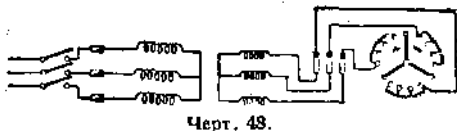
на треугольник (черт. 51). При нижнем положении переключателя получается схема соединения в звезду, при верхнем положении — в треугольник. Мотор необходимо вначале включить на звезду, а затем на ходу



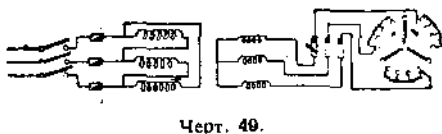
Черт. 47



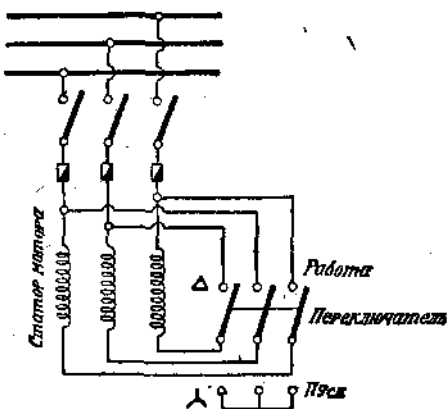
Черт. 50.



Черт. 48.



Черт. 49.

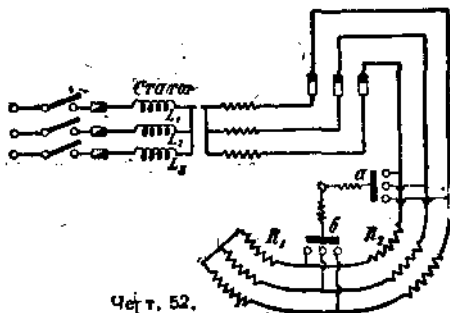


Черт. 51.

переключить на треугольник. Этот способ пуска дает уменьшение пускового тока в 3 раза в сравнении с случаем, когда бы мотор включался сразу на треугольник.

12. Схема пуска с реостатом, автоматически управляемым (черт. 52). В этом случае реостат помещают на валу двигателя т. о., что при пуске реостат весь введен, а затем после начала вращения реостат автоматически выключается при определенных скоростях мотора.

На валу мотора укреплены колодки *a* и *б*, к-рые удерживаются у вала мотора пружинами. В начале вращения мо-



Черт. 52.

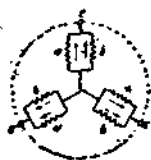
тора пружины оттягивают колодки и оба сопротивления R_1 и R_2 включены в цепь ротора. При определенной скорости центробежной силой колодка b замыкает контакты, чем реостат R_1 выключается. При большой скорости приходит в действие колодка a и замыкает реостат R_2 . При остановке мотора колодки a и b возвращаются в пусковое положение.

Для избежания толчков тока управление реостатом делается скользящим контактом, что уменьшает толчки токов.

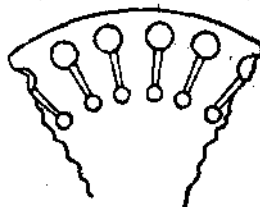
С автоматическим управлением реостата двигатели изготавливаются до 300 НР.

13. Схема пуска Георгеса. Принцип устройства заключается в следующем (черт. 53). Каждая фаза ротора делится на две неравных части a и b , к-рые закладываются в один и те же пазы, имеют одно и то же сечение проводника, но различное число витков. В момент пуска точки c между собой не замкнуты. В этом случае эдс обмоток действуют друг другу навстречу, чем уменьшается пусковой ток и увеличивается вращающий момент. По достижении определенного числа оборотов точки c автоматически замыкаются и получается параллельное соединение обмоток a и b . В этом случае ротор состоит из двух параллельных обмоток, соединенных в звезду, накоротко замкнутую.

14. Схема Бушера. По схеме Бушера (черт. 54) двигатель имеет две короткозамкнутые обмотки, обладающие разными постоянными значениями. Наружная обмотка обладает большим ваттным сопротивлением, а внутренняя — большим индуктивным. Между впадинами обеих обмоток оставлена узкая щель, чтобы полезный поток больше заходил во внутреннюю обмотку. При пуске в ход вращающий момент создается гл. обр. наружной обмоткой, момент же, создаваемый внутренней обмоткой, из-за большого индуктивного сопротивления мал. При скоростях, близких к синхронной, преобладающее значение получает внутренняя обмотка. Вращающий момент таких моторов при пуске увеличивается, но благодаря большому индуктивному сопротивлению внутренней обмотки, играющей главную роль при работе, коэф-т мощности, $\cos \varphi$, при работе снижается.



Черт. 53.



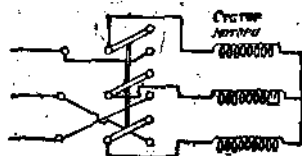
Черт. 54.

Табл. 40. Технические данные эл. двигателей трехфазного тока.

Открытые, типа И, изготавливаемые ВЭО, для напряжения в 125—500 В. Ротор короткозамкнутый и с кольцами. Режим работы продолжительный, 50 пер./сек.

Тип	Полезная мощность		Об./мин.	Сила тока при напряж. в В:				Потребляемая мощность (в кВт)	Двигат. без шкива	
	в кВт	НР		125	220	380	500		вес (в кг)	цена (в руб.)
И 10/4	0,25	0,3	1400	2,2	1,2	0,72	—	0,35	13	72
И 11/4	0,52	0,7	1403	4	2,3	1,3	—	0,67	17	77
И 20/4	1,0	1,4	1420	7,1	4	2,3	—	1,24	26	93
И 21/4	1,75	2,4	1420	11,6	6,6	3,8	—	2,11	36	103
И 30/4	2,85	3,9	1430	18,3	10,4	6,1	4,6	3,37	50	175
И 31/4	4,5	6,1	1435	28,1	16,0	9,3	7,0	5,24	64	199
И 20/6	0,52	0,7	940	4,4	2,5	1,45	—	0,69	26	93
И 21/6	1,0	1,4	940	7,8	4,4	2,6	—	1,26	36	103
И 30/6	1,75	2,4	950	12,8	7,1	4,1	—	2,16	50	175
И 31/6	2,85	3,9	950	19,7	11,2	6,5	4,9	3,41	64	199

10. Реверсирование моторов трехфазного тока производится за счет изменения направления вращающегося поля, что достигается путем перестановки местами двух каких-либо подводных ток проводов. В тех случаях, когда изменение направления вращения необходимо производить быстро, это достигается переключателем. Схема соединений в этом случае выполняется по черт. 55.



Черт. 55.

Табл. 41. Технические данные эл. двигателей трехфазного тока.

Открытые типа Т и Д, изготавливаемые ВЭО для напряжений в 125—500 В с контактными кольцами, с постоянно налегающими щетками и с приспособлением для подъема щеток и короткого замыкания колец. 50 пер./сек.

Т и Д	Прелезная мощность		Об./мин.	Сила тока при напряж. в В.				Потребляемая мощность (в кВт)	Двигат. без щеток	
	(в кВт)	НР		125	220	380	550		век (в кг)	цена (в руб.)
Т 1500/6,8	6,8	9,3	1430	43,2	24,5	14,2	10,8	7,9	98	268
Т 1500/10	10	14	1430	62,5	35,5	20,5	15,6	11,6	130	319
Т 1500/14,5	14,5	20	1445	89,5	51	29,5	22,3	16,8	189	354
Т 1500/20,5	20,5	28	1450	122	69,5	40,2	30,5	23,2	222	388
Т 1500/29	29	40	1460	170	97	56	42,6	32,4	268	479
Т 1500/40	40	55	1455	231	131	76	57,8	44,5	365	689
Т 1500/55	55	75	1460	312	176	103	78	60,5	455	1 251
Т 1500/75	75	102	1455	424	242	140	106	82	640	1 900
Т 1500/100	100	136	1460	560	318	184	140	109	775	2 235
Т 1000/4,5	4,5	6,1	940	31,6	18	10,4	7,9	5,5	98	268
Т 1000/6,8	6,8	9,3	950	46	26	15	11,5	8,1	130	319
Т 1000/10	10	14	950	66	37,5	21,7	16,5	11,8	169	354
Т 1000/14,5	14,5	20	955	92	52,5	30,3	23,1	16,7	222	388
Т 1000/20,5	20,5	28	960	127	72,5	41,7	31,7	23,4	268	479
Т 1000/29	29	40	960	176	100	58	44,1	32,8	365	689
Т 1000/40	40	55	965	237	135	78,1	59,3	44,7	455	1 251
Т 1000/55	55	75	965	326	186	107	81,5	60,7	640	1 900
Т 1000/75	75	102	970	444	253	146	111	82,4	775	2 235
Т 750/4,5	4,5	6,1	700	33,6	19	11	8,4	5,6	130	319
Т 750/6,8	6,8	9,3	705	48,8	27,8	16	12,2	8,35	169	354
Т 750/10	10	14	715	67,2	38	22	16,8	11,8	222	388
Т 750/14,5	14,5	20	715	94	53,5	31	23,5	16,9	268	479
Т 750/20,5	20,5	28	715	130	74	42,8	32,5	23,6	365	689
Т 750/29	29	40	720	180	102	59	44,8	33	455	1 251
Т 750/40	40	55	720	242	138	79,5	60,5	45	640	1 900
Т 750/55	55	75	720	330	188	108	82,6	61,1	775	2 235
Т 750/100	74	100	730	432	237	137	104	60	1375	2 620
Т 600/75	55	75	580	335	181	105	80	60,8	1432	2 620
Т 600/100	74	100	580	441	240	139	106	80	1648	3 080

Эл. двигатели типа Т 1500/6,8, 1500/10, 1500/14,5, Т 1000/4,5, Т 1000/6,8, Т 1000/10, Т 750/4,5, Т 750/6,8 нормально изготавливаются с постоянно налегающими щетками, все остальные типа Т — с приспособлением для подъема щеток и короткого замыкания колец. — Эл. двигатели типа Т изготавливаются для напряжений в 125 и 220 В с соединением обмоток статора в треугольник, а для напряжений в 380 и 500 В — в звезду.

При положении переключателя влева будет одно направление вращения, а при правом положении переключателя направление вращения будет обратное.

16. Скорость вращения асинхронных моторов мало изменяется с нагрузкой. Изменение скольжения от холостого хода до полной нагрузки не превосходит 2—5%, а потому асинхронные моторы можно применять там, где требуется постоянная скорость.

Табл. 42. Технические данные эл. двигателей трехфазного тока. Совершенно закрытые, типа АЗ, изготавливаемые ВЭО, для напряжений в 125—500 В.

Т и п	Полезная мощность		Об./мин.	Сила тока при напряж. в В:				Потребляемая мощн. (в кВт)	Двигатель без шкива	
	(в кВт)	HP		125	220	380	500		вес (в кг)	цена (в руб.)
АЗ 11/1500	0,25	0,3	1410	2,3	1,25	0,75	—	0,35	30	91
АЗ 12/1500	0,52	0,7	1410	4,2	2,3	1,35	—	0,68	35	102
АЗ 21/1500	0,85	1,2	1420	6,2	3,55	2,05	—	1,07	48	116
АЗ 22/1500	1,0	1,4	1420	7,2	4,5	2,35	—	1,24	55	127
АЗ 31/1500	1,75	2,4	1430	11,8	6,6	3,85	—	2,11	83	192
АЗ 32/1500	2	2,7	1430	13,5	7,6	4,4	—	2,41	102	220
АЗ 41/1500	2,85	3,9	1440	18,5	10,5	6,2	4,6	3,38	180	292
АЗ 42/1500	3,3	4,5	1440	21,2	12,1	7,2	5,3	3,90	158	352
АЗ 21/1000	0,52	0,7	930	4,6	2,5	1,45	—	0,69	48	116
АЗ 22/1000	0,7	1,0	950	6	3,3	1,9	—	0,92	55	127
АЗ 31/1000	1,2	1,6	940	9,2	6,25	3,05	—	1,51	83	195
АЗ 32/1000	1,4	1,9	940	10,6	6	3,5	—	1,75	102	220
АЗ 41/1000	2	2,7	950	14,5	8,1	4,7	—	2,44	130	292
АЗ 42/1000	2,3	3,1	950	16,5	9,3	5,4	—	2,80	158	352

Статорные обмотки двигателей типа АЗ, за исключением типа АЗ 31/1500, могут быть соединены: 1) 125/220 В—треугольник и звезда; 2) 220/380 В—треугольник и звезда; 3) 500 В—звезда.

Табл. 43. Технические данные эл. двигателей переменного трехфазного тока. Изготавливаемые за одами ВЭО, для напряжения в 125—500 В с контактными кольцами и приспособлениями для подъема щеток и короткого замыкания, 50 периодов, закрытые, с вентиляцией.

Т и п	Полезная мощность		Об./мин.	Сила тока при напряж. в В:				Потребляемая мощн. (в кВт)	Двигат. без шкива	
	kW	HP		125	220	380	500		вес (в кг)	цена (в руб.)
98a—1500	4,4	6,1	1440	29,8	16,8	9,7	7,4	5,3	105	520
98e—1500	6,8	9,3	1440	43,3	24,6	14,2	10,8	7,9	120	536
108d—1500	11	14	1450	63	35,8	20,7	15,7	11,6	180	661
108g—1500	14,5	20	1450	89	50,5	29,3	22,2	16,8	215	685
138e—1500	20,5	28	1460	122	69,5	40	30,5	23,2	255	904
138h—1500	29	40	1460	170	96	56	42,5	32,5	320	933
166e—1500	40	55	1465	232	132	76,5	58	44,5	530	1196
166h—1500	55	75	1465	304	173	100	76	60,5	570	1274
206g—1500	75	102	1470	420	240	138	105	82	852	2150
206i—1500	100	136	1470	560	318	185	140	109	955	2545
98e—1000	4,5	6,1	945	32	18,2	10,5	8	5,4	120	540
108d—1000	6,8	9,3	950	47,3	26,8	15,5	11,8	8,1	180	661
108g—1000	10	14	950	66	37,5	21,7	16,5	11,8	215	700

17. Регулирование скорости асинхронных моторов м. б. произведено след. способом: 1) изменением частоты питающего тока; 2) изменением числа полюсов статора мотора; 3) изменением величины сопротивления цепи

Табл. 123а. Имянные размеры моторов танка КТ (вспр. 56).

III	KT 40/1000 — KT 55/1500	701	—	793	—	359,5	—	341,5	—	90	85	7	—	38	35	—	—	35	32		
III	KT 55/1000 — KT 75/1500	746	—	838	—	382	—	364	—	90	85	7	—	38	35	—	—	35	32		
Безм.	Т и п	A	A ₁	A ₂	A ₃	Б	В	В ₁	Г	Г ₁	Г ₂	Д	Е	Ж	Ж ₁	И	И ₁	И ₂	И ₃		
IV	KT 55/750, KT 110/1000, KT 75/1000	612	—	912	912	39,9	415	415	100	—	100	90	8	25	—	45	38	37,5	—	42	35
IV	KT 75/750, KT 130/1000, KT 110/1000	694	—	982	982	434	450	450	100	—	100	90	8	25	—	45	38	37,5	—	42	35
V	KT 100/1000 и KT 110/750	885	1008	1008	1008	437	448	448	120	115	120	115	8	30	30	55	50	46	41,5	50	45
V	KT 230/1000 и KT 100/750	585	1078	1078	1078	472	483	483	120	115	120	115	8	30	30	55	50	46	41,5	50	45
VI	KT 300/1000 и KT 230/750	1027,5	1155	1155	1155	486,5	541	541	155	120	155	120	7,5	40	90	70	55	58,5	46	65	50
V	KT 400/1000 и KT 300/750	1117,5	1245	1245	1245	531,5	586	586	155	120	155	120	7,5	40	90	70	55	58,5	46	65	50
VII	KT 500/1000 и KT 400/750	1263,5	1430	1430	1430	630,5	633	633	170	155	170	155	11	45	40	80	70	67,5	58,5	71	45
VII	KT 640/1000 и KT 500/750	1333,5	1500	1500	1500	665,5	668	668	170	155	170	155	11	45	40	80	70	67,5	58,5	71	45
VIII	KT 840/750 и KT 600/600	1338	1513	1513	1513	658	671	671	190	170	190	170	8	50	45	90	80	76	67,5	85	75
VIII	KT 800/750 и KT 440/600	1445	1593	1593	1593	698	717	717	190	170	190	170	8	50	45	90	80	76	67,5	85	75
IX	KT 1000/750 и KT 800/600	1530	1765	1761	1763	735	795	793	227	202	225	200	8	72	62	100	90	84,5	76	95	85
IX	KT 1350/750 и KT 1000/600	1600	1835	1831	1833	770	830	828	227	202	225	200	8	72	62	100	90	84,5	76	95	85
IX	KT 1350/600	1760	1995	1991	1993	850	910	908	227	202	225	200	8	72	62	100	90	84,5	76	95	85
I	KT 11/1501	568,5	—	631	—	293	—	275,5	—	—	65	65	7	7,5	—	28	22	—	—	25	20
I	KT 15/1001 — KT 11/1001	588,5	—	651	—	303	—	285,8	—	—	65	65	7	7,5	—	28	22	—	—	25	20
I	KT 25/1001 — KT 15/1001	623,5	—	686	—	320,5	—	303	—	—	65	65	7	7,5	—	28	22	—	—	25	20
II	KT 30/1500 — KT 25/1002	698	—	790	—	344	—	354	—	—	90	85	7	—	—	38	35	—	—	35	32
II	KT 40/1500 — KT 30/1002	738	—	830	—	364	—	374	—	—	90	85	7	—	—	38	35	—	—	35	32

Табл. габаритных размеров моторов типа КТ. (Продолжение.)

III	КТ 40/1000 — КТ 15/1202	—	80	220	280	390	200	425	17	30	85	350	435	—	38,5	35	—	12	10
III	КТ 55/1000 — КТ 75/1202	—	80	265	325	390	200	425	17	30	85	350	435	—	38,5	35	—	12	10
Велич.	Т и п	К	К ₁	Л	М	Н	П	Т	Ф	Х	Ц	Ш	Щ	Ю	Ю ₁	Ю ₂	Я	Я ₁	Я ₂
IV	КТ 65/734, КТ 110/1504, КТ 75/1004	тр 1"	—	106	270	330	440	225	490	21	35	90	390	480	43,8	—	46	38,5	14
IV	КТ 75/734, КТ 130/1504, КТ 110/1001	тр 1"	—	106	340	400	440	285	490	21	35	90	390	480	43,8	—	46	38,5	14
V	КТ 130/1002 и КТ 110/734	тр 1"	тр 1"	107	250	340	490	250	532	24	40	100	430	530	53	48,3	55	50	16
V	КТ 320/1005 и КТ 150/732	тр 1"	тр 1"	107	330	410	490	250	532	24	40	100	430	530	53	48,3	55	50	16
VI	КТ 300/1004 и КТ 330/734	тр 1 1/2"	тр 1"	125	340	430	550	280	597	28	45	130	480	590	67,2	53	71	55	20
VI	КТ 400/1008 и КТ 300/734	тр 1 1/2"	тр 1"	125	430	520	550	280	597	28	45	110	480	590	67,2	53	71	55	20
VII	КТ 300/1007 и КТ 400/737	тр 1 1/2"	тр 1 1/2"	135	330	490	630	320	675	31	45	120	550	670	77,2	67,3	82	71	24
VII	КТ 340/1007 и КТ 500/737	тр 1 1/2"	тр 1 1/2"	135	460	590	630	320	675	31	45	120	550	670	77,2	67,3	82	71	24
VIII	КТ 450/738 и КТ 300/603	тр 2"	тр 1 1/2"	140	410	510	700	360	755	35	50	130	600	730	86,5	77,2	92	82	24
VIII	КТ 500/738 и КТ 440/403	тр 2"	тр 1 1/2"	140	490	590	700	360	755	35	50	130	600	730	86,5	77,2	92	82	24
IX	КТ 1000/738 и КТ 800/403	тр 2 1/2"	тр 2"	150	485	593	760	390	810	35	50	140	650	790	96,3	86,5	103	92	28
IX	КТ 1250/738 и КТ 1000/403	тр 2 1/2"	тр 2"	150	570	680	760	390	810	35	50	140	650	790	96,3	86,5	103	92	28
IX	КТ 1350/608	тр 2 1/2"	тр 2"	150	700	810	760	380	810	35	50	140	650	790	96,3	86,5	103	92	28
I	КТ 12/1501	—	—	70	155	215	315	160	350	17	25	70	280	350	—	—	27,5	22	8
I	КТ 16/1501 — КТ 11/1001	—	—	70	175	235	315	160	350	17	25	70	280	350	—	—	27,5	22	8
I	КТ 35/1501 — КТ 15/1001	—	—	70	210	270	315	160	350	17	25	70	280	350	—	—	27,5	22	8
II	КТ 30/1002 — КТ 25/1002	—	—	75	190	250	350	180	390	17	25	80	300	380	—	—	38,5	35	12
II	КТ 40/1002 — КТ 30/1002	—	—	75	230	290	350	180	390	17	25	80	300	380	—	—	38,5	35	12

Табл. 44. Технические данные крановых моторов трехфазного переменного тока типа КТ.

Изготавливаемые ВЭО для напряжения в 127, 220, 380 и 500 В, закрытого типа.
Режим повторно-кратковременный.

Т и п	15% ЕД			25% ЕД			40% ЕД			СД ³	Вес (в кг)
	Полезн. мощность	Об.м.	$\frac{D_m}{D}$	Полезн. мощность	Об.м.	$\frac{D_m}{D}$	Полезн. мощность	Об.м.	$\frac{D_m}{D}$		
КТ 11/1501	1,9	1290	2,1	1,5	1375	2,7	1,1	1425	3,7	0,2	45
КТ 15/1501	2,6	1340	2,3	2,04	1400	2,9	1,5	1440	4	0,26	60
КТ 22/1501	3,8	1385	2,7	3	1430	3,5	2,25	1460	4,65	0,31	85
КТ 30/1502	5,16	1390	2	4	1425	2,65	3	1460	3,6	0,4	100
КТ 40/1502	6,8	1390	2,25	5,46	1425	2,6	4,08	1460	3,75	0,47	120
КТ 55/1503	8,85	1400	2,10	7,5	1400	2,5	5,45	1465	3,5	0,85	145
КТ 75/1503	13,6	1400	1,85	10	1440	2,4	7,5	1470	3,25	1,05	170
КТ 110/1504	17,7	1430	2,6	15	1450	3	11,6	1475	4	2	230
КТ 150/1504	27,2	1420	2,7	20,4	1445	3,5	15	1475	4,7	2,4	280

D_m —максимальный вращающий момент; D —нормальный вращающий момент; $СД^3$ —маховой момент.

Табл. 45. Технические данные крановых моторов трехфазного переменного тока типа КТ.

Изготавливаемые ВЭО для напряжения в 127, 220, 380, 500 В, закрытого типа.

Т и п	15% ЕД			25% ЕД			40% ЕД			СД ³	Вес (в кг)
	НР	л	$\frac{D_m}{D}$	НР	л	$\frac{D_m}{D}$	НР	л	$\frac{D_m}{D}$		
КТ 11/1001	1,7	830	1,7	1,5	900	2	1,15	930	2,7	0,26	60
КТ 15/1001	2,4	840	2,4	2,04	910	3	1,63	940	3,8	0,31	85
КТ 22/1002	3,6	840	1,75	3	926	2,1	2,18	955	2,9	0,4	108
КТ 30/1002	5,3	900	1,9	4	940	2,3	2,85	962	3,3	0,47	120
КТ 40/1003	6,5	930	2,1	5,45	950	2,5	3,95	975	3,4	0,85	145
КТ 55/1003	9,5	930	2,3	7,5	950	2,9	5,3	975	4,1	1,05	170
КТ 75/1004	12,3	935	2,2	10	950	2,6	7,5	975	3,5	2	230
КТ 110/1004	20,4	946	2,2	15	960	3	10,9	980	4,1	2,4	280
КТ 150/1005	24,5	950	2,6	20,4	965	3,1	15	980	4,2	4,9	380
КТ 220/1005	41	956	2,55	36	965	3,5	21	980	5	5,7	420
КТ 300/1006	51,5	960	2,5	40,8	975	3,2	28,6	990	4,6	10,5	480
КТ 400/1006	73,6	960	2,9	64,5	975	3,9	38	990	5,55	13,5	600
КТ 500/1007	88,5	960	2,9	68	975	3,75	47,6	990	5,35	26	800
КТ 640/1007	108	963	3,2	88	980	4	65	990	5,3	30,5	900

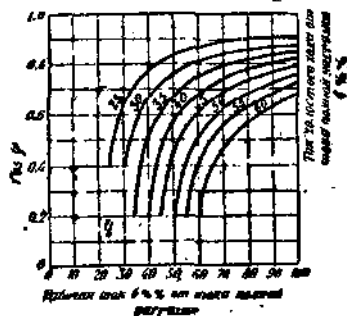
Табл. 46. Технические данные крановых моторов трехфазного переменного тока типа КТ. Изготавливаемые ВЭО для напряжения в 127, 220 и 380 В, закрытого типа.

Т и п	15% ЕД			25% ЕД			40% ЕД			СД ^в	Вес (кг)
	НР	n	$\frac{D_m}{D}$	НР	n	$\frac{D_m}{D}$	НР	n	$\frac{D_m}{D}$		
КТ 55/754 КТ 75/754	8,85 12,25	630 640	1,7 2	7,5 10,2	700 705	2 2,4	6,1 7,5	720 725	2,5 3	2 2,4	230 280
КТ 110/755 КТ 150/755	19 26	640 650	2,2 2	15 20,4	710 715	2,8 2,6	12,3 16,3	725 725	3,45 3,25	4,9 5,7	350 420
КТ 220/756 КТ 300/756	37 53	650 670	2,5 2,9	30 40,8	720 725	3,1 3,7	23,2 32,7	735 740	4 4,6	10,5 13,5	480 595
КТ 400/757 КТ 600/757	68 88,5	670 670	2,7 2,7	54,5 69	725 725	3,3 3,5	42,2 53	740 740	4,2 4,45	26 30,5	800 910
КТ 640/758 КТ 800/758	109 136	680 680	3 3,3	87 109	740 730	3,9 4,1	68 84,4	745 745	5 5,3	45 53	1000 1200
КТ 1000/759 КТ 1250/759	177 218	680 680	2,9 3,3	136 170	730 730	3,8 4,2	109 136	745 745	4,7 5,2	— —	1300 1500
КТ 300/607 КТ 400/607	54,5 70	550 555	2,4 2,5	41 54,5	565 570	3,1 3,2	32,6 43,5	575 580	3,9 4	26 30,5	800 910
КТ 500/608 КТ 640/608	91 113	565 570	2,6 2,7	68 87	580 585	3,4 3,6	54,5 62,4	585 590	4,2 4,5	45 53	1000 1200
КТ 800/609 КТ 1000/609 КТ 1250/609	150 177 225	570 580 580	2,8 3 3,3	109 136 170	585 590 590	3,9 3,9 4,4	88,5 109 136	590 595 595	4,8 4,9 5,5	— — —	1300 1500 —

7) Моторы нормально рассчитываются для работы закрытыми, но в случае открытия люков мощность их может быть повышена за счет улучшения вентиляции.

19. Коэф.-ты полезного действия моторов и коэф.-ты мощности ($\cos \varphi$).

Коэф.-т мощности ($\cos \varphi$) асинхронных моторов не является величиной постоянной и зависит от нагрузки. Для его определения необходимо знать мощность, силу тока и напряжение. Т. к. ваттметр, измеряющий мощность, не всегда можно найти, то для приближенного определения коэф.-та мощности рекомендуется пользоваться след. способом. Коэф.-т мощ-



Черт. 57.

Табл. 47. Кривые моторы трехфазного переменного тока типа КТ для перехода от повторно-кратковременного режима к 30', 60' и 90'.

1500 оборотов					1000 оборотов				
Тип	Мощность (в kW)				Тип	Мощность (в kW)			
	25%, ЕД	30'	45'	60'		25%, ЕД	30'	45'	60'
КТ 11/1501	1,1	1,32	1,1	0,95	КТ 11/1001	1,1	1,32	1,1	0,95
КТ 15/1501	1,5	1,75	1,5	1,25	КТ 15/1001	1,5	1,75	1,5	1,25
КТ 22/1501	2,2	2,80	2,2	1,85	КТ 22/1002	2,2	2,8	2,2	1,85
КТ 30/1502	3	3,6	3	2,5	КТ 30/1002	3	3,5	3	2,5
КТ 40/1502	4	5	4	3,5	КТ 40/1003	4	5	4	3,5
КТ 55/1503	5,5	7	5,5	4,8	КТ 55/1003	5,5	7	5,5	4,8
КТ 75/1503	7,5	8,5	7,5	6,5	КТ 75/1004	7,5	8,5	7,5	6,5
КТ 110/1504	11	13,2	11	9,5	КТ 110/1004	11	13,2	11	9,5
КТ 160/1504	15	18	15	11	КТ 150/1005	15	18	15	11
					КТ 220/1005	22	27	22	17
					КТ 300/1006	30	36	30	23
					КТ 400/1006	40	47	40	32,5
					КТ 500/1007	50	58	50	40
					КТ 640/1007	64	75	64	50

750 оборотов						600 оборотов					
Т и п	Мощность (в kW)					Т и п	Мощность (в kW)				
	25%, ЕД	30'	45'	60'	90'		25%, ЕД	30'	45'	60'	90'
КТ 55/754	5,5	7	5,5	4,8	—	КТ 300/607	30	36	30	23	19
КТ 75/754	7,5	8,5	7,5	6,5	—	КТ 400/607	40	47	40	32	28
КТ 110/755	11	13,2	11	9,5	—	КТ 500/608	50	58	50	40	36
КТ 150/755	15	18	15	11	8,1	КТ 640/608	64	75	64	50	40
КТ 220/756	22	27	22	17	13,2	КТ 800/609	80	105	85	65	53
КТ 300/756	30	36	30	23	20	КТ 1000/609	100	130	105	85	70
КТ 400/757	40	47	40	32	28	КТ 1250/609	125	160	130	105	88
КТ 500/757	50	58	50	40	36						
КТ 640/758	64	75	64	50	40						
КТ 800/758	80	105	80	65	53						
КТ 1000/759	100	130	105	85	70						
КТ 1250/759	125	160	120	105	88						

ности зависит от тока холостого хода. Поэтому, если известен ток холостого хода мотора, $\cos \varphi$ определяется по нижеприведенным кривым, где указаны $\cos \varphi$ для различных токов холостого хода и для различных нагрузок.

Кривые нанесены для отношения тока холостого хода к полному току (в процентах). По оси абсцисс отложены токи нагрузки (в процентах), а по оси ординат $\cos \varphi$.

Пример. Мотор имеет нормальный ток 100 А. Ток холостого хода мотора 30 А. Определить, чему равен $\cos \varphi$ при нагрузке в 80 А.

Решение. Отношение тока холостого хода к полному току равно: $\frac{30}{100} \cdot 100 = 30\%$. Взяв ток 80 А = 80% полного по кривой, помеченной 30, находим $\cos \varphi$ мотора при нагрузке 80 А = 0,85.

Если при измерении тока холостого хода напряжение было ненормально, ток приходится пересчитывать, считая ток пропорциональным напряжению.

Табл. 49. Значения характеристик величин асинхронных моторов трехфазного тока с пусковым ротором.
Частота 50 пер./сек. Напряжение 125, 220, 380, 500 V.

Мощность моторов		Коэф-т полезного действия (в процентах)				Коэф-т мощности cos φ для чисел оборотов в минуту										Перегрузочная способность	
kW HP		3 000	1 500	1 000	750	600	500	3 000	1 500	1 000	750	600	500	от 3 000 до 1 000	от 750 до 500		
1,1	1,5	—	—	75,5	73,5	—	—	—	—	0,71	0,66	—	—	От 2 до 2,5	От 1,6 до 2		
1,5	2	—	79,5	77,5	76,5	—	—	—	0,8	0,77	0,69	—	—	—	—		
2,2	3	80,5	80,5	79,5	77,5	—	—	0,86	0,82	0,76	0,72	—	—	—	—		
3	4	81,5	82	81	79	—	—	0,86	0,83	0,78	0,75	—	—	—	—		
4	5,5	82	83,5	82	80	—	—	0,86	0,84	0,80	0,77	—	—	—	—		
5,5	7,5	82	84,5	83	81	—	—	0,87	0,84	0,82	0,79	—	—	—	—		
7,5	10	83	85	84	83,5	83,5	—	0,87	0,85	0,83	0,81	0,79	—	—	—		
11	15	84	85,5	86	84,5	84,5	83,5	0,88	0,86	0,84	0,82	0,80	0,77	От 2 до 2,5	От 1,6 до 2		
15	20	85	87,5	86,5	86	85,5	85	0,89	0,87	0,85	0,84	0,81	0,78	—	—		
22	30	87,5	88	87,5	87	86,5	86	0,90	0,88	0,86	0,85	0,82	0,79	От 2 до 2,5			
30	40	88,5	89	88,5	88	87,5	87	0,90	0,89	0,87	0,86	0,83	0,81				
40	55	89	89,5	89	89	88,5	88	0,90	0,90	0,88	0,87	0,84	0,82				
50	68	89,5	90	90	89,5	89	88,5	0,91	0,90	0,88	0,87	0,85	0,83	От 2 до 2,5			
64	87	90	90,5	90,5	90	89,5	89	0,91	0,90	0,89	0,88	0,86	0,84				
80	110	90	90,5	90,5	90,5	90	90,5	0,91	0,90	0,89	0,88	0,86	0,85				
100	136	90,5	91	91	91	90,5	90,5	0,91	0,90	0,89	0,88	0,86	0,85	От 2 до 2,5			
125	170	91	91,5	91,5	91	91	91	0,92	0,91	0,90	0,89	0,87	0,86				
160	217	91,5	92	92	91,5	91,5	91,5	0,92	0,91	0,90	0,89	0,87	0,86				
200	271	92	92,5	92,5	92	91	92	0,92	0,91	0,90	0,89	0,88	0,86	От 2 до 2,5			
250	330	92,5	93	93	92,5	92,5	92,5	0,92	0,91	0,90	0,89	0,88	0,87				

Примечание. Двигатели выше указанной сплошной ступенчатой линии строятся без подъема щеток. Двигатели между двумя ступенчатыми линиями могут строиться и с подъемом щеток. В этом случае значения мид для них надо увеличивать на 1,5%.

20. Значение кпд асинхронных моторов зависит от величины нагрузки и от мощности мотора.

Произведя опыт холостого хода мотора, т. е. пуск его без нагрузки, и определив мощность W_0 , подводенную к нему, можно приближенно определить кпд мотора для полной нагрузки:

$$\eta = \frac{W_{\text{ползн.}}}{W_{\text{ползн.}} + 2W_0},$$

где W_0 — мощность холостого хода.

§ 17. Преобразование переменного тока в постоянный.

1. Для преобразования переменного тока в постоянный пользуются: а) мотор-генератором; б) одноякорным умформером; в) каскадным умформером; г) ртутным выпрямителем.

2. Мотор-генератор выполняется в виде двух машин, одна из к-рых является синхронным или асинхронным мотором, а другая — машина постоянного тока.

3. Существенным преимуществом мотор-генератора является полная эл. независимость цепи постоянного и переменного токов, что позволяет для мотора и для генератора выбирать какие угодно напряжения и как угодно их регулировать. Что касается выбора асинхронного или синхронного мотора, то можно руководствоваться след. основными указаниями.

4. Синхронный мотор имеет след. преимущества: а) возможность регулировки $\cos \varphi$; б) возможность работы при перевозбуждении опережающим током и этим самым улучшить $\cos \varphi$ всей установки.

Недостатки синхронного мотора: а) сложность пуска; б) возможность качаний и чувствительность к кратковременным перегрузкам и резкому падению напряжения.

Асинхронный мотор имеет след. преимущества: а) простота пуска; б) малая чувствительность к кратковременной перегрузке и резким колебаниям напряжения.

Недостатки асинхронного мотора: а) значение коэф-та мощности $\cos \varphi$ ниже единицы; б) невозможность регулирования $\cos \varphi$.

5. Кпд мотор-генератора равен произведению кпд отдельных машин. Поэтому значение кпд всей мотор-генераторной установки обыкновенно бывает не велико, почему мотор-генераторы и применяются только при небольших мощностях установки, где кпд не является особо важным.

6. Одноякорный умформер. По своей конструкции умформер представляет машину постоянного тока, у к-рой кроме коллектора имеются еще кольца для переменного тока.

Обмотка умформера одновременно служит и для постоянного и для переменного тока, а потому между напряжениями постоянного и переменного тока существует вполне определенная зависимость.

Отклонение этих соотношений в зависимости от нагрузки может достигать 5% и более.

Табл. 50. Соотношение эдс и сил токов со стороны постоянного и переменного тока умформера при синусоидальном поле и $\cos \varphi = 1$.

Число фаз умформера	Соотношение : эдс	Соотношение сил токов
Однофазный	$0,707 E_{\text{пост.}}$	$1,414 / \text{пост.}$
Трехфазный	$0,612 E_{\text{пост.}}$	$0,943 / \text{пост.}$
Шестифазный	$0,354 E_{\text{пост.}}$	$0,472 / \text{пост.}$
Дванадцатифазный	$0,182 E_{\text{пост.}}$	$0,240 / \text{пост.}$
m-фазный	$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin \frac{\pi}{m} E_{\text{пост.}}$	$\frac{2\sqrt{2}}{m} / \text{пост.}$

Постоянное соотношение между напряжениями постоянного и переменного тока вызывает необходимость предварительной трансформации переменного тока, так как обычно напряжение, под которым передается энергия переменного тока, не соответствует напряжению на кольцах умформера.

Переменный и постоянный токи умформера, действуя в одних и тех же проводниках, направлены друг другу навстречу и эта компенсация тем больше,

Табл. 51. Кплд шестифазных умформеров при 100% и 50% нагрузки.

Мощность (в kW)	Напряж. постоянн. тока 230 V		Напряж. пост. тока 600 V		Напряж. пост. тока 1650 V	
	при полн. нагрузке	при половин. нагрузке	при полн. нагрузке	при половин. нагрузке	при полн. нагрузке	при половин. нагрузке
100	87	85,5	88,5	87	—	—
200	88,5	87	89,8	88,3	—	—
300	89,7	88,2	90,8	89,3	—	—
500	90,7	89,3	91,6	90,1	92,1	90,7
750	—	—	92,3	90,8	92,8	91,4
1000	—	—	93,5	91,5	93,8	92,3

чем больше фазность умформера. Поэтому предпочтительней употребить многофазные умформеры, в частности шестифазные, т. к. шестифазная система тока может быть получена из трехфазной.

Эл. потери умформера благодаря встречному действию переменного и постоянного токов пропорциональны квадрату разности токов постоянного и переменного. Поэтому кплд умформера выше, чем кплд машин постоянного тока такой же мощности. Кплд преобразовательной установки, состоящей из трансформатора и умформера, все же выше, чем кплд мотор-генератора, приблизительно на 4%.

7. Пуск в ход умформеров м. б. осуществлен след. способами: а) с помощью вспомогательного мотора, к-рый служит для подведения к синхронизму; б) со стороны постоянного тока, как шунтовой мотор; в) со стороны переменного тока в качестве асинхронного мотора.

8. Пуск с помощью вспомогательного двигателя осуществляется сл. обр.: на одном валу с конвертором помещается асинхронный мотор мощностью в 6—10% мощности преобразователя, с числом полюсов на два меньше, чем число полюсов преобразователя. Двигатель доводит преобразователь до скорости выше синхронной, после чего, вводя сопротивление в цепь ротора мотора, доводят скорость до синхронной и в момент совпадения фаз включают цепь переменного тока. Синхронизацию выгоднее производить на стороне низкого напряжения переменного тока.

9. Пуск со стороны постоянного тока может применяться только тогда, когда на преобразовательной подстанции имеется источник энергии постоянного тока. Умформер пускается в ход, как обыкновенный шунтовой мотор, будучи отсоединен от сети переменного тока.

Регулируя число оборотов изменением магнитного потока в обмотке возбуждения, доводят число оборотов до синхронной скорости и в момент совпадения фаз включают рубильник на стороне переменного тока, после чего отсоединяют сторону постоянного тока от постоянного источника тока и включают на сеть потребителей. Синхронизацию и в этом случае выгоднее производить на стороне низкого напряжения переменного тока.

10. Пуск в ход умформеров в качестве асинхронных двигателей в настоящее время является одним из наиболее распространенным. Этот пуск удается осуществить лишь в том случае, когда в полюсах умформера уложена специальная короткозамкнутая обмотка—катушка Леблана. Эта катушка представляет медные стержни, уложенные через известные промежутки по всей окружности ротора и замкнутые по обоим концам соединительными медными кольцами.

Пуск умформеров в качестве асинхронных двигателей обыкновенно производится при пониженном напряжении, т. к. в противном случае пусковой

ток достигает величины в 2—3 раза выше нормальной. Понижение напряжения при пуске достигается или включением автотрансформатора, что бывает чаще, или включением добавочных сопротивлений. Обмотка возбуждения при пуске не должна быть разомкнутой, т. к. напряжение на ней за счет трансформаторного действия повышается во много раз. Обмотку рекомендуется или разделять на части, или же замыкать через какое-либо сопротивление, но не замыкать накоротко во избежание «одноосного включения».

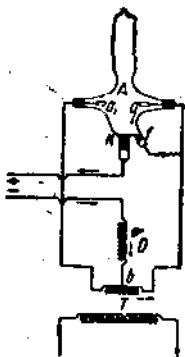
Начало вращения умформера обуславливается целым рядом вращающих моментов, возникающих в умформере за счет: а) катушки Леблана; б) от гистерезиса; в) от токов Фуко; г) от обмотки возбуждения, если она замкнута через сопротивление. Под действием всех этих моментов умформер доходит до синхронизма и вступает в работу после включения тока в обмотку возбуждения.



Черт. 58.

Помимо приведенных схем пуска умформеров имеется еще целый ряд, к-рые в тех или иных случаях также применяются.

11. Регулирование напряжения умформеров производится: а) за счет дроссельных катушек, включаемых последовательно в цепь переменного тока, к-рые увеличивают напряжение за счет опережающего тока и уменьшают за счет отставшего; б) специальной вольтодобавочной машиной переменного или постоянного тока, сидящей на одном валу с умформером и с обмоткой возбуждения, включенной последовательно в цепь главного тока; в) изменением напряжения на стороне переменного тока путем включения потенциал-регулятора; г) изменением коэф-та трансформации трансформатора за счет изменения числа витков.



Черт. 59.

12. Каскадный преобразователь имеет по отношению к умформеру целый ряд неудобств, а потому он или совсем не применяется, или же применяется очень редко. Каскадный преобразователь состоит из двух машин: асинхронного мотора и умформера.

