

Депозитарий

Б. А. ИВАНОВ
ЗАСЛУЖЕННЫЙ ПРОФЕССОР.

71376672

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

КУРС ВЫСШИХ ТЕХНИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ.

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ
исправленное и дополненное.

РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕКЦИЯ
ИЗДАТЕЛЬСТВА

МОСКВА.
1928.

Литографировано в типо-литография Н. А. ЯПКИНА. Воронцовская, 50.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Предлагаемая вниманию читателя книга представляет курс лекций, читанных мной в течение ряда лет в разных высших технических учебных заведениях Петрограда и Москвы. Этот курс отвечает программам всех ВТУЗ—ов.

Желание возможно удешевить издание с целью сделать книгу доступной широким массам учащихся заставило меня почти совершенно выпустить опытно-описательную часть и материаловедение, не входящие в программы ВТУЗ—ов, но тем не менее помещаемые в курсах сопротивления материалов. Взамен этого особенно подробно и в несколько иной форме, чем обычно, разработана глава об изгибе, наиболее трудно поддающаяся усвоению, как показывает опыт.

Дабы избавить учащихся от необходимости приобретать справочные книги, неизбежные при производстве расчетов, в конце книги добавлены таблицы профилей железа по нормальному русскому сортаменту.

Автор,

ВВЕДЕНИЕ.

Наука сопротивления материалов занимается изучением явлений, происходящих в твердых *) телах, с возникновением в них (под влиянием тех или иных внешних воздействий) так называемых „внутренних сил“, связанных с присущим телам свойством упругости.

Сопротивление материалов дает нам, полученные чисто теоретическим путем, формулы для определения необходимых прочных размеров различных деталей технических сооружений при наименьшей затрате материала. Значения различных коэффициентов пропорциональности, фигурирующих в этих теоретических формулах, находятся для различных материалов опытным путем (специальные лабораторные исследования) и, таким образом, в выводах сопротивления материалов мы видим переход от методов экспериментальных к теоретическим, дающим общие зависимости для различных деформаций.

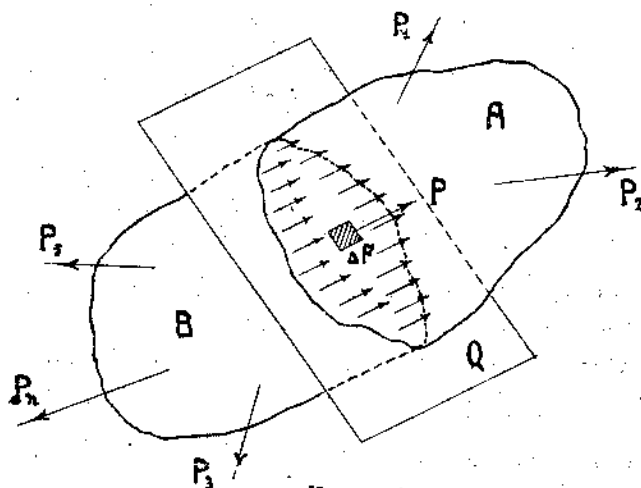
О внутренних силах (силы упругости).

§ 1. Пусть у нас имеется какое нибудь твердое тело и к нему приложена некоторая совокупность сил $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ (черт. 1)

Пересечем наше тело плоскостью Q и мысленно удалим от тела часть A . Тогда, для того, чтобы часть B осталась в прежнем механическом состоянии (равновесии) необходимо заменить

*) В сопротивлении материалов рассматриваются не абсолютно твердые тела, расстояние между отдельными точками которых не меняется под действием внешних сил, приложенных к ним, но тела упругие, т. е. изменяющие свою форму, деформирующиеся, но способные возвращаться (в известных пределах) в прежней своей форме по удалении внешних сил.

На этом основании сопротивление материалов называется: „Статикой упругого тела“.



Черт. 1

внешние силы, действовавшие на часть А, силами, приложенными к площади сечения и распределенными по ней непрерывно. Силы эти называются *внутренними силами или силами упругости*. Характер этих сил зависит от величины и направления приложенных к телу внешних сил, которыми и определяется величина и род происходящей деформации.

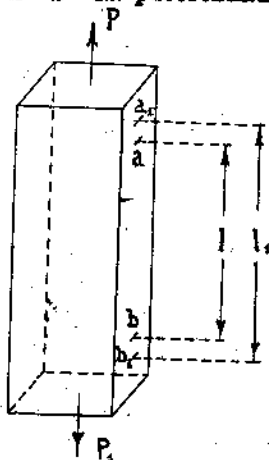
Если мы выделим на плоскости разреза бесконечно-малую площадку ΔF , и равнодействующая внутренних сил на этой площадке будет P , то величина $p = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{P}{\Delta F}$ даст нам значение внутренней силы в данной точке, являющейся мерой возникшего здесь напряжения материала. Она измеряется в килограммах на 1 кв. миллиметр и называется просто «напряжением» в рассматриваемой точке сечения Q.

Разлагая эту силу на две: одну лежащую в плоскости сечения и называемую касательной составляющей напряжения в данной точке (или просто касательным напряжением) и другую, — направленную перпендикулярно к плоскости рассматриваемой площадки (нормальное напряжение), мы будем рассматривать различные деформации в зависимости от этих двух составляющих напряжений.

I. Растяжение.

§ 2. Растяжением называется деформация, которая получается, когда внешние силы приводятся к двум равным силам, действующим по оси бруска в прямо противоположные стороны.

Если на линии параллельной оси бруска, возьмем две точки a и b на расстоянии l (черт. 2), то при действии растягивающих сил P и P_1 ($P=P_1$)



(эти точки займут положения a_1 и b_1 и расстояние между ними будет $l = l + \lambda$ где λ — абсолютное удлинение бруска при растяжении.

$$\text{Величину } \delta = \frac{\lambda}{l} = \frac{l_1 - l}{l}$$

называют относительным удлинением бруска и принимают за меру растяжения.

Если площадь поперечного сечения бруска будет F , то внутренняя сила, действующая

Черт. 2.

при растяжении, будет $p = \frac{P}{F}$

Соотношение между внутренней силой p и относительным удлинением бруска δ устанавливается законом Гука в виде простой пропорциональности

$$p = E\delta$$

(Закон эмпирический—1876 г.).

