Проф. Н. М. ГЕРСЕВАНОВ

СНОВЫ НОМОГРАФИИ

1932

дарственное Научно-Техническое Издательство

Проф. Н. М. ГЕРСЕВАНОВ

ОСНОВЫ НОМОГРАФИИ

ТЕОРИЯ И ПОСТРОЕНИЕ ИНЖЕНЕРНЫХ НОМОГРАММ

ВТОРОЕ ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ ИЗДАНИЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА — 1932 — ЛЕНИНГРАД

20-я типография ОГИЗ'а имени Евгении Соколовой. Ленинград, пр. Красных Командиров, 29.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга представляет собой второе, исправленное и значительно дополненное издание выпущенной в 1926 г. книги под заглавием „Теория и построение инженерных номограмм", изд. Центрального бюро инженеров и техников ЦК Союза железнодорожников. Особенность этой книги в отличие от всех существующих руководств по номографии, как советских, так и заграничных, заключается в том, что в ней впервые поставлен и разрешен вопрос о приспособляемости номограмм, имеющий весьма существенное значение для практики их построения, так как без применения этого принципа конструктор номограммы каждый раз рискует получить номограмму, практически мало пригодную, и успех в получении пригодной номограммы до некоторой степени сводится к счастливой случайности.

Ввиду этого первая половина (до § 18) настоящей книги представляет собой за малыми изменениями воспроизведение первого издания.

Начиная с § 18 предмет значительно расширен применением методов аналитической геометрии и определителей. Так как в настоящее время номография вводится в преподавание почти во всех втузах нашего Союза, мы сочли возможным сделать это дополнение, сообщающее методу номографии значительно большую мощность, в расчете на указание и помощь студентам со стороны профессоров и преподавателей математики, под руководством коих этот предмет вводится во втузах.

Проф. *Н. Герсеванов.*

ОГЛАВЛЕНИЕ.

ВВЕДЕНИЕ.

Номография представляет собой самую молодую отрасль математики. Официальное существование ее начинается лишь с 1890 г., когда она получила свое наименование, принятое международным математическим конгрессом в Париже по предложению профессора французской Школы мостов и дорог Окань. Номография преследует цели практически-производственного характера; она ставит себе задачей облегчение и сокращение труда инженеров и техников в вычислениях по тем или иным формулам помощью особых графиков, называемых номограммами, с которых можно снимать готовые решения этих формул, не прибегая к самому процессу вычисления.

Ввиду такого положения дела номограммы имеют особое значение при вычислениях массового характера по одной и той же формуле — обстоятельство, с которым постоянно приходится встречаться при составлении различного рода проектов. Так например по свидетельству французского инженера Coро́ с помощью номограмм был составлен предварительный проект дороги из Тананаривы в Мораманго (на острове Мадагаскаре) в течение двух дней, причем проект этот заключал в себе вычисление 275 000 $м^3$ земляных работ и 45 000 $м^3$ искусственных сооружений.

Применение номограмм в производствах позволяет привлекать к вычислениям формул лиц, не имеющих особой квалификации, так как пользование номограммой требует лишь профессиональных навыков и допускает вычислять требуемый результат, не входя в общение с самой формулой; знание математики при этом не требуется. Так например на заводах Западной Европы и Америки мастера определяют помощью номограмм наивыгоднейшую глубину резания и соответственную установку фрезерного станка в каждом конкретном случае в зависимости от рода металла, скорости вращения фрезы, скорости подачи и прочих многих переменных, от которых эта величина зависит.

Мы видим таким образом существенное отличие номограмм от графических методов расчетов, распространенных в настоящее время в инженерном деле. Обыкновенные графики для каждого отдельного случая должны строиться особо, так как они представляют собой графическое изображение арифметических формул, т. е. таких, в которых подставлены те или иные численные значения переменных, тогда как номограммы представляют собой графическое изображение алгебраических формул и потому пригодны для вычисления результата при всевозможных комбинациях частных значений переменных, от которых этот результат зависит.

...слово „номография“ происходит от греческого слова ... — закон. Этим хотят выразить, что номограммы представляют ... графическое изображение закона, связывающего несколько ...енных в определенную зависимость.

Начало графического изображения зависимости, связывающей ... переменных, следует отнести к XVII столетию, когда создан... Декартом система координат позволила изображать какую ... зависимость между двумя переменными путем начертания ... линии в декартовой системе координат.

В настоящее время графическое изображение зависимости между ...умя переменными настолько популяризовано, что знакомство ...им считается входящим в круг сведений современного образо...ного человека.

Графическое изображение зависимости между тремя перемен...ми выработано значительно позже. Имеется основание предпо...гать, что первая идея такого изображения принадлежит Буашу и относится к 1752 г. Затем Пуше, Обенгейм и Пиобер пользовались этим методом для различных целей; лишь в 1830 г. Терквием показал общий способ изображения уравнений с тремя переменными. Способ этот, заключающийся в начертании семейства кривых, также имеет всеобщее распространение. Для примера достаточно ...казать на публикуемые метеорологическими обсерваториями карты ...спределения барометрического давления или температуры в опре...ленное время. Такие карты дают возможность по заданной ши...те и долготе места найти давления воздуха и поэтому пред...авляют собой график, изображающий зависимость между тремя ...ременными: широтой, долготой и давлением воздуха. Появление ...вой идеи номографии относится к сороковым годам XIX сто...ия, когда во время постройки первых железных дорог во ...анции явилась надобность в массовом исчислении земляных ...бот; инж. Лаланн и Давен, движимые стремлением изыскать наи...ее быстрые и удобные методы расчетов, напали на идею ...морфозы графиков в 1846 г. Идея эта была развита и раз...ана проф. Гентского политехникума Массо под названием ... анаморфозы. В 1884 г. проф. Окань, ныне член француз... академии наук, предложил чрезвычайно ценное преобразова... номограмм Массо, породившее номограммы из выравненных ... удобство этого рода номограмм вызвало немедленное рас...ранение и применение их во всех отраслях техники: в строи... деле, гидравлике, электротехнике, артиллерии, корабле...ии, мореходном деле и т. д.

...ж. Лаллеман первый предложил номограммы с подвижными ...рантами в виде так называемых гексагональных номограмм. ...мограммы эти не получили большого распространения, но ... Лаллемана имела крупное принципиальное значение, так ...щью его номограмм можно изображать на чертеже урав... каким угодно числом переменных, что считалось ранее ...ным.

... Оканем введено в номографию понятие о бинарном ... Прево — понятие о бинарной шкале. Идеи эти также ...ность изображать уравнение со многими переменными на небольшом листе бумаги, но способом, совершенно отличн[illegible] метода Лаллемана.

Наконец в 1889 г. проф. Оканем дана общая классифика[illegible] теория номограмм и намечены все пути ее развития в его [illegible]нитом „Трактате по номографии“, появившемся во втором изда[illegible] в 1921 г. После появления этого труда номография стала быстр[illegible] распространяться во всех странах Европы и Америки. Причины [illegible]кого успеха номограмм следует видеть в указанных уже их свой[illegible]ствах давать готовые решения формул для какой угодно комбинации частных значений независимых переменных, входящих в формулу в заданных пределах и с заданной точностью. В этом отношении номограммы заменяют собой таблицы, составленные по той или иной формуле, благодаря чему их называют иногда графическими таблицами. Однако следует отметить, что между таблицами и номограммами имеется существенное различие, на котором мы несколько остановимся.

При составлении таблицы для уравнения с тремя переменными, из коих две — независимые, значение одной независимой переменной выписывается на верху листа в горизонтальный ряд; значение другой независимой переменной выписывается в левой стороне листа в вертикальный ряд; значение третьей переменной заполняет все поле листа и располагается в соответственные колонны и строки.

Ниже приводится для примера таблица, дающая расход воды Q в трубе в зависимости от диаметра трубы d и скорости движения воды v.

Таблица расхода в литрах в секунду

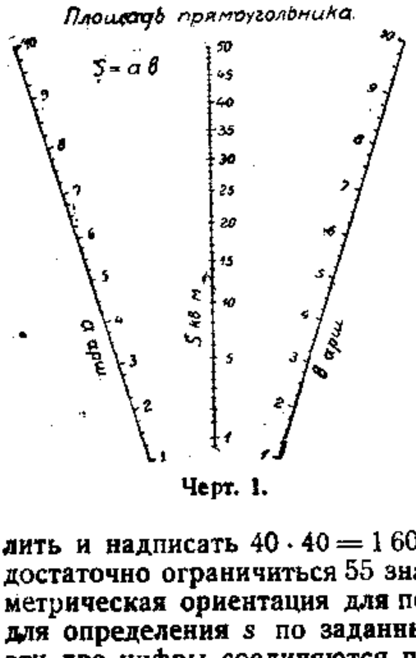
Скорость v м/сек / Диаметр d мм	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25
100	0,39	0,79	1,18	1,57	1,96
125	0,61	1,23	1,84	2,45	3,07
150	0,88	1,77	2,65	3,53	4,42
200	1,57	3,14	4,71	6,28	7,85
250	2,45	4,91	7,36	9,82	12,27

Здесь пять значений v и пять значений d выписаны в строки. Значения Q располагаются в колонны и строки, заполняя собой все остальное поле таблицы.

Обращаем внимание читателей, что пользование таблицей основано на чисто геометрической ориентации. Так, например, чтобы найти Q по заданным $v = 0{,}1$ и $d = 200$, надо провести от цифры $v = 0{,}1$ перпендикуляр к направлению ряда v и от цифры $d = 200$ перпендикуляр к ряду d; в точке пересечения перпендикуляров прочтем искомое значение $Q = 3{,}14$.

Описанный метод изображения зависимости между тремя переменными является древнейшим приобретением человеческой культуры, принадлежит Пифагору (500 л. до нашей эры) и прочно держится по сие время. Однако он имеет существенные неудобства. Первое неудобство — это затруднительность интерполяции, которая станет ясной для читателя, если он попытается по вышеприведенной таблице определить Q, например для $d = 175$ *мм* и $v = 0{,}17$ *м/сек*. Второе и самое главное заключается в том, что значения Q должны заполнить собой все поле таблицы, что требует в указанном примере выполнения $5 \cdot 5 = 25$ вычислений и столько же надписей.

Номограммы представляют собой те же таблицы, но ряды значений независимых переменных располагаются иначе, по другим направлениям и иногда в виде фигурной линии, и для пользования ими применяется другая геометрическая орентация, причем последняя выбирается такой, при которой все поле значений третьей переменной сворачивается в ряд, в такой же ряд, как и ряды независимых переменных.



Черт. 1.

На черт. 1 представлена номограмма, построенная проф. Соколовым для определения площади s в кв. метрах прямоугольника по длинам его сторон a и b, выраженным в аршинах.

Величины a и b выписаны в ряд в пределах от 1 до 10 с точностью до $^1/_4$ арш., т. е. взято по 40 значений того и другого ряда. Если составлять таблицу по пифагоровой системе, то пришлось бы вычислить и надписать $40 \cdot 40 = 1\,600$ значений s, тогда как в номограмме достаточно ограничиться 55 значениями s, выписанными в ряд. Геометрическая ориентация для пользования номограммой будет такова: для определения s по заданным значениям, например $a = 6$, $b = 7$, эти две цифры соединяются прямой линией и в точке пересечения этой прямой с рядом s читаем результат $21^1/_4$ $м^2$.

Интерполяция делается легко на-глаз в зависимости от расстояния точки пересечения проведенной прямой от двух помеченных точек, между которыми эта точка пересечения ложится.

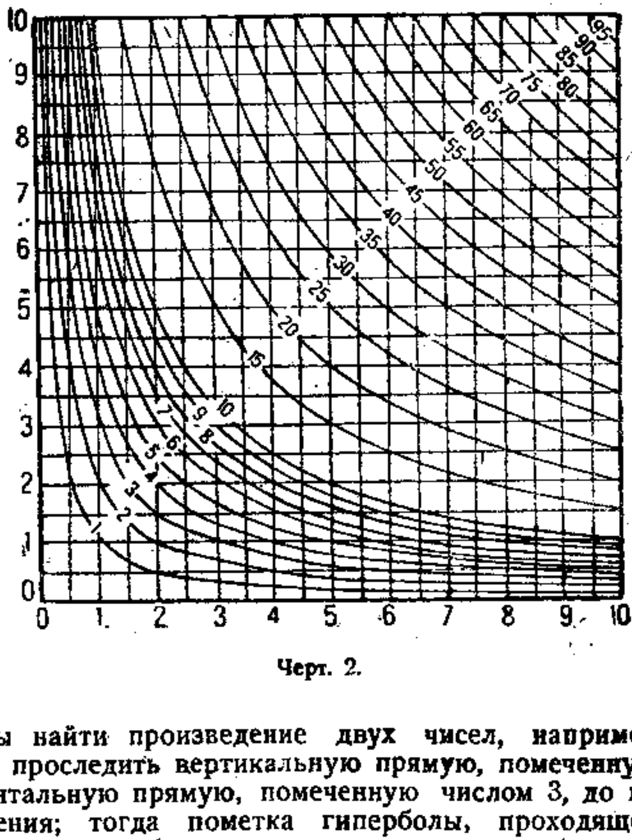
В случае уравнений со многими переменными табличный способ требует составления массы таблиц, соединяемых в целые томы. Поле значений зависимой переменной при этом непомерно разрастается, делая исполнение этой работы практически невыполнимым; геометрическая ориентация утрачивается, и интерполяция делается невозможной. Если взять уравнение с 6 переменными и составить таблицы для него, взяв по 20 значений каждой независимой переменной, то приходится проделать $20^6 = 3\,200\,000$ вычислений по заданной формуле, тогда как при составлении соответствующей номограммы в тех же пределах и с той же степенью точности надлежит нанести 6 рядов точек, по 20 в каждом, и произвести лишь $6 \times 20 = 120$ вычислений, т. е. исполнить работу примерно в 30 000 раз меньшую.

Итак в тех случаях когда составление таблиц приводит к объему работы, практически невыполнимому, вычерчивание номограммы не представляет никаких затруднений.

Переходя к описанию номограмм, начнем с рассмотрения изображения уравнений с тремя переменными. Положим, для примера требуется изобразить уравнение:

$$xy = z.$$

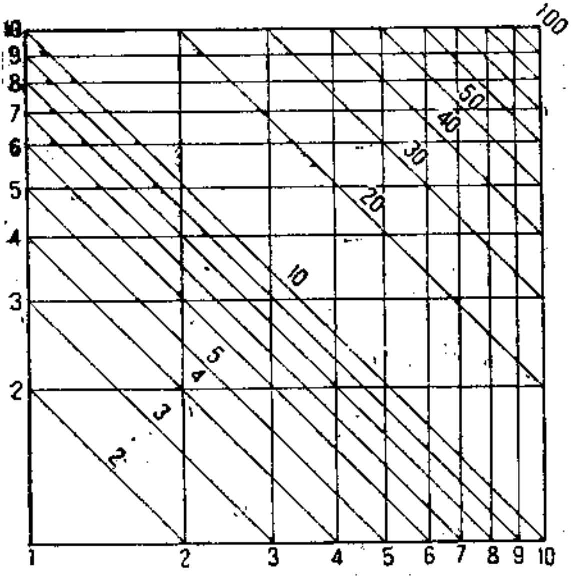
Обычный способ заключается в следующем: придается в уравнении величине z какое-либо частное значение, например $z = 1$; получается уравнение гиперболы $xy = 1$; эта гипербола вычерчивается по точкам и помечается числом 1. Придавая z ряд последующих значений 2, 3 и т. д. и поступая таким же образом, получим семейство помеченных гипербол (черт. 2).



Черт. 2.

Для того чтобы найти произведение двух чисел, например $x = 2$ и $y = 3$, надо проследить вертикальную прямую, помеченную числом 2, и горизонтальную прямую, помеченную числом 3, до их взаимного пересечения; тогда пометка гиперболы, проходящей через эту точку пересечения, будет искомым значением z.

Однако построение гипербол по точкам требует значительного труда; для его сокращения Даланн предложил вводить при составлении графиков анаморфозу. Анаморфозами называются искаженные изображения различных рисунков, которые получаются отражением в гладких полированных искривленных поверхностях, как например в кривом зеркале. Если предположить, что можно получить такое отражение и искаженное изображение (черт. 2), при котором все гиперболы превратятся в прямые линии, причем все вертикальные и горизонтальные прямые сохранят свою прямолинейность, то мы получим чертеж, легко поддающийся вычерчиванию. Оказывается, что в данном случае такая анаморфоза возможна и она изображена на черт. 3. Здесь все помеченные гиперболы превратились в прямые линии, а вертикальные и горизонтальные прямые, помеченные соответственными значениями x и y, получили лишь некоторое сдвижение относительно своего первоначального положения. Способ пользования такой анаморфированной номограммой остается очевидно тем же, что и для первоначального графика, и основан на том, что три пометки трех прямых, пересекающихся в одной точке, удовлетворяют заданному уравнению. Для построения черт. 3 достаточно проделать лишь 10 вычислений, относящихся к определению положения десяти точек, помеченных числами 1, 2,..., 10 на оси абсцисс, так как, имея эти 10 точек, как видно из черт. 3, весь остальной рисунок получаем легко проведением системы прямых линий.



Черт. 3.

Ввиду указанных соображений номограммы, изображающие зависимость между тремя переменными и состоящие из трех систем помеченных прямых линий, называются номограммами с общей анаморфозой. Теория их была разработана проф. Массо. Как видно на примере черт. 3, в этих номограммах каждой переменной, входящей в изображаемое уравнение, соответствует система помеченных прямых и каждому частному значению переменной соответствует прямая линия.

Номограммы этого рода все же обладают следующими неудобствами практического характера: при желании достичь большей точности прямые линии в каждой системе должны быть расположены густо одна около другой. При густоте этих систем чертеж пестрит в глазах и затрудняет глазу следить за прямой от того места, где надписана пометка прямой до точки ее пересечения. Интерполяция представляет некоторые неудобства, в чем читатель может убедиться, если пожелает по черт. 3 определить например произведение 2,25 · 3,5; самое же существенное неудобство заключается в громоздкости номограммы, заполняющей все поле чертежа. Ввиду этих соображений проф. Окань предложил трансформировать эти номограммы таким образом, чтобы каждому частному значению переменной соответствовала бы не прямая линия, а точка.

При этом каждая система помеченных прямых линий превращается в ряд помеченных точек, или так называемую шкалу, и номограмма из трех систем прямых линий превращается в номограмму из трех шкал. На основании существующего в геометрии принципа двойственности каждым трем помеченным прямым, пересекающимся в одной точке, соответствуют три помеченные точки трансформированной номограммы, лежащие на одной прямой. Таким образом проф. Окань подошел к номограммам из выравненных точек.

Схематически эта номограмма изображена на черт. 4. Состоит она из трех рядов помеченных точек или трех шкал, причем одна шкала помечена значениями переменной α_1, другая — значениями другой переменной α_2 и третья—значениями третьей переменной α_3. Через две точки, помеченные заданными значениями α_1 и α_2, проводится прямая, которая пересечет третью шкалу (α_3) в точке, помеченной искомым значением α_3. Вместо проведения прямой линии, называемой *индексом*, пользуются обыкновенно соответственно установленной натянутой нитью или транспарантом, т. е. наложением на чертеж прозрачной бумаги с начерченной на ней прямой линией.

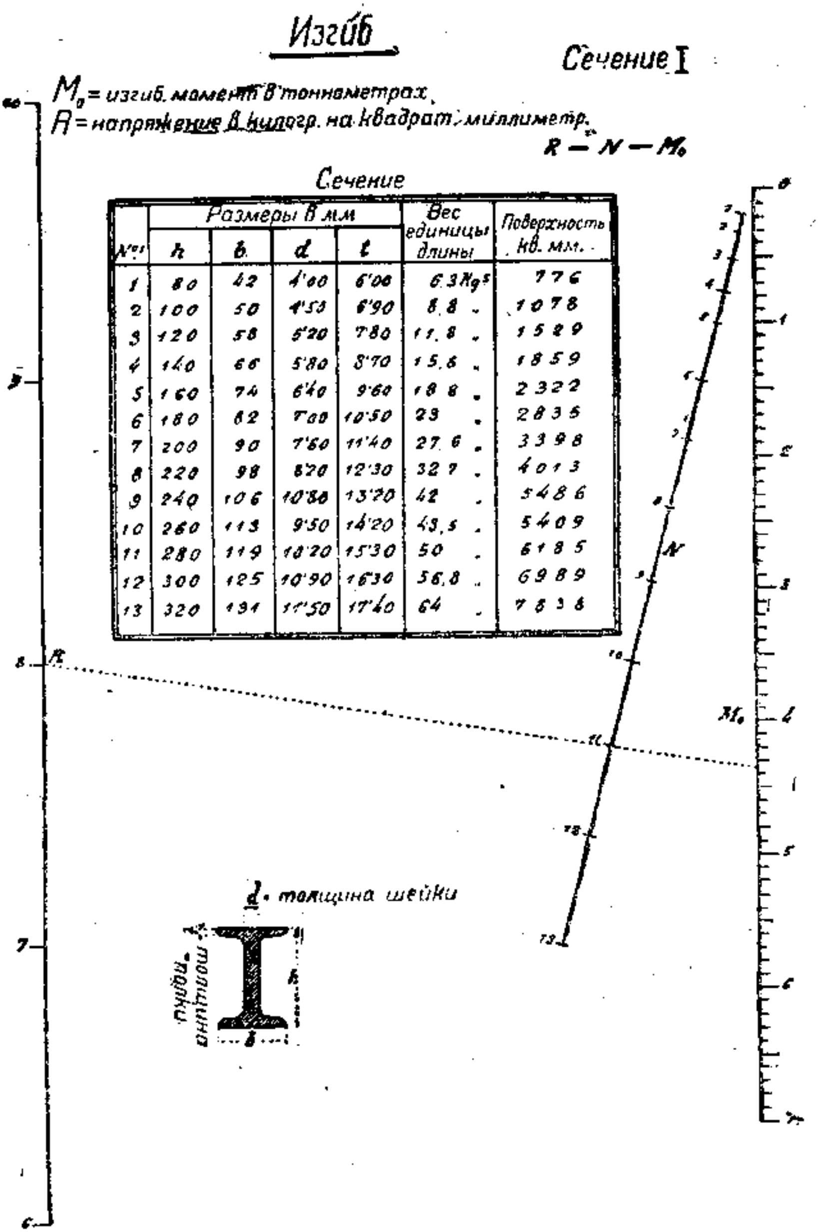
Номограммы из выравненных точек представляют значительные удобства; так как номограмма состоит лишь из трех шкал, то на чертеже имеется много свободного места, которое может быть использовано для различных целей, например для надписей, таблиц и пр.; особенное значение это обстоятельство имеет при составлении номограмм со многими переменными, так как свободные места на чертеже могут быть занимаемы другими шкалами, соответствующими прочим переменным, как это мы увидим впоследствии. Интерполяция производится очень легко и удобно на-глаз; вся номограмма обладает компактностью и большой емкостью, благодаря чему она легко обозрима и ошибки в ее построении могут быть легко замечены. Благодаря таким преимуществам номограммы из выравненных точек совершенно вытеснили номограммы с общей анаморфозной из обихода, и **построение последних является в настоящее время анахронизмом.**

Черт. 4.

На черт. 5 приведена номограмма из выравненных точек для подбора сечений двутавровых балок, подвергающихся изгибающему моменту. Состоит она из трех шкал: шкала допускаемого напряжения железа на растяжение R в килограммах на кв. миллиметр, шкала изгибающего момента M_0 в тонно-метрах; шкала N номера сечения балок по сортаменту, помещенному в виде таблицы на самой номограмме. Проведенная пунктирная линия показывает, что при сопротивлении материала балки $R = 8$ *кг/мм*^{2} профиль № 11 допускает доведение изгибающего момента M_0 до 4,35 *тм*.

Уравнения с четырьмя переменными могут изображаться номограммой с крестообразным транспарантом, схематически изображенной на черт. 6. Номограмма состоит из четырех шкал, соответственно четырем переменным α_1, α_2, α_3, и α_4, входящим в изображаемую формулу.

Для пользования номограммой надлежит наложить на номограмму транспарант, состоящий из двух взаимно-перпендикулярных



Сечение

№№	Размеры в мм				Вес единицы длины	Поверхность кв. мм.
	h	b	d	t		
1	80	42	4'00	6'00	6.3 Kg^s	776
2	100	50	4'55	6'90	8.8 „	1078
3	120	58	5'20	7'80	11.8 „	1529
4	140	66	5'80	8'70	15.6 „	1859
5	160	74	6'40	9'60	18.8 „	2322
6	180	82	7'00	10'50	23 „	2835
7	200	90	7'60	11'40	27.6 „	3398
8	220	98	8'70	12'30	32.7 „	4013
9	240	106	10'80	13'70	42 „	5486
10	260	113	9'50	14'20	43.5 „	5409
11	280	119	10'20	15'30	50 „	6185
12	300	125	10'90	16'30	56.8 „	6989
13	320	131	11'50	17'40	64 „	7838

Черт. 5.

индексов; таким транспарантом может служить например калька, на которой начерчен крест в виде двух взаимно-перпендикулярных прямых. Транспарант ориентируется так, чтобы один из его индексов прошел через точки a_1 и a_3 на шкалах (α_1) и (α_3), помеченные заданными значениями переменных α_1 и α_3 (черт. 6).

Затем перемещают транспарант таким образом, чтобы этот индекс не сходил с намеченных точек a_1 и a_3, пока перпендикулярный индекс не пройдет через точку a_2 на шкале (α_2), помеченную заданным значением переменной α_2, после чего его останавливают. Тогда в пересечении этого индекса со шкалой (α_4) в точке α_4 прочитывают искомое значение четвертой переменной.

На черт. 7 приведен пример такого рода номограммы, предназначенной для определения наибольшего изгибающего момента в балке от действия нагрузки при различных устройствах ее опор и различных пролетах. Номограмма имеет четыре ряда помеченных точек. Первый ряд — шкала значений P — нагрузки на балку в тоннах; второй — шкала значений l — пролета балки в метрах; третий — шкала значений M_0 — моментов в тонно-метрах и наконец четвертый ряд обозначен на номограмме кружками, пронумерованными цифрами, соответствующими различным способам нагрузки и устройствам опор, как это показано на приложенных к номограмме схемах. Так например точка *I* соответствует случаю балки, заделанной одним концом в стену и подверженной на конце действию силы P, точка *II* соответствует такой же балке, но подверженной действию равномерной нагрузки $pl = P$ и т. д.

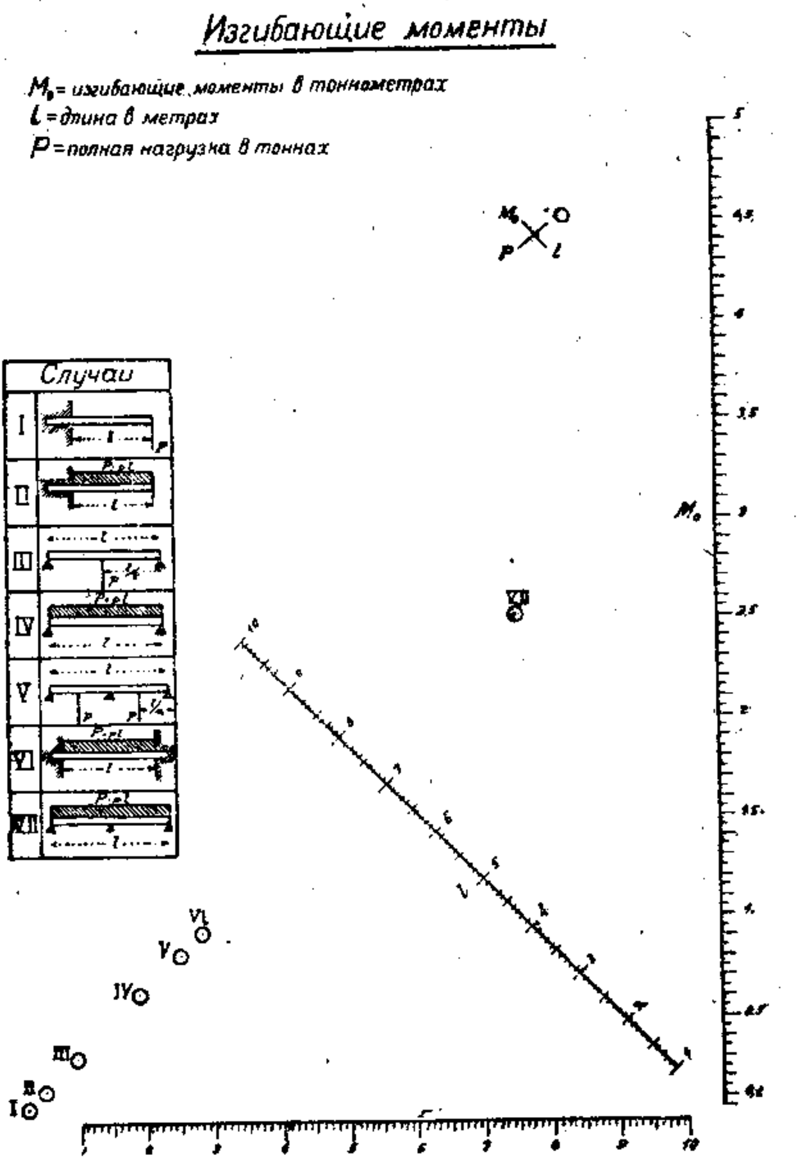
Черт. 6.

В верхнем углу номограммы приведен ключ для пользования номограммой, из коего усматривается, что точки, соответствующие переменным M_0 и l, должны лечь на одном индексе, а точки, соответствующие двум другим данным, — на перпендикулярном к нему индексе.

Пусть для примера требуется определить момент в балке, свободно лежащей на двух опорах с пролетом между ними $l = 8$ *м*, подпертой посредине опорой и нагруженной равномерной нагрузкой $p = 1$ *т/м*, т. е. $P = pl = 8$ *т*.

Накладываем транспарант так, чтобы один индекс прошел через точку *8* на шкале P и через точку *VII*. Двигаем транспарант так, чтобы индекс не сходил с этих точек, пока перпендикулярный индекс не пройдет через точку *8* на шкале l. Тогда в пересечении этого индекса со шкалой M_0 мы прочтем искомое значение момента $M_0 = 2{,}05$ *тм*.