Ротор асинхронного мотора и якорь умформера соединены механически общим валом. Помимо того ротор асинхронного мотора электрически соединен со стороной переменного тока умформера.

13. Ртутные выпрямители. Принцип действия ртутных выпрямителей заключается в след. В герметически закрытом сосуде, из к-рого выкачан воздух, помещаются два электрода, один из к-рых графитовый, а другой — ртутный. Если между электродами будут находиться ртутные пары, то через эти пары ток может идти только в одном направлении — от графитового электрода к ртутному. Графит в этом случае будет анодом, а ртуть — катодом.

Вакуум в ртутных выпрямителях доводится до 0,001 мм ртутного столба. Если такой прибор будет включен в цепь переменного тока, то через него будет проходить ток только в одном направлении, в обратном же направлении если и пройдет ток, то величина его будет весьма незначительна, — порядка тысячных долей ампера. В этом случае кривая тока в цепи после выпрямителя представится в виде, показанном на черт. 58.

Отрицательные полуволны переменного тока выпрямителем не пропускаются.

Для использования обеих полуволн переменного тока в ртутных выпрямителях делают два графитовых электрода и один ртутный.

Схема соединения однофазных ртутных выпрямителей выполняется по черт. 59, где: A —стеклянная колба с выкаченным воздухом, k и f —ртутные электроды, из к-рых электрод f служит только для зажигания, a_1 и a_2 —графитовые электроды, D —дроссельная катушка для сглаживания тока, T —трансформатор.

Цепь постоянного тока отводится от ртутного электрода и от средней точки трансформатора.

При повороте колбы около вертикальной оси ртуть из отростка k перелетит в отросток f , чем замкнется цепь тока. При обратном повороте колбы цепь тока разрывается и образующаяся вольтова дуга образует пары ртути. После этого переменный ток имеет возможность проходить через пары ртути, при чем одна полуволна будет проходить от графитового электрода a_1 к ртути, а другая от графитового электрода a_2 тоже к ртути.

Для многофазных токов количество графитовых электродов делается равным числу фаз питающего тока: этим самым достигается меньшая пуль-

сация выпрямленного тока. Ртутные выпрямители большой мощности выполняются в металлических сосудах, а малой мощности—в стеклянных.

Соотношение токов переменного и постоянного в многофазных ртутных выпрямителях выражается в след. виде:

Величина	Число фаз			
	2	3	6	12
$\frac{\text{Эффективный пост. ток}}{\text{Средний постоян. ток}} = \frac{I_{\text{эф.}}}{I_{\text{ср.}}}$	1,11	1,02	1,00086	1,0000
$\frac{\text{Эффективный перемен. ток}}{\text{Средний постоян. ток}} = \frac{I_{\text{эф.}}}{I_{\text{ср.}}}$	0,71	0,58	0,41	0,29

Соотношение напряжений переменного и постоянного токов в ртутных выпрямителях выражается в след. значениях:

Величина	Число фаз			
	2	3	6	12
$\frac{\text{Эффективное напряж. перемен. тока}}{\text{Напряжение постоянного тока}} = \frac{E_{\text{эф.}}}{E_{\text{п.}}}$	1,11	0,86	0,74	0,72

КПД ртутных выпрямителей благодаря отсутствию потерь на трение и магнитных потерь на гистерезис и токи Фуко очень высок.

§ 18. Коллекторные моторы переменного тока.

1. Однофазные коллекторные моторы могут быть шунтовыми или последовательными. Шунтовые не применяются и исключительное распространение получили моторы с последовательным возбуждением.

2. Главными частями коллекторных однофазных моторов являются: 1) якорь с коллектором,—такой же, как и в машинах постоянного тока;

2) магнитопровод, устроенный с распределенной обмоткой или же с выступающими полюсами

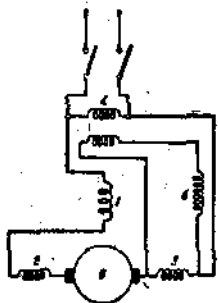
Помимо этих частей моторы имеют:

а) обмотку возбуждения;
б) компенсирующую обмотку, задача которой состоит в уменьшении индуктивного сопротивления якоря.

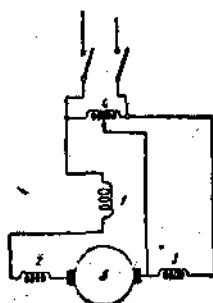
3. Компенсирующая обмотка включается последовательно с якорем и создает магнитный поток навстречу потоку якоря.

4. Главные преимущества коллекторных моторов состоят в том, что они могут широко регулироваться в скорости и имеют чрезвычайно экономический пуск. Кпд коллекторных моторов переменного тока ниже кпд сериес-моторов постоянного тока. $\cos \phi$ этих моторов может быть доведен до 1. Моторы требуют подвода только двух проводов, что имеет большое значение для целей электрической тяги.

5. Схема работы коллекторного двигателя выполняется или с трансформатором (черт. 60), или же с автотрансформатором (черт. 61). На черт. 60: 1—обмотка возбуждения, 2—компенсирующая обмотка, 3—обмотка для улучшения коммутации, 4—трансформатор, 5—дроссельная катушка, 6—якорь мотора. На черт. 61: 1—обмотка возбуждения, 2—компенсирующая обмотка, 3—обмотка для улучшения коммутации, 4—автотрансформатор, 5—якорь мотора.



Черт. 60.



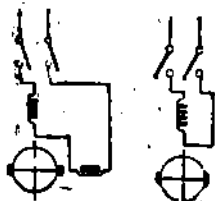
Черт. 61.

6. Репульсионный (индукционный) однофазный коллекторный двигатель имеет статор наподобие статора асинхронного мотора, а ротор—наподобие якоря мотора постоянного тока.

При синхронной скорости (нормальная скорость для этих двигателей) образуется вращающееся круговое магнитное поле, при других скоростях—эллиптическое.

Характерные свойства репульсионных двигателей сходны со свойствами сериесдвигателей. Репульсионный мотор должен бы иметь две обмотки—

одну—возбуждения, а другую—компенсирующую, но эти две обмотки обыкновенно заменяются одной равнодействующей. Схемы репульсионных моторов даны на черт. 62, 63.



Черт. 62.

Черт. 63.

При изменении угла поворота щеток на 90° вращающийся момент изменяется от 0 до 0, проходя максимум примерно при 45° . Пуск в ход производится поворотом щеток. Изменение направления вращения производится тоже поворотом щеток. Мотор вращается в сторону, обратную движению щеток. Регулирование скорости производится за счет поворота щеток на больший или меньший угол.

Возможность регулировки скорости, простота пуска и реверсирования, а равно возможность включения моторов на высокое напряжение без трансформаторов позволяют широко применять репульсионные моторы для некоторых случаев практики. Репульсионные моторы имеют $\cos \phi$ меньше единицы. Для улучшения $\cos \phi$ и доведения его до 1 пользуются компенсированными моторами с возбуждением системы Виттер-Эйхберга и Лакура и др.

§ 19. Трансформаторы.

1. Трансформатор представляет устройство, служащее для изменения напряжения и силы тока в цепях переменного тока.

2. Составными частями т. являются:

- 1) первичная обмотка, к-рая получает ток от внешней сети;
- 2) вторичная обмотка, в к-рой индуцируется эдс магнитным потоком первичной обмотки;
- 3) ярма—магнитопровода, из материала, хорошо проводящего магнитный поток.

3. Величина индуцированной эдс в трансформатора выражается:

$$E = 4,44 f \cdot B_{max} S n \cdot 10^{-8} \text{ В,}$$

где: E —эффективное напряжение переменного тока, f —периодичность переменного тока, B_{max} —максимальная магнитная индукция; S —сечение магнитопровода (в см^2), n —число витков обмотки.

4. Коэф-том трансформации трансформатора называется отношение первичного напряжения к вторичному, к-рое в свою очередь равно отношению числа витков первичной обмотки к числу витков вторичной:

$$a = \frac{E_1}{E_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$



Черт. 64.



Черт. 65.

5. При холостом ходе трансформатора сила тока состоит из двух составляющих, — ваттной и безваттной. Ваттная составляющая расходуется на преодоление магнитных потерь в железе трансформатора (гистерезис и ток Фуко). Безваттная составляющая идет на создание магнитного потока в железе трансформатора.

6. Потери на гистерезис подсчитываются по ф-лам, указанным в разделе 11.

7. Ваттная составляющая тока холостого хода определяется из магнитных потерь в железе трансформатора:

$$I_0 = \frac{W_{\text{эл}} + W_{\text{Ф}}}{U}.$$

8. Безваттная составляющая тока холостого хода зависит от объема железа трансформатора и от индукции и м. б. получена из числа ампервитков, необходимых для создания в железе определенной магнитной индукции (по кривым намагничивания).

9. По форме железного сердечника трансформаторы делятся на два типа: 1) стержневые (черт. 64) и 2) броневые (черт. 65).

10. Расположение высоковольтной и низковольтной катушек обычно бывает таково, что внизу располагается катушка низкого напряжения, а на ней располагается катушка высокого напряжения. В случае выполнения обмоток из отдельных катушек (шпульт) шпульт низковольтной обмотки чередуются со шпультами высоковольтной обмотки.

11. Охлаждение трансформаторов бывает воздушное или масляное.

Масляное охлаждение применяется наиболее часто. Масло кроме передачи тепла от нагретых катушек и сердечника трансформатора в окружающую среду служит также для изоляции всех частей трансформатора.

12. Кдд трансформатора представляет отношение:

$$\eta = \frac{\text{полезная мощность}}{\text{полезная мощность} + \text{потери на нагрев обмоток} + \text{потери магнитные}};$$

Табл. 52. Трансформаторы трехфазного тока с масляным охлаждением, с консерваторами для масла, с выведенной нулевой точкой со стороны низкого напряжения, с дополнительными зажимами со стороны высокого напряжения внутри кожуха для регулирования напряжения $\pm 5\%$, с пробными предохранителями, с соединением обмоток звезда — звезда, 50 герц, 60, 63, 66, 69, 72, 75, 78, 81, 84, 87, 90, 93, 96, 99, 102, 105, 108, 111, 114, 117, 120, 123, 126, 129, 132, 135, 138, 141, 144, 147, 150, 153, 156, 159, 162, 165, 168, 171, 174, 177, 180, 183, 186, 189, 192, 195, 198, 201, 204, 207, 210, 213, 216, 219, 222, 225, 228, 231, 234, 237, 240, 243, 246, 249, 252, 255, 258, 261, 264, 267, 270, 273, 276, 279, 282, 285, 288, 291, 294, 297, 300, 303, 306, 309, 312, 315, 318, 321, 324, 327, 330, 333, 336, 339, 342, 345, 348, 351, 354, 357, 360, 363, 366, 369, 372, 375, 378, 381, 384, 387, 390, 393, 396, 399, 402, 405, 408, 411, 414, 417, 420, 423, 426, 429, 432, 435, 438, 441, 444, 447, 450, 453, 456, 459, 462, 465, 468, 471, 474, 477, 480, 483, 486, 489, 492, 495, 498, 501, 504, 507, 510, 513, 516, 519, 522, 525, 528, 531, 534, 537, 540, 543, 546, 549, 552, 555, 558, 561, 564, 567, 570, 573, 576, 579, 582, 585, 588, 591, 594, 597, 600, 603, 606, 609, 612, 615, 618, 621, 624, 627, 630, 633, 636, 639, 642, 645, 648, 651, 654, 657, 660, 663, 666, 669, 672, 675, 678, 681, 684, 687, 690, 693, 696, 699, 702, 705, 708, 711, 714, 717, 720, 723, 726, 729, 732, 735, 738, 741, 744, 747, 750, 753, 756, 759, 762, 765, 768, 771, 774, 777, 780, 783, 786, 789, 792, 795, 798, 801, 804, 807, 810, 813, 816, 819, 822, 825, 828, 831, 834, 837, 840, 843, 846, 849, 852, 855, 858, 861, 864, 867, 870, 873, 876, 879, 882, 885, 888, 891, 894, 897, 900, 903, 906, 909, 912, 915, 918, 921, 924, 927, 930, 933, 936, 939, 942, 945, 948, 951, 954, 957, 960, 963, 966, 969, 972, 975, 978, 981, 984, 987, 990, 993, 996, 999, 1002, 1005, 1008, 1011, 1014, 1017, 1020, 1023, 1026, 1029, 1032, 1035, 1038, 1041, 1044, 1047, 1050, 1053, 1056, 1059, 1062, 1065, 1068, 1071, 1074, 1077, 1080, 1083, 1086, 1089, 1092, 1095, 1098, 1101, 1104, 1107, 1110, 1113, 1116, 1119, 1122, 1125, 1128, 1131, 1134, 1137, 1140, 1143, 1146, 1149, 1152, 1155, 1158, 1161, 1164, 1167, 1170, 1173, 1176, 1179, 1182, 1185, 1188, 1191, 1194, 1197, 1200, 1203, 1206, 1209, 1212, 1215, 1218, 1221, 1224, 1227, 1230, 1233, 1236, 1239, 1242, 1245, 1248, 1251, 1254, 1257, 1260, 1263, 1266, 1269, 1272, 1275, 1278, 1281, 1284, 1287, 1290, 1293, 1296, 1299, 1302, 1305, 1308, 1311, 1314, 1317, 1320, 1323, 1326, 1329, 1332, 1335, 1338, 1341, 1344, 1347, 1350, 1353, 1356, 1359, 1362, 1365, 1368, 1371, 1374, 1377, 1380, 1383, 1386, 1389, 1392, 1395, 1398, 1401, 1404, 1407, 1410, 1413, 1416, 1419, 1422, 1425, 1428, 1431, 1434, 1437, 1440, 1443, 1446, 1449, 1452, 1455, 1458, 1461, 1464, 1467, 1470, 1473, 1476, 1479, 1482, 1485, 1488, 1491, 1494, 1497, 1500, 1503, 1506, 1509, 1512, 1515, 1518, 1521, 1524, 1527, 1530, 1533, 1536, 1539, 1542, 1545, 1548, 1551, 1554, 1557, 1560, 1563, 1566, 1569, 1572, 1575, 1578, 1581, 1584, 1587, 1590, 1593, 1596, 1599, 1602, 1605, 1608, 1611, 1614, 1617, 1620, 1623, 1626, 1629, 1632, 1635, 1638, 1641, 1644, 1647, 1650, 1653, 1656, 1659, 1662, 1665, 1668, 1671, 1674, 1677, 1680, 1683, 1686, 1689, 1692, 1695, 1698, 1701, 1704, 1707, 1710, 1713, 1716, 1719, 1722, 1725, 1728, 1731, 1734, 1737, 1740, 1743, 1746, 1749, 1752, 1755, 1758, 1761, 1764, 1767, 1770, 1773, 1776, 1779, 1782, 1785, 1788, 1791, 1794, 1797, 1800, 1803, 1806, 1809, 1812, 1815, 1818, 1821, 1824, 1827, 1830, 1833, 1836, 1839, 1842, 1845, 1848, 1851, 1854, 1857, 1860, 1863, 1866, 1869, 1872, 1875, 1878, 1881, 1884, 1887, 1890, 1893, 1896, 1899, 1902, 1905, 1908, 1911, 1914, 1917, 1920, 1923, 1926, 1929, 1932, 1935, 1938, 1941, 1944, 1947, 1950, 1953, 1956, 1959, 1962, 1965, 1968, 1971, 1974, 1977, 1980, 1983, 1986, 1989, 1992, 1995, 1998, 2001, 2004, 2007, 2010, 2013, 2016, 2019, 2022, 2025, 2028, 2031, 2034, 2037, 2040, 2043, 2046, 2049, 2052, 2055, 2058, 2061, 2064, 2067, 2070, 2073, 2076, 2079, 2082, 2085, 2088, 2091, 2094, 2097, 2100, 2103, 2106, 2109, 2112, 2115, 2118, 2121, 2124, 2127, 2130, 2133, 2136, 2139, 2142, 2145, 2148, 2151, 2154, 2157, 2160, 2163, 2166, 2169, 2172, 2175, 2178, 2181, 2184, 2187, 2190, 2193, 2196, 2199, 2202, 2205, 2208, 2211, 2214, 2217, 2220, 2223, 2226, 2229, 2232, 2235, 2238, 2241, 2244, 2247, 2250, 2253, 2256, 2259, 2262, 2265, 2268, 2271, 2274, 2277, 2280, 2283, 2286, 2289, 2292, 2295, 2298, 2301, 2304, 2307, 2310, 2313, 2316, 2319, 2322, 2325, 2328, 2331, 2334, 2337, 2340, 2343, 2346, 2349, 2352, 2355, 2358, 2361, 2364, 2367, 2370, 2373, 2376, 2379, 2382, 2385, 2388, 2391, 2394, 2397, 2400, 2403, 2406, 2409, 2412, 2415, 2418, 2421, 2424, 2427, 2430, 2433, 2436, 2439, 2442, 2445, 2448, 2451, 2454, 2457, 2460, 2463, 2466, 2469, 2472, 2475, 2478, 2481, 2484, 2487, 2490, 2493, 2496, 2499, 2502, 2505, 2508, 2511, 2514, 2517, 2520, 2523, 2526, 2529, 2532, 2535, 2538, 2541, 2544, 2547, 2550, 2553, 2556, 2559, 2562, 2565, 2568, 2571, 2574, 2577, 2580, 2583, 2586, 2589, 2592, 2595, 2598, 2601, 2604, 2607, 2610, 2613, 2616, 2619, 2622, 2625, 2628, 2631, 2634, 2637, 2640, 2643, 2646, 2649, 2652, 2655, 2658, 2661, 2664, 2667, 2670, 2673, 2676, 2679, 2682, 2685, 2688, 2691, 2694, 2697, 2700, 2703, 2706, 2709, 2712, 2715, 2718, 2721, 2724, 2727, 2730, 2733, 2736, 2739, 2742, 2745, 2748, 2751, 2754, 2757, 2760, 2763, 2766, 2769, 2772, 2775, 2778, 2781, 2784, 2787, 2790, 2793, 2796, 2799, 2802, 2805, 2808, 2811, 2814, 2817, 2820, 2823, 2826, 2829, 2832, 2835, 2838, 2841, 2844, 2847, 2850, 2853, 2856, 2859, 2862, 2865, 2868, 2871, 2874, 2877, 2880, 2883, 2886, 2889, 2892, 2895, 2898, 2901, 2904, 2907, 2910, 2913, 2916, 2919, 2922, 2925, 2928, 2931, 2934, 2937, 2940, 2943, 2946, 2949, 2952, 2955, 2958, 2961, 2964, 2967, 2970, 2973, 2976, 2979, 2982, 2985, 2988, 2991, 2994, 2997, 3000, 3003, 3006, 3009, 3012, 3015, 3018, 3021, 3024, 3027, 3030, 3033, 3036, 3039, 3042, 3045, 3048, 3051, 3054, 3057, 3060, 3063, 3066, 3069, 3072, 3075, 3078, 3081, 3084, 3087, 3090, 3093, 3096, 3099, 3102, 3105, 3108, 3111, 3114, 3117, 3120, 3123, 3126, 3129, 3132, 3135, 3138, 3141, 3144, 3147, 3150, 3153, 3156, 3159, 3162, 3165, 3168, 3171, 3174, 3177, 3180, 3183, 3186, 3189, 3192, 3195, 3198, 3201, 3204, 3207, 3210, 3213, 3216, 3219, 3222, 3225, 3228, 3231, 3234, 3237, 3240, 3243, 3246, 3249, 3252, 3255, 3258, 3261, 3264, 3267, 3270, 3273, 3276, 3279, 3282, 3285, 3288, 3291, 3294, 3297, 3300, 3303, 3306, 3309, 3312, 3315, 3318, 3321, 3324, 3327, 3330, 3333, 3336, 3339, 3342, 3345, 3348, 3351, 3354, 3357, 3360, 3363, 3366, 3369, 3372, 3375, 3378, 3381, 3384, 3387, 3390, 3393, 3396, 3399, 3402, 3405, 3408, 3411, 3414, 3417, 3420, 3423, 3426, 3429, 3432, 3435, 3438, 3441, 3444, 3447, 3450, 3453, 3456, 3459, 3462, 3465, 3468, 3471, 3474, 3477, 3480, 3483, 3486, 3489, 3492, 3495, 3498, 3501, 3504, 3507, 3510, 3513, 3516, 3519, 3522, 3525, 3528, 3531, 3534, 3537, 3540, 3543, 3546, 3549, 3552, 3555, 3558, 3561, 3564, 3567, 3570, 3573, 3576, 3579, 3582, 3585, 3588, 3591, 3594, 3597, 3600, 3603, 3606, 3609, 3612, 3615, 3618, 3621, 3624, 3627, 3630, 3633, 3636, 3639, 3642, 3645, 3648, 3651, 3654, 3657, 3660, 3663, 3666, 3669, 3672, 3675, 3678, 3681, 3684, 3687, 3690, 3693, 3696, 3699, 3702, 3705, 3708, 3711, 3714, 3717, 3720, 3723, 3726, 3729, 3732, 3735, 3738, 3741, 3744, 3747, 3750, 3753, 3756, 3759, 3762, 3765, 3768, 3771, 3774, 3777, 3780, 3783, 3786, 3789, 3792, 3795, 3798, 3801, 3804, 3807, 3810, 3813, 3816, 3819, 3822, 3825, 3828, 3831, 3834, 3837, 3840, 3843, 3846, 3849, 3852, 3855, 3858, 3861, 3864, 3867, 3870, 3873, 3876, 3879, 3882, 3885, 3888, 3891, 3894, 3897, 3900, 3903, 3906, 3909, 3912, 3915, 3918, 3921, 3924, 3927, 3930, 3933, 3936, 3939, 3942, 3945, 3948, 3951, 3954, 3957, 3960, 3963, 3966, 3969, 3972, 3975, 3978, 3981, 3984, 3987, 3990, 3993, 3996, 4000, 4003, 4006, 4009, 4012, 4015, 4018, 4021, 4024, 4027, 4030, 4033, 4036, 4039, 4042, 4045, 4048, 4051, 4054, 4057, 4060, 4063, 4066, 4069, 4072, 4075, 4078, 4081, 4084, 4087, 4090, 4093, 4096, 4099, 4102, 4105, 4108, 4111, 4114, 4117, 4120, 4123, 4126, 4129, 4132, 4135, 4138, 4141, 4144, 4147, 4150, 4153, 4156, 4159, 4162, 4165, 4168, 4171, 4174, 4177, 4180, 4183, 4186, 4189, 4192, 4195, 4198, 4201, 4204, 4207, 4210, 4213, 4216, 4219, 4222, 4225, 4228, 4231, 4234, 4237, 4240, 4243, 4246, 4249, 4252, 4255, 4258, 4261, 4264, 4267, 4270, 4273, 4276, 4279, 4282, 4285, 4288, 4291, 4294, 4297, 4300, 4303, 4306, 4309, 4312, 4315, 4318, 4321, 4324, 4327, 4330, 4333, 4336, 4339, 4342, 4345, 4348, 4351, 4354, 4357, 4360, 4363, 4366, 4369, 4372, 4375, 4378, 4381, 4384, 4387, 4390, 4393, 4396, 4399, 4402, 4405, 4408, 4411, 4414, 4417, 4420, 4423, 4426, 4429, 4432, 4435, 4438, 4441, 4444, 4447, 4450, 4453, 4456, 4459, 4462, 4465, 4468, 4471, 4474, 4477, 4480, 4483, 4486, 4489, 4492, 4495, 4498, 4501, 4504, 4507, 4510, 4513, 4516, 4519, 4522, 4525, 4528, 4531, 4534, 4537, 4540, 4543, 4546, 4549, 4552, 4555, 4558, 4561, 4564, 4567, 4570, 4573, 4576, 4579, 4582, 4585, 4588, 4591, 4594, 4597, 4600, 4603, 4606, 4609, 4612, 4615, 4618, 4621, 4624, 4627, 4630, 4633, 4636, 4639, 4642, 4645, 4648, 4651, 4654, 4657, 4660, 4663, 4666, 4669, 4672, 4675, 4678, 4681, 4684, 4687, 4690, 4693, 4696, 4699, 4702, 4705, 4708, 4711, 4714, 4717, 4720, 4723, 4726, 4729, 4732, 4735, 4738, 4741, 4744, 4747, 4750, 4753, 4756, 4759, 4762, 4765, 4768, 4771, 4774, 4777, 4780, 4783, 4786, 4789, 4792, 4795, 4798, 4801, 4804, 4807, 4810, 4813, 4816, 4819, 4822, 4825, 4828, 4831, 4834, 4837, 4840, 4843, 4846, 4849, 4852, 4855, 4858, 4861, 4864, 4867, 4870, 4873, 4876, 4879, 4882, 4885, 4888, 4891, 4894, 4897, 4900, 4903, 4906, 4909, 4912, 4915, 4918, 4921, 4924, 4927, 4930, 4933, 4936, 4939, 4942, 4945, 4948, 4951, 4954, 4957, 4960, 4963, 4966, 4969, 4972, 4975, 4978, 4981, 4984, 4987, 4990, 4993, 4996, 5000, 5003, 5006, 5009, 5012, 5015, 5018, 5021, 5024, 5027, 5030, 5033, 5036, 5039, 5042, 5045, 5048, 5051, 5054, 5057, 5060, 5063, 5066, 5069, 5072, 5075, 5078, 5081, 5084, 5087, 5090, 5093, 5096, 5099, 5102, 5105, 5108, 5111, 5114, 5117, 5120, 5123, 5126, 5129, 5132, 5135, 5138, 5141, 5144, 5147, 5150, 5153, 5156, 5159, 5162, 5165, 5168, 5171, 5174, 5177, 5180, 5183, 5186, 5189, 5192, 5195, 5198, 5201, 5204, 5207, 5210, 5213, 5216, 5219, 5222, 5225, 5228, 5231, 5234, 5237, 5240, 5243, 5246, 5249, 5252, 5255, 5258, 5261, 5264, 5267, 5270, 5273, 5276, 5279, 5282, 5285, 5288, 5291, 5294, 5297, 5300, 5303, 5306, 5309, 5312, 5315, 5318, 5321, 5324, 5327, 5330, 5333, 5336, 5339, 5342, 5345, 5348, 5351, 5354, 5357, 5360, 5363, 5366, 5369, 5372, 5375, 5378, 5381, 5384, 5387, 5390, 5393, 5396, 5399, 5402, 5405, 5408, 5411, 5414, 5417, 5420, 5423, 5426, 5429, 5432, 5435, 5438, 5441, 5444, 5447, 5450, 5453, 5456, 5459, 5462, 5465, 5468, 5471, 5474, 5477, 5480, 5483, 5486, 5489, 5492, 5495, 5498, 5501, 5504, 5507, 5510, 5513, 5516, 5519, 5522, 5525, 5528, 5531, 5534, 5537, 5540, 5543, 5546, 5549, 5552, 5555, 5558, 5561, 5564, 5567, 5570, 5573, 5576, 5579, 5582, 5585, 5588, 5591, 5594, 5597, 5600, 5603, 5606, 5609, 5612, 5615, 5618, 5621, 5624, 5627, 5630, 5633, 5636, 5639, 5642, 5645, 5648, 5651, 5654, 5657, 5660, 5663, 5666, 5669, 5672, 5675, 5678, 5681, 5684, 5687, 5690, 5693, 5696, 5699, 5702, 5705, 5708, 5711, 5714, 5717, 5720, 5723, 5726, 5729, 5732, 5735, 5738, 5741, 5744, 5747, 5750, 5753, 5756, 5759, 5762, 5765, 5768, 5771, 5774, 5777, 5780, 5783, 5786, 5789, 5792, 5795, 5798, 5801, 5804, 5807, 5810, 5813, 5816, 5819, 5822, 5825, 5828, 5831, 5834, 5837, 5840, 5843, 5846, 5849, 5852, 5855, 5858, 5861, 5864, 5867, 5870, 5873, 5876, 5879, 5882, 5885, 5888, 5891, 5894, 5897, 5900, 5903, 5906, 5909, 5912, 5915, 5918, 5921, 5924, 5927, 5930, 5933, 5936, 5939, 5942, 5945, 5948, 5951, 5954, 5957, 5960, 5963, 5966, 5969, 5972, 5975, 5978, 5981, 5984, 5987, 5990, 5993, 5996, 6000, 6003, 6006, 6009, 6012, 6015, 6018, 6021, 6024, 6027, 6030, 6033, 6036, 6039, 6042, 6045, 6048, 6051, 6054, 6057, 6060, 6063, 6066, 6069, 6072, 6075, 6078, 6081, 6084, 6087, 6090, 6093, 6096, 6099, 6102, 6105, 6108, 6111, 6114, 6117, 6120, 6123, 6126, 6129, 6132, 6135, 6138, 6141, 6144, 6147, 6150, 6153, 6156, 6159, 6162, 6165, 6168, 6171, 6174, 6177, 6180, 6183, 6186, 6189, 6192, 6195, 6198, 6201, 6204, 6207, 6210, 6213, 6216, 6219, 6222, 6225, 6228, 6231, 6234, 6237, 6240, 6243, 6246, 6249, 6252, 6255, 6258, 6261, 6264, 6267, 6270, 6273, 6276, 6279, 6282, 6285, 6288, 6291, 6294, 6297, 6300, 6303, 6306, 6309, 6312

$$\eta = \frac{W_{\text{полз.}}}{W_{\text{полз.}} + I_0^2 R_0 + I_N^2 R_N + W_s + W_{\text{ж}}},$$

где: I_0 и R_0 — ток и сопротивление высоковольтной обмотки, I_N и R_N — ток и сопротивление низковольтной обмотки.

13. При выборе трансформаторов следует обращать внимание на соотношение магнитных и эл. потерь трансформатора между собой. Трансформаторы, работающие большую часть времени не с полной нагрузкой, следует выбирать с малыми магнитными потерями, т. к. это очень сильно влияет на годовой кпд трансформатора.

Табл. 53. Значения кпд для трехфазных трансформаторов.

Мощность (в kVA)	Кпд при cos φ = 1 и первичном напряжении					Мощность (в kVA)	Кпд при cos φ = 1 и первичном напряжении				
	3 000	6 000	10 000	20 000	35 000		3 000	6 000	10 000	20 000	35 000
5	95,7	95,5	—	—	—	150	97,6	97,56	97,54	97,48	97,34
10	96	95,97	95,84	—	—	200	97,71	97,68	97,65	97,58	97,45
15	96,21	96,15	96,05	—	—	300	97,85	97,83	97,81	97,76	97,67
25	96,45	96,42	96,37	96,28	96,13	500	98,05	98,02	98,01	97,97	97,87
50	96,83	96,8	96,76	96,56	96,5	750	98,16	98,12	98,10	98,08	97,97
75	97,08	97,06	97,01	96,93	96,8	1 000	98,31	98,28	98,27	98,24	98,14
100	97,30	97,27	97,25	97,17	97,05	1 500	98,5	98,46	98,43	98,41	98,31

ГЕОДЕЗИЯ.

Сведения из теории ошибок измерений.

§ 1. Формулы средних квадратических ошибок.

1. Одного измерения:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[dd]}{n-1}}$$

2. Арифметической середины:

$$M = \pm \frac{m}{\sqrt{n}} = \pm \sqrt{\frac{[dd]}{n(n-1)}}$$

где $dd = d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2$ — сумма квадратов отклонений отдельных измерений от арифметической середины, а n — число измерений.

Пример. Линия АВ измерена шесть раз

Измерение	Результат	d	dd
1-й раз	348,24	-0,03	9
2-й »	36	+0,09	81
3-й »	20	-0,07	49
4-й »	29	+0,02	4
5-й »	31	+0,04	16
6-й »	22	-0,05	25
Среднее	148,27	+0,15 -0,15 0,00	184

$$m = \pm \sqrt{\frac{0,0184}{5}} = \pm 0,06;$$

$$M = \pm \frac{m}{\sqrt{n}} = \pm \frac{0,06}{\sqrt{6}} = \pm 0,024.$$

3. Функции измеренных величин.

$$a) y = kx,$$

где k — постоянное число,

$$m_y = km_x.$$

Напр.: измерен угол $x = 48^\circ$ со средней ошибкой

$$m_x = \pm 0,6'.$$

Если для каких-либо вычислений надо принять угол $y = 4x$, то ошибка в угле y :

$$m_y = \pm 4 \cdot 0,6' = \pm 2,4'.$$

б) Ошибка суммы или разности:

$$U = x \pm y \pm z \pm \dots m_u = \pm \sqrt{(m_x)^2 + (m_y)^2 + (m_z)^2 + \dots}$$

Пример. В четырехугольнике измерены три угла: $A = 143^\circ 18'$, $B = 63^\circ 14'$ и $C = 76^\circ 31'$ со средними ошибками: $m_A = \pm 0,6'$, $m_B = \pm 0,3'$ и $m_C = \pm 0,5'$.

Средняя ошибка четвертого угла D , равного: $360^\circ - (A + B + C) = 76^\circ 51'$, будет равна:

$$m_D = \pm \sqrt{0,6^2 + 0,3^2 + 0,5^2} = \pm 0,84'.$$

$$в) U = k_1x + k_2y + k_3z + \dots$$

где $k_1, k_2, \dots$ — постоянные числа.

$$m_u = + \sqrt{(k_1 m_x)^2 + (k_2 m_y)^2 + (k_3 m_z)^2}.$$

Пример. Даны три результата измерений одной и той же линии со средними ошибками:

$$x = 129,36, m_x = \pm 0,08;$$

$$y = 129,40, m_y = \pm 0,10;$$

$$z = 129,29, m_z = \pm 0,12;$$

$$U = \frac{x+y+z}{3} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z = 129,35;$$

$$m_U = \pm \sqrt{\left(0,08 \cdot \frac{1}{3}\right)^2 + \left(0,10 \cdot \frac{1}{3}\right)^2 + \left(0,12 \cdot \frac{1}{3}\right)^2} = \pm 0,06;$$

в) $U = f(x, y, z, \dots)$.

$$m_U = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} m_x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} m_y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} m_z\right)^2 + \dots}$$

Пример. Превышение вычислено по формуле $\Delta = d \cdot \operatorname{tg} \alpha$. Найти его среднюю ошибку m_Δ , если $d = 284$ м представляет собою одну из сторон геометрической сети, определенную по нивелиру с плана с ошибкой: $m_d = \pm 1$ м, а $\alpha = 8^\circ 16'$ измерено кипрегелем с ошибкой $m_\alpha = \pm 0,8'$.

$$m_\Delta = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial d}\right)^2 m_d^2 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha}\right)^2 m_\alpha^2} = \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha m_d^2 + \frac{d^2}{\cos^4 \alpha} m_\alpha^2 \cdot \sin^2 1'} = \pm 0,05 \text{ м.}$$

4. Вероятная ошибка, т. е. такая величина, относительно которой можно с одинаковой уверенностью утверждать, что истинная ошибка по абсолютной величине менее или более вероятной:

$$z = 0,6745 m \approx \frac{2}{3} m.$$

5. Предельная ошибка принимается равной утроенной средней:

$$\Delta = 3m.$$

Общая арифметическая середина:

$$x = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots},$$

где $x_1, x_2, \dots$ — неравноточные результаты, а $p_1, p_2, \dots$ — их веса.

Весом данного результата измерения называется число, показывающее, сколько одинаково точных измерений нужно сделать определенным прибором, чтобы среднее арифметическое из них имело такую же точность, что и данный результат измерения.

Вес представляет собою величину, равную или прямо пропорциональную числу равноточных наблюдений, из которых получилась арифметическая середина.

В ряде случаев вес можно также определять и по формуле:

$$p = \frac{1}{m^2}.$$

6. Средняя ошибка наблюдения с весом 1:

$$m = \pm \sqrt{\frac{\sum p x^2}{n}}.$$

7. Средняя ошибка общей арифметической середины с весом p :

$$M = \pm \sqrt{\frac{[p\delta]}{p(n-1)}} = \pm \frac{\mu}{\sqrt{p}}$$

Пример. Базис измерялся одной и той же лентой в три приема:

В первый прием из четырех измерений получилось среднее 428,645
 Во второй * * * трех * * * * * 428,596
 В третий * * * пяти * * * * * 428,612

№№ приемов	Результат измерения	Вес p	δ	$p\delta$	δ^2	$p\delta^2$
1	428,645	4	-26	-104	676	2704
2	428,596	3	+25	+69	529	1537
3	428,612	5	+7	+35	49	245
	428,619	12		0		4536

$$x = 428,600 + \frac{0,045 \cdot 4 - 0,004 \cdot 3 + 0,012 \cdot 5}{12} = 428,619;$$

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{4536}{12}} = \pm 48 \text{ мм} = \pm 0,048 \text{ м};$$

$$M = \pm \frac{0,048}{\sqrt{12}} = \pm 0,014 \text{ м}.$$

Измерение линий.

Табл. 1. Допускаемые погрешности в длинах ленточных мер (при $t = 15^\circ$ и натяжении 20-метровых лент в 10 кг, а рулеток в 5 кг).

Длина (м)	Рулетки		Землемер- ные ленты (мм)	Длина (м)	Рулетки		Землемер- ные ленты (мм)
	металлич. (мм)	неметал- лические и землем. цепи (мм)			металлич. (мм)	неметал- лические и землем. цепи (мм)	
50, 40 30 и 25	± 8	± 20	± 5	2, 8, 7, 6, 5	± 4	± 7	—
20	± 5	± 15	± 3	2	± 3	± 5	—
15	± 5	± 15	± 3	1	± 1	± 2	—
10	± 4	± 10	± 3		± 1	$\pm 1,5$	—

Эти нормы 1924 г. относятся к новым или отремонтированным мерам, представляемым в поверочные палаты; при инспекторском же контроле на местах мер, находящихся в употреблении, погрешности допускаются в два раза больше.

По правилам 1923 г. предельная погрешность для 20-метровой ленты допускалась в ± 15 мм, а по правилам 1902 г. — в ± 127 мм.

Табл. 2. Мерные приборы, применяемые в СССР.

Название работ	Название прибора	Относит. точность измерения
Тригоном. сеть (измерение базиса)		
1-й кл.	Базисные приборы (Едерина, Гильома) из инварной проволоки	500 000
2-й кл.		1
		200 000
3-й кл.	Базисные приборы из инварных лент; прибор Лешнера; жезлы по б. ч. в. (способ Струве)	1
4-й кл.		50 000
		1
5-й кл.		20 000
Полигон. сеть		
1-й кл.	Жезлы; шкаловые ленты	1
		10 000
2-й кл.		1
		5 000
Съемочные ходы и нивелир-ная всякого рода	Мерная лента	1 1 1 000 2 000

При второстепенных измерениях небольших расстояний (перпендикуляров, обмеров зданий и т. п.) употребляются полотняные и металлические рулетки.

§ 2. Измерение линий мерной лентой.

1. Перед выездом на полевые работы мерная лента обязательно сличается с надежной (нормальной) мерой. В случае неверности ленты измеренные ею линии исправляются по ф-ле:

$$l = (1 \pm 0,05\alpha) l_1,$$

где l — исправленная длина линии, l_1 — измеренная длина линии, α — разность между длиной мерной ленты и 20-метровой + (плюс) — когда лента длиннее 20 м и — (минус) — когда она короче 20 м.

Если при измерениях сторон одного и того же участка или хода употребляется несколько лент, то все они до начала работ д. б. сличены с нормальной мерой, а во время работ — с одной из лент, избранной в качестве нормальной. Эта лента по возможности не употребляется в работу.

2. Измерения сторон участка и основных внутренних ходов производятся дважды, в противоположных направлениях, с точностью отсчета по ленте до 0,01 м.

3. В заросших местах (лесных, покрытых кустами, с густой травой и т. п.) предварительно измерения линий необходимо тщательно расчистить просеки и где нужно сделать прокосы.

4. При измерении линий техник должен неотступно следовать за рабочими и наблюдать за их действиями по укладке каждой ленты, следя за отнесенным положением колышков и надлежащим натяжением ленты.

5. Особое внимание д. б. обращено на правильную передачу колышков рабочими друг другу. В момент передачи колышков лента д. б. уложена вперед на линию и тщательно вытянута.

6. Измеренные длины должны быть исправлены за наклон, если угол наклона $> 2^\circ$.

Табл. 8. Поправки за наклон линий ($\Delta l = 2l \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}$)

Угол накл.	Р а с с т о я н и я (м)									
	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
2°0'	0,06	0,12	0,18	0,24	0,30	0,37	0,43	0,49	0,55	0,61
2°15'	08	15	23	31	39	46	54	62	69	77
2°30'	10	19	29	38	48	57	67	76	86	95
2°45'	12	23	35	46	58	69	81	92	1,04	1,15
3°0'	14	27	41	55	69	82	96	1,10	1,24	1,37
3°15'	16	32	48	64	80	96	1,13	1,29	1,45	1,61
3°30'	19	37	56	75	94	1,12	1,31	1,49	1,68	1,87
3°45'	21	43	64	86	1,07	1,26	1,45	1,65	1,83	2,14
4°0'	24	49	73	98	1,22	1,46	1,71	1,95	2,20	2,44
4°15'	28	55	83	1,10	1,38	1,65	1,93	2,20	2,48	2,75
4°30'	31	62	92	1,23	1,54	1,85	2,16	2,46	2,77	3,08
4°45'	34	69	1,03	1,37	1,72	2,06	2,40	2,74	3,09	3,43
5°0'	38	76	1,14	1,52	1,90	2,29	2,67	3,05	3,43	3,81
5°15'	42	84	1,26	1,68	2,10	2,52	2,94	3,36	3,78	4,20
5°30'	46	92	1,38	1,84	2,30	2,76	3,22	3,68	4,14	4,60
5°45'	50	1,01	1,51	2,01	2,52	3,02	3,52	4,02	4,53	5,03
6°0'	55	1,10	1,64	2,19	2,74	3,29	3,84	4,38	4,93	5,48
6°15'	59	1,19	1,78	2,38	2,97	3,56	4,16	4,75	5,35	5,94
6°30'	64	1,29	1,93	2,57	3,22	3,86	4,50	5,14	5,79	6,43
6°45'	69	1,39	2,08	2,77	3,47	4,16	4,85	5,54	6,24	6,93
7°0'	75	1,49	2,24	2,98	3,73	4,47	5,22	5,96	6,71	7,45
7°15'	80	1,60	2,40	3,20	4,00	4,80	5,60	6,40	7,20	8,00
7°30'	86	1,71	2,57	3,42	4,28	5,14	6,00	6,85	7,70	8,56
7°45'	91	1,83	2,74	3,65	4,57	5,48	6,39	7,30	8,22	9,13
8°0'	97	1,95	2,91	3,89	4,87	5,84	6,81	7,78	8,76	9,73
8°15'	1,04	2,07	3,11	4,14	5,18	6,21	7,25	8,28	9,32	10,36
8°30'	10	2,20	3,29	4,39	5,49	6,59	7,69	8,78	9,88	10,98
8°45'	16	2,33	3,50	4,66	5,82	6,98	8,15	9,31	10,48	11,64
9°0'	23	2,46	3,69	4,92	6,16	7,39	8,62	9,85	11,08	12,31
9°15'	30	2,60	3,90	5,20	6,50	7,80	9,10	10,40	11,70	13,00
9°30'	37	2,74	4,11	5,48	6,86	8,23	9,60	10,97	12,34	13,71
9°45'	44	2,89	4,33	5,78	7,22	8,66	10,11	11,55	13,00	14,44
10°0'	52	3,04	4,56	6,08	7,60	9,12	10,63	12,15	13,67	15,19
10°15'	60	3,19	4,79	6,38	7,98	9,59	11,17	12,77	14,36	15,96
10°30'	68	3,35	5,03	6,70	8,38	10,05	11,73	13,40	15,08	16,75
10°45'	75	3,51	5,26	7,02	8,77	10,53	12,28	14,04	15,79	17,55
11°0'	84	3,67	5,51	7,35	9,19	11,02	12,86	14,70	16,53	18,37
11°15'	92	3,84	5,76	7,69	9,61	11,53	13,45	15,37	17,29	19,21
11°30'	2,01	4,02	6,02	8,03	10,04	12,08	14,06	16,06	18,07	20,08
11°45'	10	19	29	38	48	57	67	76	86	95
12°0'	19	37	56	74	93	111	130	148	167	186

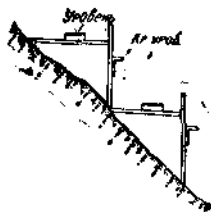
Можно вычислять и непосредственно горизонтальное проложение по формуле:

$$d = l \cdot \cos \alpha$$

(напр., с помощью таблиц приращений координат Гаусса).