Коэффициент пропорциональности E носит название модуля упругости материала и имеет различные значения для различных материалов.

Полагая в формуле Гука $\delta = 1$ (что имеет место в том случае, когда $l_1 = 2l$) находим $p = E$, т. е. модуль упругости равен тому значению внутренней силы, при котором длина бруска удваивается.

При обработке материала, связанной с увеличением его плотности (проковка, прокатка) модуль упругости увеличивается. При значительных повышениях температуры значения модуля упругости уменьшаются.

Значения величин модуля упругости E для различных материалов даются нижеследующей таблицей.

Материал.	Значения E в $\frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}$	Материал.	Значения E в $\frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}$
Сварочное железо. . .	20 000	Цинк.	9 600
Железная проволока. .	20 000	Олово.	4 000
Литое железо.	21 500	Свинец.	500
Литая сталь.	22 000	Стекло.	7 000
Стальные отливки. . .	21 500	Дерево:	
Стальная проволока. .	21 500	ель.	900
Рессорная сталь. . . .	22 000	сосна.	920
Чугун.	от 7 500	дуб.	1 080
	до 10 500	бук.	1 800
Красная медь листовая.	11 500	Гранит (в средн.) . . .	5 940
Проволока красн. меди.	13 000	Песчаник (в средн.) . .	570
Желтая медь литая. . .	8 000	Кирпич.	278
Бронза фосфористая. . .	11 000	Бут.	604
„ луженая.	11 000	Бетон.	2 460
„ алюминиевая.	12 000	Кожаные ремни:	
Дальта-металл.	9 970	новые.	12,5
Алюминий литой.	6 750	старые.	22,5
„ прокован.	в сред. 7 080	Пеньков. канаты. . . .	60—150

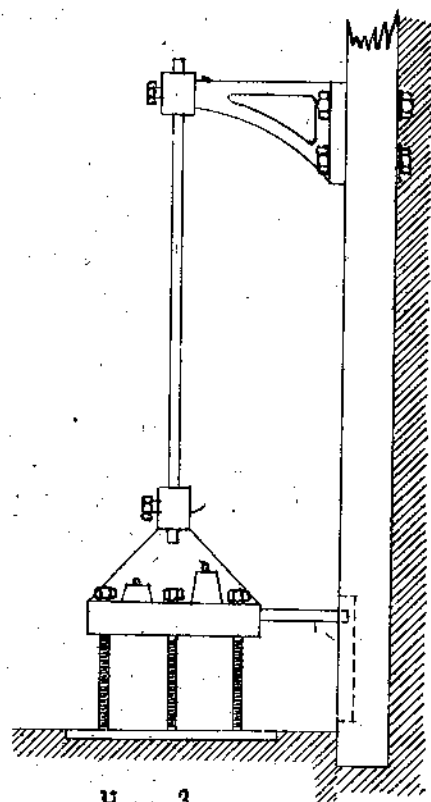
Вместо модуля упругости E во многих руководствах дается величина $\alpha = \frac{1}{E}$, которая называется коэффициентом растяжения или коэффициентом удлинения. Нетрудно сообразить, что α есть относительное удлинение бруска, когда внутренняя сила $p=1$.

Более подробно можно сказать, что коэффициент растяжения есть удлинение бруска, длиною единица длины, с поперечным сечением в 1 квадратную единицу, силою, равной единице силы.

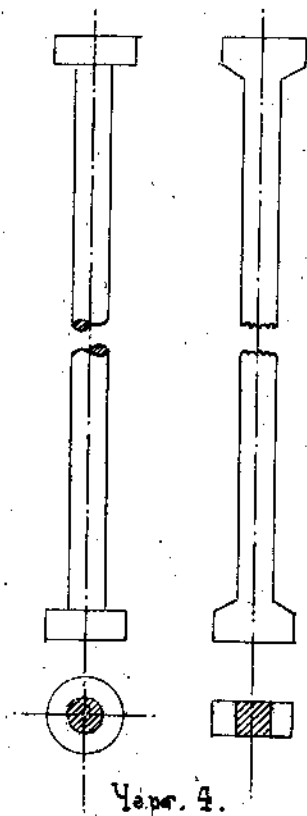
Исследование явлений растяжения.

§ 3. Исследование явлений растяжения, т. е. соотношения между приложенной к телу силой и появляющимися при этом удлинениями, производилось различными учеными на особых приборах; устройство некоторых из них мы сперва и рассмотрим.

Прибор Вертгейма (черт. 3) состоит из заделанного в стену дубового бруска, на котором прикреплен кронштейн, имеющий на конце приспособление для зажимания бруска из испытуемого материала, приготовляемого обычно в виде круглого или призматического стержня длиной 1 метр и формы, указанной на черт. 4



Черт. 3.



Черт. 4.

К другому концу испытуемого стержня, помощью такого же зажимного приспособления подвешивается коробка, служащая для помещения в нее грузов. Так как при подобного рода исследова-

ниях весьма важно, чтобы грузы прилагались совершенно спокойно, без малейших толчков, сильно влияющих на ход испытания, то в дне коробки, имеющей в плане вид правильного треугольника, устроены три установительных винта, коими при добавлении грузов вся система приводится в неподвижное состояние.

Дабы перемещения коробки были строго вертикальны, к коробке приделана особая направляющая, двигающаяся в пазу, сделанном в основном дубовом бруске.

Измерения удлинений производятся (обычно при небольших нагрузках) помощью катетометра, который устанавливается на две, проведенные заранее на стержне, черточки.

Вследствие незначительных размеров испытуемого стержня (1 метр) получающиеся при опытах удлинения весьма невелики (при нагрузке $10 \frac{\text{kg}}{\text{мм}^2}$ удлинение до 0,5 мм), а потому и точность результатов менее чем на других приборах.

Прибор Готтмисона имеет вид (черт. 5) металлической рамы, могущей быть подвешенной к потолку лаборатории. К верхнему концу рамы прикрепляется испытуемый стержень, который собственно состоит из ряда одинаковых стержней, общей длиной около 10 метров, наглухо между собой связанных.