Для изображения уравнений с четырьмя переменными существует также так называемая пропорциональная номограмма, схематически изображенная на черт. 20 и состоящая из четырех шкал: AC — шкала (α_1), AB — шкала (α_2), DF — шкала (α_3) и DE — шкала (α_4). Если заданы значения α_1, α_2 и α_3, то надлежит соединить точки шкал AC и AB, помеченные соответственными значениями α_1 и α_2, прямой и затем из точки шкалы DF, помеченной заданным значением α_3, провести другую прямую параллельно предыдущей. В точке пересечения этой второй прямой со шкалой DE мы прочтем искомое значение α_4. Вместо проведения прямых обыкновенно пользуются транспарантом с густо начерченной на нем системой параллельных линий. Путем надлежащей ориентации этого транс-



Черт. 7.

наранта, наложенного на номограмму, можно заменить указанное выше построение, не пачкая чертежа.

Существует другой способ изображения уравнений с четырьмя и большим числом переменных, который основывается на соединении номограмм с тремя переменными при помощи так называемого графического исключения переменных. Принцип этого метода заключается в следующем: если например задано уравнение с четырьмя переменными:

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 0,$$

то его сперва приводят к виду:

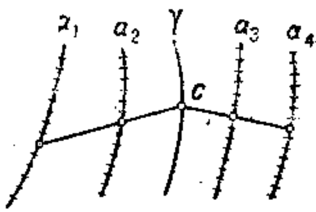
$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2) = \psi(\alpha_3, \alpha_4).$$

Это уравнение можно рассматривать, как результат исключения переменной γ из двух следующих:

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2) = \gamma,$$

$$\psi(\alpha_3, \alpha_4) = \gamma.$$

Мы таким образом данное нам уравнение с четырьмя переменными заменили двумя уравнениями, причем каждое из них заключает в себе лишь три переменные: первое будет заключать в себе переменные α_1, α_2 и γ, а второе α_3, α_4 и γ. Если для каждого из этих двух уравнений мы построим номограмму из выравненных точек, притом так, чтобы шкала переменной γ была общей для них, то мы получим номограмму, представленную схематически на черт. 8. Для того чтобы определить по заданным значениям α_1, α_2 и α_3 соответствующее α_4, надо очевидно действовать так: сперва по α_1 и α_2 проведением прямой определить значение γ в точке C, а затем по найденному γ и заданному α_3 определить α_4, соединяя точку C и точку, помеченную заданным значением α_3, другой прямой и продолжив ее до пересечения со шкалой (α_4). Мы видим из построения, что величину γ мы можем и не читать, а следовательно шкалу γ можно и не градуировать. Поэтому шкала γ называется **немой шкалой** и переменная γ при этой операции графически исключается.



Черт. 8.

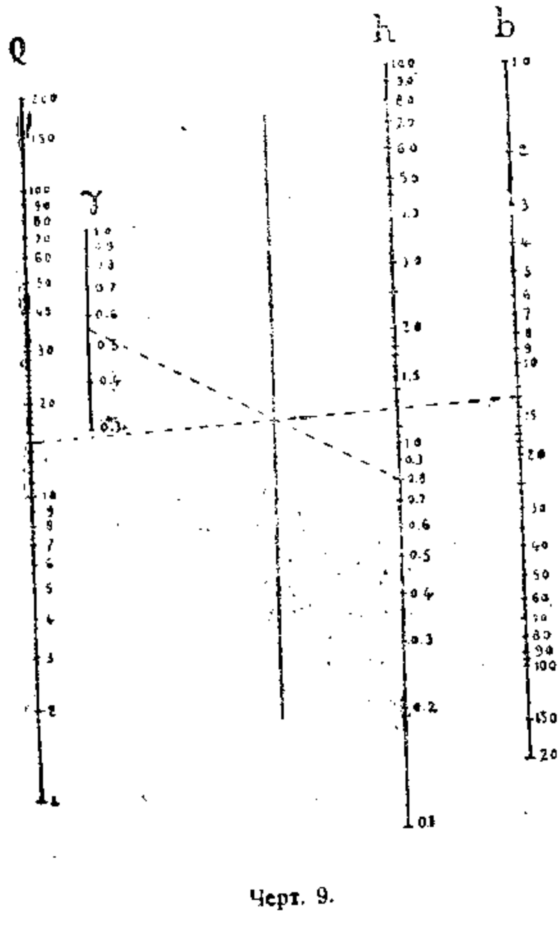
На черт. 9 приведен пример такого рода номограммы. Построена она для уравнения:

$$Q = \frac{2}{3}\gamma b \sqrt{2g} \cdot h^{3/2}$$

где Q — расход воды через водослив в куб. метрах в секунду,
b — ширина водослива в метрах,
h — толщина слоя переливающейся воды в метрах,
γ — коэфициент, зависящий от формы водослива,
g — 9,81 *м/сек²*.

На номограмме нанесены пять шкал: шкалы Q, γ, h и b и пятая шкала немая, и пунктиром показан ключ к пользованию номограммой. По заданным γ и h соединяем соответствующие помеченные точки прямой и точку пересечения этой прямой с немой шкалой соединяем с точкой, помеченной заданным значением b. Продолжая эту прямую до пересечения со шкалой Q, найдем искомое значение Q. На номограмме приведено решение: по данным $\gamma=0{,}55$, $h=0{,}8$ *м*, $b=13$ *м*, получается $Q=15$ *м³/сек*.

Помощью графического исключения переменных можно соединять номограммы различных типов. На черт. 10 приведен пример номограммы, где соединяются номограмма из выравненных точек с номограммой с крестообразным транспарантом. Номограмма эта заимствована из обширного сборника номограмм Секо, изданного испанским военным ведомством для целей военно-инженерной части.



Черт. 9.

Приведенная номограмма имеет целью расчет стропильной фермы ходового в Испании типа для различных крыш. Тип фермы приведен на номограмме. Состоит она из шкал:

l — пролет в метрах,

e — расстояние между двумя смежными фермами в метрах,

F — натяжение в элементах фермы в тоннах.

Ряд точек, соответствующих различным родам крыш: толевая, цинковая и т. д.

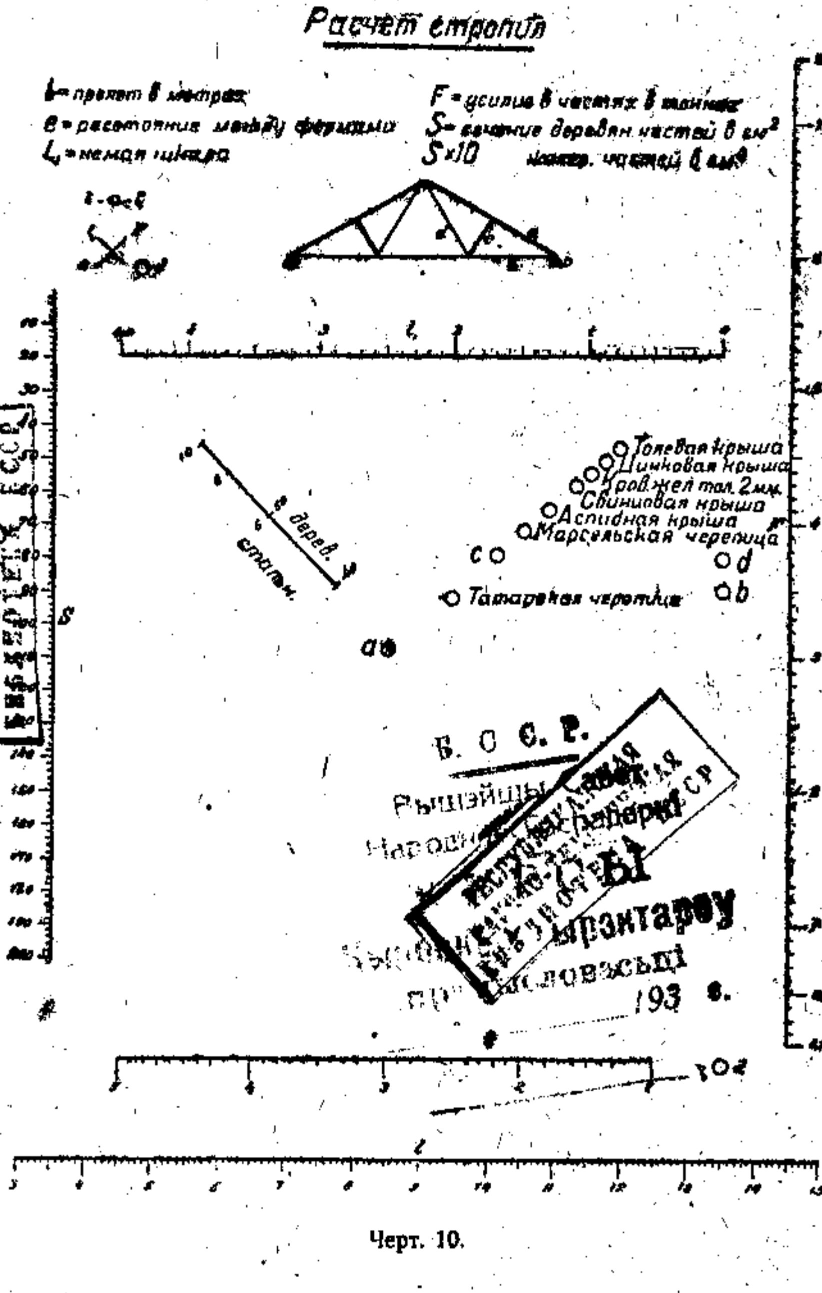
Ряд точек a, b, c и d, соответствующих различным элементам фермы, в которых желают определить натяжение.

l_1 — немая шкала (условно градуированная для легкости отметки точки пересечения ее с индексом).

На номограмме приведен ключ, согласно которому следует действовать так.

По заданному пролету l и роду крыши проводится прямая до пересечения со шкалой l_1; получив точку на l_1, надо крестообразный транспарант ориентировать так, чтобы найденная точка на l_1 и точка, соответствующая тому элементу фермы, в которой хотят определить напряжение (a, b c или d), легли на одном индексе, а перпендикулярный к нему индекс прошел бы через заданное значение на шкале (e), и находят F.

Получив усилие F в элементе фермы, можно определить и соответствующее сечение его S по заданному допускаемому напряжению. Для этого на номограмме нанесена шкала допускаемых



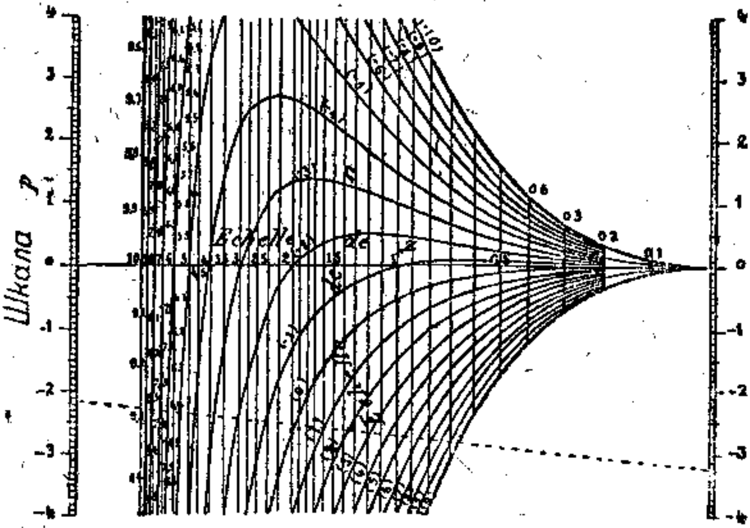
Черт. 10.

напряжений на дерево в килограммах на кв. сантиметр и шкала S— сечения элемента в кв. сантиметрах для дерева. Соединив точку F с соответствующей точкой шкалы напряжений, получим в пересечении со шкалой S искомое поперечное сечение. Таким же образом можно получить и сечение железного элемента.

Построение номограмм для уравнений со многими переменными может быть осуществлено введением бинарного поля (Окань) или бинарной шкалы (Прево).

Если на чертеже мы имеем две системы взаимно-пересекающихся помеченных линий, из коих одна система помечена значениями переменной α, а другая — значениями переменной β, то каждой точке такого чертежа будет соответствовать определенная пара значений переменных α и β, соответствующая тем двум кривым, которые пересекаются в данной точке. Такой чертеж называется бинарным полем переменных α и β или полем с двойными пометками.

В состав номограммы из выравненных точек можно вводить бинарное поле, благодаря чему число переменных в номограмме увеличивается. На черт. 12 схематически показана номограмма из



Черт. 11.

выравненных точек с двумя шкалами (α_1) и (α_2) и полем с двойными пометками α_3 и β_3.

Стало быть в такой номограмме мы имеем четыре переменных α_1, α_2, α_3 и β_3. По заданным значениям α_3 и β_3 мы отыскиваем точку в пересечении кривых, помеченных соответственными значениями α_3 и β_3, соединяем эту точку с точкой шкалы (α_1), имеющей заданную пометку α_1, и в пересечении этой прямой со шкалой (α_2) находим искомое значение α_2.

На черт. 11 представлена номограмма с бинарным полем для отыскания корня кубического уравнения:

$$z^3 + nz^2 + pz + q = 0$$

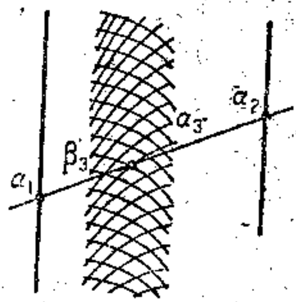
по заданным значениям коэфициентов n, p и q. Номограмма состоит из двух шкал (p) и (q) и бинарного поля (n, z). Последнее образовано системой вертикальных прямых, помеченных значениями z, и системой кривых, помеченных значениями n. Соединив точки

p и q прямой, мы находим точку пересечения ее с той кривой из системы (n), которая имеет пометкой заданное значение n. Тогда пометка вертикальной линии из системы (z), проходящий через эту точку, и будет искомым значением z. На номограмме пунктиром представлено решение уравнения:

$$z^3 + z^2 - 2{,}16\ z - 3{,}2 = 0,$$

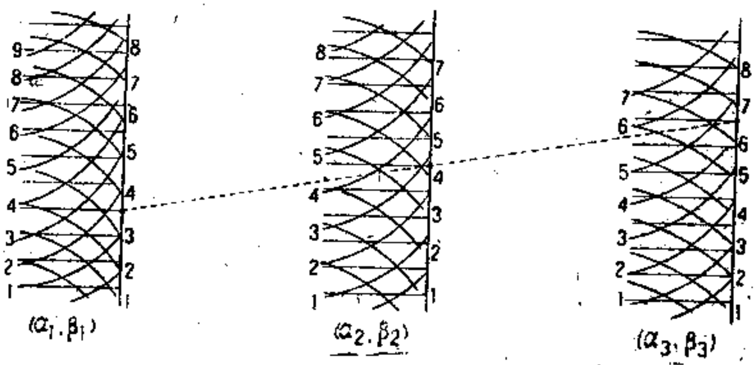
причем получается $z = 1{,}6$.

Бинарная шкала образуется прямой линией, к которой рядом пристроено бинарное поле двух переменных α и β. Для того чтобы на бинарной шкале найти точку, соответствующую определенной паре значений α и β, надо сперва найти точку бинарного поля, имеющую эту пару пометок, и спроектировать эту точку на вышеуказанную прямую линию, опустив на нее из найденной точки перпендикуляр.



Черт. 12.

На черт. 13 схематически представлена номограмма из выравненных точек с тремя бинарными шкалами 1 2 и 3-й. Эта номограмма связывает шесть переменных: α_1, β_1, α_2, β_2, α_3 и β_3. По заданным значениям α_1, β_1 находим точку на 1-й шкале; по значениям α_2, β_2 находим точку на 2-й шкале; соединив эти две точки прямой,

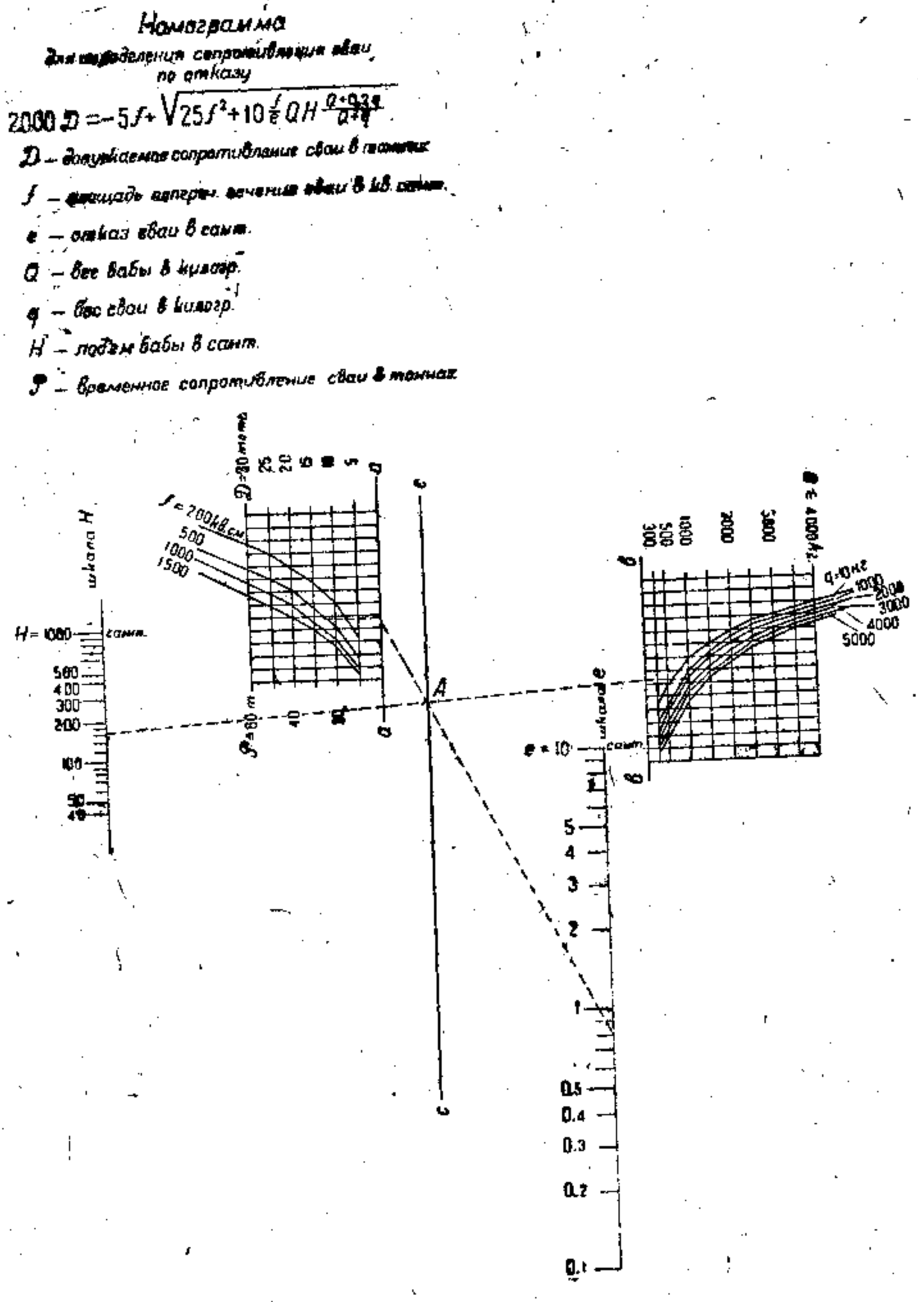


Черт. 13.

отмечаем точку пересечения прямой с 3-й бинарной шкалой; восставив из точки пересечения перпендикуляр к 3-й шкале, продолжаем его до пересечения с линией, помеченной заданным значением α_3. Тогда пометка кривой системы β_3, проходящей через точку пересечения этого перпендикуляра с кривою α_3, будет искомым значением β_3.

На черт. 14 приведена номограмма, построенная автором для вычисления допускаемого отказа сваи по допускаемой на нее нагрузке по формуле:

$$2\,000\ D = -5f + \sqrt{25f^2 + \frac{10f}{e} \cdot QH \frac{Q + 0{,}2\,q}{Q + q}},$$



Черт. 14.

где D — допускаемая нагрузка в тоннах,

f — площадь поперечного сечения сваи в кв. сантиметрах,

e — отказ сваи от одного удара бабы в сантиметрах,

H — высота подъема бабы в сантиметрах,

Q — вес бабы в килограммах,

q — вес сваи в килограммах.

Здесь шесть переменных. В номограмме имеются шкала переменной H и шкала переменной e и две бинарных шкалы: шкала (aa) с бинарным полем при ней переменных D и f и шкала (bb) с бинарным полем при ней переменных Q и q.

Кроме того имеется немая шкала CC.

По заданным значениям Q и q находится точка пересечения кривой q и прямой Q, помеченных соответственными значениями q и Q, и проектируется на прямую bb. Спроектированная точка на шкале (bb) соединяется прямой с точкой шкалы (H), помеченной соответственным значением H, и замечается точка пересечения этой прямой с немой шкалой CC. Назовем эту точку точкой A. Затем отыскивается точка пересечения кривой f и прямой D, помеченных заданными значениями f и D, и проектируется на прямую aa. Спроектированная точка соединяется прямой с точкой A, и прямая эта продолжается до пересечения со шкалой (e). В точке пересечения ее со шкалой (e) мы можем прочесть искомое значение отказа e.

§ 1. Общие соображения о построении номограмм.

Переходя к вопросу о построении номограмм, необходимо предпослать те основные требования, которые предъявляются к ним практикой их использования.

При построении номограммы по заданной формуле, совершенно так же, как и при построении таблиц, необходимо принять во внимание пределы и точность в ряде значений тех переменных, которые должны получить свое отражение в номограмме.

При решении каждого практического вопроса каждая независимая переменная имеет ограниченные пределы своего изменения, определяемые характером величин, входящих в формулу, и необходимо, чтобы все значения в указанных пределах уместились в границах чертежа. Мало того, необходимо сконструировать номограмму так, чтобы шкала, изображающая изменения соответствующей переменной в выбранных **пределах**, оставаясь в границах чертежа, получила бы наибольшее развитие в длину, дабы достигнуть наибольшей точности в определении значений переменной в вышеуказанных практикуемых формулой пределах переменной. Так например, обращаясь к приведенной нами номограмме (черт. 5) определения допускаемого изгибающего момента для двутаврого сечения для сортамента в 13 номеров, мы видим, что шкала (N), на которой нанесены номера профилей, имеет все требуемые пометки от № 1 до 13, причем все эти цифры расставлены настолько широко, насколько это позволяют границы чертежа, благодаря чему различать точки, соответствующие этим номерам, можно вполне отчетливо. Если же номограмма была бы построена так, что все указанные на шкале (N) цифры были бы, например, в 10 раз больше, т. е. вместо одного стояла бы цифра 10, вместо 2—20 и т. д., то пределы переменной были бы от 10 до 130. А так как нас интересуют в данном случае номера в пределах 1—13, то в результате мы получили бы номограмму совершенно непригодную. В самом деле, почти вся шкала (N) от точки № 13 до № 130 оставалась бы праздной. Полезные же точки от № 10 до № 13 были бы так тесно сбиты в верхней части шкалы, что точность определения совершенно бы утратилась и наконец значительная часть интересующих нас значений N от 1 до 9 совершенно выпала бы из номограммы.

Из этого примера видно, насколько важно приспособить номограмму к заданным пределам и точности значений независимых переменных, входящих в формулу. Что касается пределов и точности значений зависимой переменной, то по существу они не могут быть заданы, т. к. *пределы и точность зависимой переменной определяются пределами и точностью независимых переменных.*

Итак нормальная номограмма должна давать возможность приспособить шкалы независимых переменных к заданным пределам и точности независимых переменных. Такие номограммы мы называем **приспособляемыми**. Мы увидим, что не все номограммы этому удовлетворяют. Кроме указанного главного условия приспособляемости при построении номограммы надлежит иметь в виду также удобное взаимное расположение шкал, дающее возможность расположить между ними те или иные надписи или таблицы (как например в вышеуказанной номограмме двутавровых сечений). Шкалы не должны быть располагаемы так, чтобы при установке индекса последний пересекал их под очень острым углом; иначе получается неточность в определении точек пересечения индекса со шкалой. В тех же видах две шкалы, соответствующие независимым переменным, не должны близко подходить друг к другу, так как точность в установке индекса падает по мере того, как две точки, определяющие положение индекса, приближаются друг к другу. Так например в вышеуказанной номограмме (черт. 5) шкалы независимых переменных R и N намеренно расставлены далеко друг от друга. Если бы требовалось построить номограмму с целью определения по заданным M_0 и N величины R, то следовало бы отодвинуть шкалу (N) от шкалы (M_0), так как близость точек этих шкал, особенно в верхней части шкалы (N), вызывает недостаточную точность в ориентировке индекса, например для значений $N = 1$ и $M_0 = 0{,}1$.

Наконец третьим условием при выборе типа номограмм является требование построения ее с наименьшим количеством вычислений и труда, так как в этом заключается одна из существенных задач номографии.

Теория номограмм и занимается разработкой приемов, направленных к удовлетворению всех перечисленных требований практического характера.

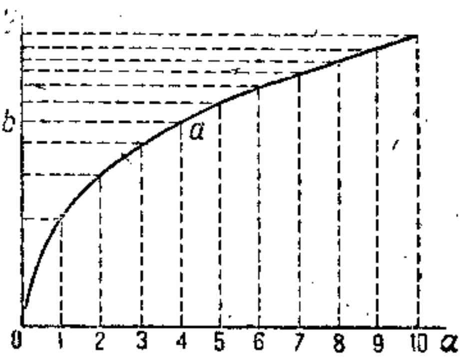
В заключение общих соображений построения номограмм упомянем о масштабе, необходимом для их вычерчивания.

При построении каких-либо чертежей или графиков, как известно, в первую очередь возникает вопрос о наиболее удобном масштабе чертежа, дабы весь рисунок уместился в рамках того листа бумаги, на котором его изображают, и вместе с тем, чтобы он был достаточно крупным в целях тех операций, для которых он предназначается. Казалось бы этот вопрос должен иметь существенное значение и в отношении номограмм. Однако же, как читатель убедится из последующего изложения, вопрос о масштабе построения номограмм не играет никакой роли; всякая номограмма может строиться в любом масштабе, например принимая единицу равной 1 *см* или равной 1 *м* и т. д. Обстоятельство это объясняется тем, что надлежащим выбором масштаба не имеется возможности удовлетворить всем тем разнообразным требованиям в отношении номограмм, которые изложены в начале этого параграфа, а потому эти требования удовлетворяются другими — чисто математическими приемами, не имеющими связи с масштабом чертежа; таким образом, чтобы не возвращаться более к этому вопросу и имея в виду единообразие и удобство изложения, мы в дальнейшем будем предполагать, что все номограммы строятся в масштабе $1 = 1$ *см.*

Нам кажется, что этот масштаб наиболее удобен для построения номограмм, а потому мы постоянно будем его придерживаться.

§ 2. Построение прямолинейной шкалы.

В основе происхождения прямолинейной шкалы лежит общеизвестный метод изображения функции от одной независимой переменной помощью кривой, начерченной в прямоугольной системе координат. Рассмотрим зависимость переменной y от переменной α, заданную в виде уравнения $y = \varphi(\alpha)$ и выраженную в виде кривой (черт. 15), причем по оси абсцисс будем откладывать значения переменной α, а по оси ординат значения функции y; для того чтобы по этому графику определить значение функции y, соответствующее определенному значению α, например значению $\alpha = 4$, надо, исходя из точки оси абсцисс, соответствующей значению $\alpha = 4$, проследить по вертикальной линии до пересечения ее с кривой в точке a, а затем из точки a проследить по горизонтальной линии до пересечения ее с осью ординат в точке b. Тогда отрезок оси ординат Ob, измеренный в масштабе чертежа, даст значение $y = \varphi(4)$; при таком использовании графика само собой возникает вопрос о бесполезности всего чертежа, так как для определения $y = \varphi(4)$ достаточно цифру 4 поставить не на горизонтальной оси абсцисс, а непосредственно у точки b. Если мы разметим таким образом на оси ординат все точки, определяющие значения функции y для различных значений α, то вся правая часть чертежа окажется излишней, и у нас останется шкала функции $\varphi(\alpha)$, с помощью которой можно выполнить ту же операцию, что на вышеописанном графике.



Черт. 15.

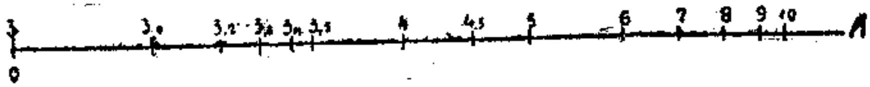
Таким образом прямолинейная шкала функции $\varphi(\alpha)$ даст значение этой функции для каждого значения переменной α в виде отрезка $y=\varphi(\alpha)$, измеренного в масштабе чертежа и заключающегося между точкой O, называемой **н а ч а л о м ш к а л ы**, и той точкой шкалы, которая помечена соответствующим значением α.

Построение шкалы заданной функции $\varphi(\alpha)$ на заданной прямой OA (черт. 16) осуществляется следующим образом: на прямой выбирается точка O, называемая началом шкалы; затем пишется уравнение,

$$y=\varphi(\alpha), \tag{1}$$

называемое уравнением шкалы. После чего переменной придается ряд частных значений; эти значения подставляются в уравнение (1), и полученные величины y откладываются в принятом масштабе ($1=1$ *см*) от точки O, а концы отложенных отрезков помечаются соответствующими значениями α.

Значения α выбираются таким образом, чтобы последовательный ряд этих значений составлял арифметическую прогрессию; это делается ради удобства интерполирования при пользовании шкалой, дабы значения α, соответствующие всем точкам шкалы, лежащим в промежутках между помеченными точками, можно было бы оце-



Черт. 16.