7. В отдельных случаях в местности с меняющимся крутым уклоном, а также при переходе оврагов можно определять горизонтальное проложение и непосредственно, ватерпашением, при помощи двух реек:

одна укладывается при помощи уровня горизонтально и ее конец, находящийся на весу, проектируется на землю с помощью другой, устанавливаемой вертикально по отвесу или по уровню. Способ этот обычно соединяется с нивелированием оврагов и, вообще говоря, неточен. Лучше при переходе оврагов определять расстояние, как не при ступе, тригонометрически.



Черт. 1.

§ 3. Точность измерения стальной лентой.

При измерении линий приходится иметь дело с рядом неизбежных погрешностей. Источниками их служат: 1) компарирование (сравнение данной ленты с нормальной); 2) уклонения ленты от прямой линии (боковые — от неправильного вешения и вертикальные — от неровностей местности, вызывающих прогибы и провисы ленты); 3) неточные измерения углов наклона; 4) изменения темп-ры ленты; 5) различные натяжения ленты и 6) собственно измерение (ошибки от проектирования концов ленты, от неправильного прикладывания, от отсчитывания и т. д.).

Ошибки, вызываемые ими, являются отчасти постоянными (закон накопления их выражается формулой: $f_1 \cdot l$), отчасти случайными, возрастающими пропорционально квадратному корню из длины ($f_2 \cdot \sqrt{l}$), и в небольшой доле от длины линии не зависящими, — ошибки отсчитывания f_3 .

Значения коэф-ов f у различных исследователей получаются далеко не одинаковыми; кроме того и общее влияние всех перечисленных ошибок на определение по способу средней квадратической ошибки $\Delta l = \pm \sqrt{(f_1 l)^2 + (f_2 \sqrt{l})^2 + f_3^2}$, где f_3 принимается равным в пределах 0—0,05, другие — просто суммированием абсолютных значений ошибок систематических, случайных и отсчитывания ($\Delta l = f_1 l + f_2 \sqrt{l} + f_3$). Поэтому официальные инструкции различных стран дают различные ф-лы допускаемых разностей двух измерений одной и той же линии.

В СССР до сего времени широко применяются ф-лы прусской инструкции 1881 г.:

$$1. \Delta l = 0,01 \sqrt{4l + 0,003l^2};$$

$$2. \Delta l = 0,01 \sqrt{6l + 0,0075l^2};$$

$$3. \Delta l = 0,01 \sqrt{8l + 0,01l^2};$$

дающие предельные значения допускаемых разностей двух измерений. При пользовании ими результаты следует уменьшать в 2,5 и даже в 3 раза.

Первая ф-ла относится к местности; благоприятной для измерений, т. е. ровной, открытой, непересеченной, с твердым грунтом и т. п.; вторая — к средней местности, т. е. с более или менее рыхлым грунтом (напр., песчаным), с заметным наклоном, с небольшими зарослями и т. п.; третья — к местности, неблагоприятной для измерений, т. е. болотистой, закрытой, с значительными зарослями, резко переменяющимся рельефом и т. п.

В последнее время находит применение ф-ла австрийской инструкции (1904 г.), имеющая для средней местности вид:

$$\Delta l = 0,00015l + 0,003 \sqrt{l} + 0,015.$$

Для благоприятной местности величина Δl д. б. уменьшена на 25%, а для неблагоприятной увеличена на 25%.

Наиболее принятые ф-лы м. б. объединены одной общей, вида:

$$\Delta l = f(l + 10 \sqrt{l}),$$

где для местностей 1-го, 2-го и 3-го классов f равно соответственно: 0,0002, 0,0003, 0,0004.

В табл. 4 приведены значения величин Δl , определенных по этой ф-ле, соблюдения к-рых следует требовать при обыкновенных технических съемках (при измерениях линий—стальной лентой, а углов—одноминутным теодолитом).

Табл. 4. Допускаемые разности при двойном измерении линий.

l	I		II		III		l	I		II		III	
	Δl	$\frac{\Delta l}{l}$	Δl	$\frac{\Delta l}{l}$	Δl	$\frac{\Delta l}{l}$		Δl	$\frac{\Delta l}{l}$	Δl	$\frac{\Delta l}{l}$	Δl	$\frac{\Delta l}{l}$
10	0,01	$\frac{1}{1000}$	0,01	$\frac{1}{1000}$	0,02	$\frac{1}{500}$	350	0,11	$\frac{1}{3000}$	0,16	$\frac{1}{2200}$	0,21	$\frac{1}{1700}$
20	0,01	$\frac{1}{2000}$	0,02	$\frac{1}{1000}$	0,03	$\frac{1}{670}$	400	0,12	$\frac{1}{3300}$	0,18	$\frac{1}{2400}$	0,24	$\frac{1}{1700}$
40	0,02	$\frac{1}{2000}$	0,03	$\frac{1}{1300}$	0,04	$\frac{1}{670}$	450	0,13	$\frac{1}{3500}$	0,20	$\frac{1}{2600}$	0,26	$\frac{1}{1700}$
50	0,02	$\frac{1}{2500}$	0,04	$\frac{1}{1300}$	0,05	$\frac{1}{600}$	500	0,14	$\frac{1}{3500}$	0,22	$\frac{1}{2300}$	0,29	$\frac{1}{1700}$
60	0,03	$\frac{1}{2000}$	0,04	$\frac{1}{1500}$	0,05	$\frac{1}{600}$	550	0,16	$\frac{1}{3500}$	0,24	$\frac{1}{2300}$	0,31	$\frac{1}{1700}$
80	0,03	$\frac{1}{2600}$	0,05	$\frac{1}{1600}$	0,07	$\frac{1}{1100}$	600	0,17	$\frac{1}{3500}$	0,25	$\frac{1}{2300}$	0,34	$\frac{1}{1700}$
100	0,04	$\frac{1}{2500}$	0,06	$\frac{1}{1700}$	0,08	$\frac{1}{1200}$	650	0,18	$\frac{1}{3600}$	0,27	$\frac{1}{2400}$	0,36	$\frac{1}{1800}$
120	0,05	$\frac{1}{2400}$	0,07	$\frac{1}{1700}$	0,09	$\frac{1}{1300}$	700	0,19	$\frac{1}{3600}$	0,29	$\frac{1}{2400}$	0,39	$\frac{1}{1800}$
140	0,05	$\frac{1}{2700}$	0,08	$\frac{1}{1750}$	0,10	$\frac{1}{1300}$	750	0,20	$\frac{1}{3700}$	0,31	$\frac{1}{2500}$	0,41	$\frac{1}{1800}$
160	0,06	$\frac{1}{2700}$	0,09	$\frac{1}{1750}$	0,11	$\frac{1}{1400}$	800	0,22	$\frac{1}{3700}$	0,32	$\frac{1}{2500}$	0,43	$\frac{1}{1800}$
180	0,06	$\frac{1}{3000}$	0,09	$\frac{1}{2000}$	0,13	$\frac{1}{1400}$	850	0,23	$\frac{1}{4000}$	0,34	$\frac{1}{2500}$	0,46	$\frac{1}{2000}$
200	0,07	$\frac{1}{3000}$	0,10	$\frac{1}{2000}$	0,14	$\frac{1}{1500}$	900	0,24	$\frac{1}{4100}$	0,36	$\frac{1}{2700}$	0,48	$\frac{1}{2000}$
250	0,08	$\frac{1}{3300}$	0,12	$\frac{1}{2100}$	0,16	$\frac{1}{1500}$	1000	0,26	$\frac{1}{4200}$	0,39	$\frac{1}{2800}$	0,53	$\frac{1}{2100}$
300	0,09	$\frac{1}{3300}$	0,14	$\frac{1}{2100}$	0,16	$\frac{1}{1600}$	1200	0,31	$\frac{1}{4300}$	0,46	$\frac{1}{2900}$	0,62	$\frac{1}{2200}$
							1500	0,38	$\frac{1}{4400}$	0,57	$\frac{1}{3000}$	0,75	$\frac{1}{2300}$
							2000	0,49	$\frac{1}{4500}$	0,73	$\frac{1}{3100}$	0,98	$\frac{1}{2400}$
							2500	0,60	$\frac{1}{4600}$	0,90	$\frac{1}{3200}$	1,20	$\frac{1}{2500}$
							3000	0,71	$\frac{1}{4700}$	1,06	$\frac{1}{3300}$	1,42	$\frac{1}{2600}$
							4000	0,93	$\frac{1}{4800}$	1,39	$\frac{1}{3400}$	1,85	$\frac{1}{2700}$
							5000	1,14	$\frac{1}{4900}$	1,71	$\frac{1}{3500}$	2,28	$\frac{1}{2800}$

Построение прямых углов (перпендикуляров) на местности.

В зависимости от точности, предъявляемой к разбивке прямых углов, перпендикуляры на местности строятся или на-глаз (при съемках в мелком масштабе), или при помощи ленты и рулетки (при расстояниях, меньших длины рулетки), или при помощи экра, или при помощи теодолита (в особо точных случаях).

§ 4. Поверка простого экра.

1. Коллимационные плоскости днютров, служащих для построения прямого угла, д. б. между собой перпендикулярны. Строго по линии, в расстоянии приблизительно 50 м одна от другой, выбираются три точки А, В и С. В точках А и С ставятся вежи, а в точку В экер, коллимационная плоскость днютров ac к-рого направляется на вежу С. Выставив по направлению днютров ba вежу D, поворачивают экер так, чтобы волосок днютра d покрыл

веху А. Если веха D окажется после этого вне коллимационной плоскости ac , то экер д. б. направлен к механику для исправления.

Можно пользоваться и неверным экером, определяя направление перпендикуляра BD_2 путем построения биссектрисы угла DBD_1 . Для этого по линиям BD и BD_1 отмеряют равные расстояния и выставляют веху в точке D_2 , представляющей собою среднюю линию, соединяющей концы равных отрезков.

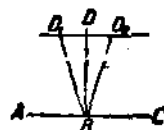
2. Противоположные коллимационные плоскости диоптров должны совпадать между собой. Установив экер, как и при проверке первого условия, т. е., направив плоскость диоптров ac на веху С, заходят с противоположной стороны и смотрят, проходит ли противоположная плоскость ca через веху А. Если нет, то при работе надо пользоваться лишь той парой диоптров, к-рая удовлетворяет первому условию.

Черт. 2.

§ 5. Проверка оптического экера.

На прямой линии АС, длиною метров в 100, примерно посредине ставят с экером и с помощью отраженного изображения, напр., вехи А, выставляют веху D_1 , положение к-рой контролируют по вехе С. Если изображение вехи С не совпадает с вехой D_1 , то исправление зеркального экера производят передвижением одного из зеркал исправительными винтами так, чтобы изображение в зеркале вех А и С совпадало с вехой D, выставленной посредине линии, соединяющей концы равных отрезков BD_1 и BD_2 .

Призменные экера, оказавшиеся неверными, могут быть исправлены только спецалкстами-оптиками.



Черт. 3.

Ориентирование линий.

Как общее правило, при разного рода изысканиях и съемках основным направлением, с к-рым связывают все прокладываемые на местности линии, служит направление истинного (географического) меридиана, проходящего через определенную точку местности. Небольшие съемки технического характера (строительные участки, уличные планы и т. п.) в целях удобного расположения их на плане принято ориентировать по условному меридиану. Съемки хозяйственного значения ориентируют обыкновенно по магнитному меридиану.

§ 5. Зависимость между азимутами: геодезическим, астрономическим, магнитным и дирекционным углом.

Если PQ —данное направление; $N_P S_P$ —направление истинного меридиана в точке P, m_P —направление магнитного меридиана в точке P, NS —направление основного меридиана в точке P, то:

угол $QPN_P = \alpha$ —геодезический азимут линии PQ ;

• $QPS_P = \alpha_g$ —астрономический азимут линии PQ ;

• $QPM = \alpha_m$ —магнитный азимут линии PQ ;

• $N_P M = \delta_m$ —склонение магнитной стрелки, сопровождаемое знаками: + для западного и — для восточного склонения;

угол $NPN_p = \delta$

— сближение меридианов (угол между направлением основного меридиана, перенесенного в точку P , и направлением географического меридиана в той же точке), сопровождаемое знаком $+$ при положении точки P к востоку ($+y$) и к западу от основного меридиана ($-y$);

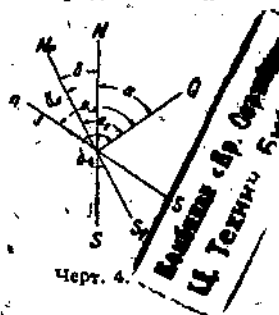
• $NPn = \delta_m + \delta = \Delta$ — отклонение магнитной стрелки от основного меридиана;

• $QPN = \alpha$ — дирекционный угол.

$$\alpha_s = \alpha + \delta;$$

$$\alpha_z = \alpha - \delta_m;$$

$$\alpha_s = \alpha_n \pm 180^\circ.$$



§ 6. Вычисление дирекционных углов (азимуты).

Если даны: азимут какого-либо направления, принимаемого за начальное, и углы между сторонами полигона или хода, то вычисление дирекционных углов производится по ф-ле:

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + 180 - \beta_n;$$

или:

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + 180 + \gamma_n.$$

Эта ф-ла обычно читается так: дирекционный угол (азимут) последующей линии равен дирекционному углу (азимуту) предыдущей линии плюс 180° минус угол β_n , вправо по ходу лежащий (или плюс угол γ_n , левый по ходу).

Если углы увязаны, то контроль до известной степени обеспечивается получением в конце вычислений градусной величины дирекционного угла (азимута) начальной линии (для замкнутого полигона) или примычной стороны (для разомкнутого хода).

Вычисление дирекционного угла любой линии по азимуту (или дирекционному углу) начальной линии и внутренним углам производится по ф-ле:

$$\alpha_n = \alpha_1 + n \cdot 180^\circ - \sum \beta.$$

§ 7. Определение величины угла по дирекционным углам (азимутам) его сторон.

Если даны азимуты или дирекционные углы α'_1 и α'_2 сторон угла ABC в направлении BA и BC , то угол между ними равен разности азимутов:

$$\beta = \alpha'_1 - \alpha'_2.$$

Если даны дирекционные углы α_1 линии AB и α_2 линии BC , то:

$$\beta = \alpha_1 + 180 - \alpha_2.$$

§ 8. Связь между азимутом α и румбом r линии.

Если $0 < \alpha < 90^\circ$, то румб $NO : r_1^\circ$, при чем $r_1 = \alpha_1$;

• $90 < \alpha < 180^\circ$, • $SO : r_2^\circ$, • $r_2 = 180 - \alpha_2$;

• $180 < \alpha < 270^\circ$, • $SW : r_3^\circ$, • $r_3 = \alpha_3 - 180$;

• $270 < \alpha < 360^\circ$, • $NW : r_4^\circ$, • $r_4 = 360 - \alpha_4$.

§ 9. Геодезический способ определения истинного азимута.

1. Передача азимута со сторон тригонометрической сети или полигонометрического хода путем привязки к ним. При наличии вблизи пунктов сети или хода этот способ при всех более или менее крупных изысканиях является обязательным, т. к. одновременно разрешает и вопрос об отнесении съемки к системе координат данного района.

Если привязка была произведена в пункте $P_1(x_1, y_1)$ путем визирования на пункт $P_2(x_2, y_2)$, то дирекционный угол линии P_1P_2 определится по ф-ле:

$$\text{tg}(P_1P_2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Чтобы получить азимут относительно местного меридиана, надо ввести поправку за сближение меридианов, определяемую по ф-ле:

$$\delta = \frac{y_1}{R \cdot \sin 1''} \cdot \text{tg } \varphi = \lambda \cdot \sin \varphi_1,$$

где: φ_1 — широта точки P_1 , λ — разность долгот пунктов P_1 и P_2 , $R = 6370$ км — земной радиус. δ имеет знак + при +у и — при —у.

Для приближенных подсчетов δ может служить табл. 5.

Табл. 5. Приближенные подсчеты δ .

Широта φ	Сближение меридианов δ (в мин.)			Широта φ	Сближение меридианов δ (в мин.)		
	на 1' долготы $\delta = \sin \varphi$	на 1° Δ на 1°	на 1 км по параллели $\delta = 0,54 \cdot \text{tg } \varphi$		на 1' долготы $\delta = \sin \varphi$	на 1° Δ на 1°	на 1 км по параллели $\delta = 0,54 \cdot \text{tg } \varphi$
0	0		0	50	0,77	0,012	0,84
10	0,17	0,012	0,10	55	0,82	0,010	0,77
20	0,34	0,017	0,20	56*	0,83	0,010	0,80
30	0,50	0,016	0,31	60	0,87	0,010	0,83
35	0,57	0,014	0,38	65	0,91	0,008	1,12
40	0,64	0,014	0,45	70	0,94	0,007	1,42
45	0,71	0,012	0,54				

Для более точных подсчетов может служить табл. 6.

Пример. Найти истинный азимут линии P_1P_2 по данным: $x_1 = -3563,89$; $y_1 = +37462,34$ ($\varphi_1 = 50^\circ 43,02'$); $x_2 = +10470,44$; $y_2 = -7531,33$; $\text{tg}(P_1P_2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \text{tg } 12^\circ 40' 28''$.

Дирекционный угол $(P_1P_2) = 287^\circ 19' 34'' = 287^\circ 19,57'$; $\delta = 29,65'$ (по табл. 6); $\delta = \frac{y_1}{R \cdot \sin 1''} \cdot \text{tg } \varphi_1 = 29,65'$; приближенно $\delta = 0,80 \cdot \frac{y_1}{1000} = 29,96'$.

Истинный азимут $(P_1P_2) = 287^\circ 19,57' + 0^\circ 29,65' = 287^\circ 49,2'$.

2. С помощью магнитной стрелки, если известно ее склонение. Сделав отсчет по буссоли и введя в него поправку на ориентирную ошибку буссоли, получают магнитный азимут какого-нибудь направления, а вычитя из последнего величину магнитного склонения для места и времени наблюдения, находят истинный азимут этого направления.

Точность такого определения не высока и оставляет всего $10'$ — $15'$ для буссоль и теодолитов и 1° — 2° для ручных бусселей.

Табл. 6. Значения δ (в мин.).

Шир. φ \ У км	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
40	4,5	9,0	13,6	18,1	22,6	27,1	31,6	36,2	40,7	45,2
41	4,7	9,4	14,0	18,7	23,4	28,1	32,8	37,4	42,1	46,8
42	4,8	9,7	14,6	19,4	24,2	29,1	33,0	38,8	43,6	48,5
43	5,0	10,0	15,1	20,1	25,1	30,1	35,1	40,2	45,2	50,2
44	5,2	10,4	15,6	20,8	26,0	31,2	36,4	41,6	46,8	52,0
45	5,4	10,8	16,1	21,5	26,9	32,3	37,7	43,1	48,4	53,8
46	5,6	11,1	16,7	22,3	27,9	33,4	39,0	44,6	50,2	55,7
47	5,8	11,5	17,3	23,1	28,9	34,6	40,4	46,2	51,9	57,7
48	6,0	12,0	17,9	23,9	29,9	35,9	41,8	47,8	53,8	59,8
49	6,2	12,4	18,5	24,8	30,9	37,1	43,3	49,5	55,7	61,9
50	6,4	12,8	19,2	25,6	32,1	38,5	44,9	51,3	57,7	64,1
51	6,6	13,3	19,9	26,6	33,2	39,9	46,5	53,1	59,8	66,4
52	6,9	13,8	20,7	27,6	34,4	41,3	48,2	55,1	62,0	68,9
53	7,1	14,3	21,4	28,6	35,7	42,8	50,0	57,1	64,2	71,4
54	7,4	14,8	22,2	29,6	37,0	44,4	51,8	59,2	66,6	74,0
55	7,7	15,4	23,0	30,7	38,4	46,1	53,8	61,4	69,1	76,8
56	8,0	15,9	23,9	31,9	39,8	47,6	55,8	63,6	71,7	79,7
57	8,3	16,4	24,8	33,1	41,4	49,7	58,0	66,2	74,5	82,8
58	8,6	17,2	25,8	34,4	43,0	51,7	60,3	68,9	77,8	86,1
59	9,0	17,9	26,9	35,8	44,8	53,7	62,6	71,6	80,6	89,5
60	9,3	18,6	27,9	37,2	46,6	55,9	65,2	74,5	83,8	93,1
61	9,7	19,4	29,1	38,8	48,5	58,2	67,9	77,6	87,3	97,0
62	10,1	20,2	30,3	40,4	50,6	60,7	70,8	80,9	91,0	101,1
63	10,6	21,1	31,6	42,2	52,8	63,3	73,8	84,4	95,0	105,8
64	11,0	22,0	33,1	44,1	55,1	66,1	77,1	88,2	99,2	110,2
65	11,5	23,1	34,6	46,1	57,6	69,2	80,7	92,2	103,8	115,3
66	12,1	24,1	36,2	48,3	60,4	72,4	84,5	96,6	108,6	120,7
67	12,7	25,3	38,0	50,8	63,3	76,0	88,0	101,3	113,9	126,6
68	13,3	26,6	39,9	53,2	66,6	79,9	92,2	106,5	119,9	133,1
69	14,0	28,0	42,0	56,0	70,0	84,0	98,0	112,0	126,0	140,0
70	14,8	29,5	44,8	59,1	73,8	88,6	103,4	118,2	132,9	147,7

Т. к. склонение магнитной стрелки подвержено кроме вековых и годовых изменений также и суточным, то для избежания влияния последних, достигающих в средних широтах СССР $\pm 15'$, следует определения магнитного меридиана производить в часы, когда стрелка занимает нормальное положение. В средних широтах СССР благоприятным временем для наблюдений в течение суток являются часы: 0, 4, 10 и 20.

Наибольшего отклонения северный конец стрелки достигнет: к западу в 3 и 14 час., а к востоку в 8 и 23 часа.

Годовое изменение склонения для европейской части СССР составляет 6—7" и при измерениях, производимых в течение нескольких месяцев в году, в расчет обыкновенно не принимается.

Для определения склонения стрелки в данной точке А надо:

- 1) определить истинный азимут (обыкновенно по солнцу, астрономически) некой линией АВ и
- 2) измерить по буссоли магнитный азимут той же линии.

Пример. Наблюденный по солнцу истинный азимут $\alpha_1 = 216^\circ 24'$, а отсчитанный по буссоли магнитный $\alpha_2 = 211^\circ 41'$.

Склонение $\delta_m = \alpha_1 - \alpha_2 = -4^\circ 43'$ (восточное).

Т. к. с переменой места склонения стрелки изменяется, то, в зависимости от протяжения измеряемого участка, определение склонения должно повторяться (примерно через 10—20 км протяжения по х или у).

§ 10. Проверка буссоли с диоптрами.

1. Деления кольца буссоли д. б. верны. Проверяются с помощью циркуля, в раствор к-рого берется 8—12 делений. Проверка производится через каждое деление по всему кольцу буссоли. В буссолях современных фабрик это условие всегда выполняется.

2. Стрелка д. б. хорошо намагничена и обладать достаточной чувствительностью. Устанавливают буссоль горизонтально, дают стрелке успокоиться и делают отсчет по одному из концов. С помощью куска железа (ножа, шпильки и т. п.) отводят конец стрелки в сторону и, дав стрелке успокоиться, снова делают отсчет по тому же концу. Проверку повторяют несколько раз, отводя стрелку на разные расстояния в разные стороны.

Если стрелка долго не успокаивается, движется медленно, но, остановившись, дает тот же отсчет, то стрелку надо намагнитить. Если стрелка будет задерживаться на различных отсчетах, то надо прежде всего выправить и отточить острие шпиля. Если и это не поможет, то надо исправить шлифовку шляпки стрелки (агата), последнее же м. б. выполнено только механиком.

3. Инструмент не должен содержать железа в количестве и расстоянии, оказывающих влияние на положение стрелки. Стрелку вынимают из буссоли и вешают на иголку, воткнутую в пробку. После того, как стрелка успокоится, инструмент подносят к ней разными частями и следят, остается ли стрелка в покое. Если нет, то части, содержащие железо, д. б. заменены другими. При этом испытании шпиль стрелки следует вывинтить из коробки буссоли, т. к. он делается из стали: находясь посредине стрелки, в нейтральной ее части, он не оказывает влияния на отсчеты, но при испытании может вызвать отклонение стрелки. Полезно испытать также и части штатива, содержащие железные винты, оковки и т. п., поднося их к буссоли на расстояние, в каком они бывают при работе.

4. Плоскость делений кольца буссоли д. б. перпендикулярна к оси вращения инструмента. Сняв крышку буссоли и приведя буссоль на-глаз в горизонтальное положение, устанавливают стрелку с помощью подъемных винтов параллельно плоскости кольца буссоли. Если при вращении буссоли концы стрелки будут оставаться в том же положении, то четвертое условие будет выполнено, если нет, то инструмент д. б. исправлен механиком.

5. Стрелка д. б. уравновешена. Если по приведении буссоли с помощью выверенного уровня в горизонтальное положение один конец стрелки окажется выше другого, то стрелка приводится в равновесие или перемещением латунного кольца, надетого на стрелку, или прикреплением на приподнятый конец кусочка воска, лака, сургуча и т. п.

6. Стрелка не должна иметь эксцентриситета. Если центр вращения (острие шпиля) не совпадает с центром градусного кольца, то отсчеты по концам стрелки будут разными. Для получения верного отсчета при румбическом кольце надо брать среднее арифметическое из отсчетов по обоим концам стрелки, а при азимутальном нужно предварительно отсчет по южному концу стрелки изменить на 180° .

7. Магнитная ось стрелки должна совпадать с геометрической. Сняв крышку буссоли, дают стрелке успокоиться и делают отсчет по стрелке, после этого снимают стрелку, переворачивают шляпку снизу стрелки и, снова надев на шпиль, делают опять отсчет по стрелке. Неравенство отсчетов обнаружит ошибку.

Если съемка участка производилась одной буссолью, то угол между осями стрелки не окажет влияния на точность плана, т. к. вызовет измене-

ния в азимутах на одну и ту же величину и с одним и тем же знаком. Если же съемка производилась несколькими буссолями, то предварительно составления плана в азимуты д. б. введена поправка за угол между осями стрелки.

8. Коллимационная плоскость диоптров д. б. перпендикулярна к плоскости делений кольца буссоли. Подвесив метрах в 20 от буссоли шнур с отвесом и установив прибор горизонтально, наводят волосок предметного диоптра на шнур отвеса. Если при перемещении глаза вдоль щели глазного диоптра волосок будет передвигаться параллельно шнуру, проектируясь глазом в различные места, то это покажет, что щель глазного диоптра стоит наклонно. Если же наклонен предметный диоптр, то волосок будет пересекать шнур отвеса.

Исправление наклона диоптров достигается или подкладыванием бумаги под их основание, или стачиванием подпильком нижней плоскости.

Если с переменою места глаза около щели волосок будет то отходить, то приближаться к шнуру, то это значит, что щель глазного диоптра представляет собой кривую линию и для измерений непригодна.

9. Противоположные коллимационные плоскости диоптров должны совпадать между собою. Производится так же, как и аналогичная проверка простого экера.

10. Коллимационная плоскость диоптров должна проходить через нулевой диаметр буссоли. От нижнего конца щели глазного диоптра натягивают тонкую нить к верхнему концу волоска предметного диоптра и смотрят через щель, проектируется ли нить на нулевой диаметр. Если нет, то делаются отсчеты во штих и измерения по буссолю-румбы и азимуты исправляют за коллимационную ошибку кольца буссоли.

§ 11. Астрономический способ определения азимута.

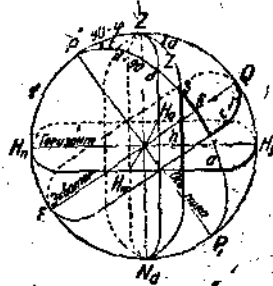
Координаты светила на небесной сфере.

PP_1 —ось мира (продолженная земная ось); P и P_1 —северный и южный полюсы мира; ZN_0 —отвесная линия в месте наблюдения; Z —зенит места наблюдения; N_0 —надир места наблюдения; H_0 , H_s , H_w —плоскость горизонта; H_n и H_s —точки юга и севера (точки пересечения полуденной линии данного места с горизонтом); H_w и H_0 —точки запада и востока.

Большие круги, проходящие через Z и N_0 (горизонту), называются вертикалами, или кругами высот. Вертикал, проходящий через полюсы мира P и P_1 , точки юга и севера H_n и H_s и точки зенита и надира Z и N_0 , называется меридианом места наблюдения. Вертикал, проходящий через Z , N_0 и точки востока и запада H_0 и H_w (перпендикулярный меридиану и горизонту), называется первым вертикалом.

EQ —плоскость небесного экватора (продолженная плоскость земного экватора). Большие круги, перпендикулярные экватору и проходящие через небесные полюсы, называются кругами склонений, или часовыми кругами (напр.: PSP_1).

1. Горизонтальная (азимутальная) система координат. Координатами, определяющими положение светила S на небе, являются высота h —дуга вертикала, проведенного через светило между светилем и горизонтом, и тст., т. 1.



Черт. 5.

азимут a —дуга горизонта между точкой юга H_s и вертикалом светила. Высота h большей частью заменяется зенитным расстоянием $z = 90 - h$, т. е. дугой вертикала между светилом S и зенитом Z .

Т. к. астрономические азимуты обыкновенно отсчитываются по ходу часовой стрелки от S , а геодезические от N , то для перехода от астрономического азимута к геодезическому требуется прибавить или вычесть 180° .

Благодаря вращению земли азимут и высота изменяются в течение суток. В северном полушарии во время верхней кульминации (в момент прохождения светила через южную часть меридиана) азимут равен нулю.

2. Экваториальная система. Координатами служат склонение δ —дуга часового круга, проведенного через светило между экватором и светилом, и прямое восхождение α —дуга экватора, отсчитываемая против хода часовой стрелки от точки мартовского равноденствия до круга склонений светила.

Склонение к северу считается положительным, а к югу—отрицательным. Вместо склонения δ иногда употребляется полярное, или полюсное, расстояние $d = 90 - \delta$. Прямое восхождение измеряется в часах, и т. к. благодаря вращению земли местный меридиан совмещается последовательно со всеми часовыми кругами, то вместо восхождения очень часто предпочитают вводить координатой часовой угол t , представляющий собой дугу экватора между меридианом и часовым кругом светила. Часовые углы измеряются от полуденной части меридиана по ходу часовой стрелки в часах и долях их.

Часовой угол центра солнца называется истинным временем, а часовой угол центра среднего солнца — средним временем.

Разность между средним и истинным временем называется уравнением времени:

$$E = M - T.$$

Т. к. экваториальные координаты не зависят ни от суточного движения, ни от места наблюдения на земной поверхности (от перемещения точки зенита), то в астрономических справочниках («Ежегодник Русск. астр. об-ва», изд. в Ленинграде, «Астр. календарь Нижегородского кружка любит. физики и астрономии», «The Nautical Almanac», изд. в Лондоне, «Compte-rendu de l'Observatoire de Paris», изд. в Париже и т. д.) положения светил даются в этих координатах.

В практике дорожных и водных изысканий среди различных способов определения азимута земного предмета, основанных на наблюдениях звезд или солнца, получил распространение способ определения истинных азимутов по измеренным зенитным расстояниям.

В помещаемых ниже таблицах приводятся: в табл. 7—перевод времени в градусную меру и обратно; в табл. 8—эфемериды солнца на 1900 г.; в табл. 9—поправки за начало года для получения эфемерид солнца для 1931—1950 гг.; табл. 10—значения средней рефракции p_0 .

Табл. 7. Перевод мер времени в градусную меру.

Часы				Минуты				Секунды						Часы				Минуты				Секунды					
h	o	m	s	h	o	m	s	h	o	m	s	z	"	h	o	m	s	h	o	m	s	h	o	m	s	z	"
1	15	1	0 15	1	0 15	0,1	1,5	8	120	8	2 0	0,7	10,5	9	135	9	2 15	0,8	12,0	10	150	10	2 30	0,9	13,5	11	165
2	30	2	0 30	2	0 30	0,2	3,0	9	135	9	2 15	0,8	12,0	10	150	10	2 30	0,9	13,5	11	165	11	2 45	1,0	15,0	12	180
3	45	3	0 45	3	0 45	0,3	4,5	10	150	10	2 30	0,9	13,5	11	165	11	2 45	1,0	15,0	12	180	12	2 55	1,1	16,5	13	195
4	60	4	1 00	4	1 00	0,4	6,0	11	165	11	2 55	1,1	16,5	12	180	12	3 00	1,2	18,0	13	195	13	3 10	1,3	19,5	14	210
5	75	5	1 15	5	1 15	0,5	7,5	12	180	12	3 00	1,2	18,0	13	195	13	3 10	1,3	19,5	14	210	14	3 20	1,4	21,0	15	225
6	90	6	1 30	6	1 30	0,6	9,0	13	195	13	3 10	1,3	19,5	14	210	14	3 20	1,4	21,0	15	225	15	3 30	1,5	22,5	16	240
7	105	7	1 45	7	1 45	0,7	10,5	14	210	14	3 20	1,4	21,0	15	225	15	3 30	1,5	22,5	16	240	16	3 40	1,6	24,0	17	255

Табл. 8. Эфемериды солнца на 1900 г.

Я н в а р ь			Число	Ф е б р а л ь			
Склонение δ	Уравнение времени E	Радиус R		Склонение δ	Уравнение времени E	Радиус R	
—23°7,6'	+2m58s	16,30	П.*В.*	—17°31,6'	+13m31s	16°23'	
—23°3,1'	+3m25s		1 2	—17°14,8'	+13m40s		
—22°58,1'	+3m55s		2 3	—16°57,8'	+13m48s		
—22°52,7'	+4m23s		3 4	—16°40,4'	+13m55s		
—22°46,9'	+4m50s		4 5	—16°22,7'	+14m1s		
—22°40,6'	+5m17s		5 6	—16°4,8'	+14m7s		
—22°33,8'	+5m44s		6 7	—15°46,8'	+14m12s		
—22°26,6'	+6m11s		7 8	—15°28,1'	+14m16s		
—22°18,9'	+6m37s		8 9	—15°9,3'	+14m19s		
—22°10,8'	+7m2s		9 10	—14°50,3'	+14m21s		
—22°2,3'	+7m27s	16,28	10 11	—14°31,0'	+14m23s	16°20'	
—21°53,3'	+7m51s		11 12	—14°11,5'	+14m24s		
—21°43,9'	+8m15s		12 13	—13°51,8'	+14m24s		
—21°34,1'	+8m33s		13 14	—13°31,8'	+14m23s		
—21°23,9'	+9m1s		14 15	—13°11,6'	+14m22s		
—21°13,3'	+9m23s		15 16	—12°51,2'	+14m19s		
—21°2,2'	+9m44s		16 17	—12°30,6'	+14m16s		
—20°50,8'	+10m5s		17 18	—12°9,8'	+14m13s		
—20°38,9'	+10m24s		18 19	—11°48,8'	+14m8s		
—20°26,7'	+10m43s		19 20	—11°27,8'	+14m3s		16°20'
—20°14,1'	+11m2s	20 21	—11°6,3'	+13m57s			
—20°1,1'	+11m19s	21 22	—10°44,7'	+13m51s			
—19°47,7'	+11m36s	22 23	—10°23,0'	+13m43s			
—19°34,0'	+11m52s	23 24	—10°1,2'	+13m36s			
—19°19,9'	+12m7s	24 25	—9°39,2'	+13m27s			
—19°5,4'	+12m22s	25 26	—9°17,0'	+13m18s			
—18°50,8'	+12m35s	26 27	—8°54,7'	+13m6s			
—18°35,3'	+12m48s	27 28	—8°32,3'	+12m58s			
—18°20,0'	+13m0s	28 29	—8°9,8'	+12m47s	16°20'		
—18°4,2'	+13m11s	29 30					
—17°48,1'	+13m22s	30 31					
—17°31,6'	+13m31s	31					
М а р т			А п р е л ь				
—7°47,1'	+12m36s	16,17	1	+4°20,0'		+4m6s	16°03'
—7°24,3'	+12m24s		2	+4°43,2'		+3m48s	
—7°1,4'	+12m12s		3	+5°6,2'		+3m30s	
—6°38,4'	+11m50s		4	+5°29,2'		+3m12s	
—6°16,3'	+11m46s		5	+5°52,1'		+2m55s	
—5°52,1'	+11m32s		6	+6°14,9'	+2m37s		
—5°28,9'	+11m18s		7	+6°37,5'	+2m20s		
—5°45,6'	+11m4s		8	+7°0,1'	+2m3s		
—4°42,2'	+10m40s		9	+7°22,5'	+1m46s		
—4°18,7'	+10m34s	16,12	10	+7°44,9'	+1m30s	15°58'	
—3°55,2'	+10m18s		11	+8°7,1'	+1m13s		
—3°31,6'	+10m2s		12	+8°29,1'	+0m58s		
—3°8,0'	+9m46s		13	+8°51,0'	+0m42s		
—2°44,4'	+9m30s		14	+9°12,8'	+0m26s		
—2°20,7'	+9m13s		15	+9°34,4'	+0m11s		
—1°57,0'	+8m56s		16	+9°56,8'	+0m3s		
—1°33,3'	+8m39s		17	+10°17,1'	+0m18s		
—1°9,6'	+8m21s		18	+10°38,2'	+0m32s		
—0°46,9'	+8m4s	16,07	19	+10°59,2'	+0m46s	15°58'	
—0°22,2'	+7m46s		20	+11°19,9'	+0m59s		
—0°1,4'	+7m28s		21	+11°40,5'	+1m12s		
+0°25,2'	+7m10s		22	+12°0,9'	+1m24s		

* П.—простой год, В.—високосный год.

* П — простой год, В — високосный год.

Табл. 8. (Продолжение.)

М а р т			Число	А п р е л ь		
Склонение δ	Уравнение времени E	Радиус R		Склонение δ	Уравнение времени E	Радиус R
+0°48,9'	+6m52s		23	+12°21,0'	-1m36s	
+1°12,5'	+6m33s		24	+12°41,0'	-1m48s	
+1°36,1'	+6m15s		25	+13°0,8'	-1m59s	
+1°59,7'	+5m57s		26	+13°20,3'	-2m10s	
+2°23,2'	+5m38s		27	+13°39,7'	-2m20s	
+2°46,7'	+5m20s		28	+13°58,8'	-2m29s	
+3°10,1'	+5m1s		29	+14°17,7'	-2m39s	
+3°33,5'	+4m43s		30	+14°36,3'	-2m47s	
+3°56,8'	+4m25s		31			
М а я			Число	И ю н ь		
Склонение δ	Уравнение времени E	Радиус R		Склонение δ	Уравнение времени E	Радиус R
+14°54,7'	-2m55s	15,00	1	+21°50,0'	-2m30s	
+15°12,9'	-3m3s		2	+22°7,2'	-2m21s	
+15°30,8'	-3m10s		3	+22°15,0'	-2m11s	
+15°48,4'	-3m16s		4	+22°22,4'	-2m1s	
+16°5,8'	-3m22s		5	+22°29,4'	-1m51s	
+16°23,0'	-3m27s		6	+22°36,0'	-1m41s	
+16°39,8'	-3m32s		7	+22°42,2'	-1m30s	
+16°56,4'	-3m36s		8	+22°48,1'	-1m19s	
+17°12,7'	-3m40s		9	+22°53,5'	-1m7s	
+17°28,7'	-3m42s		10	+22°58,5'	-0m56s	15°78
+17°44,5'	-3m45s	15,85	11	+23°3,1'	-0m44s	
+17°59,9'	-3m47s		12	+23°7,3'	-0m31s	
+18°15,0'	-3m48s		13	+23°11,2'	-0m19s	
+18°29,8'	-3m48s		14	+23°14,6'	-0m7s	
+18°44,3'	-3m49s		15	+23°17,5'	-0m6s	
+18°58,5'	-3m48s		16	+23°20,1'	-0m19s	
+19°12,4'	-3m47s		17	+23°22,3'	-0m32s	
+19°25,9'	-3m46s		18	+23°24,0'	-0m45s	
+19°39,1'	-3m43s		19	+23°25,4'	-0m58s	
+19°52,0'	-3m41s		20	+23°26,3'	-1m11s	15°77
+20°4,5'	-3m38s	15,83	21	+23°26,8'	-1m24s	
+20°16,7'	-3m34s		22	+23°26,9'	-1m37s	
+20°28,6'	-3m30s		23	+23°26,6'	-1m49s	
+20°40,1'	-3m28s		24	+23°25,9'	-2m2s	
+20°51,2'	-3m20s		25	+23°24,8'	-2m15s	
+21°2,0'	-3m14s		26	+23°23,2'	-2m28s	
+21°12,4'	-3m8s		27	+23°21,3'	-2m40s	
+21°22,5'	-3m1s		28	+23°18,9'	-2m53s	
+21°32,2'	-2m54s		29	+23°16,1'	-3m5s	
+21°41,5'	-2m46s	15,80	30	+23°13,0'	-3m17s	15°75
+21°50,4'	-2m38s		31			
И ю л ь			Число	А в г у с т		
Склонение δ	Уравнение времени E	Радиус R		Склонение δ	Уравнение времени E	Радиус R
+23°9,4'	+3m29s		1	+16°10,2'	+8m12s	
+23°5,4'	+3m41s		2	+17°55,1'	+8m6s	
+23°1,0'	+3m52s		3	+17°39,7'	+8m4s	
+22°56,1'	+4m3s		4	+17°24,0'	+8m6s	
+22°50,9'	+4m14s		5	+17°8,1'	+8m54s	
+22°45,3'	+4m25s		6	+16°51,8'	+8m49s	
+22°39,3'	+4m36s		7	+16°35,3'	+8m42s	
+22°32,9'	+4m46s		8	+16°18,5'	+8m35s	
+22°26,2'	+4m54s		9	+16°1,5'	+8m28s	15°80
+22°19,0'	+5m9s	15,75	10	+15°44,2'	+8m19s	
+22°11,4'	+5m12s		11	+15°26,7'	+8m11s	
+22°3,8'	+5m20s		12	+15°8,9'	+8m1s	
+21°55,2'	+5m28s		13	+14°50,9'	+4m51s	
+21°46,9'	+5m35s		14	+14°32,6'	+4m41s	

Табл. 6. (Продолжение.)