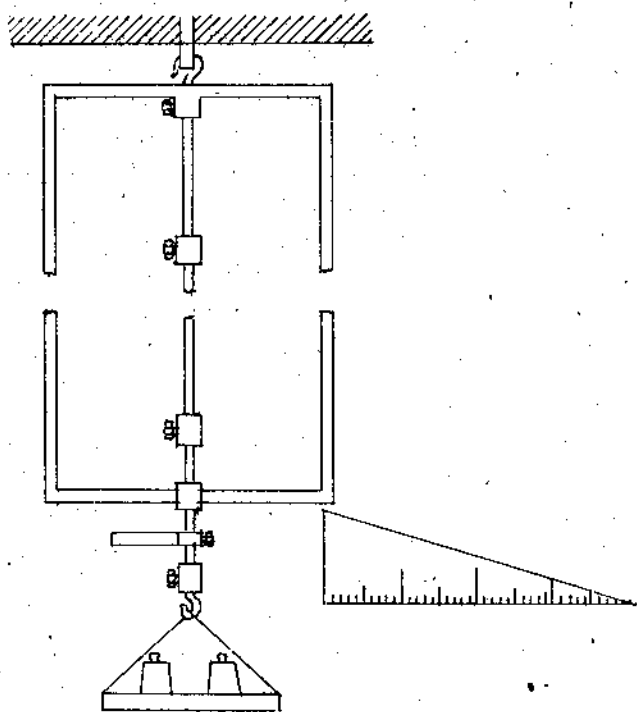
Внизу на стержне укреплена платформа для грузов и трехгранная стальная призма, обращенная острием к раме. Длина рамы и стержня от верха до острия призмы точно измерены. Так как длина испытуемого бруска значительная, то и удлинения получаются весьма значительные; они измеряются при помощи калиброванного шпала (изображен на черт. отдельно), вставляемого в зазор между рамой и верхним ребром призмы. Правило спокойной приложения грузов остается в силе и здесь.

§ 4. Различными исследователями, на приборах, подобных описанным, было замечено, что, вообще говоря, длина бруска уменьшается с удалением растягивающей силы, но что степень этого укорочения зависит как от состояния тела, так, главным образом, и от величины силы, которая была приложена к испытуемому бруску.

Было найдено, что все удлинение бруска, появляющееся при растяжении, состоит из двух частей; упругого (исчезающего) удлинения и удлинения не упругого (остающегося).

При нагрузке до некоторого предела появляется только упругое удлинение, и брусок по отнятии растягивающих сил принимает

маст первоначальную длину. То предельное значение внутренней силы, при котором появляющееся удлинение исчезает по удалении нагрузки, называется *пределом упругости*. За пределом, упругости кроме упругого удлинения появляется еще и неупру-



Черт. 5.

гом, и по удалении нагрузки в этом случае длина бруска будет более первоначальной как раз на величину этого остающегося удлинения.

Как упругая, так и остающаяся часть деформации в свою очередь состоит из двух частей; из части, возникающей мгновенно по приложении груза и из части появляющейся по истечении некоторого иногда продолжительного времени. Последняя часть упругого удлинения называется *упругим последом* или *упругим последствием*, но, по ее незначительности, ею при расчетах обычно пренебрегают.

По прекращении действия груза упругое удлинение исчезает также не сразу; сперва пропадает часть, возникшая немедленно

по приложении сил, а затем, с течением времени исчезает и упругий посыл.

§ 5. Закон Гука оказывается справедливым тоже только до некоторого предела и то предельное напряжение, при котором закон Гука еще применим, называется *пределом пропорциональности*. Для большинства строительных материалов предел упругости составляет 50—60% предела пропорциональности; в справочных книгах даются часто под названием предела упругости значения предела пропорциональности.

Позднейшие исследования растяжения при помощи точных приборов, дающих возможность посредством особых приспособлений измерять ничтожнейшие изменения длины бруска, показали, что предела упругости, как предельного напряжения, при котором получается только упругая деформация, — почти не существует. Поэтому за предел упругости принимают условно такое напряжение, при котором остающиеся удлинения не превосходят 0,001% т. е. 0,00001 первоначальной длины бруска.*)

После перехода через предел упругости остающиеся удлинения несколько возрастают, но закон Гука остается в силе до предела пропорциональности.

§ 6. Разница между этими двумя пределами устанавливается опытами Велера (1860—1870 г.), который подвергал материалы действию перемежающейся нагрузки от растяжения к равному ему сжатию (число перемен доходило до нескольких миллионов).

Если груз при этом не достигал предела упругости, то по прекращении нагрузки брусок сохранял первоначальную форму. Если же предел упругости был перейден, то, хотя предел пропорциональности в не был достигнут, не только форма бруска менялась, но возможно было довести его до полного разрушения.

Опыты Велера с брусками из сварочного железа (с наибольшим сопротивлением разрыву в $36 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$, удлинением в момент разрыва около 20% и пределом пропорциональности, надо полагать, около $19 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$) показали, что при многократной переменной нагрузке — от растяжения некоторым грузом к сжатию таким же грузом и обратно, — сколько бы раз ни менялась

*) См. «Hütte», изд. 1916, т. I, стр. 534, строка 7 сверху.

нагрузка (напр., до 132.250.000 раз), брусок оставался цел, если растягивающий или сжимающий груз не превосходил $\frac{1}{3}$ разрывающего бруска груза. Точно также, если нагрузка была переменной в одну сторону,—оставалось все время растягивающей и изменяясь лишь от 0 до некоторого определенного значения и затем обратно до 0,—то брусок оставался цел при всяком числе испытаний, если только нагрузка не превышала $\frac{2}{3}$ разрывающего груза.

Замечание. Полученный Велером результат приводит к выводу, что переменная в обе стороны нагрузка (от растяжения к сжатию и обратно) оказывается самой неблагоприятной. При такой нагрузке брусок может выдержать только $\frac{1}{3}$ того груза, который при спокойном приложении его разрывает.

Нагрузка, переменная в одну сторону (от 0 до нек. максимума и обратно до 0) более благоприятна: брусок рвется только, когда она делается большей $\frac{2}{3}$ разрывающего груза.

Этими соображениями пользуются, как увидим ниже, при решении вопроса о „допускаемом“ для каждого материала безопасном напряжении.