нивать на-глаз. Разность вышеуказанной прогрессии называется **с т у п е н ь ю ш к а л ы**; пусть для примера функция $\varphi(\alpha)$ при $\alpha=3$ обращается в нуль, т. е. $\varphi(3)=0$; в таком случае пометка начала шкалы будет равна 3. Придадим затем переменной α ряд значений: 3,1; 3,2; 3,3 и т. д.; вычислив соответственные величины $y=\varphi(3,1)$, $y=\varphi(3,2)$ т. д., отложим эти величины от точки O и пометим концы отрезков соответствующими пометками. В таком случае мы получим ряд помеченных точек, изображенных на черт. 16. Ступень шкалы в данном случае будет равна 0,1; при выборе ступени шкалы следует иметь в виду, чтобы расстояние между двумя смежными помеченными точками, называемое **г р а ф и ч е с к и м и н т е р в а л о м**, не было бы ни очень большим, ни очень малым, так как иначе затрудняется интерполирование на-глаз. Обыкновенно ступень выбирается так, чтобы графический интервал был не более 1,5 *см* и не менее 2 *мм*. При постоянстве ступени, вообще говоря, графические интервалы не равны, т. е. либо увеличиваются, либо уменьшаются по мере возрастания значения переменной, а потому ступень шкалы приходится менять на различных участках шкалы. Так например на черт. 16 при $\alpha=3,5$ графический интервал делается настолько малым, что, начиная с этого значения, α ступень шкалы назначена в 0,5 вместо прежней 0,1; а с $\alpha=5$ ступень принята равной 1.

Из всего вышеизложенного построения видно, что ступень шкалы не может быть выбрана нами по произволу, так как она зависит исключительно от свойства изображаемой функции $\varphi(\alpha)$. Обстоятельство это весьма существенно, так как ступень шкалы определяет степень точности в определении переменной α. Если например по роду вопроса нам необходимо получить шкалу, определяющую α с точностью до 0,01, то ясно, что шкала, построенная на черт. 16 со ступенями в 0,1; 0,5 и 1, нас удовлетворить не может. Казалось бы, что неудобство это могло бы быть устранено изменением масштаба чертежа. Однако на этот путь становиться не приходится, так как в каждой номограмме имеется по несколько шкал и изменение масштаба в угоду одной шкале может повредить другим шкалам, и надлежит искать других выходов с целью устранения указанного неудобства, к чему мы сейчас и переходим.

Напишем уравнение:

$$y = a\varphi(\alpha), \tag{2}$$

где a есть некоторое постоянное произвольное число, называемое **модулем**; построим шкалу по этому уравнению и сравним со шкалой, построенной по уравнению (1). Если мы подставим в уравнение (2) $\alpha = 3$, то получим $y = 0$, т. е. начало шкалы будет иметь ту же пометку, что и начало предыдущей шкалы. Подставляя же в уравнение (2) $\alpha = 3{,}1$; 3,2 и т. д., мы получим отрезки в a раз большие (если число a больше единицы), нежели в предыдущей шкале. Получится такой эффект, как если бы шкалу уравнения (1), начерченную на резиновой ленте, растянули, ухватившись за правый конец, придерживая начало шкалы в пределах чертежа в точке O. Таким образом графические интервалы в области, примыкающей к точке O, увеличатся, в силу чего мы их можем поделить на более мелкие части, и ступень шкалы может быть произвольно понижена. Вместе с тем правый предел переменной в границах чертежа понизится, так как вся правая часть шкалы вытянется за пределы чертежа.

Таким образом путем введения модуля можно произвольно увеличивать и уменьшать точность шкалы в той ее части, которая примыкает к ее началу, а также можно изменять предельное значение переменной, умещающееся в границах чертежа, причем однако другое предельное значение переменной, находящееся в начале шкалы, остается неизменным. Это последнее обстоятельство указывает на то, что путем введения модуля мы не можем при построении шкалы заданной функции произвольно назначать предельных значений ее. Предположим для примера, что при построении шкалы (черт. 16) нас интересует получить на шкале значения переменной от $\alpha = 5$ до $\alpha = 6$; при таком требовании шкала, изображенная на черт. 16, нас удовлетворить не может, так как она не дает возможности развить в пределах от $\alpha = 5$ до $\alpha = 6$ надлежащей точности, и точки, помеченные этими числами, надо раздвинуть елико возможно больше, дабы между ними можно было нанести более мелкие деления для достижения возможной точности отсчета. Если мы это раздвижение осуществим путем введения надлежащего модуля a, то вся шкала растянется, и участок, лежащий между пометками 5 и 6, выскочит за пределы чертежа.

Для того чтобы вдвинуть этот участок в пределы чертежа, можно вместо уравнения (2) построить шкалу по уравнению:

$$y = a\varphi\ (\alpha) + b, \tag{3}$$

где b есть новое постоянное число, которое мы назовем ориентировочным коэфициентом. Сравнивая шкалу, построенную по уравнению (2), со шкалой, построенной по уравнению (3), легко видеть, что все точки второй шкалы, имеющие одинаковые с первой шкалой пометки, будут сдвинуты по прямой на величину b; вся шкала, не изменяя своего характера, путем соответственного выбора значения b, может сместиться вдоль прямой, причем пометка начала шкалы изменится. Таким образом, располагая величинами модуля a и ориентировочного коэфициента b, мы можем растягивать, сжимать и передвигать шкалу вдоль прямой и достигнуть того, что в начале шкалы и в конце ее в пределах чертежа будут стоять любые две наперед заданные пометки α. Если мы желаем, чтобы в начале шкалы стояла пометка n, а в конце шкалы пометка p, причем длина шкалы должна быть 25 *см*, то мы должны иметь:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = a\varphi\ (n) + b \\ 25 = a\varphi\ (p) + b \end{array}\right\}. \tag{4}$$

Из двух уравнений (4) мы можем определить две величины a и b, после чего и построить шкалу по уравнению (3).

Принимая во внимание соображения о построении номограмм, приведенные в предыдущем параграфе, мы можем таким образом установить, что приспособляемая номограмма должна давать возможность при изображении заданного уравнения вводить для каждой независимой переменной при построении соответствующей шкалы по два совершенно произвольных коэфициента a и b, дабы мы могли ими распорядиться по произволу. Номограммы, не удовлетворяющие этому условию, мы будем называть не вполне приспособляемыми и будем отмечать их как несовершенные типы, применения коих надо избегать.

Пример построения шкалы.

Положим, что требуется построить шкалу корневой функции $\sqrt{\alpha}$, причем переменная α изменяется от значения $\alpha = 25$ до значения $\alpha = 35$.

Составляем уравнение шкалы:

$$y = a\sqrt{\alpha} + b,$$

причем модуль a и ориентировочный коэфициент b определяем так, чтобы пометки крайних точек шкалы были бы приблизительно 25 и 35; длину шкалы назначим в 25 *см*.

В таком случае имеем:

$$0 = a\sqrt{25} + b = 5a + b;$$

$$25 = a\sqrt{35} + b = 5{,}94a + b;$$

из этих двух равенств получаем:

$$a = 27{,}17;\ b = -135{,}85,$$

округляем полученные значения a и b и принимаем:

$$a = 27;\ b = -135,$$

и получаем окончательное уравнение шкалы:

$$y = 27\sqrt{\alpha} - 135.$$

Для определения ступени шкалы θ, у начала шкалы ставим условие, чтобы графический интервал был примерно равен 1 *см*. Эту ступень мы можем определить из разности величин y, соответствующих двум смежным точкам, помеченным числами $25+\theta$ и 25, т. е. имеем:

$$[27\sqrt{25+\theta} - 135] - [27\sqrt{25} - 135] = 27\sqrt{25+\theta} - 27\sqrt{25} = 1;$$

определяя из этого уравнения θ, получаем:

$$\theta = 0{,}40;$$

округляем эту величину и принимаем ради удобства ступень шкалы $\theta = 0{,}5$; приняв эту ступень, наносим по уравнению шкалы точки, имеющие пометки $\alpha = 25$; 25,5; 26,0; 26,5 и т. д.

По мере нанесения этих точек графический интервал между ними будет постепенно уменьшаться, и если при известном значении $\alpha = \alpha_n$ графический интервал сделается настолько малым, что дальнейшее сохранение той же ступени будет сочтено неудобным, то можно перейти к новой ступени, приноровленной к пометке $\alpha = \alpha_n$, совершенно так же, как мы определили выше величину ступени, приноровленную к пометке $\alpha = 25$, стоящей в начале шкалы.

Если функция $\varphi(\alpha) = \alpha$, то уравнение шкалы будет:

$$y = a\alpha + b.$$

Такая шкала имеет равные графические интервалы и потому особенно легко строится. Примером такой шкалы может служить любая масштабная линейка. Она обыкновенно именуется **равномерной шкалой.**

§ 3. Принцип построения номограмм.

Каждая номограмма состоит из нескольких шкал, соответственно числу переменных в изображаемом уравнении, причем эти шкалы имеют различное расположение в зависимости от того или иного типа номограммы. Возьмем для примера номограмму трех переменных α_1, α_2 и α_3, состоящую из трех шкал; пусть уравнения этих шкал будут:

$$y_1 = \varphi_1(\alpha_1);\ y_2 = \varphi_2(\alpha_2);\ y_3 = \varphi_3(\alpha_3); \tag{5}$$

Если мы наложим на эти три шкалы индекс с целью определения α_3 по переменным α_1 и α_2, то этот индекс вместе с отсеченными им отрезками шкал y_1, y_2 и y_3 составит известную геометрическую фигуру, на основании которой можно вывести зависимость:

$$F(y_1, y_2, y_3) = 0, \tag{6}$$

которую можно назвать **уравнением геометрической связи**, зависящим от вида этой геометрической фигуры, т. е. от типа номограммы. Подставив в уравнение (6) уравнения шкал (5), получим зависимость между α_1, α_2 и α_3, изображаемую этой номограммой, в виде:

$$F[\varphi_1(\alpha_1), \varphi_2(\alpha_2), \varphi_3(\alpha_3)] = 0. \tag{7}$$

Таким образом каждому типу номограммы соответствует определенный тип уравнения (7). В этом типе уравнения функции φ_1, φ_2 и φ_3 могут быть какие угодно, но эти функции должны входить в состав уравнения вполне определенным образом, определяемым уравнением (7).

Установив таким образом соответствие между определенным типом уравнения и определенным типом номограммы, номография решает и обратный вопрос, требуемый практикой построения номограмм, а именно: по заданному уравнению с тремя переменными α_1, α_2 и α_3 построить номограмму. Для этого нужно выяснить, к какому типу зависимости заданное уравнение может быть отнесено или приведено путем тех или иных преобразований. Когда это приведение будет сделано и соответствующий тип номограммы будет выяснен, то мы можем написать уравнение трех шкал (5), а по этим уравнениям могут быть построены и самые шкалы.

Если тип уравнения (7) будет таков, что он допускает подстановку в уравнение (7) вместо $\varphi_1(\alpha_1)$ и $\varphi_2(\alpha_2)$ выражений $a\varphi_1(\alpha_1) + b$ и $c\varphi_2(\alpha_2) + d$ при совершенно произвольных коэфициентах a, b, c и d, причем эта подстановка не нарушает первоначальной зависимости (7), то мы имеем случай вполне приспособляемой номограммы.

Вышеизложенные общие принципы всего яснее обнаруживаются на нижеприведенных конкретных случаях.

§ 4. Номограмма с тремя параллельными шкалами.

Рассмотрим номограмму, состоящую из трех пареллельных шкал трех переменных α_1, α_2 и α_3, причем шкала переменной α_3 находится посредине между двумя остальными (черт. 17). Пусть уравнение этих трех шкал будут уравнения (5) и пусть начало всех трех шкал лежат на линии AB, перпендикулярной к шкалам. При наложении индекса образуется трапеция, стороны которой будут отрезки y_1 и y_2, а средняя линия — отрезок y_3. На основании свойств средней линии трапеции можем написать:

$$2y_3 = y_1 + y_2; \tag{8}$$

это и будет уравнение геометрической связи. Подставив сюда выражения y_1, y_2 и y_3 из (5), получаем соответственный тип уравнения:

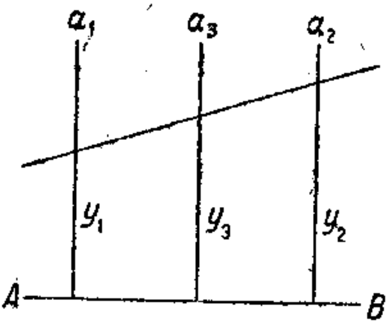
$$2\varphi_3(\alpha_3) = \varphi_1(\alpha_1) + \varphi_2(\alpha_2),$$

который может быть очевидно представлен в виде:

$$f_3(\alpha_3)=f_1(\alpha_1)+f_2(\alpha_2). \tag{9}$$

Таким образом всякое уравнение, приведенное к типу (9), может быть изображено вышеуказанным типом номограммы. Остается посмотреть, нельзя ли, не нарушая равенства (9), ввести в него произвольные коэфициенты. Для этого мы можем помножить уравнение (9) на произвольный множитель a, а затем прибавить к обеим частям равенства произвольные числа b и c:

$$af_3(\alpha_3)+b+c= \\ =af_1(\alpha_1)+b+af_2(\alpha_2)+c; \tag{10}$$



Черт. 17.

сравнивая уравнение (10) с уравнением (8), получаем:

$$y_1=af_1(\alpha_1)+b; \tag{11}$$

$$y_2=af_2(\alpha_2)+c; \tag{12}$$

$$2y_3=af_3(\alpha_3)+b+c,$$

откуда:

$$y_3=\frac{a}{2}f_3(\alpha_3)+\frac{b+c}{2}; \tag{13}$$

уравнения (11), (12) и (13) представляют собой уравнения трех шкал переменных α_1, α_2, α_3. Для шкалы (α_1) мы можем выбрать модуль a и ориентировочный коэфициент b совершенно по нашему усмотрению. Для шкалы (α_2) мы можем выбрать по усмотрению лишь ориентировочный коэфициент c, так как ее модуль a предрешен потребностями построения шкалы (α_1). Из этого видно, что рассмотренная номограмма принадлежит к типу не вполне приспособляемых номограмм.

§ 5. Вполне приспособляемая номограмма с тремя параллельными шкалами.

Недостаток предыдущей номограммы, заключающийся в том, что мы не можем вводить в нее произвольного модуля для второй независимой переменной, может быть устранен, если мы откажемся от того, чтобы шкала переменной α_3 располагалась непременно посредине между остальными двумя шкалами (черт. 18). Рассмотрим номограмму, состоящую из трех параллельных шкал, причем средняя шкала переменной α_3 расположена не посредине между остальными двумя шкалами. Пусть расстояние между шкалами (α_1) и $(\alpha)_2$ будет равно l и пусть шкала (α_3) находится в расстоянии m от шкалы (α_1).

Составим сперва уравнение геометрической связи. Наложением индекса на номограмму мы опять-таки получаем трапецию с двумя сторонами y_1 и y_2, отсекаемыми индексом от шкал. Если мы через точку пересечения индекса со шкалой (α_1) проведем горизонтальную прямую, изображенную на черт. 18 пунктиром, то эта линия отсечет в верхней части трапеции два подобных прямоугольных треугольника, причем катеты малого треугольника, как это следует из чертежа, будут равны $(y_3 - y_1)$ и m, а катеты большого треугольника равны $(y_2 - y_1)$ и l. Из подобия треугольников следует:

$$\frac{y_3 - y_1}{m} = \frac{y_2 - y_1}{l}$$

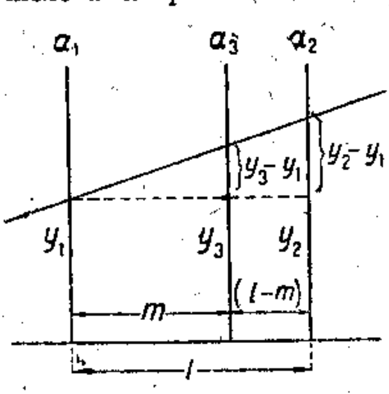
или, перенося члены этого равенства из одной части в другую,

$$\frac{y_3}{m} = y_1\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{l}\right) + \frac{y_2}{l}; \tag{14}$$

это и будет уравнением геометрической связи. Легко видеть, что номограммой этой можно изобразить уравнение типа:

$$f_3(\alpha_3) = f_1(\alpha_1) + f_2(\alpha_2). \tag{15}$$

В самом деле, помножив сперва это уравнение на произвольное число a и прибавив затем к обеим частям равенства произвольные числа b и c, мы не нарушим этого равенства и получим:



Черт. 16.

$$af_3(\alpha_3) + b + c = \\ = af_1(\alpha_1) + b + af_2(\alpha_2) + c. \tag{16}$$

Сравнивая уравнение (16) с уравнением (14) получаем:

$$y_1\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{l}\right) = af_1(\alpha_1) + b; \quad \frac{y_2}{l} = \\ = af_2(\alpha_2) + c; \quad \frac{y_3}{m} = af_3(\alpha_3) + b + c;$$

откуда получаем уравнения для построения шкал:

$$v_1 = a\frac{ml}{l-m} f_1(\alpha_1) + b\frac{ml}{l-m};$$
$$y_2 = alf_2(\alpha_2) + cl;$$
$$y_3 = amf_3(\alpha_3) + bm + cm. \tag{16 bis}$$

Уравнения шкал независимых переменных (α_1) и (α_2) можем для краткости написать в виде:

$$y_1 = kf_1(\alpha_1) + p, \tag{17}$$
$$y_2 = rf_2(\alpha_2) + s, \tag{18}$$

где модули k и r и ориентировочные коэфициенты p и s будут:

$$k = a\frac{ml}{l-m}; \tag{19}$$

$$r = al; \tag{20}$$

$$p = b\frac{ml}{l-m}; \tag{21}$$

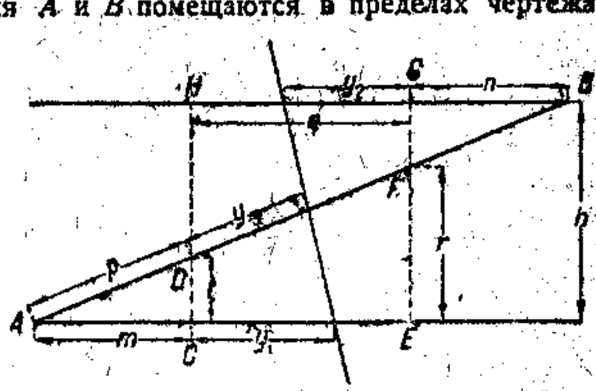
$$s = cl. \tag{22}$$

Откладывая эту величину на проведенной горизонтальной линии от начала шкалы (g), получим начало третьей шкалы (W). Проводим через эту точку прямую, параллельную остальным двум шкалам и наносим на ней шкалу по уравнению (25), т. е.

$$y_3 = \frac{10 \cdot 16}{10 + 16} \log W + \frac{16 \cdot 8 - 11 \cdot 10}{10 + 16} = 6{,}154 \log W + 0{,}692.$$

§ 6. Вполне приспособляемая Z-номограмма.

Рассмотрим теперь номограмму, состоящую из трех прямолинейных шкал, из коих две шкалы (AE) и (HB) параллельны между собой, а третья — (AB) пересекает их в точках A и B (черт. 19). Если точки пересечения A и B помещаются в пределах чертежа, то такая номограмма по своему виду напоминает букву Z, а потому носит название Z-номограммы. Однако если ставить непременным условием, чтобы точки пересечения A и B помещались в пределах чертежа, то такая номограмма не будет вполне приспособляемою, а потому мы откажемся от этого условия и предположим, что точки A и B могут лежать и за пределами чертежа. Пусть пределы чертежа определяются размерами прямоугольника $CHGE$ высотой h сантиметров и длиной q сантиметров, отмеченного на черт. 19 пунктирными линиями HC и GE. Таким образом номограмма состоит из шкалы (CE)—переменной α_1, шкалы (GH) — переменной α_2 и наклонной шкалы (DF) — переменной α_3. Примем точки C, D и G за соответственные начала этих трех шкал. Если мы наложим на номограмму прямолинейный индекс в любом положении, то он в пересечении с фигурой $HBAE$ образует два подобных треугольника и, если обозначить расстояние начала C от точки A через m, расстояние начала D от точки A — через p и расстояние начала G от точки B — через n, то на основании подобия этих треугольников можем написать уравнение геометрической связи:



Черт. 19.

$$\frac{y_1 + m}{y_2 + n} = \frac{y_3 + p}{l - y_3 - p}, \tag{26}$$

где через l обозначена длина отрезка AB.

Уравнение (26) показывает, что помощью этой номограммы можно изобразить уравнение вида:

$$\frac{f_1(\alpha_1)}{f_2(\alpha_2)} = f_3(\alpha_3). \tag{27}$$

ника, причем катеты малого треугольника, как это следует из чертежа, будут равны $(y_3 - y_1)$ и m, а катеты большого треугольника равны $(y_2 - y_1)$ и l. Из подобия треугольников следует:

$$\frac{y_3 - y_1}{m} = \frac{y_2 - y_1}{l}$$

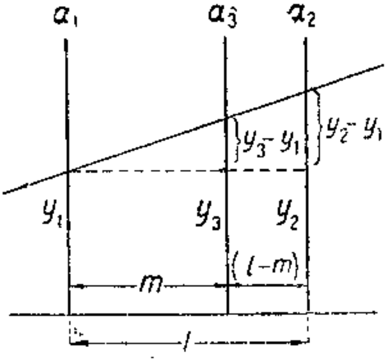
или, перенося члены этого равенства из одной части в другую,

$$\frac{y_3}{m} = y_1\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{l}\right) + \frac{y_2}{l}; \tag{14}$$

это и будет уравнением геометрической связи. Легко видеть, что номограммой этой можно изобразить уравнение типа:

$$f_3(\alpha_3) = f_1(\alpha_1) + f_2(\alpha_2). \tag{15}$$

В самом деле, помножив сперва это уравнение на произвольное число a и прибавив затем к обеим частям равенства произвольные числа b и c, мы не нарушим этого равенства и получим:



Черт. 18.

$$af_3(\alpha_3) + b + c = \\ = af_1(\alpha_1) + b + af_2(\alpha_2) + c. \tag{16}$$

Сравнивая уравнение (16) с уравнением (14) получаем:

$$y_1\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{l}\right) = af_1(\alpha_1) + b; \quad \frac{y_2}{l} = \\ = af_2(\alpha_2) + c; \quad \frac{y_3}{m} = af_3(\alpha_3) + b + c;$$

откуда получаем уравнения для построения шкал:

$$v_1 = a\frac{ml}{l-m} f_1(\alpha_1) + b\frac{ml}{l-m};$$
$$y_2 = alf_2(\alpha_2) + cl;$$
$$y_3 = amf_3(\alpha_3) + bm + cm. \tag{16 bis}$$

Уравнения шкал независимых переменных (α_1) и (α_2) можем для краткости написать в виде:

$$y_1 = kf_1(\alpha_1) + p, \tag{17}$$
$$y_2 = rf_2(\alpha_2) + s, \tag{18}$$

где модули k и r и ориентировочные коэфициенты p и s будут:

$$k = a\frac{ml}{l-m}; \tag{19}$$

$$r = al; \tag{20}$$

$$p = b\frac{ml}{l-m}; \tag{21}$$

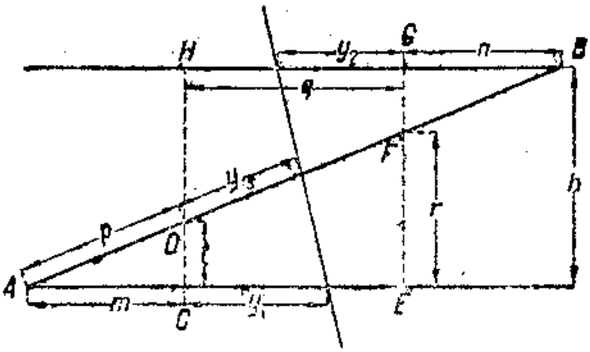
$$s = cl. \tag{22}$$

Откладывая эту величину на проведенной горизонтальной линии от начала шкалы (g), получим начало третьей шкалы (W). Проводим через эту точку прямую, параллельную остальным двум шкалам и наносим на ней шкалу по уравнению (25), т. е.

$$y_0 = \frac{10 \cdot 16}{10 + 16} \log W + \frac{16 \cdot 8 - 11 \cdot 10}{10 + 16} = 6{,}154 \log W + 0{,}692.$$

§ 6. Вполне приспособляемая Z-номограмма.

Рассмотрим теперь номограмму, состоящую из трех прямолинейных шкал, из коих две шкалы (AE) и (HB) параллельны между собой, а третья — (AB) пересекает их в точках A и B (черт. 19). Если точки пересечения A и B помещаются в пределах чертежа, то такая номограмма по своему виду напоминает букву Z, а потому носит название Z-номограммы. Однако если ставить непременным условием, чтобы точки пересечения A и B помещались в пределах чертежа, то такая номограмма не будет вполне приспособляемою, а потому мы откажемся от этого условия и предположим, что точки A и B могут лежать и за пределами чертежа. Пусть пределы чертежа определяются размерами прямоугольника $CHGE$ высотой h сантиметров и длиной q сантиметров, отмеченного на черт. 19 пунктирными линиями HC и GE. Таким образом номограмма состоит из шкалы (CE) — переменной α_1, шкалы (GH) — переменной α_2 и наклонной шкалы (DF) — переменной α_3. Примем точки C, D и G за соответственные начала этих трех шкал. Если мы наложим на номограмму прямолинейный индекс в любом положении, то он в пересечении с фигурой $HBAE$ образует два подобных треугольника и, если обозначить расстояние начала C от точки A через m, расстояние начала D от точки A — через p и расстояние начала G от точки B — через n, то на основании подобия этих треугольников можем написать уравнение геометрической связи:



Черт. 19.

$$\frac{y_1 + m}{y_2 + n} = \frac{y_3 + p}{l - y_3 - p}, \tag{26}$$

где через l обозначена длина отрезка AB.

Уравнение (26) показывает, что помощью этой номограммы можно изобразить уравнение вида:

$$\frac{f_1(\alpha_1)}{f_2(\alpha_2)} = f_3(\alpha_3). \tag{27}$$

В самом деле, умножив уравнение (27) на отношение $\frac{a}{b}$, где a и b — совершенно произвольные числа, получим:

$$\frac{a \cdot f_1(\alpha_1)}{b \cdot f_2(\alpha_2)} = \frac{af_3(\alpha_3)}{b}. \tag{28}$$

Сравнивая уравнение (28) с (26), можем положить:

$$y_1 + m = af_1(\alpha_1);$$

$$y_2 + n = bf_2(\alpha_2);$$

$$\frac{y_3 + p}{l - y_3 - p} = \frac{af_3(\alpha_3)}{b}.$$

Решая эти три уравнения относительно y_1, y_2 и y_3, получим уравнения трех шкал:

$$y_1 = af_1(\alpha_1) - m; \tag{29}$$

$$y_2 = bf_2(\alpha_2) - n; \tag{30}$$

$$y_3 = \frac{l}{2} \cdot \frac{af_3(\alpha_3) - b}{af_3(\alpha_3) + b} + \frac{l}{2} - p. \tag{31}$$

Для построения шкалы переменной α_3 нам еще необходимо определить из черт. 19 величину коэфициентов l и p, входящих в уравнение (31). Для величины l можем на основании черт. 19 написать:

$$l = \sqrt{h^2 + (m + q + n)^2}, \tag{32}$$

а для определения p можем написать:

$$\frac{p}{m} = \frac{l}{\sqrt{l^2 - h^2}} = \frac{l}{m + q + n}. \tag{33}$$

Для точного определения положения шкалы переменной α_3 мы еще должны найти точки D (начало) и F, которые определяются расстоянием их t и r от шкалы (CE). Из черт. 19 мы можем видеть, что:

$$\frac{t}{p} = \frac{h}{l}; \quad \frac{r}{m + q} = \frac{t}{m};$$

откуда:

$$t = p \cdot \frac{h}{l}; \tag{34}$$

$$r = (m + q) \cdot \frac{ph}{m \cdot l}. \tag{35}$$

Таким образом для построения Z-номограммы по заданному уравнению (27) можем установить следующее

Правило. Проводим две параллельные линии CE и HG длиной q и в расстоянии h друг от друга, причем величины q и h выбираются нами произвольно сообразно желаемым размерам чертежа. На прямой CE от точки C как от начала строится шкала по уравнению (29), где a и m выбираются нами произвольно, а на прямой GH, от точки G как от начала наносится шкала по уравнению (30), где b и n также могут быть выбраны нами произвольно. По выбранным значениям m, q, n и h определяем из уравнения (32) величину l, а из уравнения (33) величину p. Восставив затем в точках C и E перпендикуляры, отложим на них отрезки $CD = t$ и $EF = r$, причем t и r определяются из уравнения (34) и (35). Соединив точки D и F прямой, наносим на ней от точки D как от начала шкалу по уравнению (31).

Пример. Пусть требуется составить номограмму уравнения Ляме:

$$\gamma = \sqrt{\frac{R+P}{R-P}} - 1, \tag{36}$$

где P — давление жидкости внутри водопроводной трубы в килограммах на кв. миллиметр, R — максимальное напряжение материала трубы в килограммах на кв. миллиметр, γ — отношение толщины стенки трубы к внутреннему диаметру ее.

Для приведения уравнения (36) к виду (27) избавляемся от иррациональности, получим:

$$(\gamma + 1)^2 = \frac{R+P}{R-P};$$

откуда имеем:

$$\frac{(\gamma+1)^2+1}{(\gamma+1)^2-1} = \frac{R}{P}. \tag{37}$$

Это уравнение подходит к виду (27), так как мы можем положить:

$$f_1 = R;$$
$$f_2 = P;$$
$$f_3 = \frac{(\gamma+1)^2+1}{(\gamma+1)^2-1}.$$

Пусть нам заданы предельные значения для R — от 5 *кг/мм²* до 10 *кг/мм²*, а для P от 0 до 15 *кг/мм²*.

Выбираем длину шкал (R) и (P) — $q = 15$ *см*, а расстояние между ними $h = 20$ *см*. Уравнение шкалы (R) будет:

$$y_1 = aR - m.$$

Определяя здесь a и m так, чтобы при $R = 5$ мы имели $y_1 = 0$, а при $R = 10$ $y_1 = q = 15$ *см*, получим $a = 3$, $m = 15$.

Уравнение шкалы (P) будет:

$$y_2 = bP - n.$$

Определяем b и n так, чтобы при $P = 0$ $y_2 = 0$, а при $P = 15$ $y_2 = q = 15$ *см*; получим $n = 0$, $b = 1$.