И ю л ь			Число	А в г у с т		
Склонение δ	Уравнение времени E	Радиус R		Склонение δ	Уравнение времени E	Радиус R
+21°37,4'	+5m42s	15,77	15	+14°14,1'	+4m30s	15'83
+21°28,0'	+5m48s		16	+13°55,4'	+4m18s	
+21°18,2'	+5m54s		17	+13°36,4'	+4m6s	
+21°8,0'	+5m59s		18	+13°17,3'	+3m53s	
+20°57,5'	+6m4s		19	+12°57,9'	+3m40s	
+20°46,7'	+6m8s		20	+12°38,3'	+3m26s	
+20°35,5'	+6m11s		21	+12°18,6'	+3m12s	
+20°23,9'	+6m14s		22	+11°58,6'	+2m58s	
+20°12,0'	+6m16s		23	+11°38,4'	+2m42s	
+19°59,8'	+6m18s		24	+11°18,1'	+2m27s	
+19°47,2'	+6m19s		25	+10°57,6'	+2m11s	
+19°34,3'	+6m20s		26	+10°36,9'	+1m54s	
+19°21,1'	+6m20s	15,78	27	+10°16,0'	+1m38s	15'87
+19°7,5'	+6m20s		28	+9°55,0'	+1m21s	
+18°53,6'	+6m19s		29	+9°33,8'	+1m3s	
+18°39,4'	+6m17s		30	+9°12,4'	+0m45s	
+18°25,0'	+6m15s		31	+8°50,9'	+0m27s	
С е н т я б р ь			О к т я б р ь			
+8°29,3'	+0m9s	15,90	1	+2°58,5'	+10m7s	16'03
+8°7,5'	+0m10s		2	+3°21,8'	+10m26s	
+7°45,6'	+0m26s		3	+3°45,1'	+10m43s	
+7°23,6'	+0m40s		4	+4°8,3'	+11m5s	
+7°1,4'	+1m9s		5	+4°31,5'	+11m21s	
+6°39,2'	+1m28s		6	+4°54,6'	+11m39s	
+6°16,8'	+1m48s		7	+5°17,7'	+11m57s	
+5°54,3'	+2m8s		8	+5°40,7'	+12m14s	
+5°31,7'	+2m29s		9	+6°3,6'	+12m30s	
+5°9,1'	+2m49s		10	+6°26,4'	+12m47s	
+4°46,3'	+3m10s		11	+6°49,2'	+13m2s	
+4°23,5'	+3m31s	15,95	12	+7°11,8'	+13m18s	16'08
+4°0,6'	+3m52s		13	+7°34,4'	+13m33s	
+3°37,6'	+4m13s		14	+7°56,9'	+13m47s	
+3°14,5'	+4m34s		15	+8°19,2'	+14m1s	
+2°51,4'	+4m55s		16	+8°41,4'	+14m14s	
+2°28,3'	+5m17s		17	+9°3,5'	+14m27s	
+2°5,1'	+5m38s		18	+9°26,5'	+14m39s	
+1°41,8'	+5m59s		19	+9°47,3'	+14m51s	
+1°18,6'	+6m21s		20	+10°8,0'	+15m2s	
+0°55,2'	+6m42s		21	+10°30,0'	+15m12s	
+0°31,9'	+7m3s	15,98	22	+10°52,0'	+15m22s	16'13
+0°8,5'	+7m24s		23	+11°13,2'	+15m31s	
+0°14,8'	+7m45s		24	+11°34,2'	+15m39s	
+0°38,2'	+8m6s		25	+11°55,1'	+15m47s	
+1°1,6'	+8m27s		26	+12°15,8'	+15m54s	
+1°25,0'	+8m47s		27	+12°36,4'	+16m0s	
+1°48,4'	+9m7s		28	+12°56,7'	+16m5s	
+2°11,8'	+9m27s		29	+13°16,8'	+16m10s	
+2°35,2'	+9m47s		30	+13°36,7'	+16m14s	
			31	+13°56,4'	+16m17s	
Н о я б р ь			Д е к а б р ь			
+14°15,9'	+16m19s	16,17	1	+21°43,8'	+11m6s	16'27
+14°35,2'	+16m20s		2	+21°53,1'	+10m43s	
+14°54,2'	+16m21s		3	+22°2,1'	+10m20s	
+15°12,9'	+16m21s		4	+22°10,6'	+9m56s	
+15°31,5'	+16m20s		5	+22°18,8'	+9m32s	
+15°49,7'	+16m18s		6	+22°26,3'	+9m7s	
+16°7,7'	+16m15s		7	+22°32,5'	+8m42s	

Табл. 8. (Продолжение.)

Н о я б р ь			Число	Д е к а б р ь		
Склонение δ	Уравнение времени E	Радиус R		Склонение δ	Уравнение времени E	Радиус R
—16°25,5'	—16°12'	16,20	8	—22°40,2'	—8°16'	16°28
—16°42,9'	—16°8'		9	—22°48,5'	—7°49'	
—17°0,1'	—16°3'		10	—22°52,4'	—7°22'	
—17°17,0'	—15°57'		11	—22°57,8'	—6°55'	
—17°33,6'	—15°50'		12	—23°2,8'	—6°27'	
—17°49,8'	—15°42'		13	—23°7,9'	—5°59'	
—18°5,8'	—15°34'		14	—23°11,3'	—5°31'	
—18°21,5'	—15°25'		15	—23°14,9'	—5°3'	
—18°36,8'	—15°15'		16	—23°18,0'	—4°34'	
—18°51,8'	—15°4'		17	—23°20,7'	—4°5'	
—19°8,4'	—14°52'		18	—23°22,9'	—3°35'	
—19°20,8'	—14°39'		19	—23°24,6'	—3°6'	
—19°34,7'	—14°26'		20	—23°25,9'	—2°36'	
—19°48,4'	—14°12'		21	—23°26,6'	—2°8'	
—20°1,6'	—13°57'		22	—23°26,9'	—1°37'	
—20°14,5'	—13°41'		23	—23°26,8'	—1°7'	
—20°27,0'	—13°24'	16,23	24	—23°26,1'	—0°37'	16°28
—20°39,2'	—13°7'		25	—23°25,0'	—0°7'	
—20°50,9'	—12°49'		26	—23°23,5'	—0°23'	
—21°2,3'	—12°29'		27	—23°21,4'	—0°53'	
—21°15,3'	—12°10'		28	—23°18,9'	—1°22'	
—21°23,9'	—11°49'		29	—23°15,9'	—1°52'	
—21°34,0'	—11°28'		30	—23°12,5'	—2°21'	
			31	—23°8,5'	—2°50'	
			1 д 1901	—23°4,2'	—3°19'	16°28

Табл. 9. Поправки к за начало года (в долях суток).

Год	κ	Год	κ	Год	κ	Год	κ	Год	κ
1931	—0,149	1935	—0,117	1939	—0,086	1943	—0,055	1947	—0,024
1932	+0,609	1936	+0,640	1940	+0,672	1944	+0,703	1948	+0,734
1933	+0,367	1937	+0,398	1941	+0,429	1945	+0,461	1949	+0,492
1934	+0,125	1938	+0,156	1942	+0,187	1946	+0,218	1950	+0,280

Табл. 10. Значения средней рефракция ρ_0 (при $B = 760$ мм и $t = 10^\circ$ C).

Зенит. расст. z	ρ_0	Зенит. расст. z	ρ_0	Зенит. расст. z	ρ_0	Зенит. расст. z	ρ_0
25°	0,45'	35°	0,68'	45°	0,97'	55°	1,38'
26°	0,47'	36°	0,70'	46°	1,04'	56°	1,44'
27°	0,50'	37°	0,73'	47°	1,04'	57°	1,49'
28°	0,52'	38°	0,76'	48°	1,08'	58°	1,55'
29°	0,54'	39°	0,79'	49°	1,12'	59°	1,61'
30°	0,56'	40°	0,81'	50°	1,16'	60°	1,68'
31°	0,58'	41°	0,84'	51°	1,20'	61°	1,75'
32°	0,61'	42°	0,87'	52°	1,24'	62°	1,82'
33°	0,63'	43°	0,90'	53°	1,29'	63°	1,90'
34°	0,65'	44°	0,94'	54°	1,33'	64°	1,98'

Табл. 10. (Продолжение.)

Зенитн. расст. z	ρ_0	Зенитн. расст. z	ρ_0	Зенитн. расст. z	ρ_0	Зенитн. расст. z	ρ_0
65°0'	2,07'	69°0'	2,61'	73°0'	3,14'	77°0'	4,13'
20'	2,10'	20'	2,55'	20'	3,21'	20'	4,23'
40'	2,14'	40'	2,60'	40'	3,28'	40'	4,36'
66°0'	2,17'	70°0'	2,65'	74°0'	3,35'	78°0'	4,47'
20'	2,20'	20'	2,70'	20'	3,42'	20'	4,59'
40'	2,24'	40'	2,75'	40'	3,49'	40'	4,72'
67°0'	2,27'	71°0'	2,80'	75°0'	3,57'	79°0'	4,86'
20'	2,32'	20'	2,85'	20'	3,65'	20'	5,01'
40'	2,38'	40'	2,90'	40'	3,74'	40'	5,17'
68°0'	2,39'	72°0'	2,96'	76°0'	3,83'	80°0'	5,32'
20'	2,43'	20'	3,02'	20'	3,93'		
40'	2,47'	40'	3,08'	40'	4,03'		

С помощью табл. 8 и 9 склонение солнца δ для данного момента времени определяется для средних широт с точностью до $0,3'$, вследствие чего при работе 1'-м, 30'-м и даже 20'-м теодолитом табл. 8 и 9 вполне заменяют астрономический справочник на данный год.

Данные в табл. 8 отнесены к среднему гринвичскому полудню.

Пример. Определить склонение солнца для 26 марта 1937 г. в момент поясного времени $T_n = 17^h 40^m$. Долг т. мист. $l = 35^\circ 18'$ (второй пояс; $N = 2$).

$T_{zp} = T_n - N - 12 = 3^h 40^m = 0,153$ с. т. (после полуя);

$\delta_n = \delta_1 + \Delta \delta (T_{zp} + K) = 1^\circ 39,7' + 23,5 \cdot (0,153 + 0,399) = 2^\circ 12,6'$.

§ 12. Определение азимута по зенитным расстояниям солнца.

Этот способ требует для производства наблюдений не более 30—60 мин. и дает в среднем точность употребляемого инструмента.

Формула для вычисления.

Азимут солнца $a = 180 \pm \alpha$; + при наблюдениях до полудня (на востоке), — при наблюдениях после полудня (на западе); α определяется по ф-ле сферической тригонометрии из астрономического треугольника PZS (полюс-зенит-светило):

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = \frac{m}{\sin(p-d)};$$

$$m = \frac{\sin(p-s) \cdot \sin(p-\phi) \cdot \sin(p-d)}{\sin p};$$



Черт. 6.

$z = ZS = z' + \rho_0 \pm R$ — исправленное зенитное расстояние; z' — измеренное зенитное расстояние; ρ_0 и R берутся из табл. 10 и 8; ρ_0 — исправки за рефракцию (всегда с +) — табл. 10; R — радиус солнца (для приведения наблюдений к центру солнца). Если на трубу надета оправа с темным стеклом, то при наблюдениях верхнего края солнца R входит со знаком —, а нижнего края — со знаком +. Если надевалась призма с темным стеклом, то наоборот.

$\phi = PZ = 90 - \varphi$ — дополнение до 90° широты места наблюдения, определяемой по карте; $d = PS = 90 - \delta$ — дополнение до 90° склонения солнца на данный день и час (полярное расстояние), выбираемое из табл. 8 и 9; $p = \frac{1}{2} (z + \phi + d)$ — полупериметр сторон треугольника.

Если обозначить: $N_{r, s}$ — отсчеты при К.П. и К.Л. на солнце по горизонтальному кругу; B — отсчет по горизонтальному кругу на земной предмет, то $M_0 = N_{r, s} - a$ — истинный меридиан (отсчет в направлении на юг); $a_0 = B - M_0$ — астрономический азимут земного предмета; $a_s = a_0 \pm 180^\circ$ — геодезический азимут земного предмета.

Наблюдения зенитных расстояний солнца иногда используются одновременно и для определения поправки часов и (разности между местным временем и показанием часов T в этот момент):

$$u = t + E - T,$$

где t — получается с помощью ф-лы:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} t = \frac{m}{\sin(p-a)},$$

E — уравнение времени, выбираемое из табл. 8.

Для контроля вычислений определяется также и tg параллактического угла q :

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} q = \frac{m}{\sin(p-\phi)},$$

Контролем служит:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} a_s \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} t \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} q = \frac{m}{\sin p}.$$

Этот контроль применяют и при вычислении только одного азимута.

Производство наблюдений.

Определяют по карте с возможной точностью широту φ и долготу l места наблюдения, и если долгота на карте показана от Пулкова (напр., на двух-, трех- и десятиверстных), то переводят ее на долготу от Гринвича путем прибавления к первой $\lambda = 30^\circ 19,6'$. Пользуясь этими данными, подсчитывают по ф-ле

$$\cos p = \operatorname{ctg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \delta$$

средний момент прохождения центра солнца через первый вертикал, а также, в целях контроля впоследствии наблюдений, и дифференциальные изменения зенитного расстояний $dz = 15 \cos \varphi$ и азимута солнца $da = 15 \sin \varphi$ в 1 мин. при прохождении его через первый вертикал.

Пример 1. Географические координаты пункта № 0, взятые с двухверстной карты, оказались равны: $\varphi = 56^\circ 42,8'$ и $l = 6^\circ 26,4'$ от Пулкова, или $36^\circ 46'$ от Гринвича. Наблюдения солнца производились 10 августа 1931 г.

Выборка из табл. 8 склонения солнца для полудня 10 августа дает: $\delta = +15^\circ 44,2'$

$$\operatorname{tg} \operatorname{ctg} \varphi \dots 9,81726$$

$$\operatorname{tg} \operatorname{tg} \delta \dots 9,44991$$

$$\operatorname{tg} \operatorname{ctg} p \dots 9,20717$$

$$dz = 15 \cos \varphi = + 8,23'$$

$$da = 15 \sin \varphi = + 12,54'$$

$$l = 36^\circ 46' = 2^\circ 23,1' = D$$

$$p \dots 79^\circ 20,3'$$

$$A \dots 5^\circ 17,4' \text{ пополюди среднего времени.}$$

Т. к. пункт № 0 лежит во втором поясе (между $22\frac{1}{2}^\circ$ и $37\frac{1}{2}^\circ$ Ост), то, применяя ф-лу перехода от местного среднего времени к поясному: $t_s = t + N - D$, где N — число пояса, получим, что около $5^\circ 54,3'$ поясного времени солнце пройдет через первый вертикал и при своем движении будет давать в 1 мин. времени изменения в $8,23$ по вертикальному кругу и в $12,54$ по горизонтальному.

Наиболее надежные результаты получаются, если половина наблюдений будет проведена до прохождения солнца через первый вертикал, а другая половина — после. Вообще же наблюдения можно вести или утром, с 6 до 8 час., или вечером, с 16 до 18 час.

Установив прочно на точке хорошо выверенный теодолит минут за 30—40 до прохождения солнца через первый вертикал, приводят его возможно тщательнее в горизонтальное положение и по какому-нибудь земному предмету производят определение M_0 . О

Затем дается наведение на земной предмет (яблоко, под крестом колокольни, шпиль башни и т. п.), азимут направления на к-рый хотят определить, и берут отсчеты по обоим верньерам горизонтального лимба. Надев после этого на окуляр темное стекло, наводят рукой трубу на диск солнца и, закрепив алидаду и вертикальный круг, действуют микрометренным винтом алидады, стараясь все время сохранять вертикальную нить на середине

диска. В момент прикосновения края солнца (верхнего ☉ или нижнего ☽) к средней нити при одновременном прохождении вертикальной нити через центр, немедленно прекращают движение алидады, и если производимые наблюдения служат одновременно и для определения поправки часов, то тотчас делается отсчет по часам, — сначала секунды, потом минуты и часы. Если же имеется в виду только определение азимута, то отсчеты по часам можно проводить более грубо (с точностью до 1').

После часов делаются отсчеты по обоим верньерам вертикального и горизонтального кругов. Затем, чередуя наведения то на нижний, то на верхний край диска, повторяют наблюдения солнца, по окончании к-рых снова визируют на земной предмет (для проверки неподвижности инструмента).

Наблюдения можно располагать по сл. схеме.

Полож. инструм.	Объекты наблюдения	
К. Л. (К. П.)	Земн. пр.	Земн. пр.
"	☉	☽
"	☉	☽
К. П. (К. Л.)	☉	☽
"	☉	☽
"	☉	☽
"	Земн. пр.	Земн. пр.

В целях контроля и для увеличения точности наблюдений полезно наблюдения по этой схеме провести дважды: перед прохождением солнца через вертикаль и после прохождения.

Пример 2. Определение истинного азимута по зенитным расстояниям солнца, произведенное 10 августа 1931 г. по данным первого приема (до прохождения солнца через первый вертикаль).

Н з ние пункта: пикет № 0. $\varphi = 56^{\circ}42,8'$; $D = 2223,1^m$ (в переводе на время).

Н б юд ние азимута: на летоко год крестом колокольни с. Спай в 1.

Инструмент: 1-й т. д. лит № 2016 «Г» д зия с уровнем при алидаде верт. кр.

Часы или хронометр №: карманные, Г.бю. б.з. номера.

Из журнала наблюдений МО: $+0^{\circ}1'$.

Истинный азимут направления В: $213^{\circ}16'$.

К.П.					К.Л.				
№№	Наблюд. предм.т	Отсчет по часам T	Отсчет гориз. круга N	Отсчет вертик. круга R	№№	Наблюд. предм.т	Отсчет по часам T	Отсчет гориз. круга N	Отсчет вертик. круга R
1-й прием									
1	В		$29^{\circ}32,5'$		4	☉	$16^{\circ}46,6^m$	$163^{\circ}24'$	$20^{\circ}23'$
2	☉	$16^{\circ}40,2^m$	$162^{\circ}3,5'$	$21^{\circ}13,5'$	5	☽	$16^{\circ}50,0^m$	$164^{\circ}5,5'$	$19^{\circ}24,5'$
3	☽	$16^{\circ}43,0^m$	$162^{\circ}42,0'$	$20^{\circ}17,0'$	6	В		$114^{\circ}32,5'$	

Контроль (производимый немедленно по окончании наблюдений).

$$\Delta z \approx dz \cdot \Delta t + 2R_{\odot} - 2MO \text{ при разных кругах;}$$

$$\Delta z \approx dz \cdot \Delta t + 2R_{\odot} \text{ при одном и том же круге;}$$

$$\Delta a = da \cdot \Delta t,$$

где $dz = +8'23''$ и $da = +12'54''$ (см. пример 1).

Наблюдения 2 и 5 (при К.П. и К.Л.) д ют:

$$\text{для гориз. круга } \Delta a = 164^{\circ}5,5' - 162^{\circ}3,5' = 2^{\circ}2';$$

$$\text{« верт. « } \Delta z = 21^{\circ}13,5' - 19^{\circ}24,5' = 1^{\circ}49'.$$

Вычисления по контрольным флам:

$$\Delta\alpha = 12,54' \cdot (16^{\text{h}}45^{\text{m}} - 16^{\text{h}}40,2^{\text{m}}) = 2'2,0'';$$

$$\Delta\lambda = 8,23' \cdot 9,8 + 2,15,8' - 2' = 1'50,2''.$$

Если проверка обнаружит значительные расхождения между вычисленными и наблюдаемыми $\Delta\alpha$ и $\Delta\lambda$ (более утренней точности инструмента), то наблюдения следует повторить.

Вычисления производятся след. обр.

1. Из табл. 8 эфемерид солнца на 1900 г. выписываются для наблюдений (10 августа) и след. за ним (11 августа) склонение δ , ур-на времени E и радиус солнца $R_{\odot}$, а из табл. 9 поправка K за начало 1931 г.

$$\delta_1 = 15^{\circ}44,2' \quad R_{\odot} 15,80'$$

$$\delta_2 = 15^{\circ}26,7'$$

$$\Delta\delta = -17,5' \quad K = -0,140 \text{ суток для 1931 г.}$$

$$E_1 = 5^{\text{h}}19^{\text{m}}$$

$$E_2 = 5^{\text{h}}11^{\text{m}}$$

2. Взяв полусумму моментов первого (T_1) и последнего (T_2) наведений на солнце, определяют средний момент T_n наблюдений (по поясному времени) и приводят его к гринвичскому времени (к полудню 10 августа):

$$T_{\text{ср.}} = T_n - N - 12,$$

где: $N = 2$ — номер пояса, $T_n = \frac{16^{\text{h}}40,2^{\text{m}} + 16^{\text{h}}45^{\text{m}}}{2}$, $T_{\text{ср.}} = 16^{\text{h}}42,1^{\text{m}} - 14 = 2^{\text{h}}42,1^{\text{m}} = 0,115 \text{ сут.}$

3. Вычисляют для данного гринвичского момента склонение солнца по ф-ле:

$$\delta_n = \delta_1 + \Delta\delta(T_{\text{ср.}} + K) = 15^{\circ}44,2' + 17,5' \cdot 0,034 = 15^{\circ}44,8'.$$

В практике при работе одномоментным теодолитом иногда предпочитают не вычислять δ_n , а довольствуются склонением δ_1 на данный день. Эта замена может привести к ошибке в азимуте в $2' - 3'$.

4. Вычисления в дальнейшем располагают так:

	$R_{\odot}$	$R_{\ominus}$	$L_{\odot}$	$L_{\ominus}$
R, L MO	$21^{\circ}13,5'$ $+1'$	$20^{\circ}17,0'$ $+1'$	$20^{\circ}23,0'$ $-1'$	$19^{\circ}24,5'$ $-1'$
z' ρ $R_{\odot}$	$65^{\circ}45,5'$ $+2,5'$ $+15,8'$	$65^{\circ}42,0'$ $+2,6'$ $-15,8'$	$66^{\circ}38,0'$ $+2,6'$ $+15,8'$	$70^{\circ}36,5'$ $+2,7'$ $-15,8'$
z d ϕ	$69^{\circ}3,8'$ $74^{\circ}15,2'$ $33^{\circ}17,2'$	$69^{\circ}28,8'$ $74^{\circ}15,2'$ $33^{\circ}17,2'$	$69^{\circ}56,4'$ $74^{\circ}15,2'$ $33^{\circ}17,2'$	$70^{\circ}23,4'$ $74^{\circ}15,2'$ $33^{\circ}17,2'$
$2p$	$176^{\circ}36,2'$	$177^{\circ}1,2'$	$177^{\circ}24,8'$	$177^{\circ}55,8'$
p $p-z$ $p-d$ $p-\phi$	$88^{\circ}18,1'$ $19^{\circ}14,3'$ $14^{\circ}2,0'$ $55^{\circ}0,0'$	$88^{\circ}30,6'$ $19^{\circ}1,8'$ $14^{\circ}15,4'$ $55^{\circ}13,4'$	$88^{\circ}44,4'$ $18^{\circ}48,0'$ $14^{\circ}29,2'$ $55^{\circ}21,2'$	$88^{\circ}57,9'$ $18^{\circ}34,5'$ $14^{\circ}42,7'$ $55^{\circ}40,7'$
$\lg \sin(p-z)$ $\lg \sin(p-d)$ $\lg \sin(p-\phi)$ $\lg \text{Cpl} \cdot \sin p$	9,51785 9,38514 9,91344 0,00019	9,51330 9,39140 9,91454 0,00015	9,50821 9,39821 9,91575 0,00011	9,50317 9,40476 9,91662 0,00007

	$R \odot$	$R \ominus$	$L \odot$	$L \ominus$
$\lg m$	8,81662	8,81939	8,82228	8,82492
$\lg m$	9,40831	9,40970	9,41114	9,41246
$\lg \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi$	9,49487	9,49518	9,49639	9,49554
$\lg \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha$	0,02317	0,01830	0,01293	0,00770
$\lg \operatorname{tg} \frac{1}{2} t$	9,89046	9,89640	9,90293	9,90929
$2 \lg = \lg \frac{m}{\sin p}$	9,40850	9,40986	9,41125	9,41253
$\frac{1}{2} p$	37°51'	38°13,8'	38°39'	39°3,6'
p	75°42'	76°27,6'	77°18'	78°7,2'
h	5°2,8"	5°5,8"	5°9,2"	5°12,5"
E_H	5,3"	5,3"	5,3"	5,3"
M	5°8,1"	5°11,1"	5°14,5"	5°17,8"
T	4°40,2"	4°43,0"	4°46,5"	4°50,0"
a	+27,9"	+28,1"	+27,9"	+27,8"
$\frac{1}{2} a$	46°31,7'	46°12,4'	45°51,2'	45°30,5'
a'	93°3,4'	92°24,8'	91°42,4'	91°1'
a	86°56,6'	87°35,2'	86°17,6'	86°59'
N_r, N_l	162°3,5'	162°42'	163°24'	164°5,5'
M_0	75°6,9'	75°6,8'	75°6,4'	75°6,5'
a — среднее = +27,9", M_0 — среднее = 75°6,6' $B = \frac{B_r + B_l - 180^\circ}{2} = 114^\circ 32,5'$ $M_0 = 75^\circ 6,6'$ астрон. азим. 39°26'				
M_0 — среднее = 75°6,6' геодез. азимут $a_s = 219^\circ 26'$ магнитн. " $a_m = 213^\circ 16'$ } склонение стрелки: $\delta_s = 6^\circ 10'$ к востоку				

Горизонтальная съемка.

Табл. 11. Типы угломерных инструментов и характер работ, производимых с помощью их в СССР.

Название угломерного прибора и его точность	Увеличение трубы	Цена деления (2 мм) уровня	Название работ и их назначение
Универсальные теодолиты с микроскоп-микрометрами			Тригонометрическая сеть:
Гильдебранда	40, 46 и 57	2—4"	I класса (длина сторон $s = 20 - 60$ км) (основная триангуляция страны, дающая материал для научно-геодезических выводов по изучению размеров и вида земли).
Ваншафа	48 и 72	4—5"	II класса ($s = 8 - 20$ км) (опорные точки между сторонами триангуляции I кл., служащие для определения пунктов III кл.).
Гильдебранда	38—45	около 5"	

Табл. 11. (Продолжение.)

Название угломерного прибора и его точность	Увеличение трубы	Ц. и д. деления (2 мм) уровня	Название работ и их назначение
Повторит. теодолиты с верньерами $t = 10''$ (Керна, «Геодезия»)	30—40	10—15''	III класса ($s = 5—10$ км) (переходные от точек II класса к IV кл., составляющие местную триангуляцию). IV класса ($s = 3—5$ км) (опорные точки для государственной топографической съемки, для изысканий портовых, речных, дорожных и т. п., для прокладки полигонных ходов). Полигонные хода I класса. Триг. сеть V кл. ($s = 1—3$ км) (дополнительные точки, определяемые б. ч. засечками с пунктов III и IV кл.; при изысканиях, как пункты самостоятельной сети). Полигонные хода II кл. Съёмочные хода и изыскания разного рода. Небольшие съемки простого технического характера. Второстепенные съемки техн. или хозяйств. значения, не требующие большой точности.
Повторит. теодолиты с верньерами:	25—28	15—20''	
$t = 20''$		20—30''	
$t = 30''$			
или шкаловыми микро-скопами: $t = 0,2'$, $0,1'$			
Повторит. теодолиты с верньерами $t = 1'$	около 20	30—50''	
Простые теодолиты, пантометры (астролябии):	около 15	40—60''	
$t = 1'$			
$t = 2'$	10—15	70—120''	

§ 13. Полевые проверки повторительного теодолита.

Чтобы убедиться, что погрешности теодолита не будут выходить из допустимых практически пределов, перед измерением углов д. б. произведены с ед. проверки.

1. **Ось уровня** (на алидаде горизонтального круга и при подставке трубы) д. б. перпендикулярна вертикальной оси вращения теодолита. Ставят уровень по направлению одного из подъемных винтов и с помощью его приводят пузырек уровня на середину. Пользуясь отсчетами по лимбу, поворачивают алидадный круг точно на 180° . Если после поворота пузырек уровня отойдет от середины, то половину оказавшегося схода уничтожают с помощью исправительного винта уровня, а другую половину — с помощью подъемного винта.

Проверку повторяют до тех пор, пока после поворота на 180° пузырек уровня будет оставаться на середине.

Таким же образом проверяется и второй уровень.

2. **Визирная ось трубы** д. б. перпендикулярна горизонтальной оси вращения трубы. При помощи уровней и подъемных винтов приводят основную ось теодолита в вертикальное положение и наводят крест нитей на точку удаленного, но ясно видимого предмета. Сделав отсчеты по обоим верньерам горизонтального круга и взяв среднее арифметическое из них (напр., $127^\circ 43'$), переводят трубу через зенит и, повернув алидаду вокруг основной оси на 180° , снова наводят крест нитей на ту же точку. Если среднее арифметическое из отсчетов по верньерам при втором положении трубы будет то же самое (предполагается, что градусы в обоих случаях отсчитывались, как это и следует сделать, по верньеру, расположенному справа от окуляра), то второе условие выполнено. Если нет (напр., $127^\circ 51'$), то действием микро-

матеренного винта устанавливают алидаду на средний отсчет (127°47') и с помощью боковых исправительных винтов сетки передвигают крест нитей в намеченную точку. Поверку повторяют до полного совпадения отсчетов при обоих положениях трубы.

3. Горизонтальная ось вращения трубы д. б. перпендикулярна вертикальной оси вращения теодолита. Приведя тщательно основную ось в вертикальное положение, наводят крест нитей на цыскоую точку какого-нибудь предмета, находящегося в расстоянии 15—20 м от теодолита, и, опустив трубу, проектируют эту точку на низ. Переведя затем трубу через зенит и повернув алидаду на 180°, снова наводят на ту же точку и проектируют ее вниз. Если обе проекции не совпадут, то, разделив расстояние между ними пополам, изменяют высоту подставки трубы (черт. 28—1), так, чтобы крест нитей проектировался в эту среднюю точку.

Поверку повторяют, пока не достигнут выполнения третьего условия.
4. При совмещении нуля верньера с нулем вертикального круга визирная ось трубы д. б. перпендикулярна вертикальной оси вращения теодолита.
а) На алидаде вертикального круга уровня не имеется. Надпись делений идет от обоих концов горизонтального диаметра от 0 до 90° в обе стороны.

Тщательно приведя основную ось теодолита в вертикальное положение, наводят крест нитей на хорошо видимую точку какого-нибудь высокого предмета и, взяв среднее из отсчетов по обоим верньерам (напр., К.П. 16°7'), переводят трубу через зенит и снова наводят крест нитей на ту же точку. Если среднее арифметическое из отсчетов по обоим верньерам при втором положении трубы будет отлично от первого (напр., К.П. 16°45'), то, отпустив винты, прикрепляющие верньеры вертикального круга к подставке трубы, ставят верньеры на отсчет, равный полусумме первого и второго (т. е. на 16°26'), следя при этом за неподвижностью трубы. Завинтив винты, повторяют поверку и в случае надобности снова передвигают верньеры.

Углы наклона можно определять, и не перемещая верньеров, по формулам:

$$\alpha = \text{К.П.} - \text{М.О.}; \quad \alpha = \text{М.О.} - \text{К.Л.},$$

где:

$$\text{М.О.} = \frac{\text{К.П.} + \text{К.Л.}}{2} = \frac{16^{\circ}7' + (-16^{\circ}45')}{2} = -0^{\circ}19'.$$

б) На алидаде вертикального круга имеется уровень (см.: «Круговой тахеометр»).

§ 14. Полная поверка и установка повторительного теодолита.

(с трубой, переводящейся через зенит, вертикальным кругом и буссолью, типа русских фабрик «Геодезия» и «Геофизика»).

Каждый инструмент прежде пользования им д. б. осмотрен и исследован. Это относится как к новым инструментам и поступившим из ремонта, так в равной мере и ко всякому инструменту, общие и специальные свойства которого технику неизвестны. Теодолит считается исправным, если в нем выполнены след. условия.

1. Все движения отдельных частей теодолита совершаются легко и плавно, без заметного трения и шатания осей в их втулках, и между али-

дадою и лимбом величина зазора не мешает точности отсчитывания по верньерам. Если действием винтов, вызывающих поднимание или опускание осей, тугое вращение или слишком большой зазор между алидадой и лимбом не удастся устранить, то надо разобрать нижнюю часть теодолита и, тщательно обтерев оси и втулки сначала тряпкой, смоленной керосином, а затем сухой, смазать их слегка (покапли на ось) костяным маслом. При тугом ходе трубы следует также обчистить и смазать цапфы и гнезда оси вращения трубы. Если и после этого первое условие не будет выполняться, то инструмент д. б. отправлен в ремонт.

Ником образом не допускается отвинчивание диска алидады или лимба от оси. Очень часто для выправления осей под диском ставят прокладки из фольги или станиоля. При разборке дисков эти прокладки могут сдвинуться и вызвать искривления осей.

Одновременно надо проверить работу станкового, подъемных, замкнутых и наводящих (микрометричных) винтов лимба, алидады и трубы и убедиться в отсутствии шатания и мертвого хода в них. Замеченные недостатки д. б. устранены или подтягиванием винтов, или заменой сработанных новыми.

2. Верность делений лимба и верньеров. Правильность делений лимба проверяется сравнением длины верньера последовательно по всему лимбу с соответствующей ему длиной l дуги по лимбу (при $l = 1' l = 14'30'' = 29$ дел.). Для этого совмещают нулевой штрих верньера с произвольным делением лимба и смотрят, совмещается ли крайний с подписью штрих верньера с делением лимба, соответствующим длине верньера.

Верность делений верньера проверяется сравнением их с проверенными делениями лимба. При совмещении разных штрихов верньера с одним и тем же штрихом лимба остальные деления верньера должны располагаться вправо и влево симметрично со штрихами лимба.

Проверка верности делений производится как на горизонтальном, так и на вертикальном кругах.

В новых инструментах, за очень редкими исключениями, второе условие всегда соблюдается, так как современный машинный способ вполне гарантирует точную нарезку делений, но в подержанных инструментах производимая иногда при ремонте обточка краев дисков лимба и алидады это условие может нарушить.

3. Отсутствие эксцентриситета алидады. Через промежутки в 30° или в 45° (напр., около 0° , 45° , 90° и 135°) лимба ставят алидаду и берут отсчеты по обоим верньерам. Если разность отсчетов по верньерам будет отличаться от 180° всегда на одну и ту же величину, то это покажет, что центр вращения алидады лежит вне линии, соединяющей нули верньеров. Присходящая от этой ошибка m в отсчетах не влияет на результаты измерения углов, т. к. величина последних определяется из разности отсчетов по сторонам угла. Среднее же из отсчетов по обоим верньерам будет содержать ошибку, равную $\frac{m}{2}$.

Если разность отсчетов по обоим верньерам будет отличаться от 180° на переменную величину x , то это значит, что центр вращения алидады не совпадает с центром лимба.

Среднее из отсчетов по нулевым штрихам обоих верньеров освобождает от влияния величины x , но т. к. отсчеты делаются не непосредственно на индекс верньера, а по его дуге, то отклонение разности отсчетов от 180° более, чем на утроенную точность верньера, считается нежелательным.

Современная техника изготовления теодолитов позволяет выпускать их с весьма ничтожным эксцентриситетом и поэтому большая величина его

указывает на неправильности в движении алидады и на расстройстве осевых частей инструмента.

4. Достаточная чувствительность уровней, соответствующая их назначению и точности инструмента. Нормальная чувствительность уровней устанавливается так: по направлению одного из подъемных винтов устанавливают трубу и, приведя на середину пузырек испытываемого уровня, наводят среднюю горизонтальную нить трубы на нек-рый штрих рейки, выставленной в плоскости трубы в расстоянии 50 м. Сделав отсчет по рейке, с помощью подъемного винта смещают уровень на 3—4 деления и снова тем же винтом приводят его на середину, после чего опять делают отсчет по рейке. Если при трех—четырежды повторении этого приема колебания отсчетов по рейке не будут превышать 4 мм, то можно быть уверенным, что уровень имеет достаточную чувствительность.

Цена делений μ уровней определяется так же, как и в нивелирах (см. стр. 53).

Для уровней, служащих в одноминутном теодолите для приведения основной оси в вертикальное положение:

$$\mu = 30 - 50'';$$

для уровня на алидаде вертикального круга (при $t = 1'$):

$$\mu = 20 - 40'';$$

для уровня на трубе в соответствии с увеличением трубы v около 20:

$$\mu \approx 40''.$$

Одновременно надо убедиться, что исправительные винты при всех уровнях вполне исправны.

5. Перпендикулярность оси уровня (на алидаде горизонтального круга и при подставке трубы) к вертикальной оси вращения инструмента — см. «Первая полевая проверка теодолита».

6. Плоскости краев дисков лимба и алидады в месте соприкосновения их д. б. перпендикулярны к оси вращения теодолита. При помощи уровней и подъемных винтов приводят основную ось теодолита в вертикальное положение и, удерживая неподвижно алидаду, вращают медленно лимб. Если зазор между лимбом и выбранным для наблюдений верньером будет оставаться постоянным, то шестое условие по отношению к лимбу будет выполнено.

Для проверки алидады закрепляют неподвижно лимб и, медленно вращая алидаду, наблюдают, везде ли одинаково отстоит верньер от краев лимба, мимо которого он проходит. Для новых инструментов это условие всегда обеспечивается; но т. к. нормальная величина зазора заключается в пределах 0,002—0,01 мм, то при неосторожном обращении с инструментом можно прогнуть лимб или алидаду и тем нарушить шестое условие.

7. Оптические качества трубы д. б. удовлетворительны и ее увеличение д. б. не ниже принятых норм (табл. II). При осмотре и исследовании трубы проверяют:

а) правильность нарезки нитей сетки; нити должны казаться резко черными и твердыми их д. б. такова, чтобы на расстоянии 200 м нить покрывала не более 0,5 см на рейке; на стекле сетки не д. б. грязи и засорения краской;

б) прочность закрепления сети нитей исправительными винтами, их исправность и возможность правильной установки сетки;

в) поле зрения трубы д. б. резко очерчено;

г) правильность и ясность изображений рассматриваемых предметов; при наблюдении звезды или изображения солнца в яблоке колокольной при передвижениях окулярного колена в объективном (или внутреннем) стекле должны получаться симметричные, правильной формы, дифракционные кольца, без окраски в яркие цвета спектра;

д) возможность визирования на далекие расстояния и на близкие, в расстоянии 10 м; в вечернее время в открытой местности труба должна позволять различать на расстоянии в 350 м без утомления наблюдателя сантиметровые деления рейки, хотя бы и без возможности их счета;

е) свободное, без заеданий, движение окулярного колена в объективном и окулярной трубочке—в окулярном колене;

ж) правильность хода окулярного колена. На ровном месте в плоскости трубы устанавливают три рейки, в расстояниях 100, 200 и 300 м от теодолита, и, наведя среднюю горизонтальную нить на отсчет «2 м» по дальней рейке, закрепляют трубу в этом положении. Сохраняя затем неизменность трубы по высоте, делают отсчеты по двум др. рейкам. Далее наводят трубу на отсчет «3 м», закрепляют ее и снова делают отсчеты по остальным двум рейкам. Разности отсчетов д. б. соответственно равны 66,6 и 33,3 см. Таким приемом производят три—четыре, при чем колебания в отсчетах не должны превосходить 4 мм на 100 м; большие разности укажут на неправильность хода окулярного колена.

Определение увеличения трубы и ее поля зрения—см. «Нивелир».

8. Визирная ось трубы д. б. перпендикулярна горизонтальной оси вращения трубы (см. «Полевые поверки», № 2).

9. Горизонтальная ось вращения трубы д. б. перпендикулярна к вертикальной оси вращения теодолита—(см. «Полевые поверки», № 3).

10. При совмещении нуля верньера с нулем вертикального круга визирная ось трубы д. б. перпендикулярна к вертикальной оси вращения теодолита (см. «Полевые поверки», № 4).

11. Буссоль при теодолите должна удовлетворять общим требованиям, предъявляемым ко всякой буссоли (см. «Поверка буссоли»).

12. Коллимационная плоскость трубы должна проходить через нулевой диаметр буссоли.

Для проверки этого условия в крышках на объективе делается посредине отверстие величиной с булавочную головку. Надев крышку, трубу направляют окуляром на штрихи 0 и 180° буссоли. Если при рассматривании через отверстие в крышке объектива эти штрихи будут вне середины поля зрения трубы, то величина ошибки в положении кольца буссоли определится отсчетом, соответствующим середине поля зрения. Если буссоль имеет исправительные винты, то ошибка устраняется повертыванием буссоли; если буссоль укреплена наглухо, то в отсчеты по стрелке вводятся с соответствующим знаком поправки.

Выполнение этого условия можно поверить также и при помощи линии местности, магнитный азимут к-рой известен.

Если на трубе теодолита имеется уровень и предполагается пользование инструментом, как нивелиром, то:

13. Ось уровня д. б. параллельна визирной оси трубы (см. «Поверки кругового тахеометра»).

Если предполагается пользование дальномером, то:

14. При наличии готовой рейки д. б. определены постоянные дальнометра, а за отсутствием ее д. б. изготовлена рейка к дальномеру (см. «Круговой тахеометр»).

По окончании исследования теодолита необходимые данные об инструменте: номер, система, фирма, точность верньеров горизонтального и вертикального кругов, эксцентриситет алидады обоих кругов, увеличение трубы, поле зрения и цена деления уровней заносятся в паспорт теодолита. Сюда же заносятся и перечень принадлежностей к теодолиту, его особенности и коэф-ты дальнометра. В зависимости от происшедших с инструментом перемен в паспорт вводятся изменения и дополнения.

§ 15. Особенности проверок упрощенных систем теодолитов (пантометров и астролябий).

1. Труба не переводится через зенит, как это чаще всего встречается у пантометров.