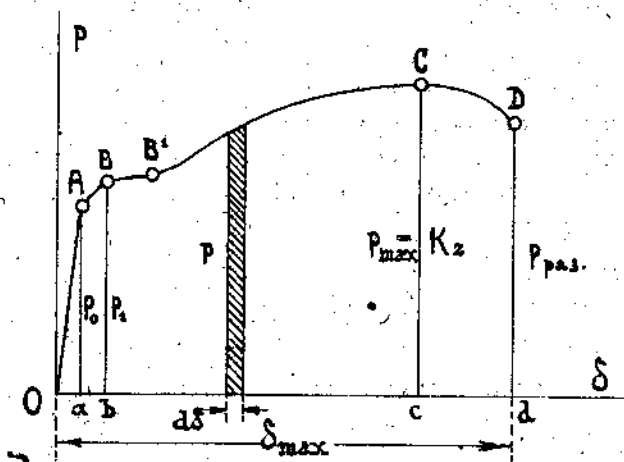
Опыты Велера были повторены Шпангенбергом, затем Бекером и Баушингером (первые его опыты), и результаты получились те же. Дальнейшие опыты Ренольда и Смита, при которых смена нагрузок достигала очень большой частоты — до 2.400 в минуту,—привели к интересному заключению, что при очень большой частоте смены нагрузок и такой материал с весьма высокой сопротивляемостью разрыву оказывается не прочнее материала с значительно меньшим сопротивлением разрыву (напр. в 2,4 раза), но только более мягкого.

Опыты Стендона и Берстоу при переменной в обе стороны нагрузке показали, что наибольшее значение нагрузки, при которой бруски оставались целы при всяком числе испытаний, составляло в круглых числах (60—90) % предела пропорциональности.

После того, как предел пропорциональности перейден, остающиеся удлинения получают значительные величины и возрастают с возрастанием вызывающей их нагрузки быстрее нагрузки.

Диаграмма растяжения.

§ 7. Чтобы лучше усилить закон возрастания удлинений в связи с увеличением нагрузки изображают весь процесс растяжения до момента разрыва бруса графически, для чего по оси абсцисс откладывают относительные удлинения, а по оси ординат напряжения материала, им соответствующие. Получающаяся диаграмма растяжения $OABV^1CD$ имеет вид, указанный на чертеже. В этой диаграмме есть 4 замечательные точки.



Черт. 6.

1. Точка A , до которой диаграмма представляет прямую OA , имеет ординату $A\sigma = P_0$ — пределу пропорциональности. Прямая OA является графическим изображением закона Гука.

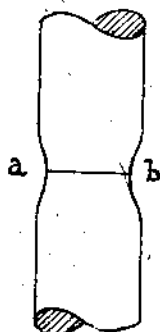
2. Точка B . После перехода через точку A , отвечающую пределу пропорциональности, диаграмма идет по кривой AB до некоторой точки B , после чего на участке BB^1 представляет прямую, почти параллельную оси абсцисс. Как видно, когда напряжение материала достигает предела $Bb = P_1$, удлинения начинают возрастать почти без увеличения нагрузки: материал тянется подобно резине до точки B^1 . Напряжение P_1 называют поэтому „пределным напряжением“ (Hütten), „пределом растяжимости“ или „пределом тягучести“ (Бах), а точку B — „критической точкой“. Участок BB^1 имеют заметную длину у мягких металлов с большим удлинением в момент разрыва (сварочное

железо, мягкая литая сталь) и делается мало заметным у твердых материалов (напр., твердые сорта стали с малым удлинением в момент разрыва).

Для сравнения значений пределов пропорциональности и текучести приводим их для железа и стали.

Название материал.	$p_0 b \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}$	$p_1 b \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}$	$p_{\text{max}} b \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}$
Сварочное железо.	13 и >	18 и >	33—40
Литое железо.	18 и >	19 и >	34—50
Литая сталь.	25 и >	26*) и >	50—200

3. Точка С, где нагрузка достигает максимума. В этом положении в бруске образуется сужение ab (горловина), и брусок вскоре разрывается, причем разрывающий груз в виду прошедшего уменьшения поперечного сечения оказывается меньше p_{max} . Напряжения p_{max} в справочных книгах обозначают обыкновенно через K_z (см. напр. Нутте) и называют „временным сопротивлением“ или „крепостью“ материала на растяжение.



Черт. 7.

4. Точка D, отвечающая моменту разрыва бруска. Груз, который разрывает брусок, оказывается несколько меньше наибольшего груза, при котором сечение бруска начинает суживаться.

Если обе половины бруска после разрыва сложить и измерить длину бруска, то относительное удлинение, полученное после разрыва и выраженное в %, называется „удлинением при разрыве“. Его обозначают обыкновенно через φ

$$\varphi = \frac{l_1 - l}{l} \cdot 100$$

где l_1 — длина бруска после разрыва,
 l — первоначальная длина его.

*) для твердых сортов p_1 — макс.

У материалов мягких φ довольно значительно (20—30)%, у твердых наоборот — мало (5—10)%.

Количество $\psi = \frac{F - F_1}{F} \cdot 100$

где F_1 — площадь поперечного сечения в месте разрыва.

F — площадь поперечного сечения первоначальная, называют „поперечным сжатием при разрыве“.

ψ служит для оценки тягучести материала.

Работа, затрачиваемая на деформацию, при растяжении.

§ 8. Выяснив значение замечательных точек диаграммы растяжения, заметим, что площадь диаграммы $OABV^1CDD_1O$,

равная $\int_0^{\delta_{\max}} p d\delta$ выражает работу T , затраченную на деформацию бруска до его разрыва и отнесенную к единице объема бруска (к 1 mm^3), ибо, если p выражено в $\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$, а δ в $\frac{\text{mm}}{\text{mm}}$ то $p d\delta$ оказывается выраженным в $\frac{\text{kg} \cdot \text{mm}}{\text{mm}^3}$. Эту работу на-

зывают *удельной работой* при растяжении. Она равна

$$T = \int_0^{\delta_{\max}} p d\delta = \xi p_{\max} \cdot \delta_{\max} = \xi K_z \cdot \frac{\varphi}{100} \left(\frac{\text{kg} \cdot \text{mm}}{\text{mm}^3} \right)$$

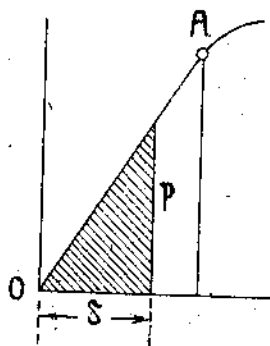
где ξ — так называемая „*степень полноты*“ диаграммы. Значения ξ для некоторых материалов указаны в прилагаемой таблице.