Так получаем уравнения шкал (R) и (P):

$$y_1 = 3R - 15,$$
$$y_2 = P,$$

и наносим первую на прямой CE от точки C, а вторую на прямой GH — от точки G в обратном направлении.

Затем из уравнения (32) определяем l:

$$l = \sqrt{20^2 + (15+15)^2} = 36{,}056 \text{ см},$$

а из уравнения (33) определяем p:

$$p = \frac{15 \cdot 36{,}056}{30} = 18{,}028 \text{ см}.$$

Из уравнения (34) определяем t, а из уравнения (35) — r

$$t = \frac{18{,}028 \times 20}{36{,}056} = 10 \text{ см}.$$

$$r = 30 \frac{18{,}028 \cdot 20}{15 \cdot 36{,}056} = 20 \text{ см}.$$

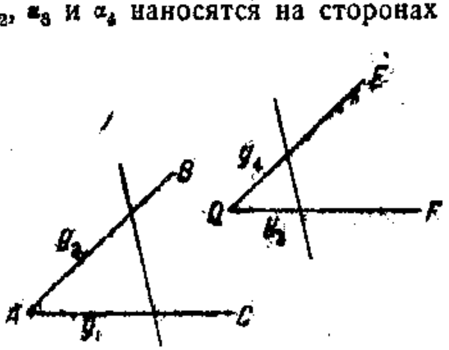
Мы видим, что $r = h$; это показывает, что в нашем случае пересечение шкал (P) и (γ) ляжет в пределах чертежа и эта точка пересечения будет началом шкалы (P).

Отложив на перпендикуляре, восставленном из C, величину $t = 10$ *см* и, соединив конец отложенного отрезка с началом шкалы (P), нанесем на полученной прямой шкалу (γ) по уравнению (31):

$$y_3 = \frac{36{,}056}{2} \cdot \frac{3\left[\frac{(\gamma+1)^2+1}{(\gamma+1)^2-1}\right]-1}{3\left[\frac{(\gamma+1)^2+1}{(\gamma+1)^2-1}\right]+1}.$$

§ 7. Пропорциональная номограмма с четырьмя переменными.

В пропорциональной номограмме шкалы четырех переменных α_1, α_2, α_3 и α_4 наносятся на сторонах двух углов BAC и EDF (черт. 20), стороны которых взаимно-параллельны, причем начала всех четырех шкал находятся в вершине этих углов. При проведении двух любых параллельных прямых последние отсекают два подобных треугольника, на основании чего легко написать уравнение геометрической связи:



Черт. 20.

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_3}{y_4}. \tag{38}$$

Легко видеть, что соответствующий вид уравнения будет:

$$\frac{f_1(\alpha_1)}{f_2(\alpha_2)} = \frac{f_3(\alpha_3)}{f_4(\alpha_4)}. \tag{39}$$

Для сообщения номограмме большей приспособляемости левую часть уравнения (39) можно помножить на $\frac{a}{b}$, а правую на $\frac{c}{d}$ при условии:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}. \tag{40}$$

Совершив это перемножение, получим:

$$\frac{af_1(\alpha_1)}{bf_2(\alpha_2)}=\frac{cf_3(\alpha_3)}{df_4(\alpha_4)}. \tag{41}$$

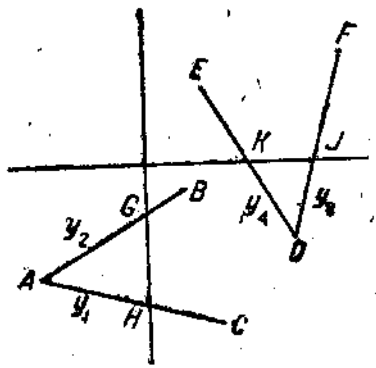
Сравнивая уравнения (41) и (38), получим уравнения четырех шкал:

$$y_1=af_1(\alpha_1);\ y_2=bf_2(\alpha_2);\ y_3=cf_3(\alpha_3);\ y_4=df_4(\alpha_4).$$

Три модуля a, b и c могут быть назначены по произволу, четвертый модуль d определяется из уравнения (40). Что касается ориентировочных коэфициентов, то таковые не могут вводиться в номограмму, а потому эта номограмма не может считаться вполне приспособляемой.

§ 8. Номограмма с крестообразным транспарантом.

Номограммы с крестообразным транспарантом для уравнений с четырьмя переменными по принципу построения ничем не отличаются от пропорциональных номограмм. Четыре шкалы наносятся на стороны двух углов, причем стороны этих углов взаимно перпендикулярны между собой (черт. 21), а именно $ED \perp AB$ и $DF \perp AC$.



Черт. 21.

При наложении на номограмму крестообразного транспаранта индексы последнего отсекают от углов два подобных треугольника AGH и DKJ, благодаря чему уравнение геометрической связи имеет тот же вид (38), как и в предыдущем случае. Отсюда следует, что и соответствующий вид уравнения будет тот же [уравнение (39)] и свойства этой номограммы будут теми же. Номограмма является не вполне приспособляемой. Свойства полной приспособляемости для номограммы с крестообразным транспарантом могут быть приданы ей лишь при пользовании более сложными методами аналитической геометрии.

Пример. Пусть требуется построить номограмму для формулы Паукера для определения допускаемого давления на грунт:

$$p=\gamma h\,\mathrm{tg}^4\left[(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right],$$

где p — давление в тоннах на кв. метр, γ — вес 1 $м^3$ грунта в тоннах, h — глубина заложения фундамента в метрах, φ — угол внутреннего трения грунта в градусах.

Представив это уравнение в виде:

$$\frac{p}{\gamma}=\frac{h}{\mathrm{tg}^4\left[45^\circ-\frac{\varphi}{2}\right]}. \tag{42}$$

можем положить:

$$f_1 = p;\ f_2 = \gamma;\ f_3 = h;\ f_4 = \operatorname{tg}^4 \left[45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right].$$

Помножив это уравнение на $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, можем положить:

$$y_1 = ap;\ y_2 = b\gamma;\ y_3 = ch;\ y_4 = d \operatorname{tg}^4 \left[45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right].$$

Здесь нам приходится задаваться для независимых переменных γ, h и φ лишь одним пределом, так как мы располагаем лишь одними модулями для шкал.

Пусть h должно быть взято до 20 *м*, γ — до 2,5 *т/м*^{3}, φ — от 0°. Тогда мы должны иметь (если длины шкал будут назначены в 10 *см*):

$$10 = b \cdot 2{,}5;$$

откуда:

$$b = 4;\ 10 = c \cdot 20;$$

таким образом:

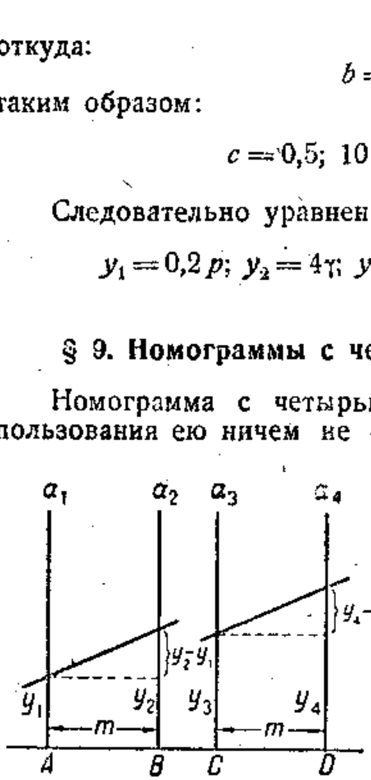
$$c = 0{,}5;\ 10 = d;\ \text{и}\ a = b \cdot \frac{c}{d} = 0{,}2.$$

Следовательно уравнения шкал будут:

$$y_1 = 0{,}2\,p;\ y_2 = 4\gamma;\ y_3 = 0{,}5h;\ y_4 = 10 \operatorname{tg}^4 \left[45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right].$$

§ 9. Номограммы с четырьмя параллельными шкалами.

Номограмма с четырьмя параллельными шкалами в смысле пользования ею ничем не отличается от пропорциональной номограммы (черт. 22). Для определения значения переменной α_4 по заданным значениям α_1, α_2 и α_3 следует провести прямую через точки, помеченные заданными значениями α_1 и α_2, и затем параллельно этой прямой провести прямую через точку, помеченную заданным значением α_3. Искомое значение α_4 читается в точке пересечения второй прямой со шкалой (α_4).



Черт. 22.

Однако вид уравнения, изображаемый этого рода номограммой, будет отличаться от того, который соответствует пропорциональной номограмме. Все четыре шкалы проводятся параллельно между собой, причем расстояние между шкалами (α_1) и (α_2), с одной стороны, и расстояние между шкалами (α_3) и (α_4), с другой стороны, равны между собой. Пусть это расстояние равно m. Начало у всех четырех шкал A, B, C и D лежит на одном общем перпендикуляре AD. Параллельные индексы в пересечении со шкалами образуют две трапеции с общей высотой m, причем из чертежа видно, что:

$$y_2 - y_1 = y_4 - y_3. \qquad (43)$$

Следовательно соответствующий вид изображаемого уравнения будет:

$$f_2(\alpha_2) - f_1(\alpha_1) = f_4(\alpha_4) - f_3(\alpha_3). \qquad (44)$$

Для сообщения номограмме большей приспособляемости умножим это уравнение на произвольное число a, после чего прибавим к левой части $(c - b)$, а к правой $(e - d)$, при условии:

$$c - b = e - d. \qquad (45)$$

Совершив эти операции, получаем уравнение (44) в виде:

$$[af_2(\alpha_2) + c] - [af_1(\alpha_1) + b] = [af_4(\alpha_4) + e] - [af_3(\alpha_3) + d]. \qquad (46)$$

Сравнивая уравнения (43) и (46), получаем уравнения четырех шкал:

$$y_1 = af_1(\alpha_1) + b; \; y_2 = af_2(\alpha_2) + c;$$
$$y_3 = af_3(\alpha_3) + d; \; y_4 = af_4(\alpha_4) + e.$$

Мы видим, что модуль a может быть выбран лишь применительно к одной шкале; ориентировочные коэфициенты могут быть выбраны применительно к трем шкалам независимых переменных; ориентировочный коэфициент для четвертой шкалы определяется из уравнения (45). Номограмма таким образом не является вполне приспособляемой.

Пример. Построим номограмму этого типа для уравнения Паукера, приведенного в предыдущем примере. Для приведения его к виду (44), мы должны уравнение (42) прологарифмировать; получим:

$$\log h - 4 \log \operatorname{tg}\left[45° - \frac{\varphi}{2}\right] = \log p - \log \gamma.$$

Следовательно, уравнения четырех шкал будут:

$$y_1 = 4a \log \operatorname{tg}\left[(45° - \frac{\varphi}{2}\right] + b; \; y_2 = a \log h + c;$$
$$y_3 = a \log \gamma + d; \qquad y_4 = a \log p + e.$$

Два предела мы можем назначить для одной из переменных, например для φ. Назначим верхний и нижний пределы для φ соответственно 45° и 0°, так как только для этих пределов угол внутреннего трения для грунтов практикуется. Соответственно этому условию определяем a и b:

$$0 = 4a \log \operatorname{tg} 22^1/_2° + b; \; 10 \text{ см} = 4a \log 1 + b;$$

откуда получаем:

$$b = 10; \; a = 6{,}41 \approx 6.$$

Для остальных независимых переменных мы можем в силу неполной приспособляемости номограммы назначить лишь по одному пределу. Назначив верхний предел для переменной h равным 20 *м*, определяем c, подставив в уравнение шкалы (h), $a = 6$; $h = 20$ и длину шкалы $y_2 = 10$ *см* получим:

$$10 = 6 \log 20 + c;$$

откуда:

$$c = 2{,}19 \approx 2.$$

Точно так же, назначив верхний предел для переменной $\gamma = 2{,}5\ m/м^3$ и длину шкалы в 10 *см*, получаем соответственное d из уравнения шкалы γ:

$$10 = 6 \log 2{,}5 + d;$$

откуда:

$$d = 7{,}613 \approx 7.$$

Величина e определяется из уравнения (45):

$$e = c - b + d = 2 - 10 + 7 = -1.$$

Следовательно окончательно уравнения четырех шкал будут:

$$y_1 = 24 \log \operatorname{tg}\left[45 - \frac{\varphi}{2}\right] + 10; \quad y_2 = 6 \log h + 2;$$

$$y_3 = 6 \log \gamma + 7; \qquad y_4 = 6 \cdot \log p - 1;$$

и значения переменных, умещающихся в пределах номограммы, приблизительно будут:

для φ : от 45 до 0°;

для h : от 0,5 до 20 *м*;

для γ : от 0,06 до 2,5 $m/м^3$.

В первом столбце этой таблицы помещены пометки начала шкал, а во втором — пометки в конце шкал при длине последних около 10 *см*.

Сравнивая номограмму с четырьмя параллельными шкалами с номограммой с крестообразным транспарантом в применении к формуле Паукера, приведенном в предыдущем примере, мы видим, что первая имеет лишь преимущество в смысле большей точности шкалы φ, так как там практикуемые значения φ от 0 до 45° расставлены на расстоянии 10 *см*, тогда как во второй номограмме эти две пометки расставлены на более близком между собой расстоянии. В смысле простоты построения номограмма с крестообразным транспарантом имеет несомненные преимущества, так как в ней лишь одна шкала строится по таблице тангенсов, а остальные три шкалы (h), (γ) и (p) суть шкалы с равными графическими интервалами (равномерные шкалы); тогда как в номограмме с четырьмя параллельными шкалами все четыре шкалы строятся по таблице логарифмов (логарифмические шкалы).

§ 10. Графическое исключение переменных.

Одним из весьма распространенных и изящных методов номографии изображения уравнений со многими переменными является метод графического исключения переменных, с помощью которого различные рассмотренные нами типы номограмм сопрягаются между собой в последовательную цепь, конечное звено которой дает нам значение переменной в зависимости от значений целого ряда переменных, входящих в эту цепь. В применении к номограммам из выравненных точек с параллельными шкалами таким путем можно изобразить любое уравнение вида:

$$f_1(\alpha_1)+f_2(\alpha_2)+f_3(\alpha_3)+\ldots+f_{n-1}(\alpha_{n-1})=f_n(\alpha_n). \tag{47}$$

Рассмотрим сперва ради простоты уравнения с четырьмя переменными вида:

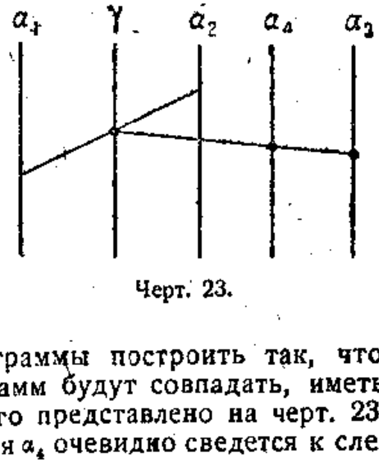
$$f_1(\alpha_1)+f_2(\alpha_2)+f_3(\alpha_3)=f_4(\alpha_4). \tag{48}$$

Обозначив сумму $f_1(\alpha_1)+f_2(\alpha_2)$ через γ, мы можем разбить это уравнение на два следующих:

$$f_1(\alpha_1)+f_2(\alpha_2)=\gamma; \tag{49}$$

$$\gamma+f_3(\alpha_3)=f_4(\alpha_4). \tag{50}$$

Если нам надо определить α_4 по заданным значениям α_1, α_2 и α_3, мы можем действовать таким образом: сперва по заданным значениям α_1 и α_2 определить из уравнения (49) величину γ, а затем по найденному γ и заданному α_3 найти из уравнения (50) величину α_4. Если такого порядка вычисления α_4 придерживаться путем определения ее номограммами, то очевидно вопрос сведется к построению двух номограмм: одна номограмма, изображающая уравнение (49), получится в виде трех шкал (α_1), (γ) и (α_2) (черт. 23), а другая, изображающая уравнение (50),—в виде трех шкал (γ), (α_4) и (α_3). При этом, если эти две номограммы построить так, что шкалы переменной γ этих двух номограмм будут совпадать, иметь общий модуль и общее начало, как это представлено на черт. 23, то вышеописанный процесс определения α_4 очевидно сведется к следующему: две точки, помеченные заданными значениями α_1 и α_2 надо соединить прямой и, заметив точку пересечения этой прямой со шкалой (γ), соединить последнюю другой прямой с точкой, помеченной заданным значением α_3. Тогда эта вторая прямая пересечет шкалу (α_4) в точке, помеченной искомым значением переменной α_4. В этом случае очевидно градуировать шкалу γ нет никакой необходимости; значение этой переменной нам совершенно не интересно, так как она исключается в процессе определения α_4 из двух уравнений (49) и (50). Благодаря этому шкала переменной γ называется *немой* шкалой и изображается в виде прямой линии, соответственно расположенной на чертеже.



Черт. 23.

Пример. Расход жидкости Q куб. метров через водослив шириной b метров при коэфициенте истечения μ и толщине переливающегося слоя жидкости h метров определяется по формуле:

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \ h^{3/2} \cdot \sqrt{2g},$$

где $g = 9{,}81$ $м/сек^2$.

Логарифмируя эту формулу, получим:

$$\log \mu + \frac{3}{2} \log h + \log b + \log \frac{2}{3} \sqrt{2g} = \log Q,$$

получаем уравнение вида (48), а потому можем построить для нее номограмму из четырех параллельных шкал.

Разбиваем это уравнение на два следующих:

$$\log \mu + \frac{3}{2} \log h = \gamma; \tag{51}$$

$$\gamma + \log b + \log \frac{2}{3} \sqrt{2g} = \log Q, \tag{52}$$

Пусть нам заданы пределы изменения переменных:

для μ — от 0,3 до 1,0;
для h — от 0,1 до 10 $м$;
для b — от 1 до 100 $м$.

Строим номограмму уравнения (51) из трех параллельных шкал, причем длину шкал назначаем по 20 $см$. Это уравнение подходит под тип (15) § 5, где можем положить:

$$f_1 = \log \mu; \ f_2 = \frac{3}{2} \log h; \ f_3 = \gamma.$$

Действуя согласно правилам § 5, выбираем расстояние между шкалами (μ) и (h) равным $l = 21$ $см$. Проводим внизу перпендикулярную прямую AB, обозначающую в пересечении со шкалами начало шкал. Определяем модуль k и ориентировочный коэфициент p шкалы (μ) так, чтобы в начале шкалы стояла пометка 0,3, а в конце — пометка 1,0, т. е. из равенства:

$$0 = k \log 0{,}3 + p; \ 20 = k \log 1 + p = p;$$

откуда:

$$p = 20; \ k = 36{,}4 \approx 36,$$

и строим шкалу μ по уравнению:

$$y_1 = 36 \log \mu + 20.$$

Точно так же для шкалы (h) определяем модуль r и ориентировочный коэфициент s по равенствам:

$$0 = r \frac{3}{2} \log 0{,}1 + s; \ 20 = r \frac{3}{2} \log 10 + s;$$

откуда:

$$r=6{,}66\approx 6;\ s=10;$$

строим шкалу h по уравнению:

$$y_2=9\ \log h+10.$$

Расстояние между шкалой (γ) и шкалой (μ) получим согласно формуле (24) § 5 равным:

$$m=\frac{21}{1+\frac{6}{36}}=18\ см.$$

Уравнение шкалы (γ) согласно формуле (25) § 5 будет:

$$y_3=\frac{216}{42}\gamma+\frac{120+360}{42}=5{,}14\gamma+11{,}43.$$

Однако же наносить функцию γ нет необходимости и можно ограничиться проведением прямой в расстоянии 18 *см* от шкалы (μ) параллельно последней.

Затем строим номограмму уравнения (52). Применяя к построению этой второй номограммы правила § 5, полагаем на этот раз:

$$f_1=\gamma;\ f_2=\log\ b+\log\frac{2}{3}\sqrt{2g}=\log b+0{,}47;\ f_3=\log\ Q.$$

Шкала переменной γ у нас уже имеется. Взяв расстояние между шкалами (γ) и (b) равным $l=8$ *см*, проводим параллельно шкале (γ) прямую на расстоянии 8 *см* от нее для нанесения шкалы (b); модуль k и коэфициент p для шкалы (γ) у нас уже имеется, а именно:

$$k=5{,}14;\ p=11{,}43.$$

Модуль r и коэфициент s для шкалы (b) определяем из заданных условий:

$$0=r[\log 1+0{,}47]+s;\ 20=r\ [\log\ 100+0{,}47]+s,$$

откуда:

$$r=10;\ s=-4{,}7\approx -5\ см;$$

наносим шкалу (b) по уравнению:

$$y_2=10\ [\log b+0{,}47]-5;$$

проводим прямую, параллельную шкале (γ) в расстоянии:

$$m=\frac{8}{1+\frac{10}{5{,}14}}=2{,}9\ см$$

и на этой прямой строим шкалу по уравнению (25) § 5:

$$y_3=\frac{5{,}14\cdot 10}{15{,}14}\log Q+\frac{11{,}45\cdot 10-5{,}14\cdot 5}{15{,}14}=3{,}39\log Q+5{,}85.$$

Для изображения уравнений типа (47) разлагают его на ряд следующих:

$$\left.\begin{array}{c} f_1+f_2=\gamma_1 \\ \gamma_1+f_3=\gamma_2 \\ \gamma_2+f_4=\gamma_3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \gamma_{n-3}+f_{n-1}=f_n \end{array}\right\}\qquad(53)$$

Исключая из системы уравнений (53) переменные $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-3}$ получим уравнение (47). Если же построить ряд номограмм уравнений (53) с графическим исключением переменных $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_{n-3}$, то мы получим номограмму уравнения (47).

При помощи графического исключения переменных можно сопрягать номограммы различных систем. Так например, если построим номограмму из трех параллельных шкал для уравнения:

$$f_1(\alpha_1)+f_2(\alpha_2)=\gamma \tag{54}$$

и другую номограмму с крестообразным транспарантом для уравнения:

$$\frac{\gamma}{f_3(\alpha_3)}=\frac{f_4(\alpha_4)}{f_5(\alpha_5)} \tag{55}$$

и если шкалу (γ) этих двух номограмм сделать общей, то полученная номограмма изобразит собой уравнение с пятью переменными получаемое из (54) и (55) путем исключения γ, т. е. уравнение типа:

$$f_1+f_2=\frac{f_3\cdot f_4}{f_5}$$

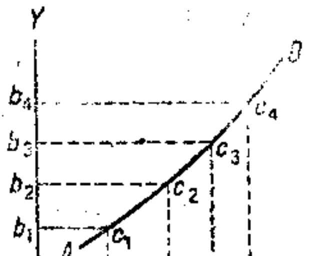
§ 11. Понятие о криволинейной шкале.

Предположим, что мы на двух взаимно-перпендикулярных осях координат OX и OY нанесем две шкалы двух функций $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$, приняв начало координат O за начало этих шкал (черт. 24). Таким образом на оси OX мы построим прямолинейную шкалу, уравнение которой будет:

$$x=\varphi(\alpha), \tag{56}$$

а на оси OY — прямолинейную шкалу, уравнение которой будет

$$y=\psi(\alpha). \tag{57}$$



Черт. 24.

Предположим далее, что из двух точек a_1 и b_1 этих двух шкал, имеющих одну и ту же пометку, например $\alpha=1$, восставим перпендикуляры до их взаимного пересечения в точке c_1 и припишем этой точке ту же пометку, т. е. $\alpha=1$; проделав то же построение по отношению остальных точек шкал a_2 и b_2, a_3 и b_3 и т. д., имеющих общие пометки, мы получим ряд помеченных точек c_1, c_2, c_3; проведя через эти точки кривую AB, мы получим криволинейную шкалу переменной α. Как видно, криволинейная шкала определяется двумя уравнениями (56) и (57). Этим она отличается от прямолинейной шкалы, определяющейся одним уравнением. После построения криволинейной шкалы шкалы, нанесенные на оси OY и OX, стираются, так как они играли лишь вспомогательную роль в процессе построения криволинейной шкалы.

Кривая AB, на которой наносятся деления криволинейной шкалы, называется — опорой шкалы. При построении криволинейной шкалы по заданным ее уравнениям (56) и (57) можно действовать и иначе, а именно — сперва вычертить опору шкалы, а затем градуировать ее помощью одной из ее проекций (56) или (57), смотря по тому, которая из них удобнее для этой цели. Для определения уравнения кривой, служащей опорой, надо исключить переменную α из двух уравнений (56) и (57) и уравнение опоры получится в виде

$$\Phi(x, y) = 0.$$

Однако такой способ построения криволинейной шкалы выгоден только тогда, когда опора представляет собой кривую, легко поддающуюся вычерчиванию, т. е. круг или прямую линию. В противном случае шкалу выгоднее строить по первому методу, т. е. построив предварительно обе шкалы (56) и (57).

Если уравнения проекций шкалы (56) и (57) имеют вид:

$$x = af(\alpha) + b,$$
$$y = cf(\alpha) + d,$$

где a, b, c и d — постоянные, то такая шкала будет прямолинейной, так как исключение $f(\alpha)$ из этих двух уравнений дает линейную зависимость между x и y. Таким образом прямолинейная шкала рассматриваемая как частный случай криволинейной, также может выражаться двумя проекциями на оси OX и OY.

§ 12. Номограмма с двумя параллельными и одной криволинейной шкалой.

Рассмотрим номограмму из выравненных точек с двумя параллельными шкалами переменных α_1 и α_2 и с криволинейной шкалой переменной α_3 (черт. 25).

Предположим, что начало шкалы (α_1) находится в точке O; начало координат криволинейной шкалы также находится в точке O; ось OY криволинейной шкалы совпадает со шкалой (α_1); ось OX пересекает шкалу (α_2) в начале этой шкалы. Тогда при наложении прямолинейного индекса на номограмму, как видно из чертежа, мы получим следующее уравнение геометрической связи:

$$\frac{y_2 - y_1}{l} = \frac{y_3 - y_1}{x_3}, \tag{58}$$

где x_3 и y_3 — координаты точки криволинейной шкалы, а l — расстояние между параллельными шкалами.

Переставив члены уравнения (58) получим:

$$y_1\left(\frac{1}{x_3} - \frac{1}{l}\right) + y_2 \cdot \frac{1}{l} - \frac{y_3}{x_3} = 0. \tag{59}$$

Такая зависимость показывает, что помощью рассматриваемой номограммы мы можем изобразить уравнение вида:

$$f_1(\alpha_1)\cdot f_3(\alpha_3)+f_2(\alpha_2)\cdot\varphi_3(\alpha_3)+\psi_3(\alpha_3)=0 \qquad (60)$$

В самом деле, если мы разделим уравнение (60) на $\varphi_3(\alpha_3)$, то получим:

$$f_1(\alpha_1)\frac{f_3(\alpha_3)}{\varphi_3(\alpha_3)}+f_2(\alpha_2)+\frac{\psi_3(\alpha_3)}{\varphi_3(\alpha_3)}=0. \qquad (61)$$

Сравнивая уравнения (61) и (59), мы можем положить:

$$y_1=f_1(\alpha_1); \qquad (62)$$

$$\frac{1}{x_3}-\frac{1}{l}=\frac{f_3(\alpha_3)}{\varphi_3(\alpha_3)}; \qquad (63)$$

$$\frac{y_2}{l}=f_2(\alpha_2); \qquad (64)$$

$$-\frac{y_3}{x_3}=\frac{\psi_3(\alpha_3)}{\varphi_3(\alpha_3)}. \qquad (65)$$

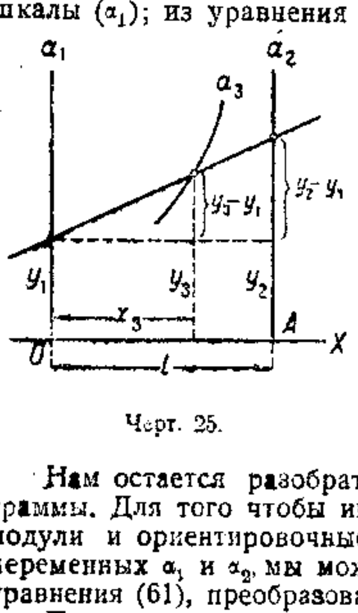
Уравнение (62) представляет собой уравнение прямолинейной шкалы (α_1); из уравнения (64) получим уравнение прямолинейной шкалы (α_2) в виде:

$$y_2=lf_2(\alpha_2). \qquad (66)$$

Из уравнения (63) и (65) получаем два следующих уравнения криволинейной шкалы (α_3):

$$x_3=\frac{1}{\frac{f}{\varphi_3}+\frac{1}{l}}=\frac{l\ \varphi_3}{lf_3+\varphi_3}; \qquad (67)$$

$$y_3=-\frac{l\ \psi_3}{lf_3+\varphi_3}. \qquad (68)$$



Черт. 25.

Построив по этим уравнениям шкалы, получим номограмму уравнения (60).

Нам остается разобрать вопрос о приспособляемости номограммы. Для того чтобы иметь возможность выбрать по произволу модули и ориентировочные коэфициенты для шкал независимых переменных α_1 и α_2, мы можем, прежде нежели строить номограмму уравнения (61), преобразовать его следующим образом:

Помножим уравнение (61) на произвольное число

$$a=bc, \qquad (69)$$

получим:

$$b\cdot f_1\cdot c\frac{f_3}{\varphi_3}+af_2+a\frac{\psi_3}{\varphi_3}=0.$$

Затем прибавим и вычтем из этого уравнения величину

$$dc\frac{f_3}{\varphi_3}+e,$$

где d и e — произвольные числа; получим уравнение, подлежащее изображению в виде:

$$(bf_1 + d) \cdot \frac{cf_3}{\varphi_3} + (af_2 + e) + \frac{a \cdot \psi_3 - dcf_3 - e\varphi_3}{\varphi_3} = 0. \qquad (70)$$

Сравнивая уравнения (70) и (59) получим уравнения шкал в виде:

$$\text{уравнения шкалы } \alpha_1 : y_1 = bf_1 + d; \qquad (71)$$

$$\text{„ „ } \alpha_2 : y_2 = alf_2 + le; \qquad (72)$$

$$\text{„ „ } \alpha_3 : x_3 = \frac{l\varphi_3}{clf_3 + \varphi_3}; \qquad (73)$$

$$y_3 = + \frac{al\psi_3 - dclf_3 - el\varphi_3}{clf_3 + \varphi_3}. \qquad (74)$$

В уравнениях шкал (71) и (72) мы можем назначить произвольно четыре величины b, d, a и e так, чтобы модули и ориентировочные коэфициенты имели бы желаемую величину. Величина c определяется по заданным a и b из уравнения (69), после чего приступают к построению номограммы.