Все проверки, кроме 2-й и 3-й полевых, производятся так же, как и у типового теодолита.

2-я и 3-я проверки, относящиеся к коллимационной плоскости трубы, производятся сл. обр. Метрах в 15—20 от пантометра вешают длинную нить с тяжелым грузом (1—2 кг) и, приведя тщательно инструмент в горизонтальное положение, наводят крест нитей на нить отвеса. Если при вращении трубы крест нитей будет пересекать отвес по прямой линии, то это укажет на несоблюдение третьего условия. Для приведения коллимационной плоскости трубы в вертикальное положение надо действовать исправительными винтами подставки трубы, т. е. надо изменить ее высоту так, чтобы при вращении трубы крест нитей оставался все время на нити отвеса.

Если при вращении трубы крест нитей будет описывать кривую, то это укажет во всяком случае на наличие коллимационной ошибки. В этом случае, действуя боковыми винтами сетки, надо поставить крест нитей так, чтобы он или оставался все время на нити отвеса, или пересекал ее по прямой линии. Во втором случае потребуется для окончательной установки коллимационной плоскости изменить высоту подставки трубы так, как описано выше.

2. Для измерения углов наклона служит сектор, а не вертикальный круг. Установка верньера производится так. На слегка наклонной местности в расстоянии около 50—100 м друг от друга забивают два деревянных кола. Над одним колом ставят инструмент, приводят его основную ось в вертикальное положение и измеряют его высоту (расстояние от кола до оси вращения трубы). Высоту инструмента откладывают на вехе (или рейке), к-рую устанавливают отвесно над другим колом. После этого наводят крест нитей на высоту инструмента на вехе и делают отсчет на секторе и верньере (напр., $6^{\circ}18'$). Затем меняют места постановок теодолита и вехи, снова приводят инструмент в горизонтальное положение, измеряют его высоту и откладывают ее на вехе. Если по наведении креста нитей на метку на вехе отсчет по сектору будет иной (напр., $6^{\circ}48'$), то с помощью исправительных винтов, следя за неподвижностью трубы, передвигают верньер на средний отсчет, т. е. на $6^{\circ}33'$. Проверку повторяют, пока не получают удовлетворительной установки верньера.

Если верньер нельзя переместить, то вычисляют место нуля и углы наклона определяют по отсчетам на секторе, исправленном за место нуля.

§ 16. Правила измерения горизонтальных углов повторительным теодолитом.

1. По установке теодолита над вершиной измеряемого угла и приведении его в горизонтальное положение надо, закрепив зажимной винт лимба и отпустив зажимные винты алидады и трубы, навести крест нитей сетки движением от руки на n и z задней по ходу вежи, а затем, закрепив зажимные винты алидады и трубы, сделать точное наведение на n и z вежи с помощью наводящих винтов этих частей инструмента.

2. Сделать отсчет по верньеру справа от окуляра градусов и минут, а по другому верньеру—одних минут и записать эти отсчеты в геодезический журнал.

3. Отпустив зажимные винты алидады и трубы, сделать наведение согласно п. 1 на низ передней вежи и записать отсчеты по верньерам в геодезический журнал.

Примечание. Как общее правило, рекомендуется во всех случаях градусы и минуты отсчитывать по верньеру, расположенному справа от окуляра трубы, а по другому верньеру одни лишь минуты.

4. Отпустив зажимные винты лимба и трубы, повернуть лимб приблизительно на 90° и перевести трубу через зенит.

5. Повторить измерение угла, поступая во всем согласно пп. 1—3.

6. Не сходя с пункта, надо сделать обработку геодезического журнала, и если полученные два угла будут различаться между собою не более, чем на удвоенную точность верньера, то за окончательный результат принимают среднее арифметическое из обоих измерений. При большей разнице измерение угла должно быть повторено.

Геодезический журнал измерения углов.

№ станции	№ выш. пункт.	Отсчеты			Среднее из отсчетов	Угол	Среднее из углов	Азимут линии	Длина линии	Угол наклона
		верньеры	I	II						
2	1	191	5	5	191°5'	172°24'	172°24,5'	216°30'	283°68'	
	3	18	41	41	18°41'					
	1	278	59	60	278°59,5'	172°25'				
	3	106	35	34	106°34,5'					
3	2	96	7	7	96°7'	113°56'	113°56'	282°30'	398°84'	6°20'
	4	342	11	11	342°11'					
	2	5	36	35	5°35,8'	113°56'				
	4	251	39	40	251°39,5'					

Примечания. 1. Инструмент: повторительный теодолит ф-ки «Геодезия» № 6712.

2. Точность верньера: $t = 1'$.

3. При переводе трубы через зенит лимб инструмента переставлялся приблизительно на 90° .

4. Угол наклона равен $6^\circ 20'$ со 192 м до конца.

7. В практике дорожных изысканий при измерении угла поворота α (центрального угла разбиваемой кривой) предпочитают поступать сл. обр. Нуль верньера у окуляра совмещают с 180° лимба и, закрепив алидаду и отпустив лимб, направляют трубу на заднюю веху 1 (отсчет по верньеру у окуляра $180^\circ 0'$). Если теперь, отпустив алидаду, навести трубу на переднюю веху 3, то отсчет по верньеру у окуляра даст при угле поворота вправо его величину α , а при угле влево—его дополнение до 360° . Убедившись в удачном выборе направления 2-3 (в смысле величины угла α), трубу переводят через зенит, совмещают у окуляра нули лимба и верньера и наводят трубу на переднюю веху 3 (отсчет по верньеру у окуляра $0^\circ 0'$). После этого отпускают алидаду и наводят трубу на заднюю веху,—тогда отсчет по тому же верньеру даст величину угла β , вправо по ходу лежащего, т. е. равного $180^\circ - \alpha$ при правом угле поворота и $180^\circ + \alpha$ при левом. При этом положении лимба производится и разбивка биссектрисы (средины кривой) путем установки верньера у окуляра на отсчет $\frac{\beta}{2}$.



Черт. 7

Образец записи.

(пик. № 29 + 24)	2	1 (пик. 20)	180°0'	158°42,5'	158°42' (21°18') вправо
	3	3	21°17,5'		
	1	1	158°41,5'		
	3	3	0°0'		

8. При производстве работ повышенной точности (напр., при измерении углов тригонометрической сети, при привязке к пунктам ее и т. п.) применяется способ круговых приемов или способ повторений.

Способ круговых приемов заключается в измерении направлений несколькими полными приемами с перестановкой лимба по определенной системе между приемами.

Число приемов зависит от характера производимых работ (требуемой точности их) и точности самого инструмента.

Табл. 12. Число круговых приемов, применяемых при работах данного рода в СССР.

Название работ	Длина сторон км	Точность инструмента					
		1"—2"	5"	10"	20"	30"	1'
		Число приемов					
Триг. сеть I кл.	20—60	12	6—8				
» » II »	8—20						
» » III »	5—10			2—4		4—6	
» » IV »	3—5			2	3	3	3
» » V »	1—3			1	1	2	3
Привязка к пунктам тригон. сети				1	1	2	3
Полигон. сеть I кл.						2	3
» » II »						1	2

При переходе от приема к приему делается перестановка лимба на угол:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n \cdot m},$$

где: n —число верньеров или микроскопов, m —число приемов.

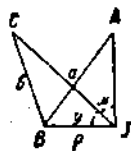
Способ повторений применяется при измерении углов 30-секундными и одномоментными теодолитами и очень редко при 10-секундных теодолитах.

Табл. 13. Число повторений, применяемых при работах разного рода в СССР.

Название работ	Точность инст.umenta				Название работ	Точность инст.umenta			
	10"	20"	30"	1'		10"	20"	30"	1'
	Число повторений					Число повторений			
Триг. сеть III кл. . .	2-4	2-4	4-6		Привязка к пунктам тригон. сети . . . Полигоном. сеть I кл. * * II *			2-3	3-4
" * IV " . .		2-4	2-4					2-3	3-4
* * V " . .			2-3	3-4				1	2

§ 17. Приведение угла к его вершине (центрировка).

Если нужно измерить угол ABC , а на местности почему-либо нельзя встать с инструментом в вершину B , то измеряют угол $AJC = m$ вне вершины B , стараясь выбрать пункт J возможно ближе к B (обыкновенно $BJ = p$ не более 2 м). К измеренному углу m придется поправка c , вычисляемая в минутах по ф-ле:



Черт. 8.

$$c = \frac{p}{\sin 1'} \left(\frac{\sin (m + y)}{a} - \frac{\sin y}{b} \right),$$

где: $y = \angle CJB$ между направлениями на недоступный пункт B и переднюю по ходу веку C . Этот угол всегда считается вправо от линии $BJ = p$; $a = AB$ и $b = BC$ — расстояния от пункта B до задней A и передней C вех.

Пример. Измерено $m = 71^\circ 27,5'$; $p = 1,26$ м; $a = 318,42$ м; $b = 429,23$ м; $y = 197,29'$.

$\lg p$	0,10037	$\lg \frac{p}{\sin 1'}$	3,83664
$\lg \sin 1'$	6,46373	$\lg \sin y$	9,47774n
$\lg \frac{p}{\sin 1'}$	3,83664	доп. $\lg b$	7,36731
$\lg \sin (m + y)$	9,99992n		0,48169n
доп. $\lg a$	7,49700		-3,03
	1,13356n		
	-13,60		

$$c = -13,6 - (-3,03) = -10,6';$$

$$B = 71^\circ 27,5' + (-10,6') = 71^\circ 16,9'.$$

§ 18. Обработка результатов угломерной съемки одиночного полигона.

1. Подсчитав сумму измеренных углов и сравнив ее с теоретической [$2\pi = 180(n - 2)$], определяют допустимость невязки по ф-ле:

$$\omega' = \pm t \sqrt{2n},$$

где t — точность верньера, а n — число углов.

Для одномоментного теодолита $\omega' = \pm 1,5 \sqrt{n}$.

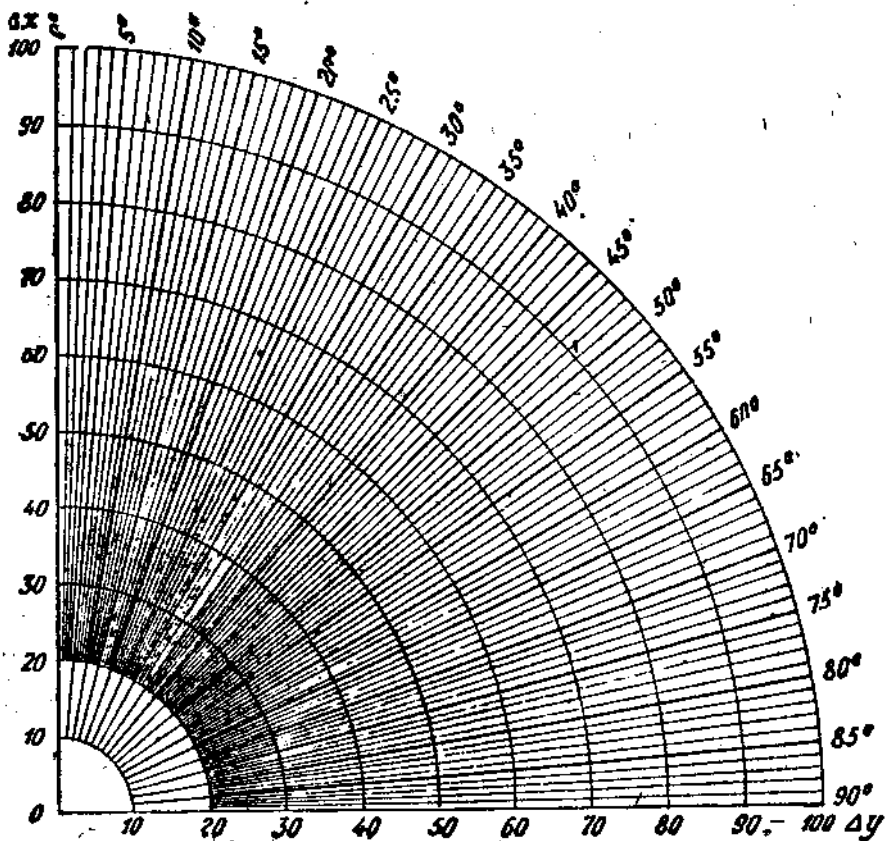
Примечание. Если некоторые углы измерялись вне вершины их, то сначала в них вводятся поправки за внецентренное положение теодолита.

2. Выписав углы в ведомость координат, производят округления их до целых минут так, чтобы это повело к уменьшению невязки, после чего оставшуюся часть невязки разбрасывают по 1 минуте на углы с короткими сторонами (гр. 2 ведомости).

3. По данному азимуту (или дирекционному углу) и исправленным углам вычисляются дирекционные углы (азимуты) всех остальных линий:

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + 180 - \beta_n.$$

4. Вычисляются неприступные расстояния и горизонтальные проложения линий, имеющих углы наклона $> 2^\circ$ (см. «Измерение линий»).



№ вершин полигона	Внутренние углы β		Дирекционные углы (азимуты) α		Углы, отнесенные к четвертям (румбы)			Длина линия (гориз. прол.) d	lg Δx lg $\cos \alpha$ lg d lg $\sin \alpha$		Вычисленные	
	°	'	°	'		°	'		lg Δy		Δx	Δy
1	2		3		4			5	6	7	8	
1	90	-0,75 48,75										
			106	37	SO	73	23	444,28		-0,16 -127,04	+0,05 +425,73	
2	128	27										
			158	10	SO	21	50	463,04		-0,17 -429,82	+0,06 +172,20	
3	143	-0,5 38,5										
			203	32	SW	23	32	547,86		-0,21 -502,30	+0,07 -218,75	
4	107	40										
			275	52	NW	84	08	478,77		-0,17 +48,92	+0,06 -476,25	
5	144	-0,75 53,75										
			310	59	NW	49	01	436,40		-0,16 +286,21	+0,06 -329,44	
6	113	33										
			17	26	NO	17	26	278,12		-0,11 +265,33	+0,03 +83,33	
7	131	-1 27										
			66	0	NO	66	0	252,54		-0,10 +102,72	+0,03 +230,71	
8	228	-0,5 35,5										
			17	25	NO	17	25	374,36		-0,14 +357,20	+0,05 +112,06	
Σ	1 080	3,5										
$2d(n-2) = 1 080$									$P = 3 274,37$		+1 060,36	+1 024,03
неизвиста + 3,5'											-1 059,16	-1 024,44
$f\sqrt{2n} = \pm 4'$											+1,22	-0,41
									$\frac{\sqrt{1,22^2 + 0,41^2}}{3 274,37} \approx \frac{1}{2 500} < \frac{1}{2 200}$			

5. С помощью «Таблиц для вычисления прямоугольных координат Гаусса» вычисляются приращения координат (до сотых метра, — гр. 7 и 8):

$$\Delta x = d \cdot \cos \alpha;$$

$$\Delta y = d \cdot \sin \alpha,$$

к-рые, сообразно с градусной величиной дирекционного угла, сопровождаются соответствующими знаками:

α	Четверть	$\cos \alpha$ $\sin \alpha$
0—90	I	$\left\{ \begin{array}{l} + \\ + \end{array} \right.$
90—180	II	$\left\{ \begin{array}{l} - \\ + \end{array} \right.$
180—270	III	$\left\{ \begin{array}{l} - \\ - \end{array} \right.$
270—360	IV	$\left\{ \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \right.$

Пр и м е ч а н и е. Для обнаружения грубых просчетов в вычислениях полезно построить в крупном масштабе на миллиметровой бумаге номограмму приращений координат. В зависимости от ее масштаба можно достигнуть получения x и y с номограммы с точностью до десятых долей метра (черт. 9).

Иногда контроль производят по одной из ф-л:

$$d = \Delta x \cdot \cos \alpha + \Delta y \cdot \sin \alpha; \quad (1)$$

$$\Delta x \cdot \sin \alpha = \Delta y \cdot \cos \alpha; \quad (2)$$

$$\Delta y = \Delta x \cdot \operatorname{tg} \alpha; \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad (3)$$

$$d^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2. \quad (4)$$

Пр и м е р. $\alpha = 128^\circ 28'$; $d = 77,56$ м.

Выборка из таблиц Гаусса для $180^\circ - \alpha = 51^\circ 32'$ дает:

$$\Delta x = -48,24; \Delta y = +60,73.$$

Отложив на номограмме на луче $51^\circ 32'$ $d = 77,56$, получим, что $\Delta x = 48,1$ (проекции на ось Δx) и $\Delta y = 60,6$ (по оси Δy).

Контроль по ф-ле (1) (с помощью таблиц Гаусса):

$$d = 30,01 + 47,55 = 77,56.$$

Если контролировать с помощью ф-лы (2), то получаем:

$$\Delta x \cdot \sin \alpha = 48,24 \cdot \sin 51^\circ 32' = 37,77 \text{ м};$$

$$\Delta y \cdot \cos \alpha = 60,73 \cdot \cos 51^\circ 32' = 37,77 \text{ м}.$$

В целях контроля пользуются иногда и вычислениями с помощью логарифмических таблиц с пятью знаками (гр. 6). Расхождения в приращениях координат, вычисленных по таблицам Гаусса, и логарифмическим не д. б. более 0,01 м.

6. Подсчитываются невязки: по оси $x = (\Sigma \Delta x)$, по оси $y = (\Sigma \Delta y)$, в периметре $m = \sqrt{(\Sigma \Delta x)^2 + (\Sigma \Delta y)^2}$ и относительная $\frac{m}{P}$.

Обыкновенно невязка считается допустимой, если: $\frac{m}{P} < \frac{1}{2000}$.

При неблагоприятных условиях принимают:

$$\frac{m}{P} = \frac{1}{1000}.$$

Иногда ее определяют по величине m , предъявляя требование, чтобы m было менее уменьшенных в три (или два) раза предельных разностей при двойном измерении линий, установленных прусской кадастровой инструк-

цией (см. «Точность измерения линий»). В этом случае под длиной линии имеется в виду периметр полигона P .

Т. к. величина относительной невязки зависит не только от периметра, но и гл. обр. от длин отдельных линий, то более правильно будет определять допустимость ее по относительной точности измерения средней длины линий, преобладающей в данном полигоне, выбирая эту величину из табл. 4.

В примере вычисления координат вершин восьмиугольника преобладающей длиной для сторон его является длина около 250 м, относительная точность измерения к-рой для II класса местности будет $\frac{1}{2200}$.

П р и м е ч а н и е. В случае, если невязка в приращениях будет превышать допустимую, надо прежде всего удостовериться в отсутствии ошибок в вычислениях, а при верности вычислений надо определить дирекционный угол α линейной невязки по формуле: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sum \Delta y}{\sum \Delta x}$ и сравнить его с дирекционными углами сторон полигона. Сходство углов укажет ту линию (или линии), в к-рой можно ожидать грубого просчета при измерении ее длины. Эту линию (или линии) нужно измерить в натуре вновь. Если контрольное измерение не обнаружит ошибок, то следует измерить вновь и прочие линии многоугольника.

Определение величин m и a достаточно делать графически, пользуясь номограммой приращений (определением длины и направления гипотенузы треугольника, построенного по катетам $\sum \Delta x$ и $\sum \Delta y$).

7. Распределяются невязки в приращениях абсцисс и ординат. Это распределение в СССР принято делать пропорционально длинам линий, как это и показано в гр. 6 и 7 ведомости. Этому приему следует предпочесть распределение невязки пропорционально величинам самих приращений.

Определение величин поправок для каждого приращения рекомендуется производить графически, пользуясь миллиметровой бумагой.

Применительно к приведенному примеру график можно построить так. В горизонтальном направлении в масштабе $1 \text{ см} = 100 \text{ м}$ откладываем на миллиметровке, напр., $0,2P$ (654,9 м), а по перпендикуляру в конце этого отрезка, но в крупном масштабе (напр., $1 \text{ см} = 0,1 \text{ м}$) $0,2$ невязки по оси x (0,244) и по оси y (0,082). Соединив начало отрезка с концами перпендикуляров, получаем график, с помощью к-рого легко определяются поправки к приращениям для всех сторон полигона.

Поправки придаются к приращениям со знаком, обратным знаку невязки.

8. По увязке приращений вычисляются координаты вершин полигона по формулам:

$$x_n = x_{n-1} + \Delta x_{n-1} + p_n;$$

$$y_n = y_{n-1} + \Delta y_{n-1} + p_n,$$

при чем, если даны координаты какой-либо из вершин полигона, то вычисления ведутся от данных координат, если — нет, то одна из вершин принимается за начало координат ($x = 0$; $y = 0$).

§ 19. Вычисление площади полигона по координатам его вершин.

$$2P = \sum y_n (x_{n-1} - x_{n+1}) = \sum x_n (y_{n+1} - y_{n-1}).$$

Вычисления показаны в гр. 13—16 ведомости координат.

Контролем служат:

1) сумма разностей $x_{n-1} - x_{n+1}$ (гр. 13) и $y_{n+1} - y_{n-1}$ (гр. 14), к-рые д. б. равны нулю;

2) полное совпадение результатов вычисления площади по разностям абсцисс (гр. 15) и по разностям ординат (гр. 16).

Если же вычисления велись с округлением произведений до десятых долей м, то результаты определений двойной площади не должны различаться между собою более чем на $0,1n \text{ м}^2$, где n — число вершин полигона.

§ 20. Планиметр.

Практическая ф-ла планиметра при положении полюса вне фигуры:

$$P = p n,$$

где: p —цена одного деления планиметра, n —площадь фигуры в делениях планиметра, определяемая разностью отсчетов до и после обвода.

Планиметры Амслера и Коради могут применяться также и с постановкой полюса внутри фигуры. В этом случае площадь определяется по ф-ле:

$$P = p(n + q) = qn + Q,$$

где q и Q —постоянные числа планиметра, выраженные: q —в делениях планиметра, а Q —в квадратной мере.

Проверка планиметра Коради. 1. Счетное колесо планиметра должно свободно, без трения, вращаться на оси и находиться в близком, но без соприкосновения, положении относительно верньера. Если проба рукой обнаружит, что ось заката слишком слабо или сильно, то с помощью исправительного винта необходимо переместить один из подшипников так, чтобы при покачивании ось испытывала лишь небольшие колебания.

Заметный промежуток или чрезмерное соприкосновение между колесом и верньером устраняются одновременным перемещением в одном и том же направлении обоих подшипников оси. Промежуток должен быть таков, чтобы можно было точно отсчитывать по верньеру и чтобы колесо при вращении не

испытывало трения о верньер.

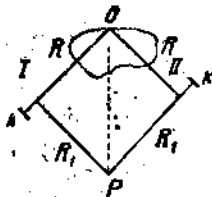
Рекомендуется промежуток между колесом и верньером прочищать изредка тонкой бумагой.

2. Плоскость счетного колеса д. б. перпендикулярна к плоскости, проходящей через острок обводного шпильа и ось вращения рычагов. Обводят одну и ту же фигуру площ. 25—100 см² несколько раз (лучше всего с помощью контрольной линейки, если таковая имеется), расположив при первых трех—четырех обводах рычаги влево от линии, соединяющей неподвижный полюс и обводный шпиль, а при следующих трех—четырех обводах—симметрично справа от этой линии.

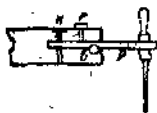
Если числа делений планиметра, заключающиеся в обводной площади, для обоих положений рычагов будут различаться между собою более чем на $\frac{1}{200}$ их средней величины, то определение площадей необходимо производить при обоих положениях рычагов, принимая за окончательный результат арифметическое среднее.

Некоторые механики для устранения этого недостатка устраивают так, что один из концов оси колесика упирается не в центр подшипника, а несколько эксцентрично, вследствие чего при поворачивании исправительного винта ось колесика будет менять свое направление. Иногда эта же цель достигается помещением шпильа на выдвинутой пластинке p (черт. 11), могущей по ослаблению винта f поворачиваться с помощью винта b (около винта A).

Определение цены деления планиметра. Обводят тщательно планиметром несколько раз при обоих положениях рычагов его контур фигуры, площадь



Черт. 10.



Черт. 11.

к-рой может быть точно вычислена. Фигуру выбирают небольших размеров (около 100—200 см²), чтобы неподвижный полюс планиметра находился вне ее. Такими контрольными площадями могут служить: площадь круга, обводимого с помощью контрольной линейочки, площадь квадрата координатной сетки и т. п.

Если в футляре планиметра имеется таблица длин рычага, соответствующая разным ценам делений, то рычаг предварительно устанавливается на указанную в таблице длину его.

Если определения n площади P в делениях планиметра получаются согласными между собой (разница не должна превышать шести делений при обводе рукой и трех делений при обводе с помощью контрольной линейочки), то, взяв среднее n из определений, вычисляют цену деления планиметра по формуле:

$$p = \frac{P}{n}.$$

Если при этом цена деления планиметра выразится неудобным для вычислений числом, то для получения желаемой цены деления p_1 изменяют длину рычага, определяя ее из пропорции:

$$\frac{R_1}{R} = \frac{p_1}{p} \quad \text{или} \quad \frac{R_1}{R} = \frac{\pi}{\pi_1},$$

после чего счетный механизм передвигают на отсчет по верньеру, равный R_1 .

Сделанную установку поверяют еще раз и в случае надобности снова изменяют длину рычага.

Если на плане имеется координатная сетка, то, чтобы деформации бумаги оказали возможно меньшее влияние, цену деления планиметра определяют из обводов сразу трех—четырех квадратов сетки, делая их при двух положениях рычагов и по два обвода (вправо и влево) при каждом положении.

Пример. Среднее из четырех обводов (по два при симметричных положениях рычагов) квадрата со стороной в 10 см. дало $n = 1285$ при длине рычага $R = 260$. (планиметр Кореда № 16718 фабрики «Геодезия»).

Для масштаба в 1 см — 50 м площадь квадрата $P = 250\,000$ м², откуда:

$$p = \frac{P}{n} = 194,55 \text{ м}^2.$$

Для $p_1 = 200$ м² n_1 будет равно 1250, а длина рычага:

$$R_1 = \frac{200 \cdot 260}{194,55} = \frac{1\,285 \cdot 260}{1\,285} = 267,3.$$

Контрольный обвод по установке рычага дал $n = 1\,248$, что соответствует точности $\frac{1}{625}$.

Цена деления планиметра, полученная для некоего масштаба $\frac{1}{m}$, определится для другого масштаба $\frac{1}{m_1}$ по формуле:

$$p_1 = p \left(\frac{m_1}{m} \right)$$

где p и p_1 — соответственно прежняя и новая цена деления планиметра.

Определение постоянного числа. Чертят на бумаге квадрат со стороной в 30 см, что при масштабе, напр., в 1 см — 50 м дает площадь $P = 225$ га.

Если цена деления $p = 0,02$ га, то площадь квадрата в делениях планиметра будет равна $n = 11\,250$.

Поставив полюс внутри квадрата и установив индексы верньера и циферблата на нули, начинают обводить планиметром по ходу часовой стрелки.

Если при этом мимо нуля верньера будут проходить цифры колеса убывающая, т. е. 9, 8, 7... 2, 1, то это покажет, что площадь P квадрата менее площади постоянного числа, т. е.:

$$P = p(-n + q).$$

Пусть, напр., после обвода контура квадрата индекс прошел через 0 циферблата один раз и сверх того отсчет по циферблату и счетному колесу дал 6 160, тогда:

$$-n = -[10\,000 + (10\,000 - 6\,160)] = -13\,840;$$

$$-n + q = -13\,840 + q = 11\,250,$$

откуда:

$$q = 25\,090.$$

§ 21. Точность определения площадей планиметром.

Точность определения площадей планиметром зависит от величины площади, формы фигуры, состояния плана и его масштаба.

Если поверхность бумаги гладкая, не покоробленная, фигура несильно вытянута (отношение в среднем ширины к длине не более 0,1), то для планиметра Корэди можно принять, что нормальное уклонение полученного результата при двух симметричных положениях рычагов от вероятнейшего его значения (средняя ошибка) следует формуле:

$$\Delta P = \pm 0,02 \sqrt{P},$$

где P —площадь, выраженная в см^2 .

Табл. 14.

P см^2	ΔP см^2	$\frac{\Delta P}{P}$	P см^2	ΔP см^2	$\frac{\Delta P}{P}$	P см^2	ΔP см^2	$\frac{\Delta P}{P}$
1	$\pm 0,02$	$\frac{1}{50} \dots 2\%$	25	0,10	$\frac{1}{250} \dots 0,4\%$	225	0,30	$\frac{1}{750} \dots 0,13\%$
4	0,04	$\frac{1}{100} \dots 1\%$	50	0,14	$\frac{1}{367} \dots 0,3\%$	400	0,40	$\frac{1}{1\,000} \dots 0,1\%$
10	0,063	$\frac{1}{160} \dots 0,6\%$	100	0,20	$\frac{1}{500} \dots 0,2\%$			

Предельная ошибка принимается, как обычно, в три раза больше. Ошибки в определении площадей кругов контрольной линейкой принимаются в три раза меньше.

Точность линейных планиметров на роликах примерно в три, а в некоторых в четыре раза выше планиметров Корэди. Простые планиметры Амслера дают точность в два раза ниже приборов Корэди.

Увеличение числа обводов с переменной полюса немного повышает точность, но всё же увеличение числа обводов свыше четырех является нецелесообразным, т. к. почти не вызывает уменьшения ошибки от обвода, наиболее влияющей на точность определения площади.

Пример. План составлен в масштабе: 1 см —50 м (1 га —4 см^2), его площадь, определенная планиметром, оказалась равной 55,48 га ($\sim 225 \text{ см}^2$).

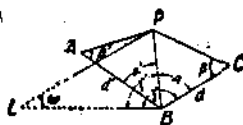
Точность вычисления площади м. б. принята равной: $\frac{1}{750} P$ ($P = 55,48 \pm 0,075 \text{ га}$).

§ 22. Привязка к пунктам тригонометрической сети.

1. Способ промеров применяется в тех случаях, когда тригонометрический пункт P находится вблизи привязываемого пункта A хода или полигона. Он состоит в том, что между пунктами A и P прокладывается полигонный ход (а если можно, то и просто прямая AP) и измеряются углы хода и призывные α к ходу и γ к стороне PL тригонометрической сети.



Черт. 12.



Черт. 13.

Если в пункте P сети стать с инструментом нельзя, то производится передача координат с вершины сигнала на землю.

В расстоянии 100—200 м от пункта P выбирается базис BC так, чтобы треугольник BPC был близок к равностороннему, после чего тщательно измеряются: базис $BC = d$ и углы α , β и γ .

Если x_p , y_p —координаты пункта P , а x_l , y_l —координаты пункта L , то координаты точки B найдутся по ф-ле:

$$X_B = X_p + PB \cdot \cos(PB);$$

$$Y_B = Y_p + PB \cdot \sin(PB).$$

Длина PB определится по ф-ле:

$$PB = d \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

а ее дирекционный угол:

$$(PB) = (LP) + (\gamma - \alpha) + \omega,$$

$$\text{где } \text{tg}(LP) = \frac{y_p - y_l}{x_p - x_l};$$

$$\sin \omega = \frac{PB \cdot \sin(\gamma - \alpha)}{PL}; \quad PL = \frac{y_p - y_l}{\sin(LP)} = \frac{x_p - x_l}{\cos(LP)}.$$

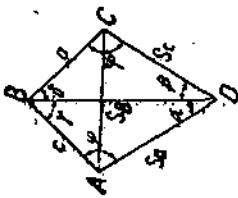
Для контроля рекомендуется построить при стороне PB второй треугольник APB , измерив в нем базис AB и углы α' , β' и γ' . Проверкою будет служить сходимость обоих определений (из $\triangle APB$ и BPC) длины PB и ее дирекционного угла (PB) .

2. Задача Потенота, т. е. определение четвертой точки D по трем данным A , B и C .

Этот способ применяется, когда привязываемый пункт находится вдали от пунктов тригонометрической сети, и заключается в измерении углов α и β . Ф-лы для вычислений и схема расположения вычислений приводятся ниже на примере. Вычисления рекомендуется делать с помощью семизначных логарифмов: при употреблении пятизначных таблиц по обоим определениям координат (с точек A и C) могут получаться расхождения до 0,10 м. Рекомендуется также в целях контроля во всех возможных случаях привязку делать к четырем—пяти пунктам. Проверкой будет служить сходимость вычисленных по координатам и измеренных излишних направлений.

Задача Потекота.

Формулы

 черт. 14.	$\operatorname{tg}(AB) = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$ $\operatorname{tg}(CB) = \frac{y_b - y_c}{x_b - x_c}$ $(y_b - y_a) - (y_b - y_c) = y_c - y_a$ $(x_b - x_a) - (x_b - x_c) = x_c - x_a$ $\lg \frac{1}{2} (\varphi - \psi) =$ $= \operatorname{ctg}(45^\circ + Q) \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi + \psi)$ $\varphi = \frac{1}{2} (\varphi + \psi) + \frac{1}{2} (\varphi - \psi)$ $(\varphi + \psi) = 360^\circ - \sigma$	$c = \frac{y_b - y_a}{\sin(AB)} = \frac{x_b - x_a}{\cos(AB)}$ $a = \frac{y_b - y_c}{\sin(CB)} = \frac{x_b - x_c}{\cos(CB)}$ $x_a = \sin(\alpha + \varphi) \frac{c}{\sin \alpha}$ $y_b = \sin \varphi \frac{c}{\sin \alpha} = \sin \psi \frac{c}{\sin \beta}$ $x_c = \sin(\beta + \psi) \frac{a}{\sin \beta}$ $\operatorname{tg} Q = \frac{c}{\sin \alpha} : \frac{a}{\sin \beta}$ $\sigma = \alpha + \beta + \gamma + \delta$	$\Delta y_a = s_a \cdot \sin(AD)$ $\Delta x_a = s_a \cdot \cos(AD)$ $\Delta y_c = s_c \cdot \sin(CD)$ $\Delta x_c = s_c \cdot \cos(CD)$ $y_d = y_a + \Delta y_a$ $y_d = y_c + \Delta y_c$ $x_d = x_a + \Delta x_a$ $x_d = x_c + \Delta x_c$

А. Канавино (Башня)	В. Сойкино (колокольня)	С. Окская пирамида	
$y_b + 3.647,26$ $y_a + 2.367,28$ $y_c + 4.827,63$ $y_b - y_a + 1.279,98$ $y_b - y_c - 1.180,37$ $y_c - y_a + 2.460,35$	$x_b - 3.572,61$ $x_a - 5.498,16$ $x_c - 5.148,75$ $x_b - x_a + 1.925,55$ $x_b - x_c + 1.576,14$ $x_c - x_a + 349,41$	$\lg(y_b - y_c)$ 3,07201824 $\lg(x_b - x_c)$ 3,1975948 $\lg \operatorname{tg}(CB)$ 9,8744234n $\lg \sin(CB)$ 9,7777425n $\lg \cos(CB)$ 9,9033198	$\lg \operatorname{tg}(CB)$ 9,8744234n $\lg \sin(CB)$ 9,7777425n $\lg \cos(CB)$ 9,9033198 $\lg \sigma$ 3,2942757 (50)

2	(AB)	33°36,8'	lg c	3,3640183	Q	45°59,2'	$\frac{1}{2}(\varphi + \psi)$	100°2,3'
	(CB)	32°10,2'		lg sin a		Q + 45°	$\frac{1}{2}(\varphi - \psi)$	9°33,4'
	$\gamma + \delta$	70°26,0'	lg (c : sin a)	3,4908293	lg ctg (Q + 45°) + lg tg $\frac{1}{2}(\varphi + \psi)$	8,2360908n 0,7519852n	φ	105°35,7'
	+	48°18,7'	lg a	3,2942753				94°28,9'
	β	41°10,1'	lg sin β	9,8184064	lg tg $\frac{1}{2}(\varphi - \psi)$	8,9880760	ψ	153°54,4'
	α	150°55,4'	lg (a : sin β)	3,4758689				
	$\varphi + \psi$	200°4,6'	lg tg Q	0,0149604	lg (a : sin β) + lg sin ($\beta + \psi$)	3,4758689 9,9986701	$\alpha + \psi$ $\beta + \psi$ $\gamma + \delta$	135°39,0'
								70°21,6'
3	+	lg (c : sin a)	3,4908293	lg s _c	lg s _c	3,3203707	lg (a : sin β) + lg sin ($\beta + \psi$)	3,4758689 9,8445018
	+	lg sin (a + φ)	9,6432895					
	lg s _a	3,1341118	lg s _b	3,4745395	lg s _b	3,3203707	(CB)	32°10,2'
	(AB)	33°36,8'	+	48°18,7'				
	φ	105°35,7'	(AD)	139°12,5'	(BD)	187°31,2'	(CD)	94°28,9'
	+		+					
	lg s _a	3,1341188	lg s _b	3,4745395	lg s _c	3,3203707	lg cos (CD)	9,8196457n
	(AD)	139°12,5'	+	48°18,7'				
	+	lg sin (AD)	9,8151196	lg Δx_a	lg Δy_c	3,1960857n	lg Δx_c	3,1400164n
	+							
	lg Δy_a	2,9492384	lg Δx_a	3,0132664n	lg Δy_c	3,1960857n	lg Δx_c	3,1400164n
	+	889 69	lg Δx_a	1 031,01				
	+	2 367,28	lg Δy_c	5 498,16	lg Δy_c	4 827,53	lg Δx_c	5 148,75
	+		lg Δy_c	5 498,16				
	+	3 256,97	lg Δx_c	6 529,17	lg Δy_c	4 827,53	lg Δx_c	5 148,75
	+		lg Δx_c	6 529,17				
	+		lg Δy_c	3 256,97	lg Δy_c	4 827,53	lg Δx_c	5 148,75
	+		lg Δx_c	3 256,97				
	+		lg Δy_c	3 256,97	lg Δy_c	4 827,53	lg Δx_c	5 148,75
	+		lg Δx_c	3 256,97				

§ 23. Разбивка закруглений.

При разбивке оси дорог и каналов кривые части ее разбиваются обыкновенно по дугам круга различных радиусов, величина к-рого меняется в зависимости от технических условий сооружаемого пути сообщения.

Необходимые вычисления производятся с помощью специальных таблиц для разбивки кривых, составленных различными авторами. В изыскательской практике СССР наиболее популярными являются таблицы Яцины и Моржова, а в последнее время Важеевского.

Разбивка главных точек кривой.

1. По данным: углу поворота $\alpha = 18^\circ 33'$, пикетажному расстоянию до него (№ 24 + 18) и радиусу кривой $R = 1\,000$ найти главные точки (начало T_1 , конец T_2 и середину B) кривой, ее длину и поправку за $2T - K$.



Черт. 15.

$$\begin{aligned} \text{На черт. 15: } T (\text{тангенс}) &= AT_1 = AT_2 = R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \\ &= 163,31; \text{ Б (биссектриса)} = OA - OB = R (\sec \frac{\alpha}{2} - 1) = \\ &= 13,25; K (\text{кривая}) = \overset{\frown}{T_1 B T_2} = R \frac{\pi \alpha}{180} = 323,76; \text{ Д} \\ (\text{домер}) &= 2T - K = 2,86. \end{aligned}$$

Числовые значения определены путем интерполирования табличных данных между $18^\circ 30'$ и $18^\circ 40'$ (из табл. 11).

Вычисления располагают так.

$R = 1\,000$	T	K	D	B
У. $18^\circ 40'$	164,354	325,795	2,913	13,416
$18^\circ 30'$	162,860	322,886	2,834	13,176
Разность на $10'$	1,494	2,909	0,079	0,241
Поправка на $3'$	0,448	0,873	0,024	0,072
У. $18^\circ 33'$	163,31	323,76	2,86	13,25
У. пр. на № 24 + 18,00 — T	1 63,31		У. № 24 + 18,00 + T	1 63,31
Н. К. + К.	№ 22 + 54,69 3 23,76	К. Кр. (неспр.) — $(2T - K)$	№ 25 + 81,31 2,86	
К. К.	№ 25 + 78,45	К. К. (испр.)	№ 25 + 78,45	

2. По данным: началу кривой № 18 + 75, ее радиусу $R = 800$ и длине $K = 225$ м найти расстояние T от Н. К. до угла поворота и величину последнего.

Этой цели служит специальная табл. I, составленная для разных R и K ; последние кратны 5 и 10, как это большей частью и бывает на практике.

Выборка из табл. I для $R = 800$ и $K = 225$ дает: $У = 16^\circ 7'$; $T = 113,25$; $B = 7,88$; $2T - K = 1,50$.

Н. К.	№ 18 + 75
+ T	1 + 13,25
У	№ 19 + 88,25
+ T	1 13,25
	№ 21 + 1,50
— $(2T - K)$. . .	1,50
К. К.	№ 21

Н. К.	№ 18 + 75
+ К	2 25
К. К.	№ 21

Если бы кривая была задана длиной, не имеющейся в табл. I, напр., $K = 375$ м, то ее составляют из двух дуг, напр., 275 и 100, имеющих в табл. Тогда Y для $K = 375$ будет равен сумме углов для $K = 275$ и $K = 100$, т. е. $Y = 19^\circ 41' 44'' + 7^\circ 09' 43'' = 26^\circ 51' 27''$. По известным Y и R числовые значения T , K , B и D находят по табл. II.

Вынос пикетов на кривую.

Вынос пикетов на кривую производится по способам: координат, вспомогательных касательных (описанного многоугольника) и хорд (вписанного многоугольника).

3. Вынести по способу координат пикеты 19, 20 и 21 на кривую Н. К. № 18 + 64,6; К. К. № 21 + 16,2; $R = 800$.

Необходимые данные выбираются из табл. III «Половых таблиц Вакеевского», дающей для разных K значения абсцисс $X = R \cdot \sin^2 \frac{Y}{2}$ (кривая без абсциссы) и ординат $Y = 2 \cdot R \cdot \sin^2 \frac{Y}{2}$. Осью X служит касательная с началом координат в точках Н. К. и К. К.

Разбивку ведут с обоих концов к середине, при чем абсциссы откладывают лентою, а ординаты — рулеткою.

Выборка X и Y из табл. III дает:

От Н. К. (№ 18 + 64,6)

№№ вынос. пик.	K	X	Y
19	38,4	38,39	0,78
20	136,4	134,78	11,43

От К. К. (№ 21 + 16,2)

	K	X	Y
21	16,2	16,20	0,16
20	116,2	115,79	8,42

Положение пик. 20 должно совпасть по обоим определениям, что служит контролем выноса его на кривую.

Этот способ применяется гл. обр. при предварительных изысканиях.

4. Вынести по способу многоугольника касательных пикеты 16, 17, 18 и 19 на кривую Н. К. № 15 + 75; К. К. № 21; $R = 600$; $K = 525$; $Y = 50^\circ 8'$.

Длину кривой разбивают на несколько дуг и по возможности так, чтобы пикеты попали на тангенсы и биссектрисы.

В данном случае можно, напр., разбить на три дуги: $K_1 = 125$, $K_2 = K_3 = 200$.