	ξ
Сварочное железо	0,7—0,8
Литое железо	0,63
Литая сталь	0,6—0,75
Стальное литье	0,7

T для тех же материалов колеблется в среднем между
(6—8) $\frac{\text{kg. mm}}{\text{mm}^3}$

Еслиб мы пожелали определить удельную работу, отвечающую произвольному удлинению δ до предела пропорциональности, то, как видно из чертежа, эта работа равнялась бы заштрихованной площади

$$T = \frac{p\delta}{2} \left(\frac{\text{kg. mm}}{\text{mm}^3} \right)$$



Черт. 8.

Внося вместо p — $\frac{P}{F}$, вместо

$$\delta — \frac{\lambda}{l}, \text{ получим } T.F.l = \frac{P\lambda}{2}$$

Так как $F.l$ есть объем бруска, то $T.F.l$ — представляет работу, затраченную силой P для того, чтобы бруску сообщить абсолютное удлинение λ

Заменяя P через $E \frac{\lambda}{l} F$ получим

$$\frac{P\lambda}{2} = \frac{\lambda^2}{2l} E F$$

Это выражение для работы выведено в предположении, что сила, растягивающая брусок, действует на него постепенно; возрастаая от 0 до P .

Заметим, что произведенная силой работа обращается в потенциальную энергию бруска. Имея это в виду, приходим к заключению, что если брусок получил удлинение λ , то потен-

циальная энергия его равна $\frac{\lambda^2}{2l} E F$

Удлинение при резко приложенной нагрузке.

§ 9. Еслиб груз P был подвешен к бруску сразу — мгновенно, но без удара, то брусок получил бы вначале удлинение, больше того, которое получается при непрерывно возрастающей нагрузке; после чего возникли бы колебания, постепенно затухающие, лишь по окончании которых груз занял бы положение равновесия. Удлинение, которое получил бы брусок по окончании колебаний, как раз равнялось бы тому, которое получается при спокойной непрерывно возрастающей от 0 нагрузке.

Найдем величину первоначального удлинения бруска в этом случае. Обозначим его через λ_1 . Работа груза P , опустившегося на высоту λ_1 , равна $P\lambda_1$. Вся эта работа обращается в потенциальную энергию бруска, которая должна быть равна, как сказано выше,

$$\frac{\lambda_1^2}{2l} EF$$

Следовательно,

$$P\lambda_1 = \frac{\lambda_1^2}{2l} EF$$

Отсюда

$$\lambda_1 = 2 \frac{Pl}{FE} = 2 \frac{P}{E} l = 2\delta l = 2\lambda,$$

Где λ — удлинение, получающееся при условии постепенного возрастания силы от 0 до P . Таким образом, если груз прикладывается к бруску сразу мгновенно, то непосредственно после его приложения удлинение, а следовательно и напряжение материала — получаются вдвое больше тех, которые устанавливаются по окончании колебаний, когда груз придет в равновесие. Эти последние отвечают той же нагрузке, но приложенной спокойно и постепенно возрастающей от 0.

Изменение структуры материала при приближении к критической точке.

§ 10. Как было сказано, по достижении „критической“ точки, удлинения в бруске начинают сильно возрастать при самом ничтожном увеличении нагрузки. Это явление впервые было замечено Дюфуром в 1824 г. Причина его заключается в том, что при приближении к критической точке материал претерпевает значительные изменения в своей структуре. Это особенно удобно наблюдать на железных и стальных брусках. Если поверхность железного бруска отполировать, то вскоре же после перехода через предел пропорциональности на ней начинают появляться черточки, наклонные к оси бруска число коих по мере приближения к критической точке все увеличивается. Эти черточки называются „линиями Людерса“, по имени ученого их открывшего. Линии эти заметны даже невооруженному глазу.

При дальнейшем увеличении нагрузки появляется уже 2 системы пересекающихся черточек или полосок, составляющих один и тот же угол с осью бруска характерный для каждого материала.

Исследование под микроскопом показывает, что железо, напр. состоит из кристаллических зерен, разделенных веществом другого состава. Линии Людерса представляют группы кристаллов, в которых произошел сдвиг по плоскостям спайности. Таким образом по мере приближения к критической точке материал изменяет свою структуру, причем явление сдвига кристаллов сопровождается резким повышением температуры.

Усталость металлов.

§ 11. Из опытов Велера и его последователей мы видим, что при нагрузке, не превышающей даже предела пропорциональности, но меняющейся очень большое число раз, брусок разрывается. Это явление уменьшения прочности при переменной нагрузке называется „усталостью“ металла. Успехам современной металлографии мы обязаны выяснением тех изменений в структуре металла, которые вызываются его усталостью.

Исследования под микроскопом поперечных сечений испытанных брусков показали, что под действием переменной нагрузки в материале появляются микроскопические трещинки, которые обуславливают неравномерное распределение напряжений в разных точках поперечного сечения бруска.

Эти трещинки есть результат сдвигов, происходящих в отдельных кристаллах металла по плоскостям спайности. Трещинки при продолжении действия переменной нагрузки постепенно увеличиваются и доводят наконец брусок до разрыва.

Удлинения за пределом пропорциональности.

§ 12. Герстнер и Готтлибсон производили исследования удлинений за пределами пропорциональности, из которых обнаружилось, что и за пределом пропорциональности упругая или исчезающая часть удлинения следует закону Гука.

Кроме того, Герстнер пришел к таким интересным заключениям:

1. Вытянутый некоторым грузом брусок при всех грузах, меньших того, коим он был вытянут, дает только упругие удлинения,

2. Пределы упругости и пропорциональности материала с повторением растяжения все большими и большими грузами увеличиваются.

3. Остающиеся удлинения развиваются в бруске лишь по приложении груза, большего того, которым брусок был вытянут раньше.

4. Один и тот же груз вызывает всегда одно и то же упругое удлинение независимо от того, был брусок вытянут раньше или нет.

На этих свойствах основано повышение пределов упругости и пропорциональности материалов, для чего их подвергают предварительно действию больших нагрузок. При этом можно быть уверенным, что при всех грузах, меньших того, который был приложен к телу при его предварительной обработке или испытании, в нем возникнут только упругие деформации.