Пример. Кубическое уравнение

$$z^3 + pz + q = 0 \qquad (75)$$

очевидно относится к виду (60). Здесь переменная p входит лишь в один член, а потому мы можем положить

$$f_1 = p;$$

точно так же переменная q входит один раз; полагаем:

$$f_2 = q;$$

переменная z входит два раза — в первом и во втором члене, поэтому полагаем:

$$f_3 = z; \ \varphi_3 = 1; \ \psi_3 = z^3.$$

Выбираем $l = 10$ *см*. Длину шкал p и q — по 20 *см*. Пусть величина p должна быть взята в пределах от 0 до -10; а величина q — от 0 до $+10$; располагая нулевые значения в началах шкал, определяем модули и ориентировочные коэфициенты в уравнениях шкал (71) и (72); получаем: $d = 0$; $le = 0$; $b = -2$; $al = +2$; откуда $e = 0$; $a = +0{,}2$; из уравнения (69) определяем $c = \frac{a}{b} = -0{,}1$; после чего строим шкалу p от точки O (черт. 25), как от начала по уравнению (71), т. е.:

$$y_1 = -2\, p;$$

шкалу (q) строим от точки A по уравнению (72), т. е.:

$$y_2 = +2\, q.$$

Для построения шкалы (z) строим сперва на оси OX от точки O как от начала шкалу по уравнению (73), т. е.:

$$x_3 = \frac{10}{1 - z};$$

а на оси OY от точки O как от начала шкалу по уравнению (74):

$$y_3 = -\frac{2z^3}{1-z}.$$

По этим двум шкалам строим криволинейную шкалу (z).

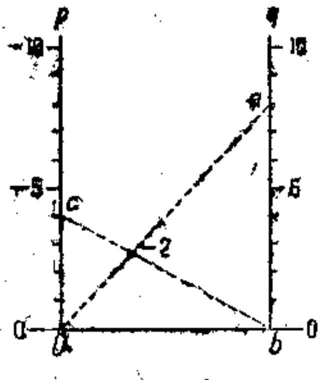
Построение криволинейной шкалы (z) может быть осуществлено и без построения вспомогательных шкал (x_3) и (y_3). В самом деле, если у нас построены шкалы (p) и (q) (черт. 26), то построение какой-либо точки шкалы z, например с пометкой -2, может быть осуществлено на основании заданного уравнения (75). Положив в нем $p=0$, мы получим:

$$z^3 = -q;$$

для $z=-2$ имеем:

$$-8 = -q; \text{ откуда } q = +8.$$

Следовательно если проведем индекс через точку $p=0$, на шкале (p) и через точку $q=8$ на шкале (q), то искомая точка шкалы (z) должна лежать на этой прямой Oa (черт. 26), изображающей положение этого индекса.



Черт. 26.

С другой стороны, положив в уравнении (75) $q=0$ получим:

$$z^3 = -pz; \text{ или } z^2 = -p.$$

Для $z=-2$ имеем:

$$4 = -p; \text{ откуда } p = -4.$$

Следовательно если проведем индекс через точку $q=0$ на шкале (q) и через точку $p=-4$ на шкале (p), то искомая точка шкалы (z) должна лежать на прямой bc, изображающей это положение индекса. Следовательно точка шкалы (z), помеченная числом -2, лежит в точке пересечения прямых Oa и bc. Таким же образом строятся и все остальные точки шкалы (z).

§ 13. Понятие о бинарном поле.

Если каждой точке плоскости чертежа соответствует определенная пара частных значений двух переменных α и β, то такой чертеж называется полем с двойными пометками, или бинарным полем. Если координаты точек рассматриваемого поля мы обозначим через x и y, то каждой определенной паре значений α и β будут соответствовать вполне определенные значения x и y; следовательно мы можем положить:

$$x = \varphi(\alpha, \beta); \tag{76}$$

$$y = \psi(\alpha, \beta). \tag{77}$$

Уравнения (76) и (77) называются уравнениями бинарного поля. Для того чтобы не испещрять поле цифрами, обыкновенно поля определяются двумя системами взаимно-пересекающихся кривых, из коих одна система помечена значениями переменной α, а другая — значениями β. Точка поля, помеченная заданной парой значений α и β лежит на пересечении двух кривых, принадлежащих к этим двум системам, из коих одна помечена заданным значением α, а другая — значением β. Таким образом для построения заданного уравнениями (76) и (77) бинарного поля нужно вычертить две системы помеченных кривых, а для этого в свою очередь надо найти уравнения этих систем кривых. Уравнения эти получаются из уравнений бинарного поля путем исключения из них переменных α и β. Так, исключив из уравнений (76) и (77) переменную β, получим уравнение:

$$F(x,\ y,\ \alpha)=0, \tag{78}$$

представляющее собой уравнение системы кривых α. Придавая переменной в уравнении (78) α ряд частных значений, мы получим ряд уравнений кривых, которые мы можем вычертить и пометить каждую из них соответственным значением α. Исключая из уравнений (76) и (77) переменную α, получим:

$$\Phi\ (x,\ y,\ \beta)=0, \tag{79}$$

т. е. уравнение системы кривых β, на основании которого мы можем вычертить и пометить систему β, точно таким же образом.

Может случиться, что одно из уравнений (76) или (77) заданного бинарного поля заключают в себе лишь одну переменную. В таком случае это уравнение само по себе изображает уравнение соответствующей системы кривых. Так, например, если уравнение бинарного поля задано в виде:

$$x=\varphi(\alpha), \tag{80}$$

$$y=\psi(\alpha, \beta), \tag{81}$$

то первое уравнение (80), не заключающее в себе переменной β, будет в то же самое время и уравнением системы α. В данном случае ясно, что эта система состоит из прямых, параллельных оси ординат, так как, придав переменной α какое-либо частное значение и подставив его в уравнение (80), мы получим $x=\text{const}$, т. е. уравнение прямой, параллельной оси ординат. Для получения же уравнения системы β нам надлежит исключить α из уравнений (80) и (81).

Если уравнения бинарного поля имеют следующий вид:

$$x=\varphi(\alpha), \tag{82}$$

$$y=\psi(\beta), \tag{83}$$

то очевидно исключения переменных совсем не приходится делать, и бинарное поле состоит из ряда прямых α, параллельных оси ординат и определяющихся уравнением (82), и ряда прямых β, параллельных оси абсцисс и определяющихся уравнением (83).

§ 14. Номограмма из выравненных точек с двумя параллельными шкалами и бинарным полем.

Номограмма эта является изображением уравнения с четырьмя переменными α_1, α_2, α_3 и β_3. Пометки α_1 и α_2 наносятся на две параллельные шкалы, а бинарное поле помечается значениями α_3 и β_3. Способ пользования этой номограммой был указан во введении.

Легко видеть, что уравнение геометрической связи в данном случае будет совершенно одинаковым со случаем номограммы с двумя параллельными шкалами и одной криволинейной шкалой (§ 12), т. е. уравнение это будет (59). Разница будет заключаться лишь в том, что в последнем случае мы предполагали, что координаты x_3 и y_3 суть функции одной переменной α_3; в настоящем же случае надо положить, что эти координаты суть функции двух переменных α_3 и β_3. Ввиду этого все формулы § 12 останутся в силе с той лишь разницей, что вместо функций $f_3(\alpha_3)$, $\varphi_3(\alpha_3)$ и $\psi_3(\alpha_3)$, входящих в эти формулы, надо вставить соответственно $f_3(\alpha_3, \beta_3)$, $\varphi_3(\alpha_3, \beta_3)$ и $\psi_3(\alpha_3, \beta_3)$.

Таким образом самый общий тип уравнения, изображаемого рассматриваемой номограммой, будет следующий, аналогичный уравнению (60):

$$f_1(\alpha_1) \cdot f_3(\alpha_3, \beta_3) + f_2(\alpha_2) \cdot \varphi_3(\alpha_3, \beta_3) + \psi_3(\alpha_3, \beta_3) = 0. \tag{84}$$

В самом деле, разделив уравнение (84) на $\varphi_3(\alpha_3, \beta_3)$, получим:

$$f_1(\alpha_1)\frac{f_3(\alpha_3, \beta_3)}{\varphi_3(\alpha_3, \beta_3)} + f_2(\alpha_2) + \frac{\psi_3(\alpha_3, \beta_3)}{\varphi_3(\alpha_3, \beta_3)} = 0.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (59), мы получим уравнение шкалы (α_1) в виде уравнения (62) и уравнение шкалы (α_2) в виде уравнения (66). Уравнениями бинарного поля будут (67) и (68).

Если же мы хотим получить вполне приспособляемую номограмму, то уравнениями шкал будут (71) и (72), а уравнениями бинарного поля (73) и (74).

Пример. Пусть задано полное уравнение третьей степени:

$$z^3 + n z^2 + p z + q = 0. \tag{85}$$

Здесь переменные p и q встречаются только в двух членах, третьем и четвертом, а потому примем их за переменные α_1 и α_2 и полагаем:

$$f_1 = p;\ f_2 = q.$$

Сравнивая уравнение (85) с типовым (84), мы должны положить:

$$f_3 = z;\ \varphi_3 = 1;\ \psi_3 = z^3 + nz^2.$$

Выбрав расстояние между шкалами $l = 20$ *см*, имеем по уравнениям (62) и (66) уравнения шкал (p) и (q):

$$y_1 = p;\ y_2 = 20q;$$

а уравнение бинарного поля по уравнениям (67) и (68):

$$x_3 = \frac{20}{20z + 1}; \tag{86}$$

$$y_3 = -\frac{20z^3 + 20nz^2}{20z + 1} \tag{87}$$

Придавая z ряд частных значений и подставляя в уравнение (86), получим уравнения прямых, параллельных оси ординат, которые и помечаем соответственными значениями z; для того чтобы получить систему кривых, помеченных значениями n, надо исключить z из уравнений (86) и (87). Однако этого делать не стоит, так как бинарное поле можно построить проще: в самом деле, положив в уравнение (85) $n=0$, мы получим уравнение (75), а потому кривая, помеченная значениями $n=0$, построится так, как строилась криволинейная шкала в номограмме кубичного уравнения в § 12. Через точки этой шкалы, помеченные значениями z, мы проводим ряд прямых, параллельных оси ординат, присваиваем им соответственные пометки z и получаем систему помеченных прямых (86). Остается построить кривые, помеченные остальными значениями $n=1$; 2 и т. д. Положим, мы желаем построить кривую, помеченную значением $n=1$.

Положив в уравнение (85) $q=0$, получим:

$$p=-z^2-nz;$$

и при $n=1$:

$$p=-z^2-z. \tag{88}$$

Уравнение (88) показывает следующее. Если мы проведем прямую, соединяющую точку шкалы (q), помеченную нулем, с точкой шкалы (p), помеченной значением p, то точка кривой (n), помеченной значением $n=1$, получится в пересечении проведенной прямой с той из системы (z), которая помечена значением z, равным корню уравнения (88). Поэтому, взяв например прямую системы (z), помеченную значением $z=1$, мы должны соединить точку $q=0$ с точкой шкалы (p), помеченной значением:

$$p=-1-1=-2.$$

Пересечение этой прямой с прямой, помеченной $z=1$, даст нам первую точку кривой $n=1$; взяв $z=2$, получим:

$$p=-4-2=-6,$$

и, соединив точку $q=0$ с точкой $p=-6$, получим в пересечении с прямой $z=2$ вторую точку искомой кривой $n=1$ и т. д. Таким образом построена номограмма, изображенная на черт. 11.

§ 15. Понятие о бинарной шкале.

Если каждой точке прямой соответствует целый ряд значений двух переменных α и β, то такая прямая называется шкалой с двойными отметками или бинарной шкалой.

Обозначим расстояние каждой точки бинарной шкалы от ее начала через y. Тогда уравнение

$$y=\varphi(\alpha,\beta) \tag{89}$$

называется уравнением бинарной шкалы. Мы видим таким образом, что каждой заданной паре значений переменных α и β соответствует вполне определенная точка бинарной шкалы (89). Для чтения бинарной шкалы к ней необходимо присоединить бинарное поле, которое строится приняв бинарную шкалу за ось OY и приняв начало координат бинарного поля за начало шкалы.

Уравнения бинарного поля будут:

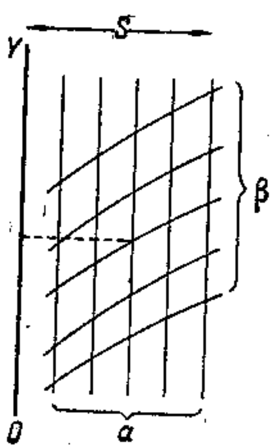
$$y=\varphi(\alpha, \beta); \tag{90}$$

$$x=\alpha. \tag{91}$$

Таким образом бинарное поле, пристраиваемое к бинарной шкале, имеет вид, показанный на черт. 27. Для получения точки бинарной шкалы, соответствующей заданной паре значений α и β, надо очевидно взять точку бинарного поля, помеченную этой парой значений α и β, и спроектировать ее на бинарную шкалу.

§ 16. Применение бинарных шкал в номограммах.

В любой номограмме, рассмотренной нами в §§ 4—9, мы можем любую прямолинейную шкалу заменить бинарной шкалой и этим ввести лишнюю переменную в состав номограммы. Для получения соответственного типа уравнения надлежит при этом в уравнение геометрической связи вставлять в соответственных местах вместо $y=\varphi(\alpha)$ (как это мы делали для обыкновенных шкал) выражение $y=\varphi(\alpha, \beta)$. Таким образом общий вид изображаемого уравнения для номограмм того или иного типа сохраняет свой вид, но при применении бинарной шкалы следует вместо соответственных функций:



Черт. 27.

$$f_1(\alpha_1),\ f_2(\alpha_2) \text{ и т. д.}$$

понимать функции:

$$f_1(\alpha_1, \beta_1),\ f_2(\alpha_2, \beta_2) \text{ и т. д.}$$

Таким образом номограммой с тремя параллельными шкалами (§ 5) можно изобразить формулу, аналогичную формуле (15), т. е. уравнение с шестью переменными вида:

$$f_3(\alpha_3, \beta_3)=f_1(\alpha_1, \beta_1)+f_2(\alpha_2, \beta_2),$$

так как, сравнивая это уравнение с уравнением геометрической связи (14), мы можем положить:

$$\frac{y_3}{m}=f_3(\alpha_3, \beta_3);\quad y_1\cdot\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{l}\right)=f_1(\alpha_1, \beta_1);\quad \frac{y_2}{l}=f_2(\alpha_2, \beta_2),$$

откуда получаем уравнение трех бинарных шкал:

$$y_3=m f_3(\alpha_3, \beta_3);\ y_1=\frac{m l}{l-m} f_1(\alpha_1, \beta_1);\ y_2=l f_2(\alpha_2, \beta_2).$$

Имея эти три уравнения, можем построить три бинарные шкалы и получим номограмму вида, изображенного на черт. 13.

Действуя таким же методом и во всех остальных случаях, мы можем изображать помощью бинарных шкал уравнения следующего вида:

$$\frac{f_1(\alpha_1, \beta_1)}{f_2(\alpha_2, \beta_2)} = f_3(\alpha_3, \beta_3)$$

Z-номограммой (§ 6);

$$\frac{f_1(\alpha_1, \beta_1)}{f_2(\alpha_2, \beta_2)} = \frac{f_3(\alpha_3, \beta_3)}{f_4(\alpha_4, \beta_4)}$$

пропорциональной или с крестообразным транспарантом номограммой (восемь переменных) (§ 7 и 8);

$$f_2(\alpha_2, \beta_2) - f_1(\alpha_1, \beta_1) = f_4(\alpha_4, \beta_4) - f_3(\alpha_3, \beta_3)$$

номограммой с четырьмя параллельными бинарными шкалами (§ 9)

$$f_1(\alpha_1, \beta_1) + f_2(\alpha_2, \beta_2) + \ldots + f_n(\alpha_n, \beta_n) = 0$$

номограммой из параллельных бинарных шкал с графическим исключением переменных (номограмма с $2n$ переменными) (§ 10);

$$f_1(\alpha_1, \beta_1) \cdot f_3(\alpha_3) + f_2(\alpha_2, \beta_2) \cdot \varphi_3(\alpha_3) + \psi_3(\alpha_3) = 0$$

номограммой с двумя параллельными бинарными шкалами и криволинейной шкалой для переменной α_3 (всего 5 переменных) (§ 12);

$$f_1(\alpha_1, \beta_1) \cdot f_3(\alpha_3, \beta_3) + f_2(\alpha_2, \beta_2) \cdot \varphi_3(\alpha_3, \beta_3) + \psi_3(\alpha_3, \beta_3) = 0$$

номограммой с двумя параллельными бинарными шкалами и бинарным полем для переменных α_3 и β_3 (всего 6 переменных) (§ 14).

§ 17. О приспособляемости бинарных шкал.

Размеры бинарной шкалы и пристраиваемого к ней бинарного поля ограничены пределами чертежа. Если мы желаем, чтобы упомянутое бинарное поле включило в себе в пределах чертежа все значения переменных α и β в заданных границах, то мы должны применить некоторые специальные приемы, аналогичные тем, которые использованы нами при построении обыкновенных шкал.

Здесь могут быть два случая.

1-й случай. Из двух переменных α и β, входящих в состав бинарной шкалы, одна, например β, принимается в качестве переменной, зависимой от всех остальных переменных номограммы. При этом переменная α будет очевидно независимой переменной, причем границы ее значений могут быть нам заданы при составлении номограммы.

С этой целью для построения бинарной шкалы по заданному уравнению

$$y = \varphi(\alpha, \beta) \tag{90}$$

мы можем в качестве второго уравнения для пристраиваемого бинарного поля принять вместо уравнения (91) следующее:

$$x = c\alpha + d, \tag{92}$$

где c и d — произвольные постоянные.

Система помеченных линий (92) представляет собой ряд линий, параллельных бинарной шкале OY (черт. 27) и находящихся в расстоянии x от нее.

Если мы по условиям чертежа можем пристроить к бинарной шкале OY поле шириной s сантиметров, то постоянные c и d уравнения (92) могут быть определены так, чтобы при низшем заданном пределе α x обращалось в нуль, а при высшем — равнялось s.

Уравнение системы β получится путем исключения α из уравнения (90), т. е. будет:

$$y=\varphi\left(\frac{x-d}{c}, \beta\right). \tag{93}$$

2-й случай. Обе переменные α и β — независимые. В таком случае кроме вышеупомянутых постоянных c и d надо ввести еще две постоянных e и g, положив уравнение бинарной шкалы в виде:

$$y=e\varphi(\alpha, \beta)+g.$$

Произвольные постоянные e и g вводятся в состав изображаемого уравнения совершенно так же, как и в случае обыкновенных шкал в приспособляемых номограммах. Значения e и g определяются по предельным значениям α и β с тем, чтобы при одном пределе мы получили бы $y=0$, а при другом—y равным принятой нами длине бинарной шкалы OY.

Пример. Уравнение Лесли и Шюблера для подбора сечения сжатых стержней имеет вид:

$$\frac{R_n}{R}=\frac{1}{1+0{,}00008\ \dfrac{L^2}{K}},$$

где R — допускаемое напряжение на сжатие для железа в килограммах на кв. миллиметр,

R_n — уменьшенное напряжение на продольный изгиб в килограммах на кв. миллиметр,

L — длина стержня в сантиметрах,

K — квадрат радиуса инерции сечения стержня в кв. сантиметрах. Величина эта дается в таблицах сортаментов прокатных сортов железа.

Решая это уравнение относительно K, имеем:

$$K=\frac{0{,}00008\ L^2}{\dfrac{R}{R_n}-1}.$$

Уравнение это принадлежит к типу:

$$f_3=\frac{f_1}{f_2},$$

где

$$f_1=0{,}00008\ L^2;$$

$$f_2=\frac{R}{R_n}-1;\ f_3=K;$$

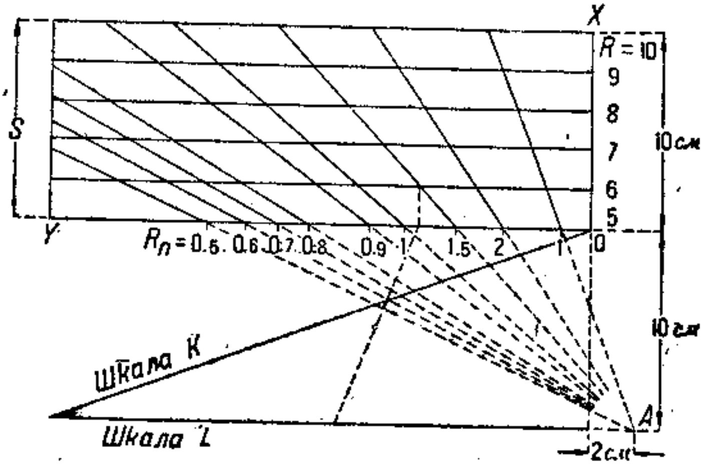
следовательно оно может изобразиться Z-номограммой (§ 6 причем — шкала (GH) будет бинарной — с двумя переменными R и R_n.

Построим номограмму для следующих пределов переменных:
L от 0 до 1000 *см*.

$\frac{R_n}{R}$ (коэфициент уменьшения) от 0,1 до 1;

R от 5 до 10 *кг/мм*².

Действуя согласно правилам § 6, мы должны расположить шкалу (L) на прямой CE (черт. 19), приняв C за начало, шкалу (K) — на DF, приняв D за начало, а бинарную шкалу (R, R_n) — на прямой GH, приняв G за начало. Примем $q = 20$ *см*, $h = 10$ *см* и пристроим к бинарной шкале (R, R_n) соответствующее бинарное поле в верхней части номограммы, придав ему высоту 10 *см*.



Черт. 28.

Пусть OY (на черт. 28) изобразит собой бинарную шкалу (R, R_n). Так как точка O есть начало шкалы, то, проведя перпендикуляр в этой точке OX, получим координатную систему для построения бинарного поля. Уравнение бинарной шкалы, согласно уравнению (30) § 6, будет:

$$y_2 = bf_2 - n = b\left(\frac{R}{R_n} - 1\right) - n;$$

коэфициенты b и n определяем из условий предельных значений $\frac{R}{R_n}$ от 1 до 10, причем y_2 должно быть не более 20 *см*. Имеем:

$$0 = b\,(1 - 1) - n;\; 20 = b\,(10 - 1) - n;$$

откуда

$$n = 0;\; b = \frac{20}{9} \approx 2;$$

итак уравнение бинарной шкалы будет:

$$y_2 = 2\frac{R}{R_n} - 2. \tag{94}$$

Для построения бинарного поля полагаем:

$$x_2 = cR + d.$$

Так как предельные значения для R приняты 5 и 10, то, приняв высоту бинарного поля в 10 *см*, имеем для определения c и d:

$$0 = c \cdot 5 + d;\ 10 = c \cdot 10 + d;$$

откуда:

$$c = 2;\ d = -10.$$

Следовательно окончательно имеем:

$$x = 2R - 10. \tag{95}$$

Уравнения (94) и (95) будут уравнениями пристраиваемого бинарного поля. Уравнение (95) будет уравнением системы R. Эта система состоит из прямых, параллельных OY и образующих на OX шкалу с равными графическими интервалами, а потому, отложив отрезок $OX = 10$ *см*, разделив его на пять частей, проведя через точки деления прямые, параллельные OY, и присвоив им пометки $R = 5$; 6; 7; 8; 9; 10, построим эту систему помеченных линий.

Для получения уравнения линий системы R_n надо исключить из уравнений (94) и (95) переменную R.

Получим:

$$y_2 = \frac{x_2 + 10}{R_n} - 2. \tag{96}$$

Это уравнение — линейное относительно x_2 и y_2, а потому изображает систему прямых. Для легкости ее вычерчивания замечаем, что при $x_2 = -10$, получим:

$$y_2 = -2.$$

Следовательно все прямые, помеченные различными значениями R_n, проходят через точку, координаты которой $x_2 = -10$ *см*, $y_2 = -2$ *см*. Строим эту точку A (черт. 28). Положив затем в уравнении (96) $x_2 = 0$, получим уравнение:

$$y_2 = \frac{10}{R_n} - 2. \tag{97}$$

Это есть уравнение шкалы, которая образуется пересечением системы прямых R_n с прямой $x_2 = 0$, т. е. с осью OY. Построив шкалу по уравнению (97) на оси OY от O как от начала, проводим через точку A и точки деления этой шкалы систему радиантов, которым и присваиваем пометки точек деления. Это и будет система R_n.

Затем строим остальную часть Z-номограммы, т. е. шкалы (L) и (K) по изложенным в § 6 методам. Так как в данном случае $n = 0$ и $m = 0$, то $p = t = 0$ и Z-номограмма получает вид, изображенный на черт. 28.

Ключ к пользованию номограммой указан на чертеже пунктиром.

§ 18. Номограммы из выравненных точек с тремя криволинейными шкалами.

До сих пор при построении каждой шкалы и каждого бинарного поля мы пользовались особой системой координат, приноровленной лишь для построения данной шкалы или поля в отдельности, а для установления геометрической связи между шкалами прибегали к методам элементарной геометрии.

Теперь же мы будем строить все шкалы и бинарные поля, отнесенные к одной общей системе координат OXY, что дает возможность для установления геометрической связи прибегать к методам аналитической геометрии. Такой способ совершенно необходим при переходе к построению более сложных номограмм и при исследовании их свойств.

Если мы, имея координатную систему OXY, нанесем три криволинейные шкалы соответственно трем переменным α_1, α_2 и α_3, выражающимся следующими уравнениями:

$$x_1 = \varphi_1(\alpha_1); \qquad y_1 = \psi_1(\alpha_1); \tag{98}$$

$$x_2 = \varphi_2(\alpha_2); \qquad y_2 = \psi_2(\alpha_2); \tag{99}$$

$$x_3 = \varphi_3(\alpha_3); \qquad y_3 = \psi_3(\alpha_3); \tag{100}$$

то эти три шкалы можно привести в какую-либо геометрическую связь между собой. Тогда тип уравнения, изображаемый такой номограммой, будет зависеть от характера этой связи. Разберем сперва случай номограмм из выравненных точек. Для пользования такими номограммами, как выше указывалось, надо по данным значениям переменных α_1 и α_2 наметить на шкалах (α_1) и (α_2) две соответственно помеченные точки, через которые надлежит провести прямую линию (индекс). Тогда пересечение этой прямой с третьей шкалой (α_3) даст нам в пересечении точку, помеченную искомым значением α_3 (черт. 4). Спрашивается, какой самый общий тип уравнений способен изображаться такой номограммой?

Для выяснения соответственного типа уравнения составим уравнение геометрической связи. Если уравнение прямой, выражающей положение нашего индекса, мы напишем в виде:

$$ux + vy + 1 = 0, \tag{101}$$

где u и v—коэфициенты, показывающие положение индекса по отношению к координатной системе OXY, то точка, координаты x_1 и y_1 которой выражены уравнениями (98), должна лежать на прямой (101), а потому величины x_1 и y_1 должны удовлетворять уравнению (101). Итак имеем:

$$ux_1 + vy_1 + 1 = 0. \tag{102}$$

Точно так же докажется, что:

$$ux_2 + vy_2 + 1 = 0, \tag{103}$$

$$ux_3 + vy_3 + 1 = 0, \tag{104}$$

так как точки (99) и (100) также должны лежать на прямой (101)

Уравнения (102), (103) и (104) должны удовлетворяться при любых значениях u и v, так как предыдущее рассуждение должно иметь место при любом положении прямой (101). Отсюда следует, что соответственные величины x_1, y_1, x_2, y_2, x_3 и y_3 не могут быть произвольными, а они должны быть связаны зависимостью, которая получается исключением двух параметров u и v из трех уравнений (102), (103) и (104). Исключение это, как известно из теории линейных уравнений, приводит к следующей зависимости:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{105}$$

Это и будет уравнением геометрической связи. Подставив в уравнение (105) значения x_1, y_1, x_2 и т. д. из (98), (99) и (100), получим соответственный тип уравнения в виде:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(\alpha_1) & \psi_1(\alpha_1) & 1 \\ \varphi_2(\alpha_2) & \psi_2(\alpha_2) & 1 \\ \varphi_3(\alpha_3) & \psi_3(\alpha_3) & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{106}$$

Пользуясь свойствами определителя, не трудно показать, что самый общий тип уравнения, изображаемый номограммой из выравненных точек и состоящей из трех криволинейных шкал, будет: [1]

$$\begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{107}$$

В самом деле, разделим уравнение (107) на произведение $\psi_1 \psi_2 \psi_3$. Согласно свойствам определителя мы можем сделать это так: разделить все элементы первой строки на ψ_1, второй на — ψ_2 и третьей на — ψ_3, и мы получаем:

$$\begin{vmatrix} \frac{f_1}{\psi_1} & \frac{\varphi_1}{\psi_1} & 1 \\ \frac{f_2}{\psi_2} & \frac{\varphi_2}{\psi_2} & 1 \\ \frac{f_3}{\psi_3} & \frac{\varphi_3}{\psi_3} & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{108}$$

т. е. тип уравнения (106).

Таким образом мы приходим к следующему заключению: если заданное для номографирования уравнение имеет вид (107), то его можно всегда изобразить номограммой из трех криволинейных шкал. Для этого надо его привести к виду (108), после чего непосредственно пишем искомые уравнения трех шкал:

$$x_1 = \frac{f_1}{\psi_1}; \qquad y_1 = \frac{\varphi_1}{\psi_1}; \tag{109}$$

$$x_2 = \frac{f_2}{\psi_2}; \qquad y_2 = \frac{\varphi_2}{\psi_2}; \tag{110}$$

$$x_3 = \frac{f_3}{\psi_3}; \qquad y_3 = \frac{\varphi_3}{\psi_3}. \tag{111}$$

---

[1] Для сокращения письма ниже вместо значков $f_1(\alpha_1)$; $\varphi_1(\alpha_1)$; $\psi_1(\alpha_1)$; $f_2(\alpha_2)$ и т. д. мы будем просто писать f_1, φ_1, ψ_1, f_2, и т. д.