Выборка из табл. I (а для K_1 также и из табл. II) дает:

	Y	T	B	$2T - K$	$R = 60$
$K = 225$	$21^\circ 29' 09''$				
$K = 100$	$9^\circ 32' 57''$				
$K_1 = 125$	$11^\circ 56' 12''$	62,73	3,27	0,46	
$K_2 = K_3 = 200$	$16^\circ 03' 55''$	100,94	6,43	1,88	

Контролем служат: $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 = 50^\circ 8'$.

Окончательный расчет будет следующий:

$H.K_1 \dots \text{№ } 15 + 75$	
$+ T_1 \dots 62,73$	
$Y_1 \dots \text{№ } 16 + 37,73$	
$+ T_1 \dots 62,73$	
$K.K_1 (\text{неисп.}) \text{№ } 17 + 0,46$	
$2T - K \dots 0,46$	
$K.K_1 (\text{испр.}) \text{№ } 17 + 0,00$	

$H.K_2 \dots \text{№ } 17 + 0,00$	
$+ T_2 \dots 1 \quad 0,94$	
$Y_2 \dots \text{№ } 18 + 0,94$	
$+ T_2 \dots 1 \quad 0,94$	
$K.K_2 (\text{неисп.}) \text{№ } 19 + 1,88$	
$2T - K \dots 1,88$	
$K.K_2 (\text{испр.}) \text{№ } 19 + 0,00$	

$H.K_3 \dots \text{№ } 19 + 0,00$	
$+ T_3 \dots 1 \quad 0,94$	
$Y_3 \dots \text{№ } 20 + 0,94$	
$+ T_3 \dots 1 \quad 0,94$	
$K.K_3 (\text{неисп.}) \text{№ } 21 + 1,88$	
$2T - K \dots 1,88$	
$K.K_3 (\text{испр.}) \text{№ } 21 + 0,00$	

В закрытой местности кривая разбивается еще детальней дугами длиной в один пикет.

5. Решить задачу 4 по способу вписанного многоугольника (хорд). Из табл. III для $\frac{K}{2}$ выбирают абсциссу x , которая даст значение полухорды $\frac{s}{2} = R \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$. Соответствующая ордината y даст длину стрелки $l = R \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right) = R \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{4}$.

Для $K_1 = 125$ и $K_2 = K_3 = 200$ при $R = 600$ они будут равны: $\frac{K_1}{2} = 62,50$; $x_1 = x_2 = 62,39$; $l_1 = y_1 = 3,25$; $\frac{K_2}{2} = \frac{K_3}{2} = 100$; $x_2 = x_3 = x_4 = 99,54$; $l_2 = l_3 = y_2 = y_3 = 8,31$.

Разбивка в натуре производится с помощью теодолита, устанавливаемого последовательно в точках $H.K_1$, № 17 и № 19.

В $H.K_1$ хорду определяют по углу с касательной, равному $\frac{Y_1}{2} = \frac{\alpha_1}{2} = 5^\circ 58'$ и длине s_1 , а на шк. 17 и 19 по углу между хордами (разбиваемой и продолжением предыдущей), равному $Y_2 = Y_3 = 19^\circ 00'$.

Значения углов выбираются, как и в предыдущем примере, из табл. I.

Способ этот находит применение, когда местные препятствия не позволяют разбивать по способу касательных, а также для контроля точек, найденных по иному способу. Для этого измеряют хорду и сравнивают ее длину с табличной величиной. Положение отдельных точек проверяют с помощью ординат y от хорды, равных разности между стрелкой l и ординатой y от тангенса (по табл. III).

Детальная разбивка кривой.

Детальная разбивка кривой производится различными способами: координат, прямоугольных и полярных, последовательных хорд, последовательной перемены начала координат и др., преимущественно же по способу прямоугольных координат, достоинство которого состоит в том, что положение каждой точки кривой определяется совершенно независимо от положения предыдущих точек, вследствие чего нет накопления погрешностей.

Близость точек зависит от R . Обыкновенно берут:

	На ровн. местн. через 10 м	На косогоре через 5—10 м
Для R от 100 до 200	20 м	10 м
» » » 300 » 1000	40 м	20 м
» » » 1000 » 2000	50 м	25 м
(в ш. 2000)		

Как общее правило, детальную разбивку кривой ведут с обоих концов к середине.

6. Разбить детально по способу координат кривую $R = 600$; $K = 120$ (см. также прим. 3).

Выборка из табл. IV дает:

Кр	X	Y	Кр	X	Y	Кр	X	Y
10	10	0,08	30	20,99	0,75	50	49,94	2,08
20	20	0,33	40	39,97	1,33	60	59,90	3,00

Контролем служит смычка обеих половин, а также середина кривой, разбитая по биссектрисе. Промежуточные точки могут контролироваться по ординатам от хорды (прим. 5).

7. Разбить эту же кривую по способу углов (называемому также способом полярных координат или хорд).

Установив теодолит в точке T и совместив нуль верньера с нулем лимба, движением лимба направляют трубу по тангенсу TM . Затем поворачивают алидаду на угол τ и, держа один конец ленты у точки T , другим описывают дугу, пока впилюшка при этом конце не попадет на вертикальную нить трубы. Определив точку A_1 , трубу направляют под углом 2τ , а ленту укрепляют в точке A_1 и снова описывают дугу, пока другой конец ее не попадет на крест нитей. Далее снова продвигают ленту в A_2 , а трубу устанавливают под углом 3τ и, продолжая действовать подобным образом, разбивают половину дуги. Вторую же половину дуги разбивают с другого конца ее.

Угол τ находится по табл. VIII, где он дан для разных R , для хорд $s = 10$ и 20 м.

Для $s = 10$ и $R = 600$ выборка по табл. VIII дает:

K	τ	K	τ	K	τ
10	0°28'39"	30	1°25'57"	50	2°23'14"
20	0°57'18"	40	1°54'38"	60	2°51'53"

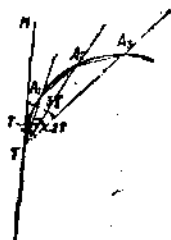
Способ этот уступает в точности способу координат с тангенса и применяется или в том случае, когда ординаты длинные, или когда их приходится откладывать на неровной местности, на насыпи или в выемке.

Если крайняя речень длинна или вынуждение на отдельные точки встречает препятствие, то начало координат переносят в последнюю разбитую точку, где с помощью теодолита получают направление новой касательной, относительно к-рой продолжают поступать так же, как и раньше. Напр., при переносе координат в A_1 новая касательная определяется по углу 3τ , построенному в A_1 (на $T \dots 0^\circ 0'$, а на касательную 3τ).

Последовательная перемена начала координат применяется как при способе хорд, так и координат с тангенса.

8. Разбить ту же кривую по способу последовательных хорд.

Способ этот хотя и имеет то преимущество, что не требует никаких инструментов, кроме ленты и рулетки, но, являясь мало точным, применяется или для проверки точек, разбитых по иному способу, или с целью восстановления пропавших колышков уже разбитой кривой. Самостоятельно он приме-



Черт. 19.



Черт. 20.

няется в застроенной или лесистой местности, а также по окончании земляных работ при больших насыпях и выемках.

Этой цели служат у Ватсековского табл. VII, согласно к-рой для $s = 10$ м $A_1A_2 = 0,08$, а $A_2A_3 = A_1A_2 = \dots = 0,16$.

Построив первую точку a_1 по способу координат ($X = 10$, $Y = 0,08$), вытягивают ленту по направлению первой хорды T_1a_1 и в расстоянии $a_1A_2 = a_1T_1 = S$ выкают в точке A_2 шпильку. После этого в a_1 закрепляют ленту, а в A_2 начало рулетки и соединяют 10 м по ленте с 0,16 м по рулетке. Место соединенных концов по натяжению и определяет вторую точку a_2 . Повторив этот же прием и в точке a_2 , получают a_3 и т. д. до середины кривой, после чего подобным же образом производят разбивку и с др. конца кривой.

Переходная кривая.

Переходная кривая разбивается при укладке рельсов, иногда и при самом устройстве полотна, и служит для сопряжения прямых с круговыми кривыми.

Для определения элементов переходной кривой надо знать R сопрягаемой дуги круга и параметр $C = RL$ переходной кривой. Последний определяется из условия, чтобы на протяжении L переходной кривой можно было провести отвод повышения наружной колес:

$$L = \frac{h}{i},$$

где h —возвышение наружного рельса, i —уклон отвода повышения, принимаемый на магистральных дорогах равным 0,001, при стесненной трассе, а также на подъездных и второстепенных пунктах — 0,002 и в особо трудных условиях (в горной местности)—0,003.

Разбивка переходных кривых производится большей частью по кубической параболы: $y = \frac{x^3}{6C}$, двумя способами: наружного (с сдвижкой основной кривой) и внутреннего замыкания (с введенным промежуточной круговой кривой с несколько меньшим радиусом, чем основная кривая).

Внутреннее замыкание применяется при укладке рельсов на полотно, сооруженное без переходной кривой, в том случае, когда сдвижка основной кривой сопряжена с увеличением земляных работ. В этом случае применяется также и радиондальная спираль: $S^3 = 2Ca$.

Для разбивки переходной кривой по кубической параболы у Ватсековского табл. IX, X и XI (для наружного замыкания), а по спирали табл. XII, XIII и XIV (для внутреннего замыкания).

9. Произвести разбивку закругления со вставкой кубической параболы по данным: $R = 300$; $i = 0,002$; $Y = 16^\circ 20'$, на пик. № 20 + 30.

Выборка из табл. II дает:

$$T = 43,05; K = 85,52; 2T - K = 0,58; B = 3,073;$$

Выборка из табл. X-а:

$$L = 55; s = 0,42; m = 27,49; \beta = 5^\circ 15' 08'',$$

где s —величина уменьшения радиуса, а m —абсцисса центра кривой;

Из табл. II для $R=1000 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 143,508$, откуда: $x \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 0,42 \cdot 0,144 = 0,06$.

Так как $Y > 2\theta$, то вставка параболы возможна.

Разбивка производится сл. обр. От вершины угла откладывают $T_1 = T + x \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 43,05 + 0,06 = 43,11$ м и получают точку E , — проекцию на тангенс центра кривой. Отложив далее $ET_2 = m$, получают T_2 — начало переходной кривой, от к-рой и производят разбивку через 10 м (табл. X-б):

Табл. X-б.

K	X	Y	K	X	Y
10	10	0,01	40	39,99	0,65
20	20	0,08	50	49,97	1,26
30	30	0,27			



Черт. 21.

Получив конечную точку C переходной кривой ($X = l = 54,95$; $Y = P = 1,68$; табл. X-б) и приняв за начало координат точку E , разбивают круговую кривую $R = 300$, при чем ординаты ее, взятые из табл. IV, увеличивают на x . Координаты будут равны:

$$X = 29,95; Y = 1,50 + 0,42 = 1,92 \text{ для } K = 30;$$

$$X = 39,88; Y = 2,66 + 0,42 = 3,08 \text{ для } K = 40.$$

Подобным же образом разбивают кривую и с другого конца.

10. Сделать разбивку закругления со вставкой радиоидальной спирали по данным: $R = 300$; $l = 0,002$; $Y = 41^\circ 30'$, на пик. № 17 + 34.

Прежде всего по табл. XIX убеждаются в возможности разбивки переходной кривой.

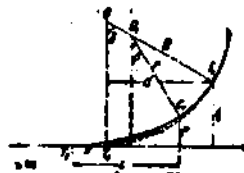
Из табл. XIII-а имеем:

$$L = 55; \beta = 5^\circ 31' 43''; x = 0,442; m = 27,49;$$

$$K = 23,88; d = 72,29; \delta = 13^\circ 56' 40'';$$

из табл. II:

$$T = 113,66; K = 217,29; D = 10,03; B = 20,81.$$



Черт. 22.

Разбивку производят сл. обр. От угла поворота откладывают T , получают H . К. (T_1), от нее откладывают еще $K = 23,88$ и получают T_2 — начало переходной кривой, от к-рой, по данным табл. XIII-б:

$K = 10$	$x = 10$	$y = 0,011$
20	20	0,085
30	30	0,287
40	39,99	0,680
50	49,97	1,329
55	$l = 54,95$	$p = 1,768$ — точка C_1 — конец спирали.
60	59,92	2,293
70	69,83	3,606
80	79,70	5,264
90	89,49	7,268
$s = 96,88$	$s + d = 96,17$	$q = 8,84$ — точка F_1 перехода в кривую радиуса $R = 300$

разбивают точки переходной кривой.

От точки F_1 идут далее точки кривой радиуса $R = 300$, получаемые по одному из способов, описанных ранее.

Разбивка извилины.

Разбивка извилины применяется с целью соединения двух данных прямолинейных направлений и состоит из двух круговых кривых, обращенных выпуклостью в разные стороны, и касательной к этим дугам прямой вставки между ними.

Данными для разбивки извилины служат (черт. 23):

- 1) начальная точка извилины A ;
- 2) радиусы R и R_1 дуг AB и CD ;
- 3) длина прямой вставки d ;
- 4) длина перпендикуляра $AE = p$ к направлению MN ;

5) угол $DEA = \gamma$, составленный перпендикуляром AE с направлением PQ . Начальная точка A и радиусы R и R_1 даются, d определяется по табл. XVIII, p и γ или измеряются непосредственно на местности, или из точки A

прокладывается ход $A-1-2-S$ к направлению PQ , после чего p и γ получаются вычислением из $\triangle EAS$.

Для решения задачи необходимо определить углы Y_1 и Y_2 , к-рые получаются по ф-лам:

$$Y_1 = \gamma - (m + n); \quad \sin m = \frac{R_1 - (p - R) \cdot \sin \gamma}{\sqrt{(R + R_1)^2 + d^2}}; \quad Y_2 = 90 - (m + n);$$

$$\operatorname{tg} n = \frac{d}{R + R_1}.$$

11. Разбить извилину по данным: $R = 600$; $R_1 = 800$; $p = 1200$; $\gamma = 76^\circ$; $l = 0,001$.

Согласно табл. XVIII-а $d = 125$ м;

$$\sin m = \frac{800 - (1200 - 600) \sin 76^\circ}{\sqrt{(600 + 800)^2 + 125^2}} = \frac{217,8}{1405,8}; \quad m = 8^\circ 55';$$

$$\operatorname{tg} n = \frac{125}{1400} = 0,0893; \quad n = 5^\circ 6';$$

$$Y_1 = 76^\circ - 14^\circ 1' = 61^\circ 59';$$

$$Y_2 = 90^\circ - 14^\circ 1' = 75^\circ 59'.$$

Выбрав из табл. II значения T , K , D и B , самую разбивку извилины производят сл. обр. От точки A в направлении MN откладывают T_1 и в точку K_1 переносят теодолит и под углом $Y_1 = 61^\circ 59'$ по трубе проецируют линию, по к-рой откладывают $T_1 + d + T_2$; переносят теодолит в точку K_2 и по углу $Y_2 = 75^\circ 59'$ отмеряют длину $T_2 = K_2 D$.

Контролем служат: нахождение точки K_2 на линии PQ и соответствие измеренного угла Y_2 вычисленному.

Разбивку промежуточных точек производят лишь после того, как убедятся в правильности построения на местности основных точек.

Геометрическое нивелирование.

Табл. 15. Выбор типа нивелира в зависимости от характера производимых работ.

Название работ	Тип нивелира	Увели- чение трубы в	Цена деления уровня м
1. Быстрые нивелировки малой точности. Предварительные обследования, реконструкция, летучие изыскания, изыскания с целью сравнения вариантов и т. п.	Глухие, малые. Ручные, карманные, зеркальные, весовые и т. п. Наиболее употребительны: карманный нивелир Ватнера и американский ручной нивелир Лама. В последнее время в СССР начинают находить применение нивелир-автоматы Леонтовского и Дробышева.	6—10	3'—1'
2. Техническая нивелировка на небольшой площади (пониженной точности). При производстве строительных работ, при планировке небольших участков, при прокладке дренажа и т. п.	Глухие нивелиры. Нивелир Эго. Нивелир IV Цейсса.	15—20 25	40" — 30" 30" — 22" 30"
3. Технические нивелировки на большой площади или на большом протяжении (средней точности). Дорожные, гидротехнические и мелиоративные изыскания.	Нивелир Эго. Нивелир Цейсса. В связи с наблюдающейся у русских инженеров-изыскателей тенденцией допускать расстояния до рейки в 100 м (через пикет) желательны большие модели нивелиров немецкого типа. При осуществлении проекта в натуре заслуживают внимания: нивелир-тахеометр Цейсса и нивелир типа проф. Фоглера (Ф. Розенберг, в Берлине). Нивелиры этого типа при помощи алидационного винта дают возможность непосредственно проводить линии с уклоном до 0,10—0,15. Удобны при изысканиях английские глухие нивелиры Ф. Стэнли, в Лондоне.	25—30 25 30—35	22" — 17" 30" 15" — 20"
4. Технические нивелировки повышенной точности. Нивелирование реперов высшего порядка (опорных точек для нивелировок средней и пониженной точности), городские нивелировки для целей канализации, определение уклона реки и т. п.	Нивелиры немецкого типа (с уровнем при трубе, иногда реверсивным). Заслуженной известностью в СССР пользуются нивелиры фирм: Цейсса, в Йене, Брейтгаупта, в Кесселе, и Фенцеля, там же. В Америке нивелиры этого типа (напр., Ф. Buff and Buff, в Востоне) широко применяют при дорожных изысканиях для определения отметок реперов, между к-рыми собственно изыскания проводят с помощью тахеометра. В Англии предпочитают глухие нивелиры, а во Франции — со стальным уровнем.	27—30 32—40	18" — 10" 10" — 5"
5. Прямое нивелирование. Для точных государственных нивелировок (в	В СССР и Германии приняты нивелиры Ф. Гильдебранд, в Фрейберге, и Ф. Вамберг, в Фридрихс-ау, с алидационным винтом при подставке и уровнем	35—40 и более (до 60)	7" — 3"

Копия (в. 1919 г.)
И. Техн. Бюро

Табл. 15. (Продолжение.)

Название работ	Тип нивелира	Увели- чение трубы	Цена деления уровня
целях создания опорных точек, — марок и реперов, для государственной топографической съемки и для больших инженерных работ).	под трубой, снабженный камерой и модератором. Имеется и второй уровень, съемный, для поверок. В Америке — глухой нивелир оригинальной конструкции, так наз. точный нивелир береговой и геодезической службы. Во Франции — со съемным уровнем и остроумным приспособлением, автоматически не допускающим неправильного расположения трубы и уровня.		

§ 24. Общий осмотр и исследование нивелира.

Перед выездом на полевые работы нивелир д. б. тщательно осмотрен, очищен от грязи и пыли и смазан в соответствующих местах маслом или вазелином.

Рекомендуется чистой полотняной тряпочкой, смоченной в бензине, очистить от грязи вертикальную ось вращения и втулку и затем слегка (не более $\frac{1}{2}$ капли) смазать ось костяным маслом; винты подъемные, зажимные, микрометричные и исправительные смазать слегка жидким вазелином. Во избежание попадания вазелина на сетку нитей исправительные винты ее только обтираются провазелиненной тряпочкой.

В нивелирах с перекладными трубами цапфы трубы и гнезда д. б. обтерты чистой тряпкой, смоченной в цапфатирном спирте или бензине. Никакой смазки цапф и гнезд маслом или вазелином делать не допускается.

Одновременно надо убедиться в отсутствии ржавчины, забоин и т. п. изъянов как на цапфах трубы, так и на соприкасающихся с ними поверхностях лагера, а также в полном соответствии лагера цапфам трубы и в правильности вращения трубы в лагерах.

При вывинчивании и ввинчивании винтов, подъемных, уровня, сетки и т. д. нужно проследить, не имеют ли винты мертвого хода или шатания. Замеченные недостатки д. б. устранены или подтягиванием винтов, или заменой механиком сработавших винтов новыми. Особое внимание д. б. обращено на то, чтобы не было шатания и перемещений вверх и вниз исправительных винтов уровня и подставок трубы.

Если ампула уровня непрочко заделана в оправе, то ее нужно закрепить в надлежащем положении каплями стеарина (или воска). На фабрике ампула заливается в оправе гипсом.

Одновременно следует удостовериться и в исправности нитей сетки. Нити д. б. видны отчетливо и быть прямыми и тонкими. Если же нити видны неясно или на-глаз заметна их кривизна или неперпендикулярность их друг другу, то сетка нитей д. б. заменена новой.

До установки инструмента на штатив надо убедиться также и в исправности ножек, головки и винтов штатива и, если нужно, сделать соответствующий ремонт.

Рекомендуется трущиеся деревянные части смазать салом, а винты вазелином.

В нивелире Цейсса все части прибора настолько хорошо защищены от пыли, что рекомендуется лишь при необходимости смазывать вазелином подъемные винты подставки. В случае надобности основательной чистки таковая д. б. поручена опытному механику.

Нивелир считается пригодным для работы, если зрительная труба и уровень удовлетворяют условиям, приводимым ниже, и между увеличением трубы и ценой деления уровня соблюдены соотношения, приведенные в табл. 15.

а) От уровня требуется достаточная и соответствующая силе зрения трубы (не излишняя) чувствительность.

Устанавливают пузырек уровня точно на середину и делают по рейке, выставленной в 40—50 м от инструмента, отсчет с точностью до 0,001 м. Подъемным винтом сводят пузырек с середины (до одного—двух делений) и снова тем же винтом приводят на середину. Если отсчет не изменится, то можно заключить, что уровень имеет достаточную чувствительность.

Для определения излишней чувствительности уровня делают при положении пузырька точно на середине отсчет по рейке, затем смещают немного пузырек уровня (до 1 деления) и, смотря в трубу, снова с помощью того же винта приводят горизонтальную нить на тот же отсчет. Если при этом и пузырек уровня станет на середину, то уровень пригоден.

Уровень с недостаточной или чрезмерно излишней чувствительностью д. б. заменен другим. Небольшая излишняя чувствительность уровня не вредит работе с нивелиром и во всяком случае лучше, чем недостаточная чувствительность.

Определение цены деления уровня.

Под ценою деления уровня подразумевается угол наклона оси уровня при перемещении пузырька на одно деление, длина к-рого нормально делается равной 2 м.

Ставят трубу по направлению одного из винтов и, выставив в этом направлении в расстоянии 40—50 м отвесно рейку, при нек-ром положении пузырька делают отсчет по рейке, после чего перемещают пузырек на несколько делений и снова делают отсчет. Тогда цена деления:

$$\mu'' = \frac{2062651}{n d},$$

где: l —разность отсчетов по рейке, n —число делений, d —расстояние до рейки.

Определение цены деления следует делать в тени по несколько раз и для разных мест дуги, чтобы можно было судить о правильной шлифовке уровня.

б) От зрительной трубы нивелира, как и вообще всякого геодезического инструмента, требуется:

1. Правильность и ясность изображений рассматриваемых предметов. В расстоянии 40—50 м от инструмента выставляется экран, на белом фоне к-рого изображены черным правильные геометрические фигуры (квадрат, круг и т. п.) размерами по длине 3—5 см. Если при рассматривании в трубу фигуры будут казаться серо-пепельной окраски или искаженными и будут по краям окрашены в какой-нибудь, кроме голубого, цвет, то труба негодна. Голубоватый оттенок является признаком высокого качества стекла трубы.

2. Полная центровка окуляра и объектива.

Для производства этого исследования выдвигают окулярную трубочку

настолько, чтобы нити не были видны, и, направив трубу на ясно видимую точку, вращают трубу около геометрической оси, и если изображение точки и начинает вращаться вместе с трубой, то труба непригодна. Вынули после этого окуляр и заменив его неподвижной лупой, вращают снова трубу; если и после этого изображение описывает круг, то, значит, плохо центрирован объектив; наоборот, неподвижное изображение указывает, что плохо центрирован окуляр. Плохо центрированные трубы для наблюдений непригодны и могут быть исправлены только в специальной мастерской.

3. Отсутствие параллакса нитей сетки.

Явление параллакса (уклонения) нитей происходит оттого, что плоскость изображения сетки не совпадает с плоскостью изображения предмета. Установив трубу для наблюдений по глазу до получения резкого и ясного изображения сетки через окуляр (вращением последнего), наводят трубу на какой-нибудь предмет (напр., на рейку) и действуют кремальеркой до получения ясного и отчетливого изображения рейки. При наличии параллакса перемещения глаза в разные стороны от центра окуляра вызовут и перемещения сетки по изображению рейки. Если сетка C стоит ближе к глазу O , чем изображение предмета m , то при движении глаза вверх сетка будет перемещаться вниз (черт. 24) и, наоборот, при положении сетки за изображением предмета сетка будет следовать за движением глаза (оба вверх или вниз, черт. 25).



Черт. 24.



Черт. 25.

Малое влияние параллакса уничтожается действием кремальерки за счет ясности изображения; при большом параллаксе должна быть перемещена диафрагма с сеткой, что может быть выполнено только механиком.

4. Визирная ось трубы не должна менять своего направления при передвижениях окулярного колена в объективном (а для труб с внутренней фокусировкой — внутреннего стекла).

В нивелирах с перекладной трубой эту проверку обычно соединяют с установкой визирной оси. Сделав последнюю, напр., для расстояния в 50 м, повторяют эту проверку и для расстояний, при которых приходится для получения ясности изображений действовать кремальеркой. Если и при этих расстояниях (напр., 10, 20, 30 м) отсчеты по рейке до и после поворота трубы в ее гнездах на 180° будут одинаковы, то четвертое условие выполнено.

В теодолитах и глухих нивелирах для проверки этого условия удовлетворяются наведением трубы на какую-нибудь точку и затем, сохраняя глаз неподвижным, действуют слегка в обе стороны кремальеркой. Если горизонтальная нить остается на том же месте, то условие выполнено.

Определение увеличения трубы.

В расстоянии около 10 м от инструмента ставят отвесно рейку и, смотря одновременно одним глазом через трубу, а другим мимо трубы на рейку, замечают, какое число делений, видимых простым глазом, покрывается одним делением, видимым в трубу, — это число и выразит собою увеличение трубы.

Если известно увеличение трубы, то расстояние до рейки, при котором можно брать отсчеты с желаемой точностью, определится по формуле:

$$d = 2000 \epsilon,$$

где ϵ — точность отсчета и ϵ — увеличение трубы.

В нивелировках средней точности удовлетворяются точностью отсчета в 0,002 м, что дает

$$d = 40,$$

и, следовательно, для возможности визиирования на 100 м требуется, чтобы увеличение трубы было не менее 25.

Определение поля зрения трубы.

Под полем зрения трубы понимается пространство, к-рое можно обозревать в трубу при ее горизонтальном положении. Размер поля зрения определяется диаметром диафрагмы сетки, а мерой служит угол α , образуемый крайними лучами поля зрения.

Практическое поле зрения м. б. определено:

1) по увеличению u трубы (поле зрения обратно пропорционально увеличению трубы):

$$\alpha' = \frac{2}{3u \cdot \sin 1'} = \frac{2 \cdot 300}{u};$$

2) по рейке; выставив рейку на расстояние d (напр., 20 м) от инструмента, делают отсчеты по концам диаметра проектирующегося на рейку светлого круга, тогда:

$$\alpha' = \frac{l}{d \cdot \sin 1'} = 3 \cdot 438 \frac{l}{d},$$

где l — разность отсчетов по рейке.

По окончании исследования нивелира необходимые данные об инструменте: номер, система, фирма, увеличение трубы, поле зрения и цена деления уровня, заносятся в паспорт нивелира. Сюда же заносятся и перечень принадлежностей к нивелиру, его особенности и коэф-ты дальности (если таковой имеется). Паспорт заполняется в начале полевого периода и дополняется в зависимости от происшедших с инструментом перемен.

§ 25. Полевые проверки нивелиров.

Основными условиями, к-рым должен удовлетворять всякий нивелир, являются: 1) перпендикулярность оси уровня вертикальной оси вращения инструмента и 2) параллельность линии визиирования оси уровня.

Проверки относительно соблюдения этих условий в нивелирах различной конструкции производятся различно.

Технический нивелир Зео (с уровнем при подставке трубы).

Проверки нивелиров этого типа производятся в след. порядке.

1. **Ось уровня д. б. перпендикулярна основной оси инструмента.** Ставя уровень то на два подъемных винта, то на третий, приводят пузырек уровня на середину трубки, повторяя эти действия несколько раз, пока пузырек не перестанет сходить с середины при поворотах уровня на 90°. После этого для проверки уровня ставят его по направлению третьего винта и, приведя пузырек возможно точно на середину, поворачивают прибор на 180°. Повороты на 180° достигаются или по вехе, выставленной по направлению визирной оси трубы, или по отсчетам на лимбе (если таковой имеется), или на-глаз. Если пузырек уровня после поворота на 180° отойдет от середины, то половину оказавшегося схода уничтожают при помощи исправительного винта уровня, а оставшуюся половину — при помощи подъемного винта треножника,

Поверку уровня повторяют до тех пор, пока пузырек уровня не будет оставаться на месте при полном обороте инструмента вокруг его вертикальной оси.

2. Нити сетки должны быть взаимно перпендикулярны и после установки инструмента по уровню та нить сетки, по которой производится отсчеты по рейке, должна стать горизонтально. Приведя инструмент в горизонтальное положение, наводят трубу на отвесно стоящую подвижную рейку. После этого вращают в разные стороны нивелир с помощью микрометрического винта. Если горизонтальная нить сходит с отсчета, то ее положение исправляют (черт. 26) перемещением винта φ , давящего на выступ Γ трубы. При большом наклоне сетки рекомендуется, освободив винты, сначала поставить кольцо сетки от руки в приблизительно верное положение; а затем уже начать действовать винтом φ . После установки горизонтальной нити вертикальная нить повернется по отвесу.



Черт. 26.

В сетках, нарезанных на стекле, условие перпендикулярности нитей почти всегда соблюдается; при паутинных волосках в случае неперпендикулярности следует сменить сетку.

Назначение вертикальной нити—повернуть отвесное положение рейки в момент отсчета.

3. Визирная ось должна совпадать с геометрической, вернее, геометрическая ось трубы должна лежать в плоскости визирования или по крайней мере быть ей параллельна. Поверяется визированием на рейку, поставленную в расстоянии 50 м от инструмента. Если сделанные отсчеты до и после поворота трубы в ее гнездах на 180° не будут совпадать, то с помощью верхнего и нижнего исправительных винтов сетки горизонтальная нить перемещается на отсчет, равный полусумме отсчетов до и после поворота трубы. Поверку повторяют несколько раз.

Установку нити полезно проверить и для расстояний 20—40 м, чтобы одновременно убедиться в правильности хода окулярного колеса в объективом. При отсутствии правильности хода все отсчеты при расстояниях, отличных от 50 м, надо брать при двух положениях трубы (до и после поворота около геометрической оси).

Вертикальная нить устанавливается так же, как и горизонтальная. Для этого трубу поворачивают в лагерах на 90° , т. е. в положение, при котором вертикальная нить станет горизонтально, и проделывают описанный процесс проверки и установки нити.

Установка креста нитей и. б. произведена и сразу. Для этого проектируют, напр., на стену, крест нитей при двух положениях трубы (а и б) (черт. 27). Наметив среднюю точку с между проекциями, передвигают на нее исправительными винтами сетки крест нитей.

4. Образующая цапф трубы должна быть параллельна оси уровня. Приведя инструмент в горизонтальное положение, делают отсчет по рейке, выставленной на 50 м от инструмента. Переменив под трубой места подставок ее, снова делают отсчет по рейке, следя, чтобы пузырек уровня в обоих случаях в момент отсчета был точно на середине. Разница в отсчетах уничтожается изменением высоты той подставки, к-рая снабжена исправительными винтами. Высота ее изменяется настолько, чтобы горизонтальная нить давала средний отсчет. Поверка повторяется несколько раз,—до уничтожения влияния непараллельности образующей цапф оси уровня (в пределах точности отсчитывания по рейке).



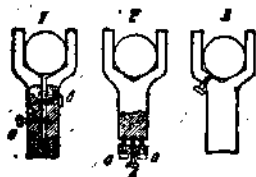
Черт. 27.

На черт. 28 показано устройство подставок с исправительными винтами. Чтобы не повредить последних, в подставках 1-го и 2-го типов надо, напр., для увеличения высоты их сначала отпустить винт а, а

затем ввинчивать винт *б* до тех пор, пока не получится требуемый отсчет, после чего для закрепления сделанной установки винт *а* ввинчивается до упора.

5. Цапфы должны быть цилиндричны и равного диаметра.

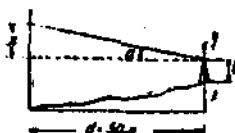
Проверка производится двойным нивелированием. Нивелир ставят строго посредине между двумя рейками, поставленными отвесно над кольщиками, вбитыми в уровень с землею, и путем нескольких наблюдений, с переменной высоты инструмента, определяют верное (в пределах точности отсчитыва-



Черт. 28.



Черт. 29-а.



Черт. 29-б.

вания по рейке) превышение *h* точек, в к-рых поставлены рейки. Расстояние *d* между рейками берут в 50 м. После этого ставят нивелир на месте одной из реек так, чтобы окуляр трубы при визировании на другую рейку находился по отвесу в точности над кольшком, и определяют превышение по разности высоты *i* инструмента в точке стояния и отсчета по рейке. Несовпадение этих двух определений (в пределах точности отсчитывания по рейке, т. е. 0,002 м) покажет неравенство диаметров цапф.

Исправления неравенства диаметров цапф могут производиться лишь в специальных мастерских.

Проверку эту время от времени (через один—два месяца) нужно повторять, т. к. при самой работе от постоянного переключивания трубы в лагерах цапфы могут стираться неравномерно.

Если же является необходимость работать нивелиром с неравными цапфами, то или инструмент надо устанавливать точно посредине, или отказаться от переключивания трубы в лагерах и работать им как глухим, сделав соответствующую этому типу установку нитей, или вводить для неравных расстояний в превышения поправки по ф-ле:

$$\Delta h = \frac{x}{d} (d_2 - d_n) = \text{tg } \alpha (d_2 - d_n),$$

где: *x*—погрешность, соответствующая расстоянию *d*, *d₂* и *d_n*—расстояния до задней и передней реек.

Определение нивелиром Эго превышений между связующими точками.

Инструмент, как правило, ставится близко к середине между рейками. Рекомендуется при техническом нивелировании средней точности не допускать разницы в расстояниях от нивелира до реек более 5—10 м, чтобы избежать влияния неравенства диаметров цапф, почти всегда имеющегося в нивелире.

После приведения инструмента в горизонтальное положение труба наводится сначала на заднюю, потом на переднюю рейки и по ним делаются отсчеты с точностью до 0,001 м. После этого труба переключивается в лагерах, поворачивается около геометрической оси на 180° (повороты напомина-

ются положением кремальеры, — сверху и снизу) и снова делаются отсчеты на заднюю и переднюю рейки. Взгляды на промежуточные точки берутся при втором положении трубы.

Нивелир с уровнем при трубе (труба перекидана).

Проверка этого типа нивелиров производится в след. порядке.

1. Ось уровня и геометрическая ось трубы должны лежать в совпадающих или параллельных отвесных плоскостях (отсутствие скрещивания осей). Приводят пузырек уровня на середину и поворотами трубы в разные стороны производят легкие покачивания уровня. Если при этом пузырек уровня будет удаляться к разным концам, то действуют боковыми исправительными винтами до тех пор, пока пузырек или будет оставаться на середине (оси уровня и трубы в одной отвесной плоскости), или будет отходить немного, но всегда в одну сторону (оси в параллельных отвесных плоскостях).

2. Ось уровня д. б. параллельна нижней производящей линии цапф. Ставят уровень по направлению двух подъемных винтов и, приведя с помощью их пузырек уровня на середину, перекидывают трубу в лагерах. В случае смещения пузырька половину схода его уничтожают исправительным винтом уровня, а другую половину — действием подъемных винтов. Правильность изменения длины подвески уровня контролируют перекидыванием трубы обратно в первое положение и в случае надобности снова в той же последовательности действуют исправительным и подъемными винтами уровня. Проверку повторяют несколько раз.

3. Ось уровня д. б. перпендикулярна оси вращения инструмента. Приведя пузырек уровня на середину, поворачивают верхнюю часть нивелира около вертикальной оси на 180° . В случае смещения пузырька половину схода его уничтожают изменением высоты подставки с помощью исправительных винтов ее (черт. 26), а другую половину — действием подъемных винтов. Проверка повторяется несколько раз.

Если при нивелире имеются круглый уровень и элевационный винт, то проверку этой можно не производить, а взамен ее поверяется круглый уровень, ось к-рого устанавливается параллельно оси вращения нивелира (стр. 593). После общей установки прибора по круглому уровню пузырек цилиндрического уровня при каждом отсчете приводится строго на середину с помощью элевационного винта.

4. Нити сетки д. б. взаимно перпендикулярны и после установки инструмента по уровню та нить, по к-рой производятся отсчеты по рейке, должна стать горизонтально. Поверяется так же, как 2-е условие в нивелире Эго.

5. Визирная ось должна совпадать с геометрической или по крайней мере быть ей параллельна. Поверяется так же, как 3-е условие в нивелире Эго.

6. Цапфы д. б. цилиндричны и равного диаметра. Поверяется двойным нивелированием, как и для нивелира Эго.

Определение нивелиром с уровнем при трубе превышений между связующими точками.

При употреблении нивелира этого типа все отсчеты на станции производятся при однообразном положении трубы, т. е. последняя при производстве нивелирования в лагерах не перекидывается. Поэтому здесь надо быть более требовательным, чем при работе нивелиром Эго, к соблюдению пра-

вила нивелирования из середины, отступая от него лишь для отсчетов на промежуточных точках. Помимо влияния неравенства диаметров цапф здесь приходится считаться и с остаточным влиянием неполной выверки 1-го, 3-го и 5-го условий.

Сделав отсчеты на задней и передней рейках, меняют высоту инструмента, нажав слегка на упоры ног штатива, и, приведя инструмент в горизонтальное положение, снова делают отсчеты по рейкам.

Отсчеты на промежуточных точках берутся при втором горизонте инструмента.

Нивелир с перекладной трубой и съемным уровнем.

Нивелиры этого типа почти всегда имеют элевационный винт и круглый уровень. Проверка их производится сл. обр.

1. Ось уровня и геометрическая ось трубы должны лежать в совпадающих или параллельных отвесных плоскостях (отсутствие скрещивания осей). Приводят пузырек уровня на середину и слегка покачивают уровень на кольцах в одну и другую сторону. Если при этом обнаружатся колебания пузырька в разные стороны, то вызвавшее это явление скрещивание осей устраняется с помощью боковых исправительных винтов уровня.

2. Ось уровня д. б. параллельна верхней образующей цапф трубы. Ставят уровень по направлению двух подъемных винтов и, закрыв верхнюю часть нивелира, приводят пузырек на середину. После этого перекадывают уровень на трубе и в случае смещения пузырька половину схода его уничтожают исправительным винтом уровня, а другую — действием элевационного (а если его нет, то действием подъемных). Правильность выверки контролируют перекадыванием уровня обратно в первое положение и в случае надобности повторяют описанные действия.

3. Нити сетки д. б. взаимно перпендикулярны и после установки инструмента по уровню та нить сетки, по к-рой производится отсчеты по рейке, должна стать горизонтально. Проверяется так же, как 2-е условие в нивелире Это.

4. Визирная ось должна совпадать с геометрической (вернее, геометрическая ось трубы должна лежать в плоскости визирования или по крайней мере быть ей параллельна). Проверяется так же, как 3-е условие в нивелире Это.

5. Цапфы д. б. цилиндричны и равного диаметра. Приводят пузырек уровня на середину и, переложив трубу в лагерах, накладывают на нее в прежнем положении уровень. В случае схода пузыряка с середины или поручают механику подточить большее кольцо, или строго придерживаются нивелирования из середины, или определяют угол конусности трубы а в делениях уровня и нивелирование производят не при положении пузырька посредине, а при смещении его на а делений.

6. Ось уровня д. б. перпендикулярна основной оси инструмента. Условие это м. б. выполнено при всех положениях трубы и уровня только в случае равенства диаметров цапф трубы.

Проверка этого условия не производится, если при нивелире имеются круглый уровень и элевационный винт. В этом случае общая установка нивелира производится по выверенному круглому уровню, а для приведения пузырька съемного уровня на середину при отсчетах пользуются элевационным винтом.

Если элевационный винт отсутствует, то по приведении пузырька уровня на середину поворачивают верхнюю часть нивелира на 180° и половину схода пузырька уничтожают исправительным винтом подставки (черт. 28), а другую половину — действием подъемных винтов.

Определение нивелиром со съёмным уровнем превышений между связующими точками.

При работе этим нивелиром труба в лагерах на станции не перекладывается. Инструмент устанавливается, как правило, по середине, но при полной уверенности в равенстве диаметров цапф можно допускать и неравные расстояния.

После общего приведения инструмента в горизонтальное положение трубу наводят на заднюю рейку (кремальера внизу) и делают отсчёт, затем вращают трубу в гнездах на 180° (кремальера сверху), перекладывают уровень на цапфах и снова делают отсчёт. После этого наводят трубу на переднюю рейку и делают подобным же образом два отсчета по рейке (кремальера сверху и снизу). Взгляды на промежуточные точки берут обыкновенно при последнем положении трубы.

Глухой нивелир.

В нивелирах этой системы основные условия проверяются сл. обр.

1. Перпендикулярность оси уровня вертикальной оси вращения инструмента проверяется и регулируется так же, как и в нивелире Эго.

2. Одна нить сетки д. б. горизонтальна, а другая вертикальна. Проверяется так же, как и в нивелире Эго; исправляется поворачиванием от руки кольца сетки в трубе. Если труба может вращаться в подставках, то положение горизонтальной нити регулируется вращением трубы. В этом случае по установке нити первая проверка должна быть повторена.

3. Параллельность коллимационной плоскости, проходящей через горизонтальную нить оси уровня проверяется так же, как равенство диаметров цапф в нивелире Эго.

Если двойное нивелирование обнаружит непараллельность осей, визирной и уровня, то с помощью верхнего и нижнего исправительных винтов сетки наводят горизонтальную нить на отсчет по рейке, точно отвечающий высоте инструмента l и превышению h .

Если глухой нивелир имеет элевационный винт с индексом, то прежде проверок индекс устанавливается на нулевое деление шкалы и далее винтом не действуют.

Если индекса нет, то после проверки 3-го условия действием элевационного винта наводят горизонтальную нить на отсчет по рейке, соответствующий горизонтальному положению визирной оси, и оказавшийся сход пущырька уничтожают исправительными винтами уровня.

Определение превышений с помощью глухого нивелира.

Нивелирование производится исключительно из середины. Сделав взгляды на заднюю и переднюю рейки, изменяют высоту инструмента (надавливанием на ножки штатива или перестановкой его) и снова делают отсчеты по задней и передней рейкам.

Взгляды на промежуточные точки берутся при втором горизонте инструмента.