Но необходимо заметить, что это справедливо лишь в том случае, если бруску после каждого испытания дать достаточный отдых или подвергнуть его сотрясениям или, если брусок железный или стальной, нагреть его примерно до 100° (C) и затем медленно охладить. Если же не сделать этого, то предел пропорциональности при новом испытании не только не повышается но наоборот—почти пропадает.

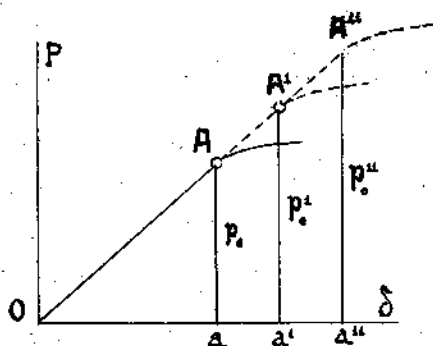
При повторном растяжении за пределом пропорциональности после перехода через критическую точку материал бруска становится менее растяжимым делаясь более жестким, т.-е. как бы закаливается. Эта способность закаливаться от остающихся удлинений особенно ярко выступает у железа и стали.

Железу и стали, получившим большую остающуюся деформацию, можно вернуть первоначальные упругие свойства посредством отжига, для чего брусок надо нагреть до темнокрасного каления и, продержав нагретым около получаса, затем медленно охладить.

Повышение предела пропорциональности путем предварительного растяжения большими грузами имеет смысл лишь в том случае, если брусок при дальнейшей службе должен подвергаться только растяжению, ибо материал с искусственно повышенным пределом пропорциональности на сжатие работает совсем плохо.

Если б при каждом испытании мы построили диаграмму растяжения, то увидели бы, что ординаты $Aa, A'a', A''a'' \dots$, изображающие пределы пропорциональности при каждом новом испытании, все увеличиваются, при чем, как часто случается, p_0^1 больше даже нагрузки, на которой прекратилось 1-ое испытание, p_0^{11} больше нагрузки на которой прекратилось второе испытание, и т. д.

Пунктирные линии показывают течение процесса при приложении сил больших первоначальной.



Черт. 9.

Явления, которые происходят в бруске по мере приближения к моменту разрушения.

§ 13. Если брусок подвергать действию постепенно возрастающей нагрузки, то после перехода предела пропорциональности мы начнем наблюдать, что удлинения начнут расти очень быстро и так до некоторого предела, пока напряжение материала не достигнет значения R_{max} (см. черт. 6), после чего удлинения начинают возрастать еще быстрее и брусок, наконец, разрушается, при чем разрушение происходит при нагрузке, несколько меньшей R_{max} .

Если поверхность бруска отполирована, то, при приближении нагрузки к разрушающей, поверхность его мутнеет, затем в каком нибудь месте бруска, обладающим каким либо дефектом в строении материала, появляется сужение (горловина) и наконец брусок рвется.

Если нанести на брусок на равных расстояниях друг от друга деления, то можно заметить, что расстояния между делениями близ места разрыва сильнее возрастают, нежели в других местах. (черт. 10).

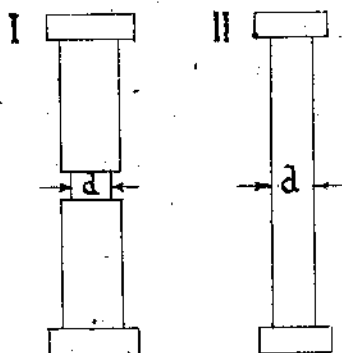
Что горловина образуется действительно в том месте, где материал бруска плох, можно доказать таким образом. Если



Черт. 10.

взять два бруска (черт. 11) и подвергнуть их растяжению до разрыва, причем у одного бруска сделана заточка таким образом, что диаметр его в заточенной части равен диаметру другого бруска, то первый брусок разорвется по наименьшему сечению и будет иметь разрывающий груз больший, чем второй брусок, ибо у первого бруска место разрыва predetermined заранее и много шансов за то, что в этом месте материал бруска не имеет дефектов; у второго же бруска разрыв про-

изойдет непременно в том месте, где материал имеет дефект. Поэтому у первого бруска напряжение в момент разрыва будет



Черт. 11.

близко к R_{max} , а у второго меньше R_{max} (см. черт. 6).

Изменение объема бруска при растяжении.

§ 14. Длина бруска при растяжении увеличивается, и поперечное сечение при этом уменьшается; следовательно, происходит поперечное сжатие, за меру которого можно принять „относительное поперечное сжатие“ γ т.-е. величину, на которую будет уменьшаться каждая единица длины какого либо из размеров поперечного сечения бруска. По опытам Вертейма и Коньяр-де-

Латунь относительное поперечное сжатие составляет от $1/4$ —до $1/3$ относительного удлинения.

Отношение $\varepsilon = \frac{\gamma}{\delta} = 1/4$ —до $1/3$ называется коэффициентом Пуассона, который ввел его впервые в теорию упругости материалов.

Пусть первоначальный объем бруска $v = Fl$, где F — площадь поперечного сечения, l — длина бруска.

Тогда объем бруска после растяжения представится формулой

$$V = l(1+\delta) \cdot F(1-\gamma)^2 = v(1+\delta)(1-\gamma)^2$$

Следовательно,

$$\frac{V-v}{v} = (1+\delta)(1-\gamma)^2 - 1 \approx \delta - 2\gamma$$

если пренебречь членами, содержащими δ и γ в квадрате или в виде произведения, в виду малости величин δ и γ

Итак, $V-v = (\delta - 2\gamma)v$ Но так как $\delta > 2\gamma$ то $V-v > 0$ следовательно, объем бруска при растяжении увеличивается.

Расчет бруска на растяжение.

§ 15. Идея всякого расчета заключается в нахождении *наименьших* размеров той или иной части сооружения, при которых эта часть остается достаточно прочной, т. е. размеры должны быть таковы, чтобы напряжения, возникающие под влиянием внешних сил, вызывали только упругие (а не остающиеся) деформации, что обеспечивает данное сооружение от разрушения.