Уравнение (109) шкалы (α_1) дает возможность построить ее по правилам согласно § 11. То же можно сказать и про остальные две шкалы (α_2) и (α_3).

Пример. Изохронизм регулятора Фарко.

В регуляторе между величиной $\rho = \frac{e}{l}$ (черт. 29) и крайними значениями α_1 и α_2 угла α, составляемого стержнями регулятора с вертикалью, существует следующее соотношение:

$$\rho = \frac{\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1}{\operatorname{ctg}\alpha_2 - \operatorname{ctg}\alpha_1}.$$

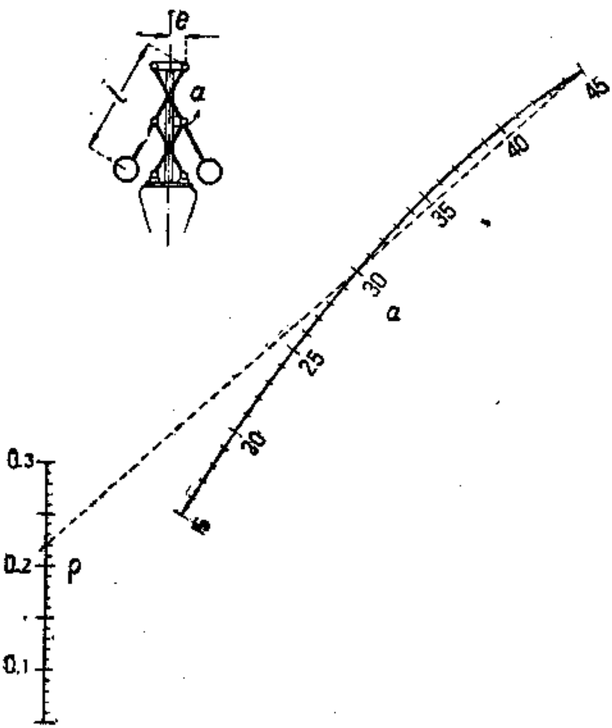
Помножая это уравнение на знаменатель ($\operatorname{ctg}\alpha_2 - \operatorname{ctg}\alpha_1$), мы его можем представить в виде следующего определителя: [1]

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha_1 & \operatorname{ctg}\alpha_1 \\ 1 & \cos\alpha_2 & \operatorname{ctg}\alpha_2 \\ 0 & \rho & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Разделяя этот определитель на произведение элементов последнего столбца, ($\operatorname{ctg}\alpha_1 \cdot \operatorname{ctg}\alpha_2$), получим его в форме (106):

$$\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\alpha_1 & \sin\alpha_1 & 1 \\ \operatorname{tg}\alpha_2 & \sin\alpha_2 & 1 \\ 0 & \rho & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда уравнения трех шкал будут:



Черт. 29.

$$\begin{aligned} x_1 &= \operatorname{tg}\alpha_1; & y_1 &= \sin\alpha_1; \\ x_2 &= \operatorname{tg}\alpha_2; & y_2 &= \sin\alpha_2; \\ x_3 &= 0; & y_3 &= \rho. \end{aligned}$$

Номограмма эта построена на черт. 29. Шкала ρ — прямолинейна и совпадает с осью OY. Особенность этой номограммы заключается в том, что шкалы переменных α_1 и α_2 сливаются в одну, т. е. имеют общую опору и общую градуировку, что впрочем прямо видно из уравнений этих шкал, имеющих одинаковую форму.

Общий тип уравнения (107) заключает в себе как частные случаи уже рассмотренные в §§ 4, 5, 6, 12 типы уравнений, поддающиеся изображению номограммами из выравненных точек.

---

[1] Общий способ такого приведения указан в § 22.

Так, например, уравнение типа (9) можно изобразить в виде:

$$\begin{vmatrix} \frac{f_1}{2} & 1 & 1 \\ -f_2 & 2 & 1 \\ -f_3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = f_1 + f_2 + f_3 = 0. \tag{112}$$

Уравнение (112) показывает, что проекции шкал будут:

$$x_1 = \frac{f_1}{2}; \qquad y_1 = 1; \tag{113}$$

$$x_2 = -f_2; \qquad y_2 = 2; \tag{114}$$

$$x_3 = -f_3; \qquad y_3 = 0. \tag{115}$$

Уравнение (113) шкалы (α_1) показывает, что проекция этой шкалы на ось OY обращается в точку с ординатой $y_1 = 1$; следовательно шкала прямолинейна и параллельна оси OX и выражается уравнением $x_1 = \frac{f_1}{2}$; то же можно сказать и про остальные две шкалы. Все три шкалы параллельны оси OX.

Уравнение типа (60) можно изобразить в виде:

$$\begin{vmatrix} f_1 & 0 & 1 \\ f_2 & 1 & 1 \\ -f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = f_1(\psi_3 - \varphi_3) + f_2\varphi_3 + f_3 = 0. \tag{116}$$

В самом деле, обозначая:

$$\psi_3 - \varphi_3 = \chi_3, \tag{116a}$$

имеем это уравнение в виде:

$$f_1\chi_3 + f_2\varphi_3 + f_3 = 0, \tag{117}$$

т. е. тип (60).

Когда уравнение приведено к виду (116), мы можем прямо написать уравнение трех шкал:

$$x_1 = f_1; \qquad y_1 = 0; \tag{118}$$

$$x_2 = f_2; \qquad y_2 = 1; \tag{119}$$

$$x_3 = -\frac{f_3}{\psi_3}; \qquad y_3 = \frac{\varphi_3}{\psi_3}. \tag{120}$$

Первые две шкалы прямолинейны и паллельны оси OX, третья шкала, выражаемая уравнением (120), криволинейна.

При построении криволинейной шкалы мы можем действовать так, как это указано в § 11.

Пример. Формула Аллара дает величину дальности освещения маяков d в зависимости от силы света маячного аппарата L и коэфициента прозрачности воздуха a и имеет вид:

$$100\,La^d = d^2.$$

Логарифмируя ее, получаем уравнение типа (117):

$$2 + \log L + d\log a = 2\log d,$$

где

$$f_1 = \log a;\quad f_2 = \log L + 2;\quad \chi_3 = d;\quad \varphi_3 = 1;\quad f_3 = -2\log d.$$

Из уравнения (116а) получаем функцию:

$$\psi_3 = \chi_3 + \varphi_3 = d + 1.$$

Следовательно согласно уравнениям (118), (119) и (120) имеем уравнения шкалы:

для переменной a $\quad x_1 = \log a;\qquad y_1 = 0;$

" " L $\quad x_2 = \log L + 2;\quad y_2 = 1;$

" " d $\quad x_3 = \dfrac{2\log d}{d+1};\quad y_3 = \dfrac{1}{d+1}.$

Первые две шкалы прямолинейны и параллельны между собой, а третья криволинейна.

§ 19. Приспособляемость общего типа номограмм из выравненных точек.

Заданное в форме (106) уравнение можно, пользуясь свойствами определителя, видоизменять бесконечно-разнообразными способами и вводить в него произвольные множители, соответственно чему мы получим различные расположения шкал. Этим обстоятельством пользуются с целью придать номограмме наиболее удобную форму и сделать ее приспособляемой к заданным границам независимых переменных.

Так, например, мы можем помножить все элементы первого столбца на произвольное число A, второго на B и третьего на C, сложить и заменить элементы первого столбца этой суммой. Таким образом определитель (106) можно преобразовать в следующий:

$$\begin{vmatrix} A\varphi_1 + B\psi_1 + C & \psi_1 & 1 \\ A\varphi_2 + B\psi_2 + C & \psi_2 & 1 \\ A\varphi_3 + B\psi_3 + C & \psi_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{121}$$

Таким же образом мы можем во втором столбце этого определителя ввести еще три произвольных числа D, E и F, и уравнение (121) обратится в следующее:

$$\begin{vmatrix} A\varphi_1 + B\psi_1 + C & D\varphi_1 + E\psi_1 + F & 1 \\ A\varphi_2 + B\psi_2 + C & D\varphi_2 + E\psi_2 + F & 1 \\ A\varphi_3 + B\psi_3 + C & D\varphi_3 + E\psi_3 + F & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{122}$$

Уравнения шкал трансформированной таким образом номограммы будут:

$$\begin{aligned} x_1 &= A\varphi_1 + B\psi_1 + C; & y_1 &= D\varphi_1 + E\psi_1 + F; \\ x_2 &= A\varphi_2 + B\psi_2 + C; & y_2 &= D\varphi_2 + E\psi_2 + F; \\ x_3 &= A\varphi_3 + B\psi_3 + C; & y_3 &= D\varphi_3 + E\psi_3 + F; \end{aligned}$$

где введено шесть произвольных постоянных, которые могут быть использованы для приспособления шкал в границах чертежа.

В этом направлении мы можем пойти дальше, а именно помножить заданное уравнение (107) на определитель:

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & J \end{vmatrix},$$

где A, B, C, D и т. д. — произвольные постоянные числа; совершая это помножение по правилам перемножения определителей, мы вместо уравнения (107) получаем следующее:

$$\begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & J \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} Af_1 + D\varphi_1 + G\psi_1 & Bf_1 + E\varphi_1 + H\psi_1 & Cf_1 + F\varphi_1 + J\psi_1 \\ Af_2 + D\varphi_2 + G\psi_2 & Bf_2 + E\varphi_2 + H\psi_2 & Cf_2 + F\varphi_2 + J\psi_2 \\ Af_3 + D\varphi_3 + G\psi_3 & Bf_3 + E\varphi_3 + H\psi_3 & Cf_3 + F\varphi_3 + J\psi_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Разделяя горизонтальные строки последнего определителя на элементы последнего его столбца, найдем уравнения трех шкал:

$$x_i = \frac{Af_i + D\varphi_i + G\psi_i}{Cf_i + F\varphi_i + J\psi_i}; \quad y_i = \frac{Bf_i + E\varphi_i + H\psi_i}{Cf_i + F\varphi_i + J\psi_i}; \ (i = 1, 2, 3). \quad (122a).$$

Таким образом мы ввели в уравнения шкал девять произвольных постоянных. Если мы поставим условием, чтобы пометки конечных точек шкал (α_1) и (α_2), помеченных заранее заданными числами, находились в заранее заданных четырех точках, то это требование потребует от нас удовлетворить восьми уравнениям, получающимся подстановкой в уравнения (122a) заданных пометок и заданных координат x и y конечных точек шкал (α_1) и (α_2). Этим уравнениям мы можем удовлетворить за счет введенных нами девяти произвольных постоянных A, B, C, D и т. д.

Итак **номограммы из выравненных точек являются вполне приспособляемыми.**

§ 20. Способ введения паразитного множителя.

Иногда возможно получить изящные и простые номограммы помощью введения паразитного множителя, в результате чего криволинейная шкала двух или всех трех переменных получается на одной опоре, т. е. расположена на одной кривой линии.

Покажем, например, каким образом получается такого рода номограмма для уравнения простейшего типа:

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0. \quad (112)$$

Помножив это уравнение на множитель $(f_1 - f_2)$, получаем:

$$f_1^2 - f_2^2 + f_1 f_3 - f_2 f_3 = 0.$$

Это уравнение мы можем написать в виде следующего определителя (см. § 22):

$$\begin{vmatrix} -f_1^2 & f_1 & 1 \\ -f_2^2 & f_2 & 1 \\ f_3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Складывая элементы двух последних столбцов (с целью уничтожения нуля в последнем столбце определителя), имеем:

$$\begin{vmatrix} -f_1^2 & f_1 & 1+f_1 \\ -f_2^2 & f_2 & 1+f_2 \\ f_3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

и, разделяя на произведение $(1+f_1)(1+f_2)$, приводим его к основной форме (106):

$$\begin{vmatrix} -\frac{f_1^2}{1+f_1} & \frac{f_1}{1+f_1} & 1 \\ -\frac{f_2^2}{1+f_2} & \frac{f_2}{1+f_2} & 1 \\ f_3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда имеем уравнения трех шкал:

$$x_1 = -\frac{f_1^2}{1+f_1}; \quad y_1 = \frac{f_1}{1+f_1}; \tag{123}$$

$$x_2 = -\frac{f_2^2}{1+f_2}; \quad y_2 = \frac{f_2}{1+f_2}; \tag{124}$$

$$x_3 = f_3; \qquad y_3 = 1. \tag{125}$$

Последняя шкала прямолинейна. Две первые криволинейны и расположены на одной опоре. В самом деле, для того чтобы получить уравнение опоры первой шкалы, надо исключить переменную α_1 [что равносильно в данном случае исключению переменной $f_1(\alpha_1)$ из двух уравнений (123)], получаем уравнение опоры для шкалы (α_1):

$$x_1 = -\frac{y_1^2}{1-y_1}. \tag{126}$$

Исключая переменную α_2 из двух уравнений (124) [что равносильно в данном случае исключению функции $f_2(\alpha_2)$], получаем уравнение второй опоры:

$$x_2 = -\frac{y_2^2}{1-y_2}. \tag{127}$$

Мы видим, что обе кривые (126) и (127) имеют одно и то же уравнение (гипербола), следовательно они совпадают. Таким образом мы получим на гиперболе (126) две градуировки: одну соответствующую переменной α_1, а другую — α_2.

Кривая, имеющая две градуировки, может трактоваться как номограмма с двумя переменными, так как каждой точке ее соответствуют две пометки: α_1 и α_2.

Может показаться странным, почему мы в номограмме, построенной нами для уравнения (112), получили попутно и зависимость между α_1 и α_2, представляющих две переменных независимых.

Вопрос разъясняется тем, что мы ввели множитель f_1-f_2 и наша номограмма по существу изображает собой уравнение:

$$(f_1+f_2+f_3)\,(f_1-f_2)=0,$$

которое распадается на два:

$$f_1+f_2+f_3=0 \tag{128}$$

или

$$f_1-f_2=0. \tag{129}$$

Итак по существу мы получили две номограммы: одну — уравнения (128) и другую — уравнения (129). Вторая нам совершенно не нужна и является следствием лишь особого номографического приема, который выразился введением множителя (f_1-f_2). Вот почему этот последний и получил наименование *паразитного множителя.*

Возьмем другой пример: уравнение типа

$$f_1f_2+f_3=0. \tag{130}$$

Помножая его на паразитный множитель (f_1-f_2), получаем:

$$f_1^2f_2-f_1f_2^2+f_1f_3-f_2f_3=0,$$

что можно представить так: [1]

$$\begin{vmatrix} f_1^2 & f_1 & 1 \\ f_2^2 & f_2 & 1 \\ f_3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0, \tag{131}$$

откуда имеем уравнения трех шкал:

$$x_1=f_1^2; \qquad y_1=f_1; \tag{132}$$

$$x_2=f_2^2; \qquad y_2=f_2; \tag{133}$$

$$x_3=f_3\,; \qquad y_3=0\,; \tag{134}$$

исключая переменную α_1 (т. е. f_1) из уравнений (132), получаем уравнение опоры первой шкалы $x_1=y_1^2$; точно так же уравнение опоры второй шкалы будет $x_2=y_2^2$; т. е. обе шкалы будут расположены на параболе, ось которой совпадает с осью OX. Третья шкала прямолинейна и совпадает с осью OX.

Можно преобразованием определителя (131) обратить общую опору шкал (α_1) и (α_2) в окружность и получить более удобный вид номограммы. Действительно, переставив первый и третий столбцы в определителе (131), получим:

$$\begin{vmatrix} 1 & f_1 & f_1^2 \\ 1 & f_2 & f_2^2 \\ 1 & 0 & f_3 \end{vmatrix}=0.$$

Заменяя элементы последнего столбца суммой их с элементами первого, получаем:

$$\begin{vmatrix} 1 & f_1 & 1+f_1^2 \\ 1 & f_2 & 1+f_2^2 \\ 1 & 0 & 1+f_3 \end{vmatrix}=0$$

[1] Способ приведения заданного уравнения к виду определителя изложен в § 62.

и, разделяя первую строку на $1+f_1^2$, вторую на $1+f_2^2$ и третью на $1+f_3$, находим:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{1+f_1^2} & \frac{f_1}{1+f_1^2} & 1 \\ \frac{1}{1+f_2^2} & \frac{f_2}{1+f_2^2} & 1 \\ \frac{1}{1+f_3} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Откуда получаем новые уравнения для трех шкал:

$$x_1 = \frac{1}{1+f_1^2}; \quad y_1 = \frac{f_1}{1+f_1^2}; \tag{135}$$

$$x_2 = \frac{1}{1+f_2^2}; \quad y_2 = \frac{f_2}{1+f_2^2}; \tag{136}$$

$$x_3 = \frac{1}{1+f_3}; \quad y_3 = 0. \tag{137}$$

Исключая f_1 из уравнений (135), получаем уравнение опоры шкалы переменной α_1:

$$x_1^2 + y_1^2 - x_1 = 0.$$

Точно так же уравнение опоры для шкалы (α_2) получаем:

$$x_2^2 + y_2^2 - x_2 = 0,$$

т. е. обе шкалы (α_1) и (α_2) расположены на одной и той же окружности. Третья шкала будет прямолинейна и совпадать с осью OX.

Пример. Уравнение Ламé:

$$m = \sqrt{\frac{R+p}{R-p}} - 1,$$

где m — отношение толщины стенки трубы к радиусу внутренней окружности, p — давление воды внутри трубы, R — наибольшее напряжение в материале трубы (p и R выражены в килограммах на кв. миллиметр). Уничтожая иррациональность в уравнении Ламé, получаем:

$$(m+1)^2 = \frac{R+p}{R-p};$$

или, пользуясь свойствами пропорций, приводим его к виду (130):

$$-p \cdot \frac{1}{R} + \frac{(1+m)^2 - 1}{(1+m)^2 + 1} = 0,$$

где можно положить:

$$f_1 = p; \quad f_2 = -\frac{1}{R}; \quad {}_3 = \frac{(1+m)^2 - 1}{(1+m)^2 + 1}.$$

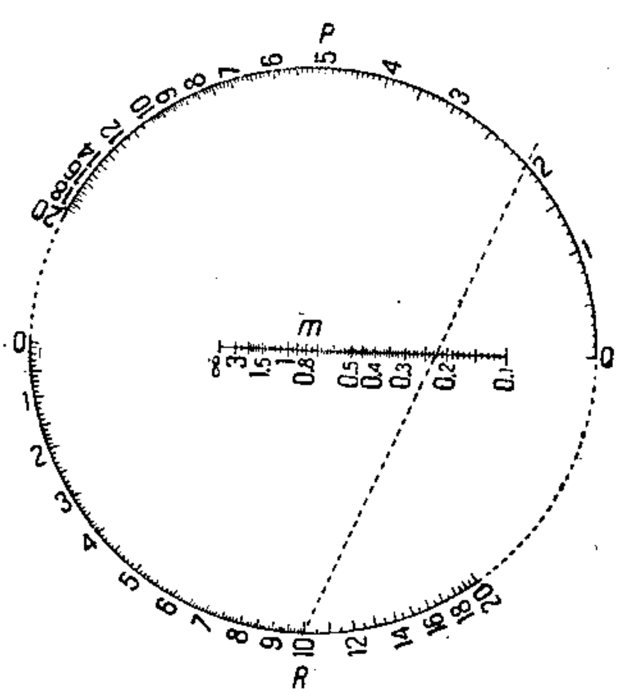
Следовательно уравнения шкал будут:

$$x_1 = \frac{1}{1+p^2}; \quad y_1 = \frac{p}{1+p^2};$$

$$x_2 = \frac{1}{1+\frac{1}{R^2}} = \frac{R^2}{1+R^2}; \quad y_2 = -\frac{\frac{1}{R}}{1+\frac{1}{R^2}} = -\frac{R}{1+R^2};$$

$$x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(1+m)^2}; \quad y_3 = 0.$$

Построенная таким образом номограмма изображена на черт. 30.



Черт. 30.

§ 21. Номографический порядок уравнений.

Из всего вышеизложенного ясно, что номографирование уравнений не представляет никаких затруднений, коль скоро оно приведено к одному из типовых уравнений, или, как говорят, к **канонической форме**, так как уравнение, приведенное к такой форме, дает возможность непосредственно написать уравнения шкал или бинарных полей, а как только это сделано, мы можем и построить таковые. Следовательно все трудности номографирования заданного уравнения заключаются в том, чтобы по виду этого уравнения определить — можно ли его привести к той или иной канонической форме и если можно, то каким образом это сделать.

Для решения этого вопроса по отношению к канонической форме (106) в номографии введено понятие о **номографическом порядке уравнений**. Каноническая форма (106) путем раскрытия определителя приводится к сумме членов, имеющих в своем составе шесть различных функций: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3$. Соответственно этому оно называется уравнением шестого номографического порядка. Но каноническое уравнение может иметь также только три, четыре или пять различных функций.

Номографическим порядком уравнения с тремя переменными называется число различных функций f_i, f_j, f_k, имеющихся в составе заданного уравнения, приведенного к виду:

$$\Sigma f_i f_j f_k + \Sigma f_i f_j + \Sigma f_i + A = 0, \tag{137a}$$

где A — постоянное число, не равное нулю.

В этом смысле рассмотренные уравнения типа

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0; \qquad f_1 f_2 + f_3 = 0$$

суть уравнения третьего порядка. Они, как мы видели, всегда могут изображаться номограммой из выравненных точек.

Уравнение типа

$$f_3 f_1 + \varphi_3 f_2 + \psi_3 = 0 \tag{137б}$$

путем разделения на ψ_3 может быть приведено к виду:

$$\lambda_3 f_1 + \chi_3 f_2 + 1 = 0 \tag{138}$$

и следовательно является уравнением четвертого порядка, так как в нем мы имеем четыре различные функции. Оно, как мы видели, всегда изображается номограммой из выравненных точек.

Профессор Кларк показал, что всякое уравнение четвертого порядка с тремя переменными может быть приведено к виду (137б) или к следующему виду:

$$f_1 f_2 f_3 + \varphi_3 (f_1 + f_2) + \psi_3 = 0. \tag{139}$$

Последнее уравнение тоже может быть приведено к канонической форме (106) помощью паразитного множителя, как мы сейчас покажем, а отсюда вытекает заключение, что **всякое уравнение четвертого порядка может быть изображено номограммой из выравненных точек.**

Для того чтобы привести уравнение (139) к канонической форме (106), надлежит помножить его на $(f_1 - f_2)$, после чего получаем:

$$[f_1 f_2 f_3 + \varphi_3 (f_1 + f_2) + \psi_3] \cdot (f_1 - f_2) = \begin{vmatrix} 1 & -f_1 & f_1^2 \\ 1 & -f_2 & f_2^2 \\ f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{140}$$

Способ написания определителя, стоящего во второй части уравнения (140), приведен в следующем параграфе. Коль скоро уравнение (139) приведено к форме определителя, можно его преобразовать в каноническую форму (106) путем разделения на элементы последнего столбца и написать уравнения шкал. Вторая и третья шкалы по необходимости должны разместиться на одной опоре, так как нами введен паразитный множитель $(f_1 - f_2)$.

Эту общую опору всегда можно превратить в круг. Для этого надо только преобразовать определитель (140) в следующий:

$$\begin{vmatrix} 1 & -f_1 & 1+f_1^2 \\ 1 & -f_2 & 1+f_2^2 \\ f_3 & \varphi_3 & f_3+\psi_3 \end{vmatrix} = 0$$

или, приводя к канонической форме:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{1+f_1^2} & -\frac{f_1}{1+f_1^2} & 1 \\ \frac{1}{1+f_2^2} & -\frac{f_2}{1+f_2^2} & 1 \\ \frac{f_3}{f_3+\psi_3} & \frac{\varphi_3}{f_3+\psi_3} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда уравнения трех шкал будут:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{1+f_1^2}; \quad y_1 = -\frac{f_1}{1+f_1^2}; \\ x_2 &= \frac{1}{1+f_2^2}; \quad y_2 = -\frac{f_2}{1+f_2^2}; \\ x_3 &= \frac{f_3}{f_3+\psi_3}; \quad y_3 = \frac{\varphi_3}{f_3+\psi_3}. \end{aligned}\right\} \qquad (140a)$$

Пример. Гидравлический радиус сечения канала R выражается в функции глубины канала d и ширины канала по дну b следующей формулой:

$$R = \frac{bd + d^2}{b + d\sqrt{8}}.$$

Избавляясь от знаменателя, получаем:

$$bR + Rd\sqrt{8} - bd - d^2 = 0,$$

т. е. уравнение четвертого номографического порядка, так так, полагая

$$f_1 = -R\sqrt{8} \quad f_2 = b \quad f_3 = -\frac{1}{\sqrt{8}} \quad \varphi_3 = -d \quad \psi_3 = -d^2,$$

имеем:

$$f_1 f_2 f_3 + \varphi_3 (f_1 + f_2) + \psi_3 = 0,$$

т. е. уравнение типа (139). Шкалы переменных b и R будут иметь общую опору. Если мы желаем, чтобы эта опора была окружностью, то уравнения шкал соответственно (140a) будут:

$$x_1 = \frac{1}{1+8R^2}; \quad y_1 = \frac{R\sqrt{8}}{1+8R^2};$$

$$x_2 = \frac{1}{1+b^2}; \quad y_2 = -\frac{b}{1+b^2};$$

$$x_3 = \frac{1}{1+d^2\sqrt{8}}; \quad y_3 = \frac{d\sqrt{8}}{1+d^2\sqrt{8}}.$$

§ 22. Общий метод приведения уравнений к канонической форме.

Мы упоминали, что главной трудностью номографирования уравнений является приведение заданного уравнения к канонической форме (106). Общий и наиболее практичный способ такого приведения дал Кларк, профессор университета в Каире. Этот способ одинаково применим для уравнений порядка 3, 4, 5 и 6.

Если вынести за скобки в уравнении (137а) функции, заключающие переменную α_3, то мы получим уравнение самого общего вида:

$$f_3 A_{12} + \varphi_3 B_{12} + \psi_3 C_{12} = 0,$$

где A_{12}, B_{12}, C_{12} будут функции, заключающие остальные две переменные α_1 и α_2. Разделяя это уравнение на C_{12}, приводим его к виду:

$$f_3 \frac{A_{12}}{C_{12}} + \varphi_3 \frac{B_{12}}{C_{12}} + \psi_3 = 0. \tag{141}$$

Затем надо положить:

$$u = \frac{A_{12}}{C_{12}}, \tag{142}$$

$$v = \frac{B_{12}}{C_{12}}, \tag{143}$$

где u и v — некоторые новые переменные. Подставляя выражения (142) и (143) в (141), мы получим первое исходное уравнение:

$$uf_3 + v\varphi_3 + \psi_3 = 0. \tag{144}$$

Затем надо из двух уравнений (142) и (143) исключать сперва α_1, а потом α_2. *Если в результате этих исключений получатся два уравнения линейных относительно u и v, то задачу о приведении уравнения к каноническому виду этой операцией можно считать выполненной.*

В самом деле, если исключение переменной α_2 из (142) и (143) дает линейное уравнение относительно u и v, то оно по необходимости будет иметь вид:

$$uf_1 + v\varphi_1 + \psi_1 = 0. \tag{145}$$

Точно так же исключение α_1 дает уравнение:

$$uf_2 + v\varphi_2 + \psi_2 = 0. \tag{146}$$

Исключая из исходных уравнений (144), (145) и (146) переменные u и v, получаем искомую форму:

$$\begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0,$$

и приведение к канонической форме можно считать законченным.

Пример 1. Покажем, как приводится уравнение (139) предыдущего параграфа к канонической форме.

Имеем заданное уравнение:

$$f_1 f_2 f_3 + \varphi_3 (f_1 + f_2) + \psi_3 = 0. \tag{139}$$

Полагая:

$$u = f_1 f_2, \tag{147}$$

$$v = f_1 + f_2, \tag{148}$$

получаем уравнение (139) в виде:

$$u f_3 + v \varphi_3 + \psi_3 = 0. \tag{149}$$

Исключая из (147) и (148) переменную α_2 (т. е. f_2), получаем:

$$u \cdot \frac{1}{f_1} - v + f_1 = 0, \tag{150}$$

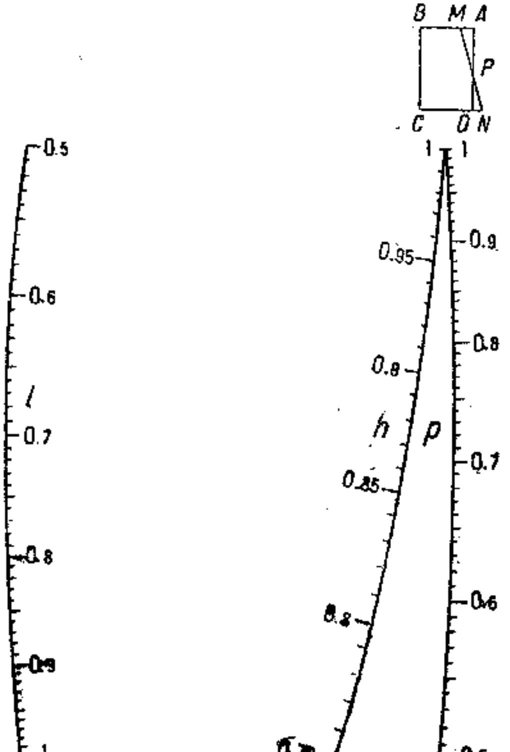
исключая из тех же уравнений переменную α_1 (т. е. f_1):

$$u \cdot \frac{1}{f_2} - v + f_2 = 0. \tag{151}$$

Исключая затем из уравнений (149), (150) и (151) u и v, находим искомое выражение:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{f_1} & -1 & f_1 \\ \frac{1}{f_2} & -1 & f_2 \\ f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{152}$$

Примечание. Определитель (140) предыдущего параграфа отличается от (152) тем, что последний помножен на произведение $f_1 f_2$ и затем переставлены столбцы, отчего он не перестает быть равным нулю.



Черт. 31.