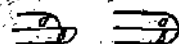
Нивелир Вилледа—Цейсса.

Труба плотно посажена во втулке, в к-рой может вращаться наподобие рота до упора. Ось этой втулки является геометрической осью вращения

трубы. В нормальном положении (рабочем) труба устанавливается неподвижно на особую защелку. Окуляр *O* (черт. 30) может находиться в двух положениях: или перед линзой *A* (нормальное рабочее положение), или перед линзой *B* (поверочное положение). Т. к. на линзах *A* и *B* нарезаны сетки, то каждому положению окуляра соответствует своя сетка (и свой объектив), т. е. труба двухосна. Исправительных винтов при сетке нет, как равно и упора с винтом при подставке для правильной установки горизонтальных нитей (средней и дальних). Сетка устанавливается точно при самом изготовлении прибора на фабрике.



Черт. 30.



Черт. 31.

Установка на ясную видимость сетки производится, как обычно, передвижением окулярной трубочки, а установка на ясную видимость рейки — передвижением линзы *C* с помощью кремальерки (внутренняя фокусировка). Сбоку зрительной трубы прикреплен цилиндрический оборотный уровень без делений, при чем положение пузырька уровня оценивается по его изображению в призме, помещенной над уровнем. В выверенном приборе линия визирования будет горизонтальна, когда изображения *a* и *b* (черт. 31) концов пузырька будут приведены элевационным винтом в совпадение.

Посредством зрительной трубы нивелира можно делать отсчеты по рейке при след. четырех положениях:

1) окуляр в рабочем положении, уровень на уровне;	
2) " " " "	направо;
3) " " в поверочном " " "	налево;
4) " " " "	направо.

При технических нивелировках для связующих точек берут среднее из отсчетов при 1-м и 2-м положениях, при второстепенных нивелировках удовлетворяются отсчетами при 1-м положении; 3-е и 4-е положения берутся только для проверки инструмента.

Проверка инструмента.

1. Ось круглого уровня д. б. параллельна вертикальной оси вращения инструмента. Вращением двух подъемных винтов в противоположные стороны устанавливают пузырек уровня на линию, перпендикулярную к линии избранной пары подъемных винтов. После этого действием третьего винта совмещают пузырек с кругом на крышке уровня. Половину схода пузырька после вращения инструмента на 180° уничтожают с помощью трех исправительных винтов, проходящих снизу с резьбой через подставку уровня, другую половину — с помощью подъемных винтов. Т. к. срединус измерения здесь приходится определять на-глаз, то проверка повторяется в случае надобности несколько раз.

После выверки круглого уровня рекомендуется поверить приблизительно установку и оборотного уровня. Для этого, установив прибор по круглому уровню, ставят элевационный винт и винт при коробке с призмами на средину их хода (по числу оборотов) и наблюдают через призму положение пузырька оборотного уровня. Если последний сильно отклоняется от средину, то действием вертикальных исправительных винтов уровня приводят изображения концов пузырька в совпадение (хотя бы и не вполне).

2. Ось оборотного уровня и геометрическая ось трубы должны лежать в параллельных вертикальных плоскостях. Сделав общую установку инстру-

мента по круглому уровню и повернув трубу так, чтобы она стала над одним из подъемных винтов, приводят элевационным винтом концы пузырька в совпадение и делают отсчет по рейке. Не трогая элевационного винта, вращением в противоположные стороны боковых подъемных винтов делают боковой наклон, но так, чтобы отсчет по кресту нитей от этого по рейке не изменился. Заметив положение концов пузырька в призме, снова действом элевационного винта приводят концы пузырьков в совпадение. Взяв отсчет по рейке, вновь наклоняют прибор с сохранением отсчета, но в обратную сторону, и опять замечают положение концов пузырька.

Если концы пузырька в обоих случаях будут расходиться в разные стороны (напр., один раз верхний вправо, другой раз верхний влево), то положение пузырьков исправляется действием бокового исправительного винта уровня.

3. При совпадении концов пузырька в призме коллимационная ось, соответствующая рабочему положению окуляра, д. б. горизонтальна. Выставляют в расстоянии 50 м от нивелира рейку и, сделав общую установку нивелира по круглому уровню, берут отсчеты по рейке N_1, N_2, N_3, N_4 , соответствующие четырем положениям зрительной трубы, приводя перед каждым отсчетом посредством элевационного винта концы пузырька в совпадение. Тогда среднее из отсчетов

$$N = \frac{N_1 + N_2 + N_3 + N_4}{4}$$

даст отсчет по рейке, свободный от инструментальных ошибок и соответствующий строго горизонтальной визуре.

Если при работе с нивелиром предполагается делать отсчеты при двух положениях трубы—1 и 2, то призмная коробка с помощью исправительного винта устанавливается так, чтобы при совмещенных концах пузырька среднее из отсчетов, соответствующих 1-му и 2-му положениям трубы, удовлетворяло равенству:

$$\frac{N'_1 + N'_2}{2} = N.$$

Если же в работе будут применяться лишь отсчеты при 1-м положении трубы, то призмная коробка ставится так, чтобы отсчет по рейке

$$N'_1 = N.$$

Для этого находящуюся в 1-м положении трубу с помощью элевационного винта устанавливают на отсчет N , после чего перестановкой коробки с призмами приводят концы пузырьков в совпадение.

§ 26. Формулы допустимых невязок в нивелирных ходах.

Для технических нивелировок средней точности допустимая разность между отметками одной и той же точки, вычисленными по ходам основному и контрольному, не должна превышать величины:

$$\Delta = \pm 0,002 \sqrt{2n},$$

где n —число станций нивелира по обоим ходам.

Этой ф-ле должна удовлетворять также и допустимая невязка для суммы превышений в замкнутых полигонах, пройденных одиночным ходом, а также и разность в отметках репера, данной и вычисленной по ходу.

Чтобы учесть влияние систематических ошибок, заметно отражающихся

на длинных ходах (свыше 5 км), невязку в последних предпочитают определять по ф-ле:

$$\Delta = \pm (0,006 \sqrt{K} + 0,0006K),$$

где K —длина двойного хода или замкнутого полигона в км.

Для поперечной нивелировки и нивелировки стоянок тахеометра или мензулы допускается невязка, определяемая ф-ам:

$$\Delta = \pm 0,003 \sqrt{2n}$$

или:

$$\Delta = \pm (0,01 \sqrt{K} + 0,001K).$$

При особо неблагоприятных условиях нивелирования (овраги, болота, косогоры, при слабом освещении рек и т. п.) невязка для замкнутых полигонов или двойных нивелирных ходов не должна превышать величины:

$$\Delta = \pm 0,004 \sqrt{2n}.$$

При техническом нивелировании повышенной точности невязка подсчитывается по ф-ле:

$$\Delta = \pm 0,001 \sqrt{2n}$$

или:

$$\Delta = \pm (0,003 \sqrt{K} + 0,0003K).$$

При прецизионном нивелировании разногласие прямого и обратного ходов между марками не должно превышать:

$$\Delta = \pm 0,003 \sqrt{K},$$

где K —число км между марками (обыкновенно 6 км).

По инструкций Высшего геод. управления ВСНХ 1925 г. средние ошибки нивелирования не должны превышать на 1 км: случайная—1 мм, а систематическая—0,3 мм.

§ 27. Журнал нивелирования.

Все записи при нивелировке, а также все подсчеты отметок ведутся в особом журнале след. формы (утвержд. Г. К. ВСНХ, ф. 106) (см. стр. 596—597).

В гр. 3 и 4 занесены отсчеты по рейке (при двух положениях трубы нивелира Эго).

В гр. 5—взгляды на промежуточные и боковые точки, взятые при втором положении трубы.

В гр. 6 и 7—среднее из взглядов на заднюю и переднюю рейки.

В гр. 8 и 9—превышения h между связующими точками (пикетами). Иногда эти две графы объединяют в одну, заменяя для удобства вычислений отрицательные разности высот их дополнениями до 10 (знак X), т. е. вычисляя: $h = \text{задн. отсч.} + 10 - \text{перед.}$ и $H_n = H_{n-1} + h - 10$.

Проконтролировав произведенные вычисления постраничными подсчетами по гр. 6 и 7, 8 и 9, разности k -рых (—2,940) д. б. равны, по данной начальной отметке (реп. № 23) вычисляют отметки пикетов (гр. 12) и, убедившись в правильности вычислений (путем сравнения) постраничных разностей отметок с разностями гр. 6 и 7, 8 и 9, производят исправление отметок, распределяя невязку (в целых мм) пропорционально числу станций.

Так, напр., распределение невязки $\Delta = -0,06$ м на ход в 15 станций (0,4 мм на 1 ст.) производится так: отметк. с 1 по 3 с. увеличиваются на 1 мм, с 4 по 5—на 2 мм, с 6 по 8—на 3 мм, ... с 14—на 6 мм.

Исправленные отметки заносятся: условные в гр. 13, абсолютные в гр. 11.

№№ стан-ций	№№ пикетов	Отсчеты по рейке					Превышения	
		читанные			средние		+	—
		задний	перед-ний	проме-жут.	задний	передний		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Реп. № 23 № 0	0,853 0,853	1,368 1,366		0,853	1,367	× 9,486	0,514
2	№ 0 +45 +78 № 1	0,956 0,955	1,798 1,799	0,855 1,568	0,955,5	1,798,5	× 9,187	0,813
3	№ 1 +48 +64	0,683 0,680	3,894 3,893	1,436	0,681,5	3,893,5	× 6,788	3,212
4	+64 +96 № 2	1,280 1,282	0,914 0,915	2,613	1,281	0,914,5	0,366,5	
5	№ 2 № 3	2,086 2,088	1,041 1,045		2,087	1,043	1,044	
6	№ 3 пр. +52 +4 +20 л. +6 +18 № 4	1,607 1,608	1,418 1,420	1,592 2,037 3,181 1,201 0,983	1,607,5	1,419	0,189,5	
					7,495,5	10,435,5	1,599	4,539
					— 2,940		— 2,940	

нирование.

Горизонт инструмента	Абсолютная отметка м	Условная отметка м	Исправл. условная отметка м	Примечание
10	11	12	13	14
	164,218 163,705	+1 163,704		Отметка репера взята из ведом. реперов Геодез. ком. + 163,705 0,985 164,690,5
164,690	163,835 163,122 162,892	+1 162,891		Дорога + 162,892 0,681,5 163,573,5
163,574	162,138 159,680	+1 159,679		+ 159,680 1,281 160,961
160,961	158,348 160,048	+2 160,045,5		Дно канала
	161,092	+3 161,089,5		+ 161,092 1,807,5 162,899,5
162,700	161,108 160,663 159,519 161,499 161,717 161,281	+3 161,278		Попер. проф. на пик. № 3-52 - 164,218 161,278 - 2,940

Отметки промежуточных и боковых точек вычисляются по исправленным отметкам по горизонту инструмента (гр. 10), по ф-ле: $H_{гор.} = H_{задн.} + \text{задн. отсч.}$; $H_{пр.} = H_{гор.} - \text{пром. отсч.}$ и заносятся в гр. 11 (или 13).

Обскабливания 0,5 мм рекомендуется производить в гр. 10, 11 и 13 путем однообразного округления отметок (напр., всегда до четных мм).

В гр. 14 (примечание) заносятся описания особо характерных точек (напр., № 1 + 96 дно канавы, на № 3 + 52 взят поперечный профиль и т. д.). Здесь же производятся также и необходимые подсчеты.

Тахеометрия.

§ 28. Поверка простого тахеометра.

Сначала производят те же проверки, что и для повторительного теодолита, после чего следуют:

1. **Определение $M.O.$** Наводят крест нитей на удаленную ясно видимую точку и, приведя микрометренным винтом при алидаде пузырек уровня на средину, делают отсчет по вертикальному кругу (напр., $K. Л. 351^{\circ}24'$). Переводят трубу через зенит, наводят трубу на ту же точку и снова при положении пузырька уровня на средине делают отсчет по вертикальному кругу (напр., $K. П. \dots 10^{\circ}14'$):

$$M.O. = \frac{K. П. + K. Л. + 360}{2} = 360^{\circ}49'.$$

Для удобства вычислений в практике обыкновенно предпочитают иметь дело с $M.O.$ близким к нулю (в пределах до 5'). Для этого наводят снова, напр., при $K. П.$, крест нитей на ту же точку и, действуя микрометренным винтом при алидаде, устанавливают верньер на отсчет, равный углу наклона:

$$\alpha = K. П. - M.O. = 9^{\circ}25'.$$

Отпустив затем закрепительные винты уровня при алидаде, ставят пузырек уровня на средину и сделанную установку уровня прочно закрепляют исправительными винтами. Для контроля повторяют определение $M.O.$ и в случае надобности снова выставляют положение пузырька уровня.

2. **Определение коэффициентов K и C** дальномера с постоянными нитями.

Сначала определяют $C = f + \delta$. Для этого трубу с окуляром Рамсдена наводят на весьма удаленный предмет и, получив отчетливое изображение его, измеряют рулеткой по верху трубы f , равное расстоянию от сетки нитей до объектива.

Если труба с окуляром Гюйгенса, то, вывернув сетчатое колесо из трубы, наводят ее на солнце и, увидев на экране яркое изображение солнца, измеряют расстояние этого изображения от объектива, которое и определит f . δ определяется измерением расстояния объектива от горизонтальной оси вращения трубы.

Приблизительно C равно полуторной длине трубы. В практике C принимают во внимание лишь при съемках в крупном масштабе (до $1/2500$). Для трубы Порро $C = 0$.

Для определения K на ровной и горизонтальной местности (напр., на шоссе) отмеряют от центра инструмента расстояния $d = 50 + C, 100 + C, 200 + C$ м, отмечают эти точки колышками и, установив на них вертикальную дальномерную рейку с делениями, делают отсчеты i по ней. Тогда:

$$K = \frac{d - C}{i}.$$

Если K получилось неравным 100, то при необходимости пользоваться такой рейкой следует составить таблицу перевода отсчетов l по рейке при $K \neq 100$ на отсчеты l по рейке при $K = 100$.

В практике при $K \neq 100$ предпочитают изготавливать новую рейку (см. «Дальномерные рейки»).

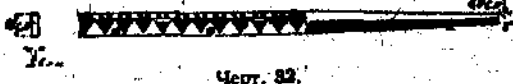
3. Ось цилиндрического уровня на трубе тахеометра д. б. параллельна осевой оси трубы. Поверяется двойным нивелированием, как и равенство диаметров цапф в нивелире Эго (5-я поверка).

Если двойное нивелирование обнаружит непараллельность осей, то с помощью микрометричного винта трубы наводят горизонтальную нить на отсчет по рейке, соответствующий горизонтальному положению оси трубы, и с помощью исправительных винтов уровня подводят пузырек его точно на середину.

§ 29. Дальномерные рейки.

Изготавливаются из деревянных брусков длиной 4—4,1 м и сечением 10 × 3,5 см. Для уменьшения сопротивления ветру верхний метр срезается с боков так, чтобы наверху осталась ширина всего в 4 см. Брусok загрунтовывают масляными белилами и дают ему хорошо просохнуть. Если красок нет, то на брусok наклеивается полоса ватманской бумаги, на которой затем и наносится деления.

Изготовление рейки. Отмеряют на ровной горизонтальной местности от центра тахеометра 100 + С, 200 + С и 300 + С м и, забив в эти точки колышки, посылают в них с рейкой помощника. Приведя инструмент в горизонтальное положение, наводят крайний волосок на верх рейки и указывают помощнику место проекции другой нити сетки. Нанеся подобным образом три метки, приступают к нанесению более мелких делений, делая их или в виде прямоугольных пашек, или в виде равнобедренных треугольников, или в виде сочетания того и другого.



Черт. 32.

Практика тахеометрических съемок выработала различные типы реек, наиболее же рациональной следует признать рейку, представленную на черт. 32 (два верхних отрезка). Первый отрезок рейки, соответствующий 100 м, не разбивается, а делится вдоль пополам и одна половина окрашивается в черный или красный цвет. Второй и третий отрезки делятся на десять частей и каждое деление заполняется равнобедренным треугольником, у основания которого оставляется полоса шириною в 2 см. Эта полоса разбивается на пять частей, при чем 2-е и 4-е деления против каждого треугольника закрашиваются также краской. Основания треугольников располагаются уступами в 0,5 см и для удобства счета между вторым и третьим отрезками чертится справа квадратик, а середины отрезков отмечаются кружками. Четвертый отрезок делается длиной ровно в 1 м, при чем он или совсем не окрашивается, или окрашивается полуметрами.

Преимуществом этого типа рейки является то, что с помощью ее можно точно определять как короткие, так и длинные расстояния. Последнее обеспечивается хорошей видимостью треугольников и легкостью отсчитывания на-глаз метров (путем оценки отношения отрезков сторон треугольника).

Если основания первых сверху и снизу треугольников сделать короче на 0,01 С, то отсчеты по рейке будут давать непосредственно $Kl + С$.

По изготовлении рейки следует определить по ней коэф-т дальномера. Для этого надо измерить длину разделенной части рейки и разделить ее на

число делений. Полученный коэффициент должен соответствовать K , определенному при поверке инструмента.

Из др. типов реек заслуживает внимания выдвижная рейка, состоящая из двух частей: одной — длиной в 3 м и другой — около 2 м, соединенных между собой при помощи скоб с зажимом, как в нивелирных рейках. Деления наносятся на длинной рейке, отступя снизу около 0,5 м (полезная длина рейки около 2,5 м, т. е. для $KI = 250$ м), и нумеруются по порядку снизу. Малая рейка остается чистой: ее назначение — ставить нуль рейки на высоте инструмента.

При употреблении этой рейки наводят верхнюю нить на нуль рейки и делают одновременно отсчет по рейке и по вертикальному кругу.

Превышения определяют по формуле:

$$h = \frac{h}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot \frac{1}{2}.$$

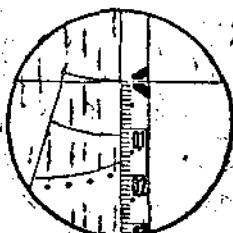
Чтобы придать рейкам портативность, их изготовляют в виде отдельных планок из алюминия. При полевой работе эти планки привинчиваются рядом к бруску или жерди длиной в 4 м и толщиной около 3 см.

§ 30. Тахеометр-автомат Гаммера-Феннеля.

Среди автоматов различной конструкции, при изысканиях в СССР получил почти исключительное распространение автомат Гаммера-Феннеля.



Черт. 33.



Черт. 34.

В этом приборе отсчет расстояний и превышений происходит по кривым в плоскости изображения объектива трубы.

Кривые эти соответствуют уравнениям:

$$h = \frac{1}{w} l \cdot \cos^2 \alpha;$$

$$d = \frac{1}{w} \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin 2\alpha,$$

где l — отсчет по рейке, w — постоянный вертикальный (микрометрический) угол, считаемый в аналитической мере.

Третья кривая gg , т. наз. основная, представляет собою дугу окружности с центром на оси вращения трубы.

Поверка автомата Гаммера.

Помимо проверок тахеометра, как повзорительного теодолита с обратным уровнем на трубе, необходимо также сделать поверку диаграммы автомата.

Диаграмма считается установленной правильно, если:

- 1) изображение диаграммы, даваемое линзой, получается в плоскости задней грани окулярной призмы;
- 2) плоскость диаграммы перпендикулярна к оси вращения трубы;
- 3) плоскость отражательной грани трехгранной призмы расположена под углом в 45° к геометрической оси трубы;
- 4) центр основной дуги диаграммы лежит на оси вращения трубы;
- 5) средний радиус диаграммы параллелен оси вращения инструмента;
- 6) изображение центра основной дуги диаграммы, даваемое линзой, лежит на продолжении ребра окулярной призмы;
- 7) постоянные дальномеры равны 100 для отсчетов по кривой расстояний и 20 для отсчетов по кривой превышений.

Для проверки первого условия сначала устанавливают на глаз окуляр так, чтобы нити сетки и ребро окулярной призмы были видны ясно и отчетливо. Если при этом окажется, что диаграмма видна плохо, то отпускают винты окулярного колена и стараются передвижением последнего достигнуть ясного изображения диаграммы. Если это не удастся, то устанавливают на ясность часть диаграммы около ребра окулярной призмы, после чего приступают к проверке второго условия. Для этого вращают трубу вокруг оси и следят за изображением диаграммы около ребра призмы. Если диаграмма в этом месте остается хорошо видимой, то для достижения ясности диаграммы на всем поле зрения трубы исправляют осторожно с помощью винтов, помещенных сверху трубы, положение трехгранной призмы (третье условие). Если второе условие не выполняется, то исправление м.д. произведено только опытным механиком.

По установке диаграммы на ясность производится проверка коллимационной плоскости трубы, при чем исправление положения визирной оси достигается передвижением объектива с помощью боковых винтов. При проверке надо иметь также в виду, что труба не переводится через зенит, а перекладывается в лагерах.

Одновременно с этим производится проверка и установка ребра окулярной призмы, играющего роль вертикальной нити. Ее неперпендикулярность к оси вращения трубы уничтожается специальными винтами.

Если, смотря в трубу, увидим, что основная дуга диаграммы не касается нити сетки, то для проверки четвертого условия сначала передвигают линзу с помощью винтов ее, пока дуга не коснется нити, после чего вращают трубу около ее оси. Если дуга будет отходить от нити, то устанавливают на миллиминатор диаграммы накладной уровень и, действуя микрометрическим винтом оправы диаграммы, приводят плоскость миллиминатора в горизонтальное положение (пятое условие). Вращая после этого трубу, наблюдают перемещение основной дуги относительно нити сетки. Если изображение основной дуги при поднятии и опускании объектива будет перемещаться симметрично, то это покажет, что центр дуги находится в отвесной плоскости, проходящей через ось вращения трубы. В этом случае окончательная центровка диаграммы достигается с помощью вертикального исправительного винта диаграммы. Если дуга при вращении трубы перемещается несимметрично, то сначала с помощью боковых винтов диаграммы добиваются симметричного перемещения дуги и уже после этого действуют вертикальным винтом. Во время этой проверки нужно иногда подправлять также и положение линзы с помощью винтов ее. Точная центровка диаграммы обыкновенно достигается не сразу, а путем последовательных приближений.

Если накладного уровня нет, то установку среднего радиуса, отмеченного на диаграмме двумя кружками, производят одновременно с проверкой шестого условия. Для этого с помощью предварительно выверенного уровня

на трубе устанавливают последнюю горизонтально и, действуя микрометрическим винтом оправы диаграммы, пробуют совместить изображение среднего радиуса с ребром окулярной призмы. Если это удалось, то пятое и шестое условия выполнены, если нет, то устанавливают изображение радиуса параллельно ребру призмы, после чего, действуя боковым, исправительным, винтом линзы, перемещают ее внутрь к геометрической оси трубы до тех пор, пока не достигнут желаемого совмещения. Если не удастся поставить средний радиус и в параллельное ребру призмы положение, то это значит, что центр дуги находится вправо от ребра призмы, и поэтому нужно действовать боковым винтом линзы, приближая ее к оправе трубы.

Добившись совмещения радиуса с ребром призмы, вращают трубу около оси. При правильной установке изображения крайних радиусов также должны при некотором наклоне трубы совмещаться с ребром окулярной призмы.

Для установки коэф-та дальномера на 100 отмеряют на горизонтальной местности от центра инструмента 100 м и, выставив в этой точке рейку, делают отсчет расстояния по диаграмме. Если отсчет даст менее ста делений, то, отпустив четыре закрепительные винта линзы, отодвигают последнюю от окуляра; при отсчете большем ста длину придвигают.

§ 31. Обработка тахеометрического журнала.

Высота рейки $v = 4$ м; II станция; $i_1 = 1,37$ м; $H_2 = 243,82$.

Назв точек	Отсчеты:			М.О.	уг. накл.		гориз. расст.	пре- выш.	Альтитуды		Отсчет по гориз. кр.	
	по рейке	по верт. кр.			о	и			стан- ция	пикет- тов	град.	мм.
		о	и									
I ст.	177	К. 2	Л. 06	0'1'								
I ст.	177	К. 357	Л. 58		-2	8	177	-6,43			337	18
1	54,5	359	36		-0	25	54,5	-0,39			276	4
2	132	351	18		-8	43	129	-19,78	243,4		307	33
3	77	0	27		+0	26	77	+0,58	224,0		22	20
4*	148	1	14		+1	13	148	+3,14	244,4		69	16
III ст.	190	3	7	0'1'	+3	6	189,4	+10,26	247,0		84	13
III ст.		К. 366	Л. 55									

*Верх рейки.

*Верх рейки.

1. Определяется М. О. для каждой станции и вычисляются углы наклона для станций и пикетов:

$$М.О. = \frac{К.П. + К.Л. + 360}{2}; \alpha = К.П. - М.О. = М.О. - К.Л.$$

2. Вычисляются превышения для станций и пикетов с точностью до 0,01 м.

3. Если отметки начальной и конечной станций известны или если ход замкнутый, то сначала увязываются превышения для станций пропорционально расстояниям между ними и вычисляются их альтитуды с точностью до 0,01 м.

Допустимая невязка между прямым и обратным наблюдениями на станции для одномоментного вертикального круга принимается равной 0,06 м на 100 м ($2 \cdot 100 \cdot \text{tg } 1' = 0,06$), а для суммы средних превышений:

$$\pm 0,06 \sqrt{K^2 + 35K},$$

где K —длина хода в км, при чем K не д. б. больше 12 км.

Результаты вычислений записываются в журнал альтитуд.

Журнал альтитуд.

№№ стан-ций	Рас-стоя-ния	Превышения			По-правки	Исправ-лен. превыщ.	Альти-туды	Примечание
		прям.	обратн.	средн.				
I	177	+6,49	-6,43	+6,46	-0,05	+6,41	237,41	Отметки I и V ст. взяты из журнала нивелирования.
II	190	+10,25	-10,34	+10,30	-0,06	+10,24	243,82	
III	231	-4,91	+4,80	-4,85	-0,07	-4,92	254,06	
IV	203	-9,43	+9,51	-9,47	-0,06	-9,53	249,14	
V							239,61	
$P = 0,8 \text{ км}$					+2,44	+2,20		
должно быть:					+2,20			
невязка					+0,24			
Допуст. невязка $\pm 0,06 \sqrt{K^2 + 35K} = \pm 0,32$.								

4. По увязанным отметкам станций вычисляются альтитуды пикетов (обыкновенно с точностью до 0,1 м).

§ 32. Тахеометрические формулы.

1. Для определения горизонтальных расстояний (черт. 35):

$d = kl \cdot \cos^2 \alpha + c \cdot \cos \alpha$ —для труб Рамсдена и Гюйгенса;

$d = kl \cdot \cos^2 \alpha$ —для труб Порро.

В практике первую ф-лу приводят к виду:

$$d = (kl + c) \cdot \cos^2 \alpha = n \cdot \cos^2 \alpha = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \cdot \cos 2\alpha$$

путем преобразования ее в выражение:

$$d = (kl + c) \cdot \cos^2 \alpha + (c \cdot \cos \alpha - c \cdot \cos^2 \alpha)$$

и отбрасывания за его незначительностью второго члена:

$$c \cdot \cos^2 \alpha - c \cdot \cos^2 \alpha = 2c \cdot \cos \alpha \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Вычисляют также и по ф-ле:

$$d = kl \cdot \cos^2 \alpha + c,$$

получаемой из $n = kl \cdot \cos^2 \alpha + c - (c - c \cdot \cos \alpha)$ путем отбрасывания $c - c \cdot \cos \alpha = 2c \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}$.

Иногда предпочитают вычислять d по ф-ле:

$$d = (kl + c) - \Delta d,$$

где Δd — поправка за наклон, вычисляемая обыкновенно по упрощенной ф-ле:

$$\Delta d = (kl + c) - (kl + c) \cdot \cos^2 \alpha = (kl + c) \cdot \sin^2 \alpha.$$

Сокращенные ф-лы дают несколько меньшие значения для d . Для суждения об ошибках, вызываемых применением их, приводится табличка значений отбрасываемого члена для различных α и $c = 0,5$ м.

Табл. 16. Значения отбрасываемого члена в сокращенных формулах.

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin^2 \frac{\alpha}{2}$	$2c \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}$	$2c \cdot \cos \alpha \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}$	$2c \cdot \sin \alpha \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}$
10°	0,174	0,985	0,008	0,008 м	0,008 м	0,001 м
20°	0,342	0,940	0,030	0,030 »	0,028 »	0,010 »
30°	0,500	0,866	0,067	0,067 »	0,058 »	0,033 »
45°	0,707	0,707	0,147	0,147 »	0,104 »	0,104 »
60°	0,866	0,500	0,250	0,250 »	0,125 »	0,217 »

Из этой таблички видно, что даже при сравнительно крупном масштабе ($1/5000$) и очень больших α (до 60°) практически достаточно пользоваться сокращенными ф-лами.

2. Для определения превышений:

$$h = d \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} kl \cdot \sin 2\alpha + c \cdot \sin \alpha \text{ — для трубы}$$

Рамсдена и Гюйгенса;

$$h = d \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} kl \cdot \sin 2\alpha \text{ — для трубы Пурро,}$$

где $h = CN$ — превышение проекции N визирного луча на рейке над горизонтальной осью вращения трубы тахеометра.

В практике первую ф-лу приводят к виду:

$$h = \frac{1}{2} (kl + c) \cdot \sin 2\alpha = \frac{\pi}{2} \sin 2\alpha$$

путем преобразования ее в выражение:

$$h = \frac{1}{2} (kl + c) \cdot \sin 2\alpha + (c \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} c \cdot \sin 2\alpha)$$

и отбрасывания за малостью его второго члена:

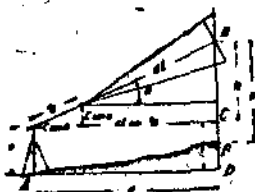
$$c \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} c \cdot \sin 2\alpha = 2c \cdot \sin \alpha \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

В последней графе таблицы приведены значения отбрасываемого члена, из к-рых видно, что, пренебрегая ошибкой в высоте в 0,01 м, можно при α до 20° применять для определения h сокращенную ф-лу.

3. Для определения отметок:

$$H_B = H_A + h + i - V,$$

где: $i = CD$ — высоте инструмента; $V = BN$ — расстояние от поверхности земли до проекции N визирного луча на рейке.



Черт. 65.

и беря φ для различных значений α через 1° . Концы координат Y сближают с началом координат A и подписывают лучи градусными значениями α .

Табл. 17.

α	φ	$\operatorname{tg} \varphi$	α	φ	$\operatorname{tg} \varphi$	α	φ	$\operatorname{tg} \varphi$
0	0°0'	0,0000	16	22°29'	0,4138	31	42°43'	0,9232
1	1°25'	0,0247	17	23°52'	0,4423	32	44°1'	0,9682
2	2°50'	0,0494	18	25°15'	0,4715	33	45°18'	1,0106
3	4°15'	0,0742	19	26°37'	0,5012	34	46°35'	1,0568
4	5°39'	0,0990	20	27°59'	0,5315	35	47°51'	1,1050
5	7°4'	0,1240	21	29°21'	0,5626	36	49°7'	1,1551
6	8°29'	0,1491	22	30°43'	0,5942	37	50°22'	1,2075
7	9°53'	0,1743	23	32°5'	0,6268	38	51°37'	1,2623
8	11°18'	0,1997	24	33°28'	0,6601	39	52°51'	1,3197
9	12°42'	0,2254	25	34°47'	0,6944	40	54°4'	1,3799
10	14°6'	0,2513	26	36°7'	0,7297	41	55°17'	1,4430
11	15°30'	0,2773	27	37°27'	0,7659	42	56°29'	1,5095
12	16°55'	0,3040	28	38°47'	0,8034	43	57°40'	1,5796
13	18°18'	0,3308	29	40°6'	0,8240	44	58°50'	1,6537
14	19°42'	0,3581	30	41°25'	0,8819	45	60°0'	1,7321
15	21°5'	0,3857						

Чтобы определить с помощью этой диаграммы горизонтальное проложение d , нужно взять n в крупном масштабе и отложить его от начала координат на луче, соответствующем углу наклона α . Тогда проекция CD луча AC на горизонтальную прямую, определенная по тому же масштабу, что и n , даст искомое d . Необходимые данные приводятся в табл. 17.

2. Масштаб высот:

$$h = d \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

В табл. 18 приведены значения y и x для нахождения точек пересечения наклонных лучей α с вертикальной прямой длиной 12 см и горизонтальной шкалой длиной 18 см для масштабов: h в 1 см—1 м и d в 1 см—20 м.

Табл. 18.

Масштаб высот, приводимый ниже, построен по данным этой таблицы для $h = 10$ м и $d = 300$ м (черт. 37).

Превышение h с помощью масштаба высот находится по данным d и α , как длина перпендикуляра, взятого по шкале h . Масштаб высот находят применение при небольших α и d .

3. Номограмма к ур-ню:

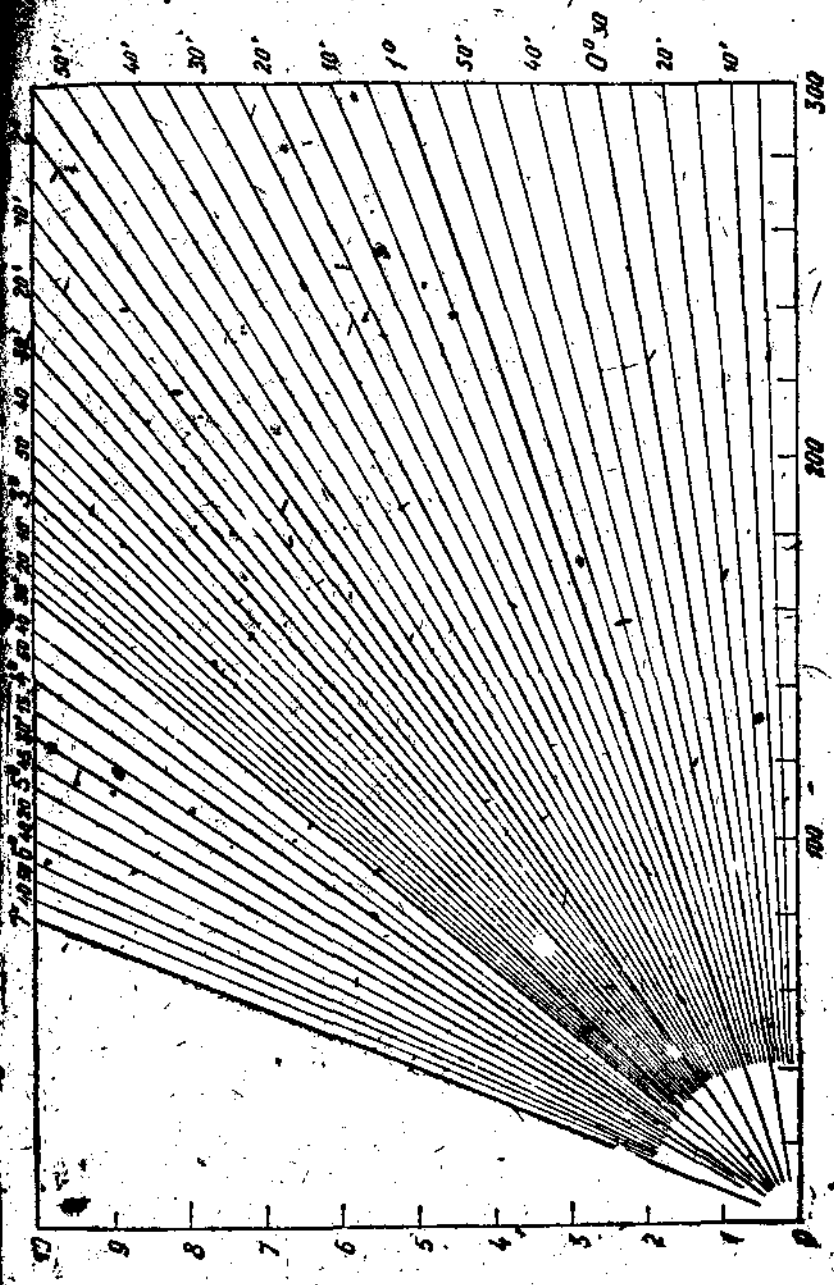
$$h = \frac{n}{2} \cdot \sin 2\alpha$$

строится по методу выраженных точек.

В. С помощью логарифмических линеек. В СССР получила распространение линейка Вильда, построенная для уравнений:

$$d = n \cdot \cos^2 \alpha \quad \text{и} \quad h = \frac{n}{2} \cdot \sin 2\alpha$$

α	y в мм	α	x в мм	α	x в мм
0°5'	6,23	1°55'	179,29	4°0'	65,81
0°10'	10,48	2°0'	171,82	4°15'	80,74
0°15'	15,71	2°5'	164,04	4°30'	78,24
0°20'	20,94	2°10'	158,59	4°45'	72,21
0°25'	26,18	2°15'	152,71	5°0'	68,68
0°30'	31,42	2°20'	147,25	5°20'	64,27
0°35'	36,65	2°25'	142,17	5°40'	60,47
0°40'	41,89	2°30'	137,42	6°0'	57,08
0°45'	47,12	2°35'	132,98	6°20'	54,05
0°50'	52,37	2°40'	128,82	6°40'	51,33
0°55'	57,60	2°45'	124,91	7°0'	48,88
1°0'	62,84	2°50'	121,24		
1°5'	68,08	2°55'	117,76		
1°10'	73,31	3°0'	114,49		
1°15'	78,55	3°5'	111,38		
1°20'	83,79	3°10'	108,45		
1°25'	89,03	3°15'	106,87		
1°30'	94,27	3°20'	103,01		
1°35'	99,50	3°25'	100,50		
1°40'	104,75	3°30'	98,10		
1°45'	109,99	3°40'	93,63		
1°50'	115,24	3°50'	89,54		



С. С помощью таблиц.

1. По таблицам Гаусса приращений прямоугольных координат:

$$d = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \cdot \cos 2\alpha; h = \frac{n}{2} \cdot \sin 2\alpha.$$

Пример. $n = 132$; $\alpha = -8^\circ 43'$;

$$d = 66 + 66 \cdot \cos 17^\circ 26' = 129,0;$$

$$h = -66 \cdot \sin 17^\circ 23' = -19,78.$$

2. По таблицам Иордана («Hilfstafeln für Tachymetrie»). Эти таблицы являются наиболее полными из всех существующих. В них каждому значению n от 10 до 250 отведена отдельная страница, на к-рой указаны значения: $d = n \cdot \cos^2 \alpha$ и $h = \frac{n}{2} \cdot \sin 2\alpha$.

По этому типу изданы «Таблицы разностей высот» Тугулова (Тифлис, 1929 г.).

3. По таблицам Дробышева, изд. ГГУ. Это издание включает в себя ряд таблиц: высот, поправок высот за рефракцию, поправок за наклон и т. д. Таблицы для высот составлены по ф-ле: $h = d \cdot \operatorname{tg} \alpha$ для α от 0° до 26° через $1'$.

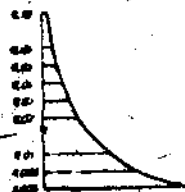
4. По таблицам Савицкого. Эти таблицы очень портативны, но рассчитаны на равнинную местность с уклоном, не превышающим 6° . Превышения вычислены по ф-ле: $h = ad \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

§ 34. Определение уклонов и углов наклона прямых линий, концы которых лежат на горизонталях.

Задача эта решается с помощью диаграмм заложений или крутостей ($d = h \cdot \operatorname{ctg} \alpha$) и уклонов ($i = \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{d}$).

Табл. 19. Уклоны.

Уклоны i	d в метрах					Уклоны i	d в метрах				
	$h=0,5$	$h=1,0$	$h=2,0$	$h=2,5$	$h=5$		$h=0,5$	$h=1,0$	$h=2,0$	$h=2,5$	$h=5$
0,008	100	200	400	500	1 000	0,04	12,5	25	50	62,5	125
0,008	62,5	125	250	312,5	625	0,05	10	20	40	50	100
0,01	50	100	200	250	500	0,06	8,3	16,7	33,3	41,7	83,3
0,02	25	50	100	125	250	0,10	5	10	20	25	50
0,03	16,7	33,3	66,7	83,3	166,7						



Черт. 38.

а) **Диаграмма уклонов.** Построив произвольную шкалу на вертикальной линии (черт. 38), присоединят из точек ее, подписанных уклонами i , горизонтальные линии, на к-рых откладывают в масштабе плана взятые из таблицы заложения d для данного h (расстояния по высоте между горизонталями). Соединив концы перпендикуляров плавной кривой, получают масштаб (диаграмму) уклонов.

б) **Диаграмма крутостей** строится так же, как и диаграмма уклонов (черт. 39), но вертикальная шкала

подписывается α в градусах и минутах, а на перпендикулярах откладываются взятые из таблицы d для соответствующих α и h .

Табл. 20. Заложения.

α	d в метрах					$i = \operatorname{tg} \alpha$
	$h = 0,5$	$h = 1,0$	$h = 2,0$	$h = 2,5$	$h = 5,0$	
0°30'	57,29	114,59	229,18	286,47	572,94	0,009
1°0'	28,64	57,29	114,58	143,22	286,45	0,017
1°30'	19,10	38,19	76,38	95,49	190,95	0,026
2°0'	14,32	28,64	57,27	71,59	143,18	0,036
2°30'	11,45	22,90	45,81	57,26	114,52	0,044
3°0'	9,54	19,08	38,16	47,70	95,40	0,052
3°30'	8,18	16,35	32,70	40,88	81,75	0,061
4°0'	7,15	14,30	28,60	35,75	71,50	0,070
4°30'	6,35	12,71	25,41	31,76	63,53	0,079
5°0'	5,72	11,43	22,86	28,58	57,15	0,087
5°30'	5,19	10,38	20,77	25,26	51,92	0,096
6°0'	4,76	9,51	19,03	23,79	47,57	0,105
7°0'	4,07	8,14	16,29	20,36	40,72	0,123
8°0'	3,56	7,12	14,23	17,79	35,58	0,141
9°0'	3,16	6,31	12,63	15,79	31,57	0,158
10°0'	2,84	5,67	11,34	14,18	28,38	0,176
11°0'	2,57	5,14	10,29	12,86	25,72	0,194
12°0'	2,35	4,70	9,41	11,76	23,52	0,213

Чтобы определить уклон или угол наклона отрезка прямой, заключенного между двумя смежными горизонталями, берут с плана в раствор циркуля этот отрезок и переносят его на диаграмму так, чтобы при горизонтальном положении раствора циркуля одна ножка его находилась на вертикальной линии, а другая на кривой, после чего величину i или i' определяют по шкале интерполированием на-глаз.

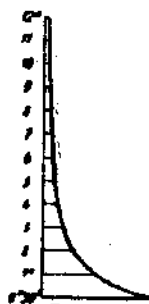
Мензульная съемка.

Применяется гл. обр. при речных и портовых изысканиях, где служит основным способом съемки. При дорожных изысканиях применяется редко: при переходах больших рек и водоразделов.