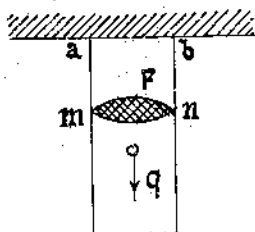
За допускаемые принимаются напряжения, не превосходящие от $1/4$ —до $1/3$ напряжения при разрыве. Число, стоящее в знаменателе (4—5) называется *коэффициентом безопасности* или *надежности*. В справочных книгах даются таблицы с указанием допускаемых напряжений для разных материалов. Для нахождения прочных сечений при расчете бруска на растяжение пользуются формулой

$$\frac{P}{F} \leq K_z \text{ или } P \leq K_z \cdot F \dots \dots \dots (1)$$

где P —растягивающая брусок сила в килограммах, K_z —допускаемое безопасное напряжение для данного материала в $\frac{kg}{mm^2}$

F — площадь поперечного сечения бруска в mm^2 .

§ 16. Если при расчете бруса, желательно учесть влияние его веса, то к силе P надо добавить q — вес части бруса, лежащей ниже рассматриваемого сечения.



Черт. 12.

Напряжение материала в этом сечении равно $\frac{P+q}{F}$

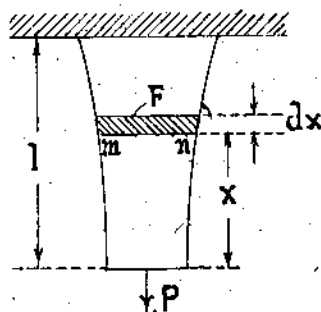
Наибольшее напряжение получается в сечении ab , где $q = Q$ — весу всего бруса. Поэтому формула (I) для расчета должна быть заменена такой

$$\frac{P+Q}{F} \leq K_z$$

или

$$P+Q \leq K_z \cdot F \dots \dots \dots (I')$$

На черт. (13) изображен брус, имеющий форму тела равного сопротивления растяжению, т. е. такую форму, при которой во всех поперечных сечениях бруса напряжения, возникающие под влиянием



Черт. 13.

и внешней растягивающей силы, имеют одну и ту же величину. Определим, по какому закону должна изменяться для этого площадь поперечных сечений бруса. Положим, дано, что в каждом поперечном сечении напряжение материала должно быть

равно K_z , Тогда величина растягивающей силы для какого либо сечения $m-n$, взятого на расстоянии x от нижнего конца бруса будет

Для сечения, γ бесконечно близкого к $m-n$, отстоящего от него на расстоянии dx , растягивающая сила $K_z \cdot F$ увеличится на величину веса заштрихованного объема бруса

равного $\gamma \cdot F dx$, где γ — удельный вес материала бруса. Поэтому можно написать

$$d(K_z F) = \gamma F dx$$

или

$$\frac{dF}{F} = \frac{\gamma}{K_z} dx$$

Интегрируя это равенство, получим

$$\lg F = \frac{\gamma x}{K_z} + C$$

Так как при $x=0$, F должно равняться $\frac{P}{K_z}$

то

$$\lg \frac{P}{K_z} = \frac{\gamma \cdot 0}{K_z} + C$$

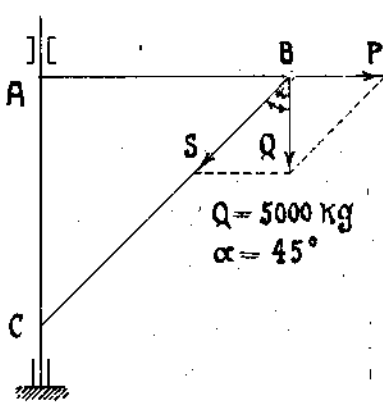
В виду этого

$$\lg F = \frac{\gamma x}{K_z} + \lg \frac{P}{K_z}$$

или

$$F = \frac{P}{K_z} \cdot e^{\frac{\gamma x}{K_z}} \quad (II)$$

По этой формуле можно вычислить площадь любого из поперечных сечений бруса для всякого x от 0 до 1.

Задача. Рассчитать поперечину (часть АВ) крана, подъемная сила коего = 5000 кг; поперечина железная; сечение ее имеет вид прямоугольника, стороны которого относятся как 3:7 $\angle ABC = 45^\circ$  $\frac{a}{b} = \frac{3}{7}$

Решение. Задача заключается в том, чтобы найти наименьшие размеры поперечного сечения поперечины, при которых напряжения, возникающие под влиянием поднимаемого груза не превосходили бы допустимых напряжений.

Разложим силу Q (максимальный вес груза) на 2 составляющие P и S . На поперечину действует растягивающая ее сила

$$P = Q \cdot \operatorname{tg} \alpha = 5000 \text{ кг} \cdot 1 = 5000 \text{ кг}.$$

K_z — допускаемое напряжение на растяжение для железа можно считать равным $6 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}$.

Расчет ведется по формуле: $P \leq K_z \cdot F$

Откуда
$$F \geq \frac{P}{K_z} = \frac{5000}{6} \approx 833 \text{ мм}^2$$

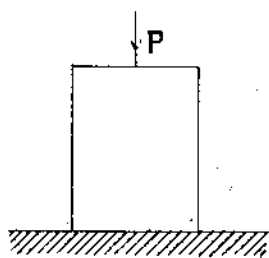
Зная площадь сечения поперечины и отношение сторон сечения a и b , нетрудно найти эти стороны,

II. Сжатие.

§ 17. Если на брусок действует сила так, как указано на черт. (15), то происходит явление, называемое *сжатием*; оно во многих отношениях аналогично явлению растяжения.

Внутренняя сила или напряжение материала при сжатии (так же как и при растяжении) пропорциональна, так называемому *относительному сжатию* — понятию, аналогичному понятию относительного удлинения.

Таким образом, внутренняя сила $p = E_1 \delta_1$, где δ_1 — относительное сжатие, а E_1 — коэффициент пропорциональности, называемый „коэффициентом упругости при сжатии“ и выражаемый в $\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$



Черт. 15.

Для всех материалов, употребляемых в машиностроении $E_1 = E$.

Этот закон (именуемый законом Гука) оказывается справедливым до некоторого предела. То предельное значение напряжения, при котором закон Гука применим еще, называется *пределом пропорциональности при сжатии*.

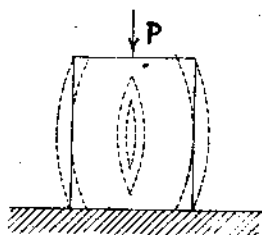
Деформация, появляющаяся при сжатии тела, так же, как и при растяжении, бывает двух родов: 1) деформация упругая (исчезающая по прекращении нагрузки) и 2) деформация неупругая (остающаяся).

Каждая из этих двух деформаций в свою очередь состоит из двух частей: из части, возникающей немедленно по приложе-

нии груза, и из части, возникающей по истечении некоторого времени.

Как и при растяжении, при сжатии имеется *предел упругости*, т. е. то максимальное значение внутренней силы, до которого в материале возникают только упругие (исчезающие) деформации. Этот предел упругости составляет 50—60% предела пропорциональности. Практически за предел упругости при сжатии принимают то предельное значение напряжения, при котором остающееся сжатие не превышает 0,001% или 0,00001 первоначальной длины бруска.

За пределом пропорциональности остающееся сжатия начинают расти быстрее, чем внутренние силы, и после некоторого предела, называемого *пределом текучести*, эти остающиеся сжатия начинают расти, чрезвычайно быстро, после чего начинается разрушение бруска. При разрушении бруска под влиянием



Черт. 16.

силы сжатия, на его поверхности появляются трещины, брусок вынуживается и, наконец, распадается на отдельные части.

При сжатии наблюдается поперечное растяжение γ_1 , составляющее от 0,26 до 0,29 продольного сжатия

$$\gamma_1 = (0,26 - 0,29) \delta_1$$

Объем бруска при сжатии уменьшается.

Расчет бруска на сжатие.

§ 18. Расчет бруска на сжатие ведется по формуле

$$P \leq k \cdot F \dots \dots \dots (III)$$

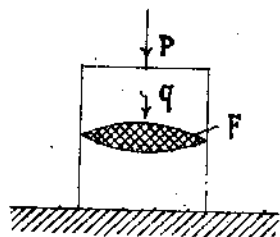
где P — сжимающая сила в кг,

k — допускаемое напряжение материала на сжатие

в $\frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}$.

F — площадь поперечного сечения в мм^2 .

Коэффициент безопасности тот же, что и при растя-



Черт. 17.

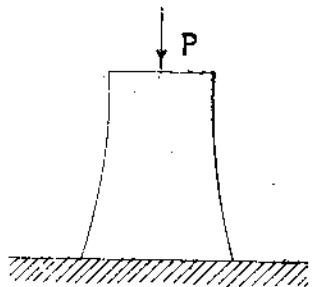
жения, т. е. допускаемое напряжение не должно превышать $1/4 - 1/5$ напряжения, вызывающего разрушение бруса.

Если желательно учесть и собственный вес части бруса, расположенной над исследуемым сечением, то в левой части формулы (III) нужно к P прибавить вес q указанной части бруса; тогда получим $P + q \leq K \cdot F \dots\dots\dots (III^4)$

Форма тела равного сопротивления на сжатие изображена на черт. (18). Во всех поперечных сечениях тела такой формы напряжения, вызываемые силой P и собственным весом бруса, одни и те же.

Нужно заметить, что формулой (III) пользуются только при расчете на сжатие сравнительно коротких брусьев.

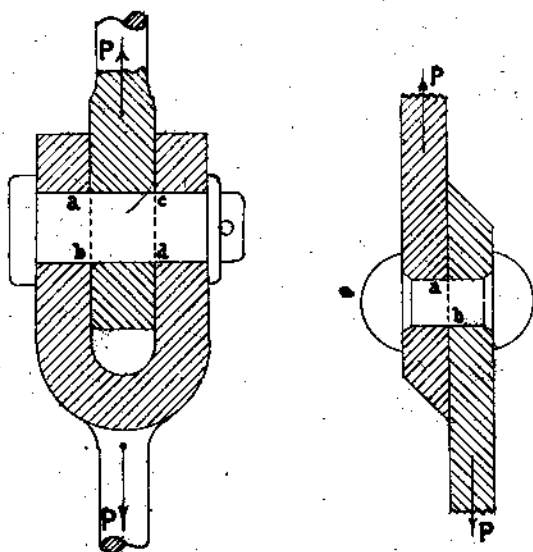
Длинные брусья, находящиеся под влиянием сил сжатия, рассчитываются на так называемый продольный изгиб; об этом речь будет в одной из следующих глав.



Черт. 18.

III. Сдвиг (перерезывание, скольжение, скалывание).

§ 19. Если к телу приложены внешние силы, как указано на черт. (19), то в сечениях ab и cd происходит давление, называемое *сдвигом*.

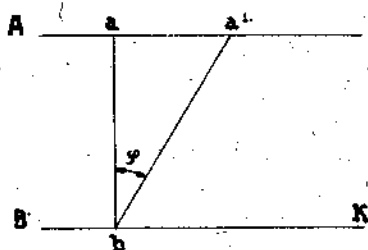


Черт. 19.

Явление сдвига заключается в том, что какие-нибудь две площадки, взятые в теле, перемещаются одна относительно другой, причем отдельные точки этих площадок не выходят из их плоскостей.

Так например, пусть A и B — следы 2-х перпендикулярных к плоскости черт. площадок.

Тогда точка a , находящаяся до приложения сил, вызывавших сдвиг, на перпендикуляре, восстановленном из точки b , после сдвига окажется перемещенной в точку a^1 в той же плоскости A .



Черт. 20.

В сечениях тела, где происходят сдвиг, появляются внутренние касательные силы, за меру коих принимается касательная сила t , отнесенная к единице площади сечения.

Условимся, что мы будем считать за меру сдвига: назвав величину перемещения aa^1 — абсолютным сдвигом, примем за меру сдвига отношение абсолютного сдвига (aa^1) к расстоянию между площадками и назовем его относительным сдвигом. (Черт. 20). Таким образом относительный сдвиг

$$\frac{aa^1}{ab} = \operatorname{tg} \varphi,$$

где φ называется углом сдвига. Так как вообще мы рассматриваем малые деформации, то, по малости φ можно принять $\operatorname{tg} \varphi = \varphi$ если φ выразить в дуговой мере.

Заметим, что тот же угол φ характеризует изменение при сдвиге прямого $\angle abk$ ($\angle \varphi = \angle abk - \angle a^1bk$); отсюда следует, что за относительный сдвиг можно принимать величину угла, на который изменяются при сдвиге прямые углы между площадками и их нормальными, соединяющими какие либо точки этих площадок.