Пример 2. Выбор наклона задней грани подпорной стенки. Если $ABCD$ (черт. 31) представляет прямоугольное сечение подпорной стенки, рассчитанной на устойчивость, $MBCN$ — трапецоидальное сечение стенки такой же устойчивости как и первая стенка, то, обозначая $\frac{AP}{AD} = h$, $\frac{BM}{BA} = l$, а через p — отношение удельного веса земляной засыпки к удельному весу материала стенки, имеем соотношение:

$$(1 + l) h^2 - l(1 + p) h - \frac{1}{3}(1 - l)(1 + 2p) = 0. \tag{153}$$

Номограмма из трех криволинейных шкал этого уравнения представлена на черт. 31 и построена следующим образом.

Разделяя уравнение (153) на $\frac{1}{3}(1-l)(1+2p)$, имеем:

$$\frac{3(1+l)}{(1-l)(1+2p)}\cdot h^2-\frac{3l(1+p)}{(1-l)(1+2p)}h-1=0. \tag{154}$$

Полагая:

$$u=\frac{3(1+l)}{(1-l)(1+2p)}, \tag{155}$$

$$v=\frac{3l(1+p)}{(1-l)(1+2p)} \tag{156}$$

и подставляя эти выражения в (154), получаем первое исходное уравнение:

$$uh^2-vh-1=0. \tag{157}$$

Исключая из двух уравнений (155) и (156) величину p, получаем второе исходное уравнение:

$$-\frac{l}{2(1+l)}\cdot u+v-\frac{3}{2}\cdot\frac{l}{1-l}=0. \tag{158}$$

Исключая из двух уравнений (155) и (156) величину l, получаем третье исходное уравнение:

$$u-\frac{2}{1+p}v-\frac{3}{1+2p}=0. \tag{159}$$

Исключая u и v из трех уравнений (157), (158) и (159), получаем искомый определитель:

$$\begin{vmatrix} h^2 & -h & -1 \\ -\frac{l}{2(1+l)} & 1 & -\frac{3}{2}\frac{l}{1-l} \\ 1 & -\frac{2}{1+p} & -\frac{3}{1+2p} \end{vmatrix}=0.$$

Разделяя этот определитель на элементы последнего столбца приводим его к канонической форме (106) и находим уравнение трех шкал:

$$x_1=-h^2;\quad y_1=h;$$

$$x_2=\frac{1-l}{3(1+l)};\quad y_2=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1-l}{l};$$

$$x_3=-\frac{1+2p}{3};\quad y_3=\frac{2}{3}\cdot\frac{1+2p}{1+p}.$$

4
45

Все три шкалы криволинейные и построены на черт. 31.

§ 23. Номограмма из выравненных точек с тремя бинарными полями.

Если мы в канонической форме (106) каждое обозначение φ_1, ψ_1, φ_2, ψ_2,... и т. д. будем разуметь как функции двух переменных, а именно $\varphi_1(\alpha_1, \beta_1)$, $\psi_1(\alpha_1, \beta_1)$, $\varphi_2(\alpha_2, \beta_2)$ и т. д., то уравнение то изобразится номограммой с шестью переменными α_1, β_1, α_2, β_2, α_3 и β_3.

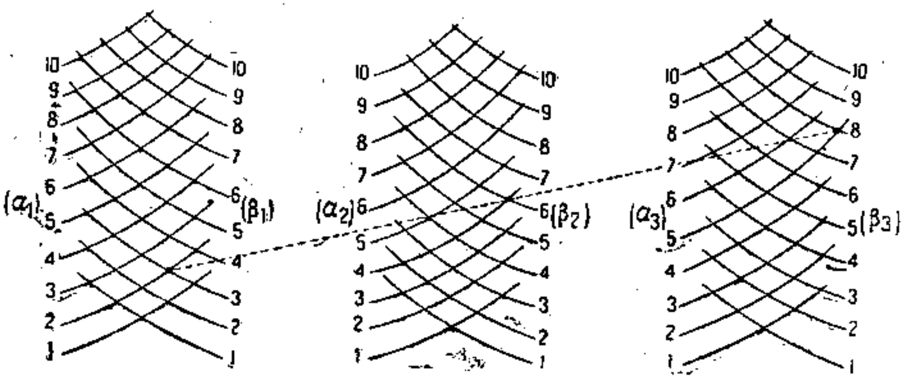
В этом случае вместо уравнений шкал мы получим уравнения трех бинарных полей:

$$x_1 = \varphi_1(\alpha_1, \beta_1);\quad y_1 = \psi_1(\alpha_1, \beta_1);$$
$$x_2 = \varphi_2(\alpha_2, \beta_2);\quad y_2 = \psi_2(\alpha_2, \beta_2);$$
$$x_3 = \varphi_3(\alpha_3, \beta_3);\quad y_3 = \psi_3(\alpha_3, \beta_3).$$

Такая номограмма будет иметь вид, изображенный на черт. 32.

Ясно, что таким способом может быть изображено любое уравнение вида (107), где все f_1, φ_1, ψ_1, f_2, φ_2 и т. д. суть функции двух переменных.

Все сказанное в предыдущих параграфах о приспособляемости номограмм с тремя шкалами распространяется и на номограммы с тремя бинарными полями.



Черт. 32.

Пример. l_1 — отношение вольтажей $\frac{E_1}{E_2}$ двух разных фаз α_1 и α_2; l_2 — отношение показаний ваттметров $\frac{W_1}{W_2}$, поставленных на этих фазах; $\cos\beta$ — коэфициент мощности тока. Тогда:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{l_2\cos\alpha_2 - l_1\cos\alpha_1}{l_2\sin\alpha_2 - l_1\sin\alpha_1}.$$

Избавляясь от знаменателя, получаем:

$$\operatorname{tg}\beta\,(l_2\sin\alpha_2 - l_1\sin\alpha_1) - (l_2\cos\alpha_2 - l_1\cos\alpha_1) = 0.$$

Представляем это уравнение в виде определителя (хотя бы по способу, указанному в § 22):

$$\begin{vmatrix} l_2\cos\alpha_2 & l_2\sin\alpha_2 & 1 \\ l_1\cos\alpha_1 & l_1\sin\alpha_1 & 1 \\ \operatorname{tg}\beta & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Избавляясь от нуля в последнем столбце, приводим его к канонической форме (106):

$$\begin{vmatrix} \frac{l_2 \cos \alpha_2}{1 + l_2 \sin \alpha_2} & \frac{l_2 \sin \alpha_2}{1 + l_2 \sin \alpha_2} & 1 \\ \frac{l_1 \cos \alpha_1}{1 + l_1 \sin \alpha_1} & \frac{l_1 \sin \alpha_1}{1 + l_1 \sin \alpha_1} & 1 \\ \operatorname{tg} \beta & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда имеем уравнения бинарных полей:

$$x_2 = \frac{l_2 \cos \alpha_2}{1 + l_2 \sin \alpha_2}; \tag{160}$$

$$y_2 = \frac{l_2 \sin \alpha_2}{1 + l_2 \sin \alpha_2}; \tag{161}$$

$$x_1 = \frac{l_1 \cos \alpha_1}{1 + l_1 \sin \alpha_1}; \tag{162}$$

$$y_1 = \frac{l_1 \sin \alpha_1}{1 + l_1 \sin \alpha_1}; \tag{163}$$

и уравнения шкалы:

$$x_3 = \operatorname{tg} \beta; \quad y_3 = 0.$$

Бинарные поля строим по правилам § 13. Так как форма функции (160) совпадает с (162), а форма (161) совпадает с (163), то оба поля сливаются в одно (случай, аналогичный с номограммой § 18 черт. 29). Шкала (β) — прямолинейная. Вместо значений $x_3 = \operatorname{tg} \beta$ на ней нанесена шкала $x_3 = \operatorname{tg} \arccos (\cos \beta)$, так что на ней можно читать прямо требуемый коэфициент $\cos \beta$. Номограмма в таком виде, построенная инж. Соро̀, представлена на черт. 33. Прямой пунктирной линией на чертеже показано, что при $\alpha_1 = 50°$, $l_1 = 30$, $\alpha_2 = 65°$, $l_2 = 8$ получается $\cos \beta = 0{,}71$.

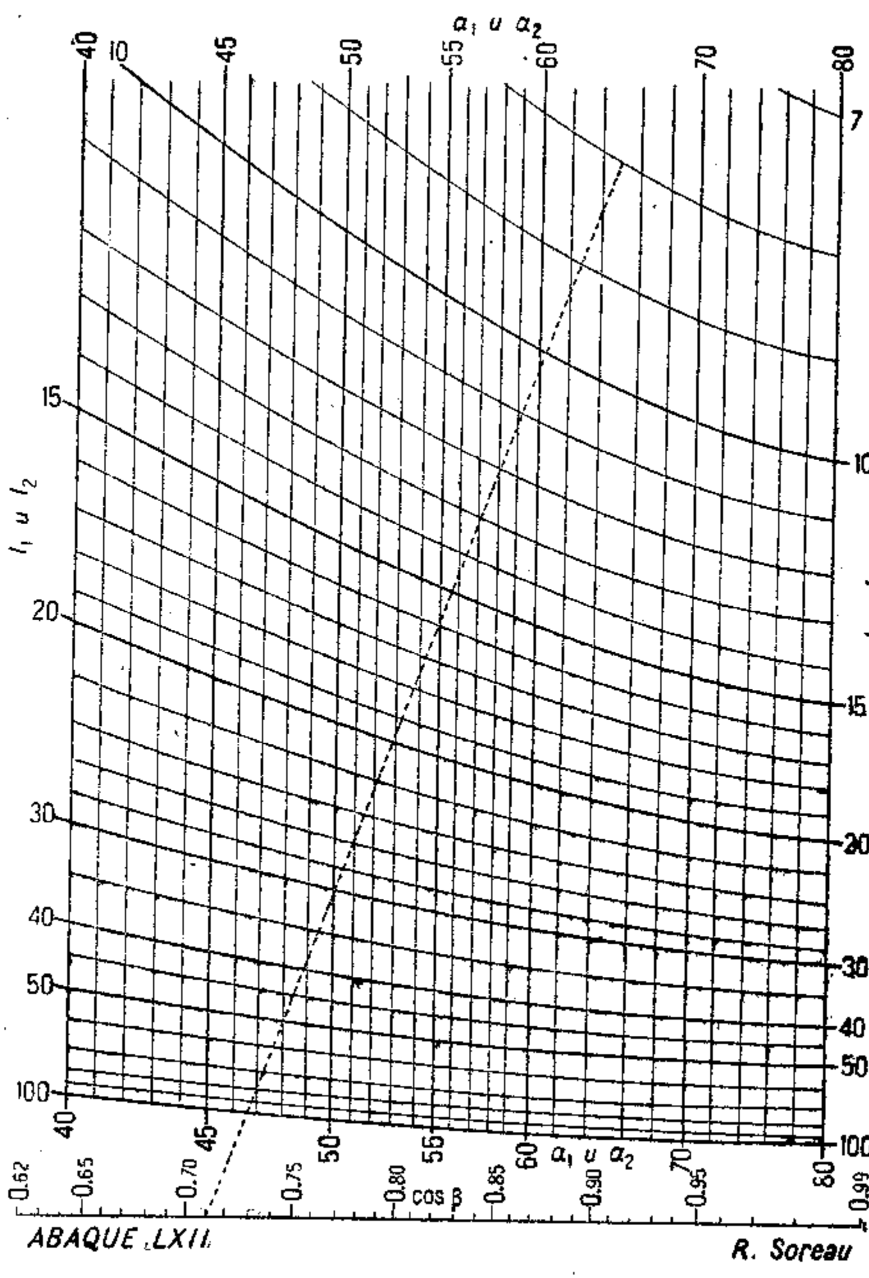
§ 24. Номограмма с бинарными шкалами.

Если в уравнении, приведенном в канонической форме (106), одна из функций, например φ_1, обращается в постоянную (т. е. не заключает в себе переменных α_1 и β_1), то в этом случае имеем:

$$x_1 = A; \tag{164}$$

$$y_1 = \psi_1(\alpha_1, \beta_1), \tag{165}$$

т. е. мы имеем не бинарное поле, а бинарную шкалу (§ 15), которая параллельна оси OY и находится в расстоянии A от нее, а (165) представляет уравнение этой шкалы (§ 15).



Черт. 33.

Пример. Возьмем формулу для свай, приведенную на черт. 14. Избавляясь от иррациональности, получаем:

$$(2\,000\,D)^2 + 10 \cdot (2\,000)\,D\,F = \frac{10\,F}{e}\,Q\,H\,\frac{Q + 0{,}2\,q}{Q + q}.$$

Логарифмируя ее и разбивая на два уравнения (§ 10), получаем

$$\log \frac{(2\,000\,D)^2 + 20\,000\,D\,F}{10F} + \log e = \gamma; \tag{166}$$

$$\log H + \log Q \frac{Q + 0{,}2\,q}{Q + q} = \gamma. \tag{167}$$

Путем построения двух номограмм уравнений (166) и (167) с графическим исключением (§ 10) переменного γ получена номограмма, изображенная на черт. 14.

Возьмем уравнение (167); приводя его к канонической форме (106) способом Кларка (§ 22), получаем уравнение (см. ур. 112):

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{\gamma}{2} & 1 \\ 2 & \log Q \frac{Q+0{,}2\,q}{Q+q} & 1 \\ 0 & \log H & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда имеем уравнения шкал:

$$\begin{gathered} x_1 = 1; \quad y_1 = \frac{\gamma}{2}; \\ x_2 = 2; \quad y_2 = \log Q \frac{Q + 0{,}2\,q}{Q + q}; \\ x_3 = 0; \quad y_3 = \log H. \end{gathered} \tag{168}$$

Все три шкалы параллельны оси OY. Уравнение (168) показывает, что мы имеем для Q и q бинарную шкалу, которая строится по правилам § 15. Такая шкала (bb) и построена в расстоянии $x_2 = 2$ от начала координат на черт. 14.

§ 25. Номограммы из равноудаленных точек.

Вообразим номограмму из трех криволинейных шкал переменных α_1, α_2 и α_3 (черт. 34), причем ключ для пользования такой номограммой будет таков: ставим одну ножку циркуля в точку A', помеченную заданным значением переменной α_1, другую ножку циркуля—в точку A'', помеченную заданным значением α_2, и затем, вращая циркуль вокруг точки A'', засекаем циркулем третью шкалу в точке A''', где и читаем соответствующее значение третьей зависимой переменной α_3. Шкалу переменной α_2 назовем шкалой центров, а шкалы (α_1) и (α_3)—шкалами засечек.

Такие номограммы особенно удобны при соединении нескольких номограмм путем графического исключения переменных. Так, например, при составлении номограмм с четырьмя переменными (черт. 35) по заданным значениям α_1 и α_2 засекается сперва немая шкала в точке A, а затем, не сдвигая ножки циркуля с этой точки, мы переносим другую ножку циркуля в точку шкалы (α_3), помеченной заданным значением α_3, и, вращая вокруг этой точки, делаем вторую засечку на шкале (α_4), где и читаем искомый результат.

Сперва надлежит установить каноническую форму уравнений, изображаемых такою номограммой с тремя переменными.

Если уравнения трех криволинейных шкал будут:

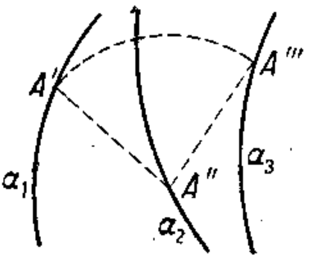
$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(\alpha_1); \quad y_1 = \psi_1(\alpha_1); \\ x_2 &= \varphi_2(\alpha_2); \quad y_2 = \psi_2(\alpha_2); \\ x_3 &= \varphi_3(\alpha_3); \quad y_3 = \psi_3(\alpha_3), \end{aligned}\right\} \tag{169}$$

то уравнение геометрической связи, выражающее равенство расстояний точки α_2 от точек α_1 и α_3, будет:

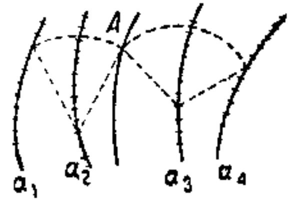
$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2,$$

или, раскрывая скобки и перенося все члены в первую часть, получаем:

$$x_1^2 + y_1^2 - x_3^2 - y_3^2 - 2x_2(x_1 - x_3) - 2y_2(y_1 - y_3) = 0. \tag{170}$$



Черт. 34.



Черт. 35.

Вставляя сюда выражения (169), получаем каноническую форму:

$$\varphi_1^2 + \psi_1^2 - \varphi_3^2 - \psi_3^2 - 2\varphi_2(\varphi_1 - \varphi_3) - 2\psi_2(\psi_1 - \psi_3) = 0. \tag{171}$$

Этот тип уравнений обнимает собой некоторые типы, которые мы уже встречали. Так например, положив в уравнении (171) $\varphi_1 = 0$, $\psi_2 = 0$ и $\psi_3 = 0$, мы получаем уравнение вида:

$$\psi_1^2 - \varphi_3^2 + 2\varphi_2\varphi_3 = 0$$

и, полагая $-\varphi_3^2 = -\chi_3$, $\psi_1^2 = f_1$, получим уравнение:

$$f_1 - \chi_3 + 2\varphi_2\varphi_3 = 0 \tag{172}$$

или, разделяя на $-\chi_3$,

$$-f_1 \cdot \frac{1}{\chi_3} - 2\varphi_2 \cdot \frac{\varphi_3}{\chi_3} + 1 = 0$$

т. е. тип уравнения (138).

В номограмме уравнения, приведенного к такому виду, мы будем иметь следующие шкалы:

$$x_1 = 0; \qquad y_1 = \psi_1 = \sqrt{f_1};$$
$$x_2 = \varphi_2; \qquad y_2 = 0;$$
$$x_3 = \varphi_3 = \sqrt{\chi_3}; \qquad y_3 = 0,$$

т. е. все три шкалы прямолинейны. Вторые две шкалы совпадают с осью OX, а первая с осью OY.

Пример 1. Квадратное уравнение, не имеющее мнимых корней, имеет вид:

$$z^2 + pz - q = 0, \tag{172a}$$

где q — положительно.

Это уравнение входит в каноническую форму (171), если в ней положить:

$$\varphi_1 = z;\ \psi_1 = 0;\ \varphi_2 = -\frac{p}{2};\ \psi_2 = 0;\ \varphi_3 = 0;\ \psi_3 = \sqrt{q}.$$

Откуда уравнение шкал:

$$x_1 = z;\ y_1 = 0;\ x_2 = -\frac{p}{2};\ y_2 = 0;\ x_3 = 0;\ y_3 = \sqrt{q}.$$

По этим уравнениям построена номограмма на черт. 36. Две первые шкалы совпадают и равномерны. Третья шкала функции (q) перпендикулярна к первым. Когда шкалы (z) и (p) нанесены, то шкалу (q) можно градуировать, пользуясь построенными шкалами (z) и (p). Для этого надо обратить внимание на следующее обстоятельство. Из уравнения (172a) следует:

$$q = z^2 + pz.$$

Следовательно если мы поставим ножку циркуля на шкале (z), помеченной каким-нибудь числом z_1, а другую ножку циркуля поставим на шкале (p), помеченной числом $1 - z_1$, то, повернув циркуль вокруг точки (z) шкалы центров и засекая шкалу (q), мы должны иметь там пометку q_1, равную:

$$q_1 = z_1^2 + (1 - z_1) z_1 = z_1,$$

которую и ставим в этой точке. Таким образом построена номограмма на черт. 36.

Пример 2. Возьмем квадратное уравнение:

$$z^2 + pz + q = 0,$$

причем оно имеет вещественные корни и при положительных q (для области $|q| \leq A^2$).

Заданное уравнение мы можем подвести под каноническую форму (171), положив в ней:

$$\varphi_1 = 0;\ \psi_1 = z;\ \varphi_2 = A;\ \psi_2 = -\frac{p}{2};\ -\varphi_3^2 + 2A\varphi_3 = q;\ \psi_3 = 0,$$

откуда уравнения шкал:

$$x_1 = 0; \qquad y_1 = z;$$

$$x_2 = A; \qquad y_2 = -\frac{p}{2};$$

$$x_3 = +A + \sqrt{A^2 - q}; \quad y_3 = 0.$$

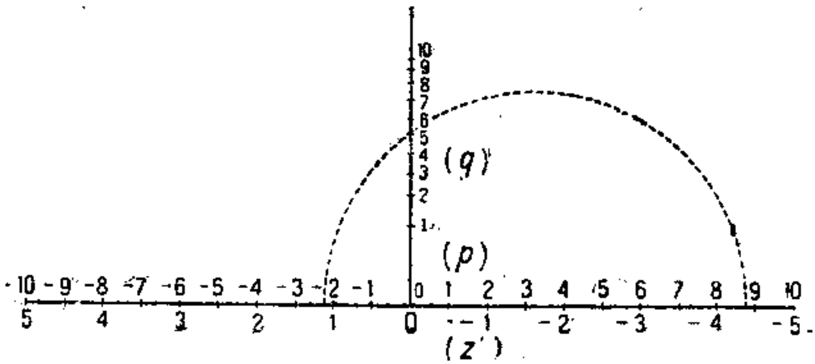
Здесь первая и вторая шкалы перпендикулярны к третьей.

Уравнение типа

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0 \tag{173}$$

можно рассматривать как частный случай (172), где $\varphi_3 = 1$; но его удобнее номографировать путем помножения на паразитный множитель $(f_1 - f_3)$, после чего получаем:

$$(f_1 - f_3)(f_1 + f_2 + f_3) = f_1^2 - f_3^2 + f_2(f_1 - f_3) = 0. \tag{174}$$



Черт. 36.

Это уравнение входит в общую каноническую форму (171), где надо положить:

$$\varphi_1 = f_1; \quad \psi_1 = 0; \quad \varphi_3 = f_3; \quad \psi_3 = 0; \quad -2\varphi_2 = f_2; \quad \psi_2 = p,$$

где p — произвольная постоянная. Следовательно уравнения шкал будут:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= f_1; & y_1 &= 0; \\ x_2 &= -\frac{f_2}{2}; & y_2 &= p; \\ x_3 &= f_3; & y_3 &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{174a}$$

т. е. все три шкалы параллельны оси OX, причем первая и третья шкалы (засечек) совпадают с ней, а вторая (шкала центров) находится на расстоянии p от нее.

§ 26. Номограмма из равноудаленных точек с бинарными полями.

Установки ножек циркуля мы можем производить не только на помеченных точках шкалы, но также и на помеченных точках бинарного поля:

$$x_i = f_i(\alpha_i, \beta_i); \quad y_i = \varphi_i(\alpha_i, \beta_i); \quad (i = 1, 2, 3);$$

т. е. можно построить номограмму из трех бинарных полей.

Очевидно, что пользование подобной номограммой сводится к следующему: установив одну ножку циркуля в точке (α_1, β_1), а другую в точке (α_2, β_2), надо, вращая циркуль вокруг точки (α_2, β_2), засечь кривую третьего бинарного поля, помеченную заданным значением α_3. Тогда, прочитав пометку кривой системы β_3, проходящую через эту засеченную точку, найдем значение зависимой переменной β_3.

Каноническое уравнение такой номограммы будет очевидно иметь вид (171), где под знаками φ_1, φ_2, φ_3, ψ_1, ψ_2, ψ_3 следует соответственно разуметь функции двух переменных $\varphi_1(\alpha_1, \beta_1)$, $\varphi_2(\alpha_2, \beta_2)$, $\varphi_3(\alpha_3, \beta_3)$ и т. д.

§ 27. Симметричные номограммы для непрерывного суммирования.

На практике часто встречается необходимость находить сумму членов, представляющих собой одну и ту же функцию, но при разных значениях независимой переменной, т. е. выражение:

$$\sum_{k=1}^{k=n} f^{(k)}(\alpha),$$

где значок (k) указывает лишь на порядковый номер слагаемого, но не выражает вида функции f, который для всех членов одинаков.

Иногда приходится находить сумму неопределенного количества членов, представляющих сумму одной и той же функции от двух независимых переменных, т. е.

$$\sum_{k=1}^{k=n} f^{(k)}(\alpha, \beta).$$

Так например при исчислении веса железной мостовой фермы приходится определять сумму

$$\sum \omega l,$$

где ω — площадь поперечного сечения каждого элемента фермы, а l — его длина. При подсчете объема земляных работ по продольному профилю пути приходится подсчитывать сумму

$$\sum 50\omega + \frac{\omega(h)\cdot l}{2}$$

(см. нижеприведенный пример).

Для совершения этой операции построим номограмму из равноудаленных точек для уравнения:

$$\delta' = \delta + f(\alpha) \tag{175}$$

с тремя переменными δ', δ и α.

Приводим уравнение (175) к виду (173):

$$\delta + f(\alpha) - \delta' = 0 \tag{176}$$

и строим для него номограмму из трех шкал по методу, изложенному в § 25.

Уравнения этих трех шкал согласно уравнению (174а) будут:

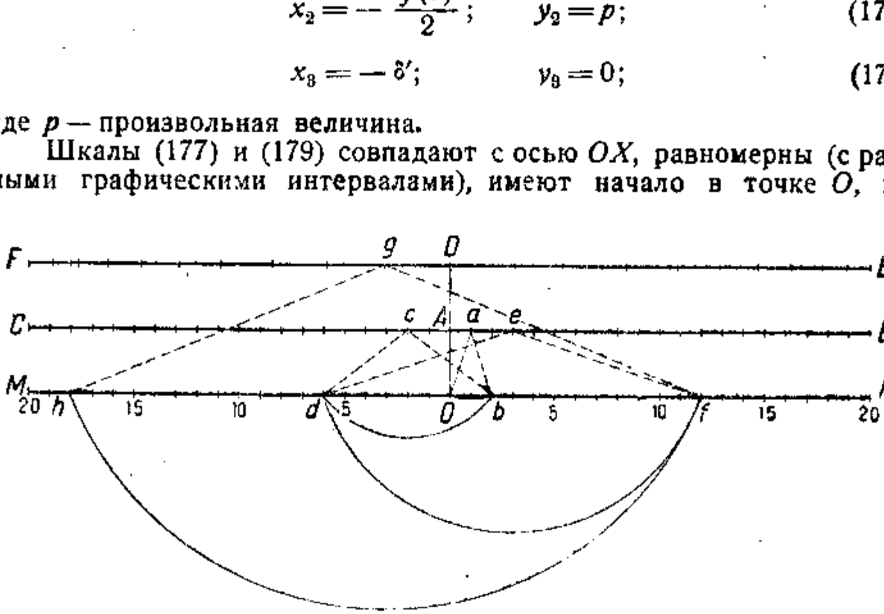
$$x_1 = \delta; \qquad y_1 = 0; \tag{177}$$

$$x_2 = -\frac{f(\alpha)}{2}; \qquad y_2 = p; \tag{178}$$

$$x_3 = -\delta'; \qquad y_3 = 0; \tag{179}$$

где p — произвольная величина.

Шкалы (177) и (179) совпадают с осью OX, равномерны (с равными графическими интервалами), имеют начало в точке O, но



Черт. 37.

направлены в разные стороны, располагаясь в порядке возрастающих пометок вполне симметрично относительно оси OY. Шкала (178) параллельна предыдущим, находится от них в расстоянии p, но направлена в отрицательную сторону от оси OY (вправо). Итак мы получаем схему номограммы в виде трех шкал (черт. 37) (OM), (ON) и (AB), причем (AB) — шкала центров. Таким образом если мы поставим одну ножку циркуля в начало координат O $(\delta = 0)$, а другую — в точку a, помеченную заданным значением α_1, засечем шкалу δ' (ON), то в точке b мы прочтем величину $\delta' = 0 + f(\alpha_1)$.

Построим шкалу (AC), совершенно симметричную со шкалой (AB), приняв за ось симметрии OD. Тогда номограмма, состоящая из трех шкал (ON), (OM) и (AC), будет совершенно тождественной с предыдущей номограммой, состоящей из шкал (OM), (ON) и (AB), только перевернутой вращением вокруг оси OD на 180°; поэтому эта вторая номограмма изобразит то же уравнение (175), с той лишь разницей, что шкалы (ON) и (OM) меняются ролями, а именно, шкала (ON) будет шкалой переменной δ, а шкала (OM) — переменной δ', а потому, перенеся ножку циркуля из точки a в точку помеченную вторым заданным значением α_2, и снова совершая сечку радиусом cb, прочтем в точке d значение:

$$\delta' = \delta + f(\alpha_2) = f(\alpha_1) + f(\alpha_2).$$

Возвратившись таким образом на шкалу (OM) первой номограммы, мы, перенеся ножку циркуля из точки c в точку e, помеченную следующим заданным значением α_3, засекаем шкалу (ON) в точке f и читаем там величину:

$$\delta' = \delta + f(\alpha_3) = f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + f(\alpha_3) \tag{180}$$

и т. д.

Если мы построим параллельно (MN) другую шкалу центров (DE) какой-либо другой функции $\varphi(\beta)$ и симметричную ей шкалу (DF), то можем, пользуясь ею, прибавлять в любом порядке к исчисляемой сумме соответствующие величины $\varphi(\beta)$. Так например, получив в точке f сумму (180), а затем перенеся ножку циркуля из точки e в точку g, помеченную заданным значением β_1, и засекая снова шкалу (MO) в точке h, прочтем в последней число:

$$\delta' f = (\alpha_1) + f(\alpha_2) + f(\alpha_3) + \varphi(\beta_1)$$

и т. д.

Вместо шкалы центров мы можем строить бинарное поле центров функций $f(\alpha, \beta)$ и симметричную ей часть с другой стороны оси OD и устанавливать ножку циркуля в пересечении двух линий поля, помеченных заданными значениями α и β. Таким образом мы можем получить любую сумму вида:

$$\delta = f(\alpha_1, \beta_1) + f(\alpha_2, \beta_2) + f(\alpha_3, \beta_3) + \ldots$$

Пример. На черт. 38 построена нами симметричная номограмма расчета объемов земляных работ, могущая служить пособием для пробных подсчетов при сравнении различных проектируемых вариантов продольного профиля железнодорожного полотна. Если h — красная отметка (высота насыпи или глубина выемки), то площадь поперечного сечения насыпи или выемки, принятых на советских однопутных дорогах, выразится формулами:

$$\text{для насыпи: } \omega(h) = 1{,}5h^2 + 2{,}6h + 0{,}078;$$
$$\text{для выемки: } \omega(h) = 1{,}5h^2 + 3{,}5h + 0{,}237.$$

При расстоянии между профилями $l = 50$ (пикет) объем земляного тела на соответственном участке выразится:

$$V = 50\,\frac{\omega_1}{2} + 50\omega_2 + 50\omega_3 + \ldots + 50\,\omega_{n-1} + 50\,\frac{\omega_n}{2}.$$

Если же в продольном профиле есть промежуточные точки, расстояния между коими (синяя отметка) $= l_1$, l_2 и т. д., то объем:

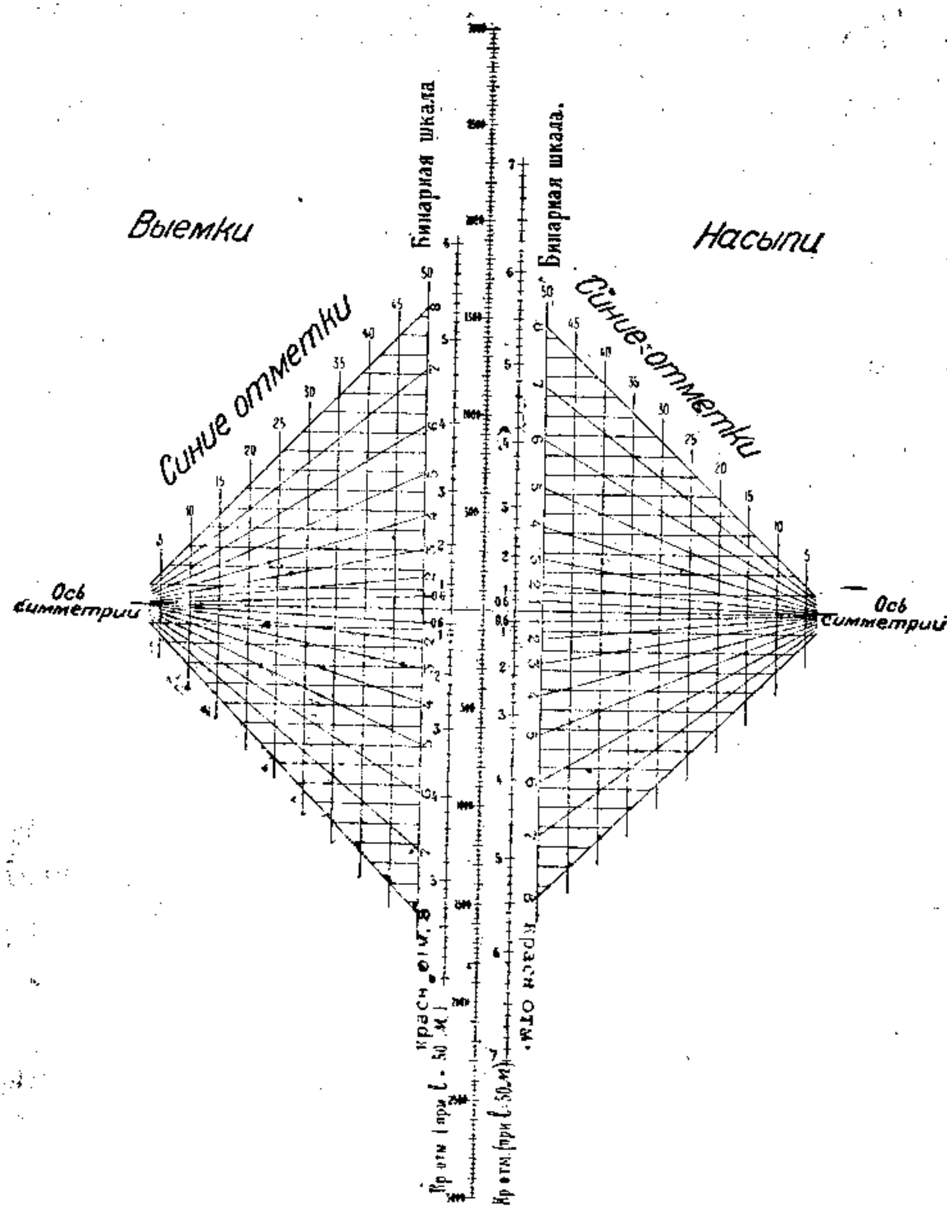
$$V = \frac{\omega_1 l_1}{2} + \frac{\omega_2 l_1}{2} + \frac{\omega_2 l_2}{2} + \frac{\omega_3 l_2}{2} + \ldots$$

Таким образом при подсчете объемов приходится суммировать члены двоякого вида:

$$50 \cdot \omega(h) \tag{181}$$

и

$$\frac{\omega(h) \cdot l}{2}. \tag{182}$$



Черт. 38.

На номограмме с горизонтальной осью симметрии нанесена равномерная шкала объемов (V) и по обеим сторонам ее построено по две симметричных шкалы центров ω (h) и по два симметричных бинарных поля переменных ω (h) и l. Правая сторона служит для определения насыпей, левая — для выемок.

Центральные установки ножек циркуля следует поочередно производить в соответственных точках выше оси симметрии и ниже ее, причем все засечки получаются на шкале (V).

Так например, установив одну ножку циркуля в начале шкалы (V), а другую в точке пересечения прямой красных отметок, помеченной числом 4, и прямой синих отметок, помеченной числом 35 (в правой стороне номограммы и верхней ее половине), засекаем шкалу объемов и получаем на ней:

$$V = 0 + \frac{\omega(4) \cdot 35}{2} = 600.$$

Переставив затем ножку циркуля на нижнюю половину шкалы в точку, помеченную числом два, и засекая снова шкалу объемов, получаем объем насыпи:

$$V = 600 + 50 \cdot \omega(2) = 1\,160.$$

§ 28. Симметрично-периодические номограммы для неопределенно-большой суммы членов.

Неудобство симметричных номограмм, приведенных в предыдущем параграфе, заключается в том, что величина суммы, получаемой на ней, ограничена длиной шкалы засечек. Так например в номограмме для объемов насыпей и выемок эта сумма может быть получена, если она не превышает 3 000 кубов. При дальнейшем суммировании приходится совершать уже новую операцию.

Если же шкалу засечек свернуть в какую-либо замкнутую кривую, например в круг, то это неудобство отпадет, так как при переходе суммой величины, соответствующей длине такой свернутой шкалы, засечки можно продолжать дальше. Надо только при переходе суммы за пределы длины такой свернутой шкалы каждый раз отмечать этот переход и к найденной сумме прибавить величину nP, где n — число таких переходов, а P — величина суммы, соответствующая полной длине свернутой шкалы. Величину эту мы назовем **периодом**, и ее нужно выбирать так, чтобы P было круглым числом. Так, например, если мы шкалу (V) в номограмме насыпей и выемок свернем в окружность так, что начало ее, помеченное нулем, совпадет с ее концом, помеченным числом 3 000, то период такой номограммы будет $P = 3\,000$.

Для построения такого рода номограмм построим криволинейную шкалу переменной δ (по правилам § 11), определяющуюся следующими ее проекциями:

$$x_1 = r \sin \delta; \quad y_1 = r \cos \delta.$$

Ее опорой будет окружность радиуса r, с центром в начале координат, так как из этих уравнений следует:

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2,$$

т. е. уравнение окружности.

Другую шкалу засечек переменной δ' мы построим по уравнениям:

$$x_3 = -r \sin \delta'; \quad y_3 = r \cos \delta'.$$

Эта шкала будет иметь ту же опору и она будет совершенно симметричной с предыдущей относительно вертикального диаметра, так как пометки ее будут возрастать при движении по окружности против часовой стрелки. Центральную шкалу функции $f(\alpha)$ мы построим по уравнениям:

$$x_2 = -R\,\sin\frac{f(\alpha)}{2}; \quad y_2 = R\,\cos\frac{f(\alpha)}{2}.$$

Эта шкала будет иметь опору в виде окружности радиуса R, концентрическую с предыдущей.

Покажем, что построенная номограмма изобразит собой уравнение (175).

В самом деле, подставляя вышеуказанные величины x_1, y_1, x_2, y_2, x_3 и y_3 в уравнение (170) геометрической связи, получим:

$$r^2 - r^2 + 2R\,\sin\frac{f(\alpha)}{2}\cdot r\,(\sin\delta + \sin\delta') -$$

$$-2R\,\cos\frac{f(\alpha)}{2}\cdot r\,(\cos\delta - \cos\delta') = 0,$$

или сокращая на $2Rr$:

$$\sin\frac{f(\alpha)}{2}\cdot(\sin\delta + \sin\delta') = \cos\frac{f(\alpha)}{2}\cdot(\cos\delta - \cos\delta');$$

откуда:

$$\operatorname{tg}\frac{f(\alpha)}{2} = \frac{\cos\delta - \cos\delta'}{\sin\delta + \sin\delta'} = \operatorname{tg}\frac{\delta' - \delta}{2},$$

или:

$$\frac{f(\alpha)}{2} = \frac{\delta' - \delta}{2},$$

т. е.

$$\delta' = \delta + f(\alpha);$$

что и требовалось доказать.

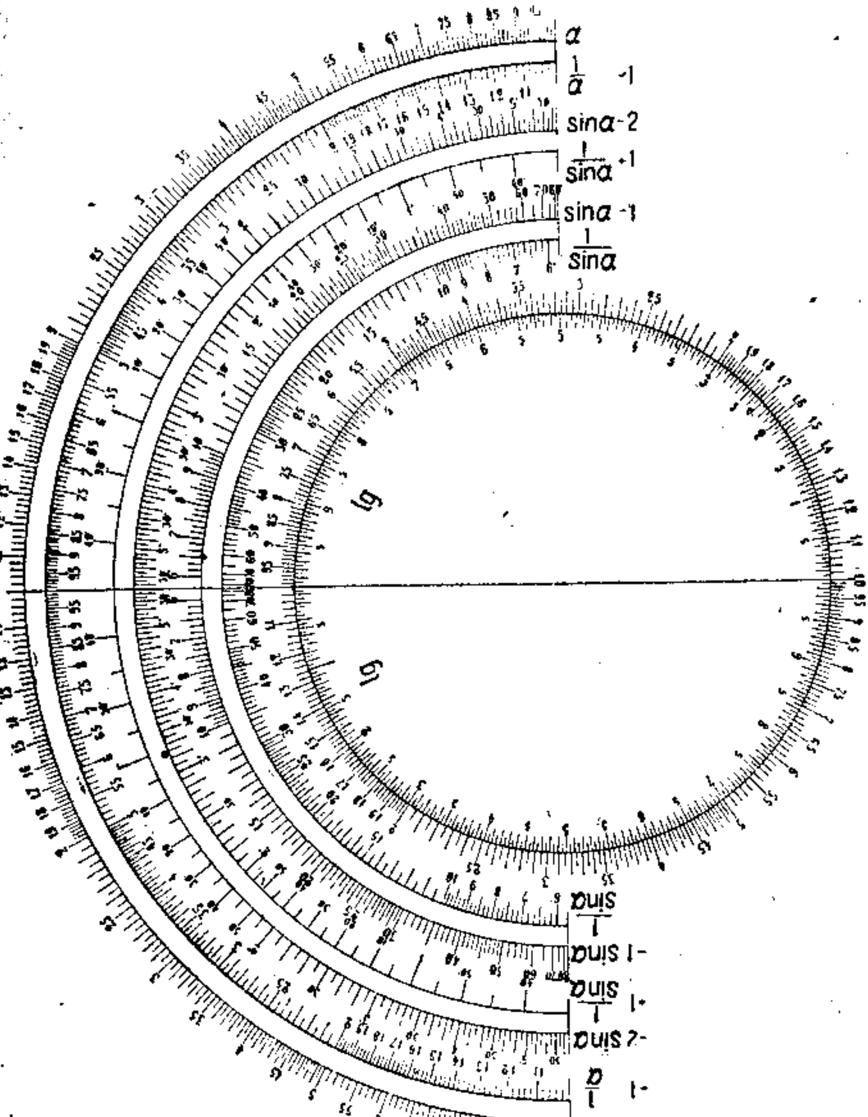
Установив это положение, ясно, что принимая вертикальный диаметр окружностей за ось симметрии и построив ряд симметричных шкал центров функций $f(\alpha)$, $\varphi(\beta)$ и т. д. с различными радиусами R, $R_1 \ldots$, мы можем на этой номограмме непрерывно получать суммы вида:

$$\sum f(\alpha) + \sum \varphi(\beta) + \ldots$$

в любом порядке. В данном случае центральные установки циркуля надлежит по очереди делать то на правой, то на левой стороне симметричной шкалы центров функции $f(\alpha)$ или $\varphi(\beta)$.

Пример. На черт. 39 изображена построенная автором логарифмическая симметрично-периодическая номограмма. Шкала засечек представляет собой замкнутую окружность, причем на наружной стороне ее нанесена вместо шкалы (δ), шкала (засечек) переменной β, связанной с δ уравнением:

$$\delta = \log\,\beta.$$



Черт. 39.

Другими словами проекции этой шкалы определяются уравнением:

$$x_1 = r \sin \log \beta, \quad y_1 = r \cos \log \beta.$$

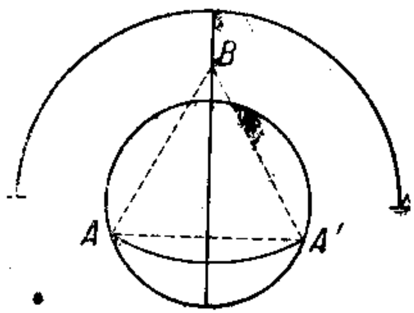
Пометки этой шкалы идут, возрастая при движении по ней против часовой стрелки. Симметричная ей шкала должна была бы итти в том же порядке по окружности, но с возрастающим расположением пометок по направлению часовой стрелки. Она могла бы быть нанесена с внутренней стороны окружности, но этого на номограмме не сделано, так как чтение на ней в точке A (черт. 40) можно заменить переносом ножки циркуля в симметричную ей точку A' — засечкой, показанной на черт. 40, помощью оси симметрии.

На наружной полуокружности нанесена шкала центров функции $\log \alpha$. Таким образом номограмма эта, изображая уравнение:

$$\log \delta' = \log \delta + \log \alpha,$$

может заменить общеизвестную логарифмическую линейку.

Точка шкалы засечек, помеченная числом $\beta = 1$ (т. е. $\delta = 0$), совпадает с точкой, помеченной числом $\beta = 10$ (т. е. $\delta = 1$); таким образом за период принята величина $P = \log 10 = 1$; кроме шкалы центров α нанесены еще шкалы центров функций $\frac{1}{\alpha}$, $\sin \alpha$ и $\frac{1}{\sin \alpha}$.



Черт. 40.

Пользоваться номограммой следует так. Положим, надо определить произведение α_1, α_2, α_3, где α_1, α_2, α_3 — какие-либо числа. Установив ножку в верхней начальной точке окружности, а другую на соответствующей помеченной точке α_1 шкалы центров в левой части, надо засечь окружность, затем перенести ножку из точки α_1 в точку α_2 на правой стороне центральной шкалы и снова засечь окружность; потом перенести ножку из точки α_2 в точку α_3 опять на левой стороне шкалы (α) и т. д. Совершив эти операции, мы на окружности прочтем результат. При чтении результата следует соблюдать следующие правила.

1. Произведение читается либо в точке нахождения ножки циркуля, например в точке A, либо в симметричной ей точке A' (черт. 40); в последнем случае перенос ножки циркуля делается так, как это показано на черт. 40. Для того чтобы знать, в которой из двух симметричных точек A или A' следует читать результат, надо руководствоваться следующим правилом: если по окончании всех операций обе ножки циркуля (последняя центральная установка и засечка) находятся в одной половине номограммы, то результат читается на левой стороне окружности. Если же ножки циркуля находятся в разных половинах номограммы, то результат читается на правой половине окружности.

Для того чтобы определить характеристику логарифма, следует руководствоваться обычными правилами сложения характеристик множителей;

2. Независимо от сего следует к характеристике прибавлять $+1$ в каждом том случае, когда две непосредственно следующие друг за другом засечки попадают в одной и той же половине окружности (переход через период).

Кроме функции α на номограмме нанесены шкалы центров функции $\frac{1}{\alpha}$ (деление), $\sin\alpha$ (умножение на синус) и $\frac{1}{\sin\alpha}$ (деление на синус) для возможности деления чисел и умножения и деления на синусы.

3. При перемножении на функции $\frac{1}{\alpha}$, $\sin\alpha$ и $\frac{1}{\sin\alpha}$ независимо от предыдущих правил надлежит прибавлять к характеристике каждый раз число, показанное на номограмме против соответствующей полуокружности, так например при помножении на $\frac{1}{\alpha}$ надо прибавлять -1; при помножении на $\sin\alpha$ — прибавлять -2, если $0 < \alpha < 5°45'$, и -1 при $5°45' < \alpha < 90°$.

На внутренней стороне окружности вместо шкалы (β'), симметричной со шкалой (β) (отсутствие которой заменено правилом 1 чтения результата), нанесена шкала $\delta = \log\beta$, дабы можно было читать по логарифму число и обратно — по числу логарифм.

§ 29. Общий вид номограммы с крестообразным транспарантом.

Уравнение геометрической связи для этого рода номограмм сводится к условиям перпендикулярности двух прямых, проходящих: первая через точки (x_1, y_1), (x_2, y_2) и вторая через точки (x_3, y_3), (x_4, y_4), т. е.:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{x_3 - x_4}{y_3 - y_4}.$$

Полагая уравнения шкал

$$x_i = \varphi_i(\alpha_i); \quad y_i = \psi_i(\alpha_i); \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

получим каноническую форму:

$$\frac{\psi_2 - \psi_1}{\varphi_2 - \varphi_1} = \frac{\varphi_4 - \varphi_3}{\psi_3 - \psi_4}. \tag{183}$$

Для пропорциональных номограмм (§ 7) мы имеем уравнение геометрической связи:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4},$$

а следовательно каноническая форма уравнения имеет вид:

$$\frac{\psi_2 - \psi_1}{\varphi_2 - \varphi_1} = \frac{\psi_3 - \psi_4}{\varphi_3 - \varphi_4}, \tag{184}$$

т. е. оба вида номограмм имеют одну и ту же каноническую форму уравнения.

Пример. Формула Базена: u — средняя скорость потока, R — гидравлический радиус его поперечного сечения, I — уклон потока,

γ — коэфициент, зависящий от рода дна и берегов потока. Формула Базена имеет вид:

$$u = \frac{87\sqrt{Ri}}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}}.$$

Приводя ее к виду:

$$\frac{u}{87\sqrt{i}} = \frac{R}{\sqrt{R} + \gamma}, \tag{184a}$$

можем подвести ее к форме (184), где в данном случае:

$$\psi_2 = u; \quad \psi_1 = 0; \; \varphi_2 = 0; \; \varphi_1 = -87\sqrt{i}; \quad \psi_3 = R;$$
$$\psi_4 = 0; \quad \varphi_3 = \sqrt{R}; \quad \varphi_4 = -\gamma.$$

Отсюда имеем уравнения четырех шкал:

$$x_1 = -87\sqrt{i}; \quad y_1 = 0;$$
$$x_2 = 0; \quad y_2 = u;$$
$$x_3 = \sqrt{R}; \quad y_3 = R;$$
$$x_4 = -\gamma; \quad y_4 = 0;$$

т. е. шкалы (i) и (γ) прямолинейны и имеют общую опору OX; шкала (u) прямолинейна и перпендикулярна к предыдущей. Шкала (R) криволинейна и имеет опорой параболу $y_3 = x_3^2$; путем введения постоянных коэфициентов в уравнение (184а) можно достигать приспособляемости номограммы. Так например, прибавляя к обеим частям равенства (184а) единицу, можно представить его так:

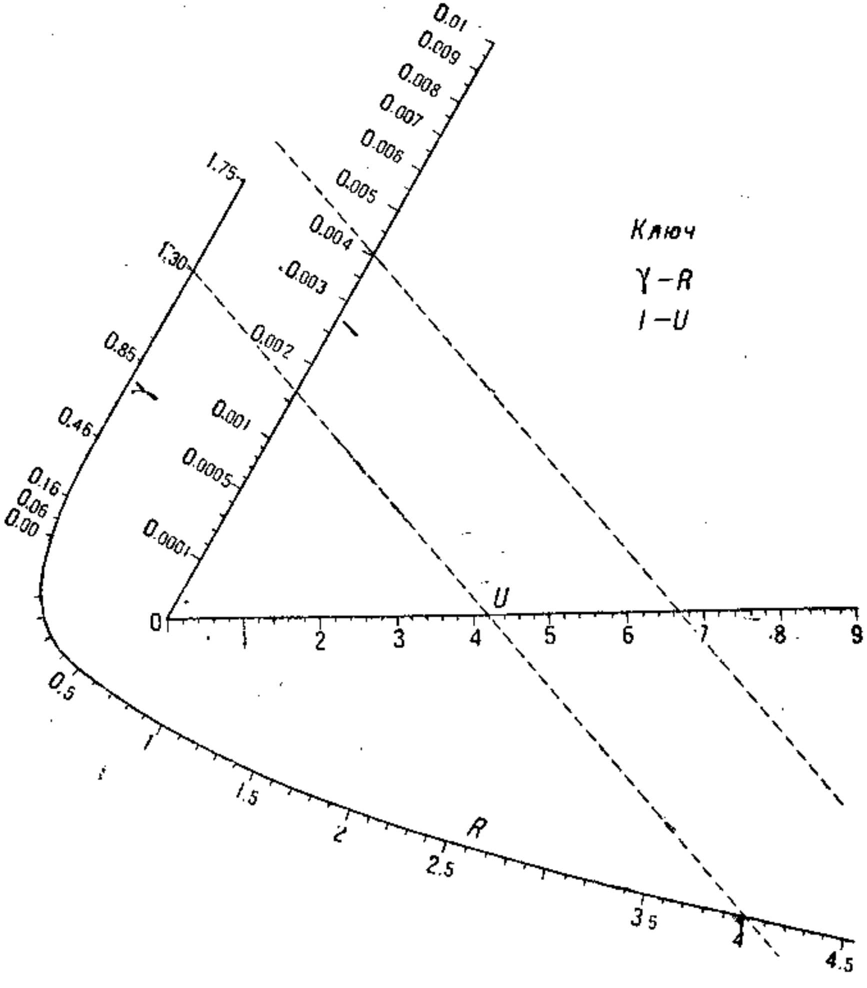
$$\frac{u + 87\sqrt{i}}{87\sqrt{i}} = \frac{R + \sqrt{R} + \gamma}{(\sqrt{R} + a) + (\gamma - a)},$$

где a — произвольное постоянное. Уравнения шкал здесь будут:

$$x_1 = -87\sqrt{i}; \quad y_1 = -87\sqrt{i};$$
$$x_2 = 0; \quad y_2 = u;$$
$$x_3 = \sqrt{R} + a; \quad y_3 = R + \sqrt{R};$$
$$x_4 = a - \gamma; \qquad y_4 = -\gamma.$$

Построенная для этого уравнения номограмма изображена на черт. 41.

Номограмма с крестообразным транспарантом может применяться также для уравнений с тремя переменными. Для этой цели нужно положить в каноническом уравнении (183) $\varphi_4 = a$, $\psi_4 = b$, где a и b — постоянные. Таким образом мы четвертую шкалу обращаем в точку P, отмеченную на черт. 42 кружком и ключ к пользованию номограммой сводится к тому, что крестообразный индекс должен проходить через точку P и через три точки, помеченные тремя заданными значениями α_1, α_2, и α_3.



Черт. 41.

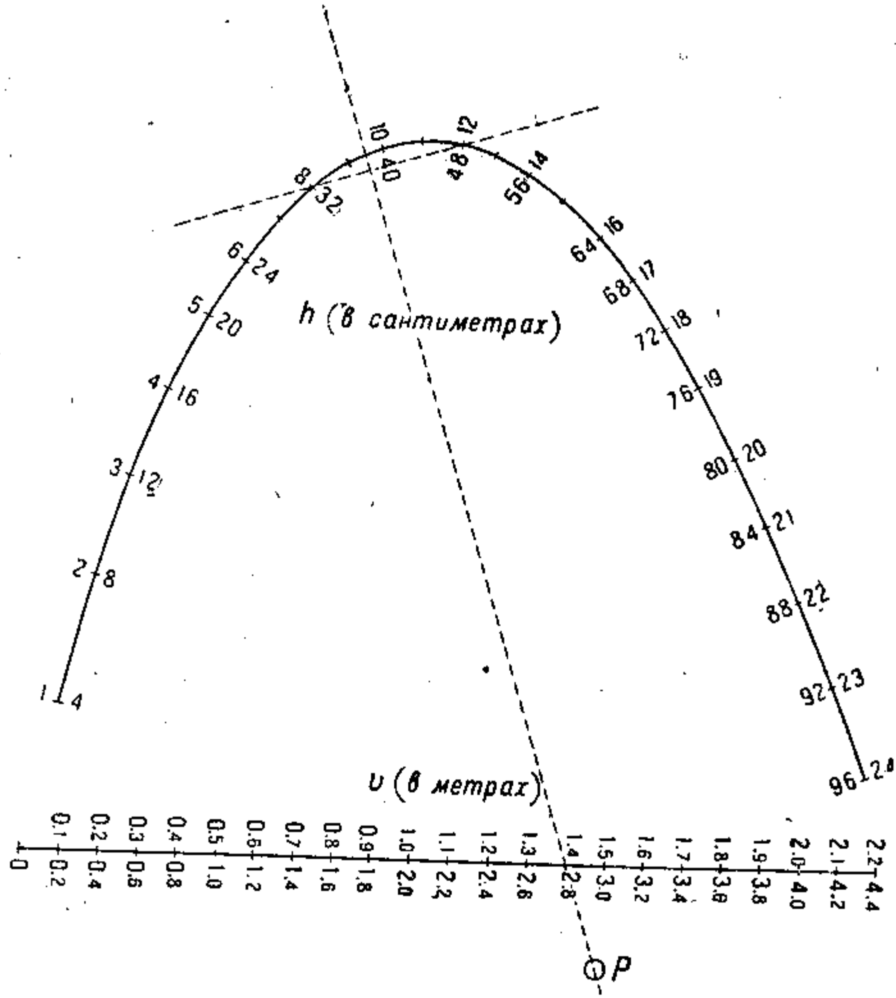
Пример. Формула для скорости истечения воды из прямоугольного отверстия:

$$v = \frac{2}{3}\sqrt{2g}\cdot\frac{h_2^{\frac{3}{2}} - h_1^{\frac{3}{2}}}{h_2 - h_1},$$

где v — скорость, h_1 и h_2 — расстояния верхней и нижней кромки отверстия от поверхности воды.

Переписав это уравнение в виде:

$$\frac{h_2^{\frac{3}{2}} - h_1^{\frac{3}{2}}}{h_2 - h_1} = v\cdot\frac{3}{2\sqrt{2g}} \qquad (185)$$



Черт. 42.

и сравнивая его с канонической формой (183), можем положить:

$$\psi_2 = h_2^{\frac{3}{2}};\quad \psi_1 = h_1^{\frac{3}{2}};\quad \varphi_2 = h_2;\quad \varphi_1 = h_1;\quad \varphi_3 = -v;\quad \psi_3 = \frac{2}{3}\sqrt{2g};$$

$$\varphi_4 = 0;\quad \psi_4 = 0;$$

следовательно уравнения шкал будут:

$$x_1 = h_1;\qquad y_1 = h_1^{\frac{3}{2}}; \tag{186}$$

$$x_2 = h_2;\qquad y_2 = h_2^{\frac{3}{2}}; \tag{187}$$

$$x_3 = -v;\quad y_3 = \frac{2}{3}\sqrt{2g}, \tag{188}$$

а координаты точки:

$$x_4 = 0; \quad y_4 = 0.$$

Первые две шкалы криволинейны и совпадают между собой, так как уравнения (186) и (187) имеют одинаковую форму. Третья шкала прямолинейна и равномерна (с равными делениями).

Путем введения в уравнение (185) различных постоянных величин номограмме можно придавать различную форму и приспособливать ее шкалы к заданным пределам независимых переменных h_1 и h_2; на черт. 42 построена такая номограмма, и пунктиром показан ключ к ее пользованию.

§ 30. Литература.

В последнее время появилось множество руководств по номографии, в особенности на немецком языке; каждое из них подходит к изложению способов построения номограмм, предполагая большую или меньшую подготовку читателя в области математики и графики. Мы не можем рекомендовать какого-либо из них преимущественно перед другими, так как читателю надлежит выбирать таковое сообразно со своими вкусами и подготовкой в области геометрии. Здесь мы лишь укажем, что кроме построения номограмм номография намечает пути для широкого применения ее метода за пределами того предмета, который изложен в этой книге. Таким образом например создана общая теория номограмм, дающая возможность изобретать новые виды таковых и выводить новые типы поддающихся номографированию уравнений; разработаны общие методы приведения уравнений к главным типам; намечено приложение номографии к отысканию эмпирических формул по данным экспериментальных исследований; положено основание к приложению номографии к интегрированию диференциальных уравнений — обыкновенных и с частными производными, к вариационному исчислению, к решению функциональных уравнений. К сочинениям, где можно найти все эти начала, являющиеся основой для приложения номографии в будущем, относятся следующие:

M. d'Ocagne. Traité de Nomographie. Paris.

M. d'Ocagne. Calcul graphique et Nomographie. Paris.

R. Soreau. Traité des Abaques. Paris.

J. Massau. Mémoires sur l'intégration graphique des équations aux dériveés partielles.

C. Runge. Graphical méthods. New-York. 1912.

N. Gercevanoff. Application des méthodes nomographiques à l'intégration graphique. Paris.

Н. Герсеванов. Основания номографического исчисления. 2 выпуска. Петроград. 1906—1908.

J. Clark. Théorie générale des abaques d'alignement de tout ordre. Révue de Mecanique. 1907.

Редактор *С. Сахаров.*
Сдана в набор 4/VI—1931 г.
Формат 62 × 94 см.

Техн. редактор *Васильева.*
Подписана к печати 31/X—1931 г.
Тип. зн. в 1 печ. л. 53.424.

НТ — 11. Огиз № 1474/м.

Ленинградский Областлит № 23859.
Тираж 15.000—5¾ л.
Заказ № 897