В отличие от государственных топографических съемок, масштаб съемки при изысканиях берется крупный, — 1:10 000 — 1:2 000. Основным же масштабом для государственных съемок является 1:50 000 для наиболее населенной европейской части СССР (примерно до 60° сев. широты), 1:100 000 — для большей части Сибири и Туркестана и лишь для районов, имеющих особо важное промышленно-хозяйственное значение, допускается 1:25 000.

Основой для съемки при изысканиях служат:

- 1) тригонометрическая сеть V класса со сторонами треугольников 1—3 км или сеть полигонных ходов в местах, неблагоприятных для развития сети V кл.;
- 2) геометрическая сеть;
- 3) пункты хода, пройденного теодолитом с нивелиром;
- 4) замкнутый свободный мензульный ход.



Черт. 39.

При исследовании рек, как путей сообщения, и при портовых изысканиях, как общее правило, применяется первый способ.

Мензульная съемка, основанная только на геометрической сети, производится в масштабе не мельче 1 : 50 000, когда снимаемый район помещается на одном планшете и нет необходимости в привязке к тригонометрической сети.

Третий способ применяется при небольших съемках для заполнения ситуаций и рельефом полигона, граница к-рого пройдена теодолитом с нивелиром. Он применяется также и при переходах рек, при дорожных изысканиях, когда опорными точками для мензульной съемки служат пункты магистрального хода, проложенного по берегу реки.

В закрытой местности применяют замкнутый свободный ход с измерением длин сторон хода дальномером (иногда и лентой) и графическим построением углов с помощью линейки кипрегеля.

§ 35. Поверки мензулы.

От мензулы требуется выполнение след. условий:

1. Правильность работы винтов станowego, подъемного и наводящего; отсутствие вращений планшета после закрепления станowym винтом.

2. Соответствие винтов, прикрепляющих доску, ее гнездам.

3. Рабочая поверхность планшета д. б. плоскостью. Поверка производится прикладыванием к поверхности доски в разных направлениях ребра выверенной линейки. Если оно каждый раз плотно, без просветов, прилегает к доске, то условие выполнено. При этой поверке надо также убедиться в отсутствии щелей и выбоин в доске.

4. Мензула должна быть достаточно устойчива. Это условие проверяется тем, что на планшет кладут кипрегель, визируют в него на какую-нибудь точку местности и проводят на доске карандашом по ребру линейки линию, затем легким нажимом пальца сбоку угла доски выводят планшет немного из неподвижного положения и, убедившись сначала, что ребро линейки не сдвинулось с линии, смотрят в трубу. Если крест нитей остался на точке, то мензула устойчива, если нет, то надо найти то место подставки или штатива, в к-ром они шатаются, и сделать исправление его.

5. Верхняя плоскость планшета должна быть перпендикулярна к вертикальной оси вращения мензулы. С помощью выверенного уровня приводят планшет в горизонтальное положение, после чего вращают планшет около его оси. Если пузырек уровня не будет сходиться с середины, то условие выполнено, в противном случае исправление поручается механику.

§ 36. Поверки кипрегеля.

Приемка и осмотр кипрегеля.

При приемке и осмотре кипрегеля проверяют:

- а) правильность работы зажимного и наводящего винтов трубы и микрометричного при алидаде вертикального круга;
- б) исправность исправительных винтов колонки;
- в) отсутствие шатаний горизонтальной оси трубы;
- г) отсутствие забоин и царапин на верньерах и лимбе вертикального круга; не слишком ли отстают верньеры от лимба или не задевают ли они за круг при вращении трубы;

д) полную неподвижность соединения трубы с вертикальным крутом;
е) верность делений вертикального крута и правильность построения верньеров (поверяется так же, как и в теодолитах);

ж) эксцентриситет алидады вертикального круга не должен превышать двойной точности верньера;

з) прямолинейность ребра линейки кипрегеля и отсутствие на нем зазубрин или выбоин. Для этого прочерчивают по нему остро очиненным карандашом линию, у концов этой линии отмечают две точки, к которым прикладывают снова линейку, перевернув ее предварительно на 180° , и прочерчивают опять линию, — обе эти линии должны совпасть;

и) нижняя поверхность линейки д. б. плоскостью. Поверяется при помощи выверенной плоскости доски или прямого ребра какой-нибудь линейки. Отсутствие просветов между линейкой кипрегеля и доской или ребром линейки укажет на наличие этого условия.

Кипрегель пригоден к работе, если нижняя поверхность его линейки представляет собою цилиндрическую поверхность с выпуклостью, обращенной вверх, и если под давлением тяжести колодки и трубы линейка будет плотно прижиматься к плоскости планшета. Кипрегель будет неустойчив и потому непригоден для работы, если концы линейки будут загнуты вверх;

к) правильность нарезанного на линейке масштаба проверяется с помощью циркуля;

л) прочность соединения уровня с алидадой вертикального круга и надлежащие качества этого уровня при цене деления его $\mu = 20'' - 30''$.

Правильность кривизны средней части уровня проверяется многократными наведениями горизонтальной нити трубы на избранный штрих рейки, поставленной в расстоянии 40—50 м. По приведении каждый раз пузырька алидадного уровня строго на середину полусумма отсчетов по верньерам должна оставаться практически постоянной;

м) правильность нитей сетки. Нити д. б. прямыми и ровными; при сетке, нарезанной на стекле, нити должны казаться резко черными, а на самом стекле не д. б. грязи и засорения краской, отставшей от стенок трубы. Толщина нитей сетки д. б. такова, чтобы на расстоянии 200 м нить покрывала не более $\frac{1}{2}$ см на рейке;

н) исправность винтов сетки и возможность прочной и правильной установки ее;

о) свободное, без заеданий, движение окулярного колена в объективном колене и окулярной трубочки — в окулярном; возможность визировать на далекие расстояния и на близкие, удаленные всего на 10 м;

п) оптические качества трубы д. б. удовлетворительны (см.: «Труба нивелира»). Труба должна позволять без утомления наблюдателя на расстоянии в 400 м еще различать при благоприятных условиях в вечернее время сантиметровые подразделения рейки, хотя бы без возможности их счета;

р) если при работе мензулой будет употребляться буссоль, то путем подносок кипрегеля разными частями его к буссоли следует убедиться в отсутствии влияния его на показания стрелки; в противном случае при употреблении буссоли следует убирать кипрегель.

Половые проверки.

1. Ось уровня на линейке кипрегеля должна быть параллельна нижней плоскости линейки. Установив кипрегель на планшете, приводят пузырек уровня на середину подъемными винтами мензулы и прочерчивают карандашом по ребру линейки линию. После этого поворачивают кипрегель

на 180° и прикладывают снова к линии. Если после перекладки пузырек уровня сойдет со середины, то половину схода уничтожают исправительными винтами, а другую половину — подъемными винтами. Проверка повторяется до получения положительного результата. Проверку эту следует делать в тени или под зондом.

2. При горизонтальном положении планшета одна из нитей сетки должна быть вертикальна, а другая горизонтальна.

Для проверки подвешивают в 10—20 м тяжелый груз на нитке и, приведя планшет мензулы в горизонтальное положение, наводят крест нитей на нить отвеса. Если вертикальная нить сетки составляет с нитью отвеса угол, то поворачивают всю оправу с сеткой до тех пор, пока вертикальная нить или совместится с нитью отвеса, или будет ей параллельна.

Горизонтальность второй нити проверяется отсчетами по неподвижной рейке. Если при поворотах кипрегеля вправо и влево отсчеты по левому концу, по середине и по правому концу нити будут одинаковы, то нить горизонтальна. В сетках, нарезанных на стекле, условие перпендикулярности нитей почти всегда выполняется, при паутинных же сетках оно может и не соблюдаться. Неправильную сетку следует сменить.

3. При вращении трубы вокруг горизонтальной оси визирная ось трубы должна описывать плоскость, перпендикулярную нижней плоскости линейки. Для этого необходимо, чтобы: 1) визирная ось была перпендикулярна оси вращения трубы и 2) ось вращения была параллельна нижней плоскости линейки.

Для проверки первого условия устанавливают кипрегель на горизонтальном планшете и, наведя крест нитей на удаленный, хорошо видимый предмет, прочерчивают по ребру линейки линию. Затем переводят трубу через зенит, поворачивают кипрегель на 180° и, установив его так, чтобы ребро линейки проходило через какую-нибудь точку линии, опять наводят крест нитей на тот же предмет и снова прочерчивают линию. Если линии не совпадут, то проводят равноделящую угла, приставляют к ней линейку кипрегеля и, действуя исправительными винтами сетки, передвигают последнюю так, чтобы крест нитей снова попал на точку, взятую для наблюдений.

Для проверки второго условия наводят крест нитей на какую-либо точку высокого предмета, расположенного в 30—50 м от инструмента. Понижая трубу, проектируют крест нитей вниз, отмечая проекцию по указаниям наблюдателя или карандашом на стене, или воткнув шпильку в землю. Переводят трубу через зенит, снова наводят на ту же точку и проектируют ее вниз. Если обе проекции не совпадут, то делают расстояние между ними пополам и совмещают со средней точкой визирную плоскость трубы. Исправление наклона оси достигается подкладыванием под подставку колонки тонких медных пластинок или кусочков кожи, а иногда и просто бумаги. Исправление наклона оси достигается не сразу и во время этой проверки надо следить за горизонтальностью планшета.

4. Визирная ось трубы должна проходить через скошенное ребро линейки или быть ему параллельна. Проверка производится след. обр. Установив кипрегель на горизонтальный планшет, наводят крест нитей на удаленный предмет. Втыкают у концов линейки кипрегеля вертикально две иглы и визируют через них на тот же предмет. Если линия визирования не будет проходить через удаленный предмет, то ошибку устраняют поворотом колонки с помощью особого винта (после ослабления винтов подставки). Если колонка скреплена наглухо с линейкой, то поворачивание колонки д. б. поручено механику. Несоблюдение четвертого условия вызывает поворот всего снятого планшета относительно меридиана на угол между коллимационной плоскостью и ребром линейки.

5. Определение места нуля.
6. Определение постоянных дальномера.
7. Поверка уровня на трубе кипрегеля. См. аналогичные поверки у кругового тахеометра.

Барометрическое (физическое) нивелирование.

Барометрическое нивелирование основано на зависимости между атмосферным давлением и высотой над уровнем моря.

Формул, дающих требуемую зависимость, т. наз. барометрических или гипсометрических, известно несколько: Лапласа, Гаусса, Бабиня, Бауэрн-фейнда, Рюльмана, Иордана, Анго, Арно и др.

Для СССР инструкцией метеорологическим станциям II разр. 1 кл., данной Академией наук, рекомендована формула Рюльмана, имеющая след. вид:

$$h = 18\,400,6 \cdot \left(1,00157 + 0,00367 \frac{t_1 + t_2}{2}\right) \cdot \left(1 + 0,378 \frac{e}{B}\right) \cdot \left(1 + 0,002623 \cdot \cos 2\varphi\right) \cdot \left(1 + \frac{2H_1 + h}{8\,367\,400}\right) \cdot \lg \frac{B_1}{B_2},$$

где: 18 400,6 представляет собою барометрическую постоянную, зависящую от удельного веса воздуха, ртути и пр., второй член—поправку за расширение воздуха от повышения температуры, третий—влияние влажности, четвертый и пятый—поправки за изменение силы тяжести с изменением широты и высоты точки наблюдений.

Буквенные обозначения, входящие в эту ф-лу, представляют собою:

h —разность высот между двумя пунктами;

B_1 и B_2 —приведенные к 0° показания ртутных барометров в этих пунктах;

t_1 и t_2 —температуру воздуха;

$e = \frac{e_1 + e_2}{2}$ —упругость водяных паров в мм высоты ртутного столба, определенную с помощью гигрометров или психрометров;

$B = \frac{B_1 + B_2}{2}$ —среднее из приведенных к 0° показаний барометров;

$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ —средняя широта точек наблюдений;

H_1 —высота над уровнем моря низшей станции;

$R = 8,367\,400$ —средний радиус земли.

В приложении к инструкции помещены таблицы, вычисленные Бергманом и Барановским. Там же указан и способ пользования и приведены примеры.

Повсеместное применение получила полная формула Иордана, основанная на новых, более точных, значениях отдельных коэф-тов ее:

$$h = 18\,400 \cdot \left(1 + 0,003665 \frac{t_1 + t_2}{2}\right) \cdot \left(1 + 0,377 \frac{e}{B}\right) \cdot \left(1 + 0,00265 \cdot \cos 2\varphi\right) \cdot \left(1 + \frac{2H_1 + h}{8\,370\,000}\right) \cdot \lg \frac{B_1}{B_2}.$$

В ф-ле Иордана B_1 и B_2 —приведенные к 0° и исправленные за силу тяжести показания ртутного барометра, вследствие чего она может применяться и при нивелировании одними анероидами.

Таблицы к этой ф-ле имеются в полном курсе геодезии Бика.

При изысканиях встречается надобность в применении полной ф-лы лишь при необходимости отнести нивелировку к уровню моря, при чем вблизи нет ни реперов с абсолютными отметками, ни метеорологических станций, привязкой к к-рым можно было бы получить исходную отметку.

Наибольшее распространение для практических целей получили сокращенные ф-лы, получающиеся из полных путем введения средней широты, средней высоты над уровнем моря и средней влажности для местности, в к-рой будет производиться нивелировка.

Этим путем часть поправок обращается в постоянные коэффициенты и ф-ла принимает простой вид:

$$h = k(1 + 0,003665t) \lg \frac{B_1}{B_2} = k(1 + 0,003665t) (\lg \frac{B_0}{B_2} - \lg \frac{B_0}{B_1}) = H_2 - H_1,$$

где B_0 обыкновенно равно 762 мм, т. е. давлению, близкому к среднему стоянию барометра на нормальном нуле (на среднем уровне моря). Иногда B_0 принимается равным 760 мм.

Иордан для Германии принял: $\frac{e}{B} = 0,01$; $\varphi = 50^\circ$; $B_0 = 762$ и $H = \frac{2H_1 + h}{2} = 500$ м и получил, т. о., ф-лу: $H = 18464 \cdot (1 + 0,003665t) \cdot \lg \frac{762}{B}$.

Бик для средней полосы европейской части СССР использовал данные наблюдений метеорол. обсерв. Моск. геод. инст. (б. Межевого), т. е. принял: $\varphi = 55^\circ 46'$; $H = 142,9$ м (широта и абсолютная высота обсерватории), $e = 5,9$; $B = 747,5$ и $B_0 = 762$ мм. Чтобы уменьшить объем таблиц, Бик ввел в ф-лу множитель $\frac{1+15\alpha}{1+15\alpha}$ и, заменив дробь $\frac{1}{1+15\alpha}$ ее разложением в ряд (до четвертого члена включительно), представил ее в виде:

$$h = (H_2 - H_1) + 0,003475 (H_2 - H_1) (t - 15),$$

где $H = 19452 (\lg 762 - \lg B)$.

Певцов для своей ф-лы использовал многолетние наблюдения на метеорологических станциях России, согласно к-рым $e = 9$ мм и $B = 740$ мм.

Сделав далее $H_1 = 250$ м — средней абсолютной высоте поверхности России, $h = 250$ м — половине наибольшей разности высот между двумя соседними станциями, $R = 6363132$ для средней параллели, $\varphi = 55^\circ$, он для $B_0 = 760$ получил ф-лу:

$$h = (H_2 - H_1) (1 + 0,003665t),$$

где $H = 18470 (\lg 760 - \lg B)$.

Авторами этих ф-л составлены таблицы: одна — приближенных высот H для $t = 0^\circ$ (у Бика $t = 15^\circ$) и другая — поправок к H за темп-ру воздуха.

У Иордана имеются и подробные таблицы, по к-рым сразу определяется приближенная высота для любой темп-ры в пределах от 0° до 35° .

Имеются также таблицы и др. авторов: Радо-Гартля, Срезневского, Шарнгорста (в футах), Полторакова (в саженьях), Рейнберга и Бернацкого и др.

Практически не имеет значения, какими таблицами пользоваться: все они дают сходные между собой результаты.

Если $\lg \frac{B_1}{B_2}$ представить в виде:

$$\lg \frac{1 + \frac{B_1 - B_2}{B_1 + B_2}}{1 - \frac{B_1 - B_2}{B_1 + B_2}}$$

и ограничиться первым членом разложения этого $\lg$ в ряд, то получится т. наз. ф-ла Бабине:

$$h = 2MK \frac{B_1 - B_2}{B_1 + B_2} (1 + at),$$

к-рая, будучи представлена в виде:

$$h = \Delta h (B_1 - B_2) = \Delta h \cdot \Delta B,$$

где $\Delta h = \frac{8.019}{B_1 + B_2} (1 + 0.003665t),$

дает удобное для практического пользования средство для определения разностей высот с помощью барометрических ступеней высот, т. е. с помощью таблиц для разностей высот Δh , отвечающих интервалу в 1 мм в показаньях барометра.

§ 37. Определение давлений атмосферы по показаниям ртутного барометра.

Чтобы получить абсолютные значения давлений атмосферы, в показаниях ртутных барометров д. б. введены след. поправки:

1) за темп-ру ртути для приведения показаний барометра к нулю; определяется по ф-ле:

$$B_0 = B - at;$$

2) за темп-ру масштаба; определяется по ф-ле:

$$bB(t - t_n),$$

где b — линейный коэф-т расширения масштаба, а $t - t_n$ — разность температур — наблюдаемой и той, при к-рой масштаб верен;

3) за капиллярную депрессию, т. е. за понижение относительно нормального положения уровня ртути. Хотя эта поправка вообще ненадежна и у разных авторов имеет разное значение, все же для барометров с внутренним диаметром трубки меньшим 20 мм ее следует вводить. Наибольшего доверия заслуживает таблица, составленная на основании опытов Менделеева и Гутковского (курс физики Kohlrausch'a, Лейпциг, 1905 г.);

4) для приведения к нормальной тяжести, соответствующей широте 45° и уровню моря; определяется по ф-ле:

$$- B \left(\beta \cdot \cos 2\varphi + \frac{2H}{R} \right).$$

Поправки эти имеются в «Таблицах для вычисления метеорологических наблюдений» Главной геофиз. обсерватории (изд. 1925).

В случае не вполне исправных приборов, с загрязненной ртутью и воздухом в вакууме, вводятся еще поправки:

- 1) на воздух в вакууме;
- 2) на нечистоту ртути;
- 3) на упругость ртутных паров.

Хотя поправки эти и могут быть определены с помощью вычислений, но проще всего влияние их выразить суммарно путем сравнения исправленных за предыдущие поправки отсчетов с таковыми же по контрольному барометру.

§ 38. Переход показаний анероида A на показания ртутного барометра B .

В хорошо выдержанных и исправных анероидах зависимость между B_0 , A и t обыкновенно следует ф-ле:

$$B_0 = A + a + bt + \gamma,$$

при чем γ часто принимается равной $c(N - A)$.

В этой ф-ле: a —постоянная поправка, b —температурный коэфт, $\gamma = c(N - A)$ —поправка за неверность делений шкалы; N из практических соображений принимается равным 760 или 750.

Поправки к анероидам приводятся в их аттестатах, имеющих след. вид:

ГЛАВНАЯ ГЕОФИЗИЧЕСКАЯ ОБСЕРВАТОРИЯ.

Отделение поверки инструментов.

Анеронд № 2236 ($P_N^H B$) Naudet.

Поправки анероида выведены из сличения его с нормальным барометром обсерватории, приведенным к нормальной тяжести.

1. Поправки шкалы:

При мм	Поправки мм	При мм	Поправки мм	При мм	Поправки мм	При мм	Поправки мм
790	+0,5	750	-0,2	710	-0,9	680	
780	+0,4	740	-0,4	700	-0,1	670	
770	+0,2	730	-0,5	690		660	
760	0	720	-0,7				

2. Поправка для приведения показаний к $0^\circ = -0,17t$, где t —обозначает темп-ру анероида.

3. Добавочная поправка в июле 1926 г. = +4,1.

Примечание. Поправки д. 6. приписываются, если имеют знак +, и считаются при знаке —.

Время определения поправок шкалы температурного коэф-та } июль 1926 г.

Зав. отделом

Пример. Отсчет по анеронду $A=744,7$;

по термометру анероида: $t=18,5^\circ$.

$$B_0 = 744,7 + 4,1 - 0,17 \cdot 18,5 - 0,3 = 745,4 \text{ мм.}$$

§ 39. Зависимость между температурой кипения воды и атмосферным давлением.

По инструкции для производства барометрической нивелировки 1911 г., действующей и поныне, постоянные станции при отсутствии ртутного барометра должны обслуживаться гипсотермометрами.

В табл. 21 приведена зависимость между темп-рой кипения дистиллированной воды и атмосферным давлением.

Табл. 21.

Темп-ра кипения °C	Давление в мм	Разн. в мм на 0,01°	Темп-ра кипения °C	Давление в мм	Разн. в мм на 0,01°	Темп-ра кипения °C	Давление в мм	Разн. в мм на 0,01°	Темп-ра кипения °C	Давление в мм	Разн. в мм на 0,01°
94,0	610,64	0,23	95,8	652,59	0,24	97,5	694,41	0,25	99,3	741,13	0,27
94,1	612,91		95,9	654,99		97,6	696,93		99,4	748,80	
94,2	615,19					97,7	699,47				
94,3	617,47		96,0	657,40		97,8	702,02		99,5	746,46	
94,4	619,76		96,1	659,81		97,9	704,57		99,6	749,17	
		0,23	96,2	662,23	0,24			0,26	99,7	751,86	0,27
94,5	622,06		96,3	664,66		98,0	707,13		99,8	754,57	
94,6	624,37		96,4	667,10		98,1	709,69		99,9	757,28	
94,7	626,68					98,2	712,27				
94,8	629,00		96,5	669,54		98,3	714,85		100,0	760,00	
94,9	631,32	0,23	96,6	672,00	0,25	98,4	717,44	0,26	100,1	762,73	0,27
			96,7	674,45					100,2	765,47	
95,0	633,66		96,8	676,92		98,5	720,04		100,3	768,21	
95,1	636,00		96,9	679,40		98,6	722,65		100,4	770,97	
95,2	638,35					98,7	725,27				
95,3	640,70	0,23	97,0	681,88	0,25	98,8	727,89	0,27	100,5	773,73	0,28
95,4	643,06		97,1	684,37		98,9	730,52		100,6	776,50	
			97,2	686,87					100,7	779,28	
95,5	645,43		97,3	689,37		99,0	733,16		100,8	782,07	
95,6	647,81		97,4	691,89		99,1	735,81		100,9	784,86	
95,7	650,20	0,24				99,2	738,46	0,27			

§ 40. Обработка журналов барометрического нивелирования.

Барометрическое измерение высот требует одновременного во всех пунктах наблюдения за давлением атмосферы.

Для исключения влияния колебаний давлений при разновременных наблюдениях производят постоянные наблюдения на станции и в наблюдения полевых анерондов вносят поправки на изменение давления.

Пример обработки журналов.

1. Постоянная станция — А. (база).

№№ наблюдений	Время наблюдения (часы, мин.)	Темп-ра		№ или литер анеронда	Показания анеронда А	Поправки		Показания барометра В ₀	Средн. встичная давление по всем анерондам	Поправки	
		воздуха t	анеронда t			a + bt	γ			на давление	на температуру воздуха
1	9.00	25	26,0 25,8	1931 2806	736,7 737,4	+0,2 -0,2	-0,1 -0,2	736,7 737,0	736,9	0	0
2	9.30	25,2	26,0 25,9	1931 2806	736,7 737,4	+0,2 -0,2	-0,1 -0,2	736,8 737,0		0	-0,2
3	10.00	25,4	25,8 25,8	1931 2806	736,6 737,3	+0,2 -0,2	-0,1 -0,2	736,7 736,9	736,8	+0,4	-0,4
...	...	...	...	...	...	...	...	...		...	...
15	16.00	23,1	23,6 24,0	1931 2806	736,0 736,8	+0,2 -0,2	-0,1 -0,2	736,1 736,4	736,3	+0,6	+1,9
...	...	...	...	...	...	...	...	...		...	...

При благоприятных условиях состояния атмосферы, в тихую и ясную погоду (особенно слегка облачную), отсчеты на постоянной станции меняются незначительно и в правильной постепенности, так что простым интерполированием легко вычислить показания станционного anerоида, соответствующие моментам отсчетов полевых anerоидов.

Приняв первое наблюдение за исходное, определяют разницу между ним и последующими приведенными показаниями и на эту величину исправляют показания полевых anerоидов.

Рекомендуется также вводить поправки и за температуру воздуха.

2. Полевой

№ точки стоян- ния	Время наблю- дения (часы и мин.)	Темп-ра		№ или литер ане- роида	Пока- зания ане- роида A	Поправки:		Показ. ртутн. баро- метра B ₀	Средн. велич. давле- ния по всем ане- роидам B ₀	Поправки за стан. баром.	Приве- денное давле- ние B
		воз- духа T	ане- роида t			a + bt	γ				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
А (база)	9.00	25,0	26,2	2 261	737,5	-0,5	-0,2	736,8	736,9	0	736,9
			26,0	105	739,4	-2,3	-0,1	737,0			
1	9.30	25,4	26,5	2 261	739,5	-0,5	-0,2	738,8	738,7	0	738,7
			26,0	105	740,9	-2,3	-0,1	738,5			
2	10.05	25,6	24,5	2 261	738,0	-0,4	-0,2	735,4	735,5	+0,1	735,6
			25,0	105	737,9	-2,2	-0,1	735,6			
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
13	16.00	22,8	20,2	2 261	740,6	-0,1	-0,2	740,3	740,3	+0,6	740,9
			20,8	105	742,3	-2,0	-0,1	740,2			

Гр. 1—10 заполняются в поле по данным наблюдений и аттестатов anerоидов.

Гр. 11 содержит в себе поправки за изменение давления на станции, определяемые как разность между первым показанием станционного anerоида (приведенным к показанию ртутного барометра) и приведенным показанием его же, соответствующим моменту отсчета по полемому anerоиду. Поправки эти выбираются из журнала постоянной станции.

Гр. 12—приведенное к станции давление B₀, т. е. исправленное за величину гр. 11.

Гр. 13—исправленная темп-ра воздуха согласно показаниям T на станции (см. «Журнал постоянной станции»).

Гр. 14—среднее давление для соседних точек (A—1,1 и 2,2 и 3, и B).

Гр. 15—21 служат для подсчета превышений с помощью прилагаемой

в конце таблицы барометрических ступеней высот. Таблица эта составлена по аргументам: среднее давление для соседних точек (гр. 14) и средняя темп-ра воздуха (исправленная) для этих же точек (гр. 16). Интервалами служат: для давлений—10 мм, а для темп-р—2°. Поэтому для облегчения пользования ею имеются две интерполяционных таблицы: одна для определения поправок за давление (гр. 17) и вторая — поправок за темп-ру (гр. 18).

Если приближенную ступень высоты всегда определять по ближайшим меньшим значениям аргументов, то первая поправка всегда вычитается,

журнал.

Испр. темп-ра воздуха T	Средн. давлен. соседн. точ. $\frac{B_1+B_2}{2}$	Сту- пень высот Δh_0	Средн. темпе- ратура $\frac{T_1+T_2}{2}$	Поправки		Испра- вленн. сту- пень высот Δh	Раз- ность давле- ний B_1-B_2	Раз- ность высот h	Аль- титу- да H	Погода	Примечание
				за давл. δB	за темп- ру δT						
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25,0	737,8	11,95	25,1	-0,13	+0,04	11,86	-1,8	+0,2 -21,3	293,4	Ясно; слегка облачно	
25,2	737,1	11,95	25,2	-0,11	+0,05	11,89	+3,1	+0,4 +36,9	272,3		
25,4									309,6		
.....											
—	740,4	11,79	24,8	-0,01	+0,03	11,81	-2,2	+0,3 +26,0	246,0		
24,7								-50,1 -47,4			
.....								-2,7			
.....											

а вторая прибавляется. Так, напр., для определения превышения A-1 имеем:

$$B_{\text{ср.}} = 737,8 \text{ и } T_{\text{ср.}} = 25,1^\circ.$$

Выписываем сначала в гр. 15 значение $\Delta h_0 = 11,95$, взятое из основной таблицы по аргументам $B = 730$ и $T = 24^\circ$.

Заметив из той же таблицы, что разность между Δh_0 для 730 и Δh_0 для 740 составляет -0,16, по табл. 1 для $\Delta B = 737,8 - 730 = 7,8$ находим поправку: $\delta B = -0,13$, к-рую и заносим в гр. 17.

Определив из основной таблицы, что разность между Δh_0 для 24° и Δh_0 для 26° равна +0,08, из табл. 2 для $\Delta T = 25,1 - 24 = 1,1$ находим поправку: $\delta T = +0,04$, к-рую и записываем в гр. 18.

Складывая данные граф 15, 17 и 18, получаем ступень высоты, соответствующую данным $B_{\text{ср.}} = 737,8$ и $T_{\text{ср.}} = 25,1$, к-рую и заносим в гр. 19.

Табл. 22. Барометрические ступени высот.

$\frac{B}{T}$	600	610	620	630	640	650	660	670	680	690	700	710	720	730	740	750	760	770	780	790	$\frac{B}{T}$
-10	12.88	12.66	12.46	12.26	12.07	11.88	11.70	11.53	11.36	11.20	11.04	10.88	10.73	10.58	10.44	10.30	10.16	10.03	9.90	9.78	-10
-8	12.97	12.76	12.55	12.36	12.16	11.98	11.79	11.62	11.45	11.28	11.12	10.96	10.81	10.66	10.52	10.38	10.24	10.11	9.98	9.85	-8
-6	13.07	12.86	12.66	12.45	12.25	12.07	11.88	11.71	11.53	11.37	11.20	11.05	10.89	10.74	10.60	10.46	10.32	10.19	10.05	9.93	-6
-4	13.17	12.96	12.74	12.54	12.35	12.16	11.97	11.79	11.62	11.45	11.29	11.13	10.97	10.82	10.68	10.54	10.40	10.26	10.13	10.00	-4
-2	13.27	13.05	12.84	12.64	12.44	12.25	12.06	11.88	11.71	11.54	11.37	11.21	11.06	10.90	10.76	10.61	10.47	10.34	10.21	10.08	-2
0	13.36	13.15	12.93	12.73	12.53	12.34	12.15	11.97	11.79	11.62	11.46	11.29	11.14	10.98	10.84	10.69	10.55	10.41	10.28	10.15	0
2	13.46	13.24	13.03	12.82	12.62	12.43	12.24	12.06	11.88	11.71	11.54	11.38	11.22	11.07	10.92	10.77	10.63	10.49	10.36	10.23	2
4	13.56	13.34	13.12	12.92	12.71	12.52	12.33	12.14	11.97	11.79	11.62	11.46	11.30	11.15	10.99	10.85	10.71	10.57	10.43	10.30	4
6	13.66	13.43	13.22	13.01	12.81	12.61	12.42	12.23	12.05	11.88	11.71	11.54	11.38	11.23	11.07	10.93	10.78	10.64	10.51	10.37	6
8	13.76	13.53	13.31	13.10	12.90	12.70	12.51	12.32	12.14	11.96	11.79	11.63	11.46	11.31	11.15	11.01	10.86	10.72	10.58	10.45	8
10	13.85	13.63	13.41	13.20	12.99	12.79	12.60	12.41	12.23	12.05	11.88	11.71	11.55	11.39	11.23	11.08	10.94	10.80	10.66	10.52	10
12	13.95	13.72	13.50	13.29	13.08	12.88	12.69	12.50	12.31	12.13	11.96	11.79	11.63	11.47	11.31	11.16	11.01	10.87	10.73	10.60	12
14	14.05	13.82	13.60	13.38	13.17	12.97	12.78	12.58	12.40	12.22	12.04	11.87	11.71	11.55	11.39	11.24	11.09	10.95	10.81	10.67	14
16	14.15	13.92	13.69	13.47	13.27	13.06	12.86	12.67	12.48	12.30	12.13	11.96	11.79	11.63	11.47	11.32	11.17	11.02	10.88	10.75	16
18	14.25	14.01	13.79	13.57	13.36	13.15	12.95	12.76	12.57	12.39	12.21	12.04	11.87	11.71	11.55	11.40	11.25	11.10	10.96	10.82	18
20	14.34	14.11	13.88	13.66	13.45	13.24	13.04	12.85	12.66	12.47	12.30	12.12	11.95	11.79	11.63	11.48	11.32	11.18	11.03	10.89	20
22	14.44	14.21	13.98	13.75	13.54	13.33	13.13	12.93	12.74	12.56	12.38	12.20	12.04	11.87	11.71	11.55	11.40	11.25	11.11	10.97	22
24	14.54	14.30	14.07	13.85	13.63	13.42	13.22	13.02	12.83	12.64	12.46	12.29	12.12	11.95	11.79	11.63	11.48	11.33	11.19	11.04	24
26	14.64	14.40	14.17	13.94	13.72	13.51	13.31	13.11	12.92	12.73	12.55	12.37	12.20	12.03	11.87	11.71	11.56	11.41	11.26	11.12	26
28	14.74	14.49	14.26	14.03	13.82	13.60	13.40	13.20	13.00	12.81	12.63	12.45	12.28	12.11	11.95	11.79	11.63	11.48	11.34	11.19	28
30	14.83	14.59	14.36	14.13	13.91	13.69	13.49	13.29	13.09	12.90	12.72	12.54	12.36	12.19	12.03	11.87	11.71	11.56	11.41	11.27	30
32	14.93	14.69	14.45	14.22	14.00	13.78	13.57	13.37	13.18	12.98	12.80	12.62	12.44	12.27	12.11	11.95	11.79	11.64	11.49	11.34	32
34	15.03	14.78	14.53	14.31	14.09	13.87	13.66	13.46	13.26	13.07	12.88	12.70	12.53	12.36	12.19	12.02	11.87	11.71	11.56	11.42	34
36	15.13	14.88	14.64	14.41	14.18	13.96	13.75	13.55	13.35	13.16	12.97	12.78	12.61	12.43	12.27	12.10	11.94	11.79	11.64	11.49	36
38	15.23	14.98	14.74	14.50	14.27	14.06	13.84	13.64	13.44	13.24	13.05	12.87	12.69	12.51	12.35	12.18	12.02	11.86	11.71	11.56	38
40	15.32	15.07	14.83	14.59	14.37	14.15	13.93	13.72	13.52	13.33	13.14	12.95	12.77	12.60	12.43	12.26	12.10	11.94	11.79	11.64	40

Умножив эту величину на разность давлений $B_1 - B_2$ между соседними точками (гр. 20), определим разность высот h в м между этими точками (гр. 21).

Если альтитуды начальной и конечной точек известны, то, сложив h и, определив невязку ($-2,7$ м), разбрасываем последнюю пропорционально величинам h и по исправленным разностям высот вычисляем альтитуды точек.

Если нивелирование будет производиться одним anerоидом, то гр. 11 заполняется поправками, величина к-рых определяется пропорционально времени. Так, напр., если после возвращения через восемь час. в начальную точку давление изменилось на $-1,6$ мм, то поправка на каждый час составит $+0,2$ мм и для точки 13 будет равна: $+0,2 \cdot (16 - 9) = 1,4$ мм.

Поправки за T воздуха совсем не вносятся и ступень высоты определяется по неисправленным T .

Табл. 23. Интерполяционные таблицы поправок.

1. За показание барометра, δB .

мм	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,12	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,10	0,11
0,13	1	3	4	5	6	8	9	10	12
0,14	1	3	4	6	7	8	10	11	13
0,15	2	3	5	6	8	9	11	12	14
0,16	2	3	5	6	8	10	11	13	14
0,17	2	3	5	7	9	10	12	14	15
0,18	2	4	5	7	9	11	13	14	16
0,19	2	4	6	8	10	11	13	15	17
0,20	2	4	6	8	10	12	14	16	18
0,21	2	4	6	8	11	13	15	17	19
0,22	2	4	7	9	11	13	15	18	20
0,23	2	5	7	9	12	14	16	18	21
0,24	2	5	7	10	12	14	17	19	22
0,25	3	5	8	10	13	15	18	20	23

2. За температуру, δT .

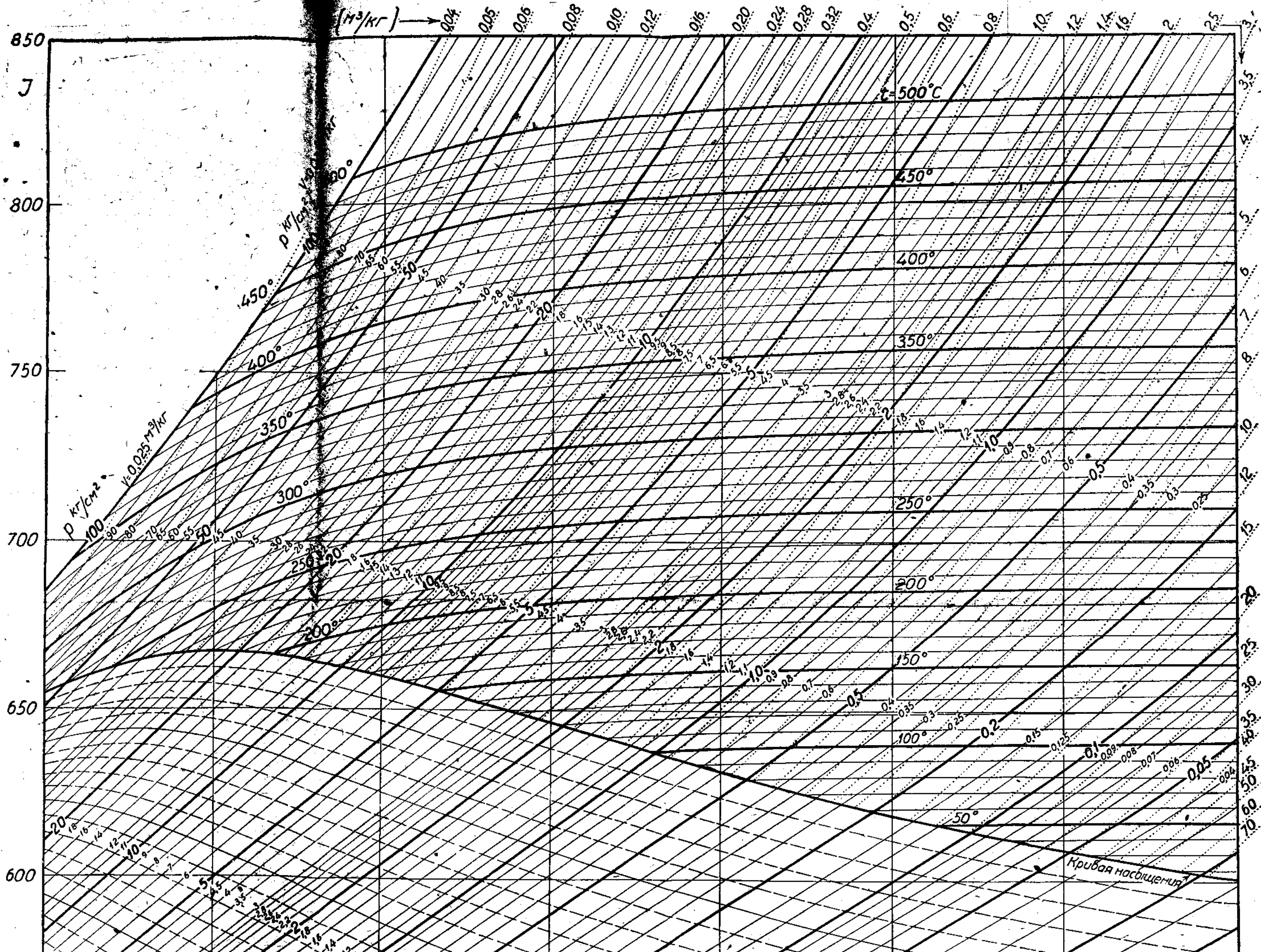
Градусы	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,07	0,00	0,01	0,01	0,01	0,02	0,02	0,02	0,03	0,03	0,04
0,08	0	1	1	2	2	2	3	3	4	4
0,09	0	1	1	2	2	3	3	4	4	4
0,10	0	1	2	2	2	3	4	4	4	5
Градусы	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	
0,07	0,04	0,04	0,05	0,05	0,05	0,06	0,06	0,06	0,07	
0,08	4	5	5	6	6	6	7	7	8	
0,09	5	5	6	6	7	7	8	8	9	
0,10	6	6	6	7	8	8	8	9	10	

§ 41. Определение абсолютных высот с помощью барометрического нивелирования.

Так как на уровне океана показания барометра и термометра постоянно меняются (в пределах от 700 до 800 мм), то для вычисления абсолютной высоты надо располагать, кроме наблюдаемых в данной точке показаний барометра и термометра, еще и знанием давления и темп-ры для проекции этой точки на уровень моря, относящихся к тому же моменту времени. Последнее достигается с помощью синоптической (метеорологической) карты, издаваемой ежедневно два раза (для 7 и 21 час.) Гл. геофизич. обсерваторией. На карте этой проведены изобары и изотермы, т. е. кривые одинакового давления и одинаковой темп-ры воздуха на уровне моря. Найдя на карте проекцию определяемой точки, интерполяцией находят для нее для данного момента времени давление и темп-ру и полученные данные вставляют в гипсометрическую ф-лу, после чего вычислением получают абсолютную высоту.

При отсутствии надежных карт (напр., для некоторых районов Сибири, где метеорологические обсерватории находятся друг от друга на сотни км) задача определения абсолютной высоты м. б. достигнута лишь в результате длительных наблюдений.

→ Теплосодержание (J)





Прием подписки

на все

подписные издания,

а также и

журналы

*производится во всех книжных магазинах,
отделениях и киосках Книготоргового
объединения ОГИЗа*



О выходе очередного тома

*„Технического Справочника
Транспортника“*

будет своевременно извещаться в газетах;

„Известия ЦИК СССР“ и „Гудок“



Г С Э И
Книготорговое
Объединение

*В скором времени открывается
прием подписки
на
Малую Советскую
Энциклопедию*

*(2-е издание)
в 10-ти томах*



*Подписку следует направлять по адресу:
г. МОСКВА, ГСП, 5,
Маросейка 7,
Сектор подписных изданий
Книготоргового объединения
ОГИЗа.*

*Подписка также будет приниматься
во всех отделениях, книжных магазинах
и киосках КОГИЗа*

Отв. редактор С. П. Сыромятников. Технич. редактор К. В. Карабанов.
Сдано в набор 31/X 1981 г. Подписано к печати 20/IX 1982 г.
Т-40-а. Отгв № 1211. Уполн. Главлита № 21 970. Тираж 26350. Заказ № 297.
Формат бумаги 82×110. 1/32. 40 в. л. (123200 тис. зн. в 1 б. л.) Вум. л. 10.

Типография «Печатный Двор». Ленинград, Гатчинская, 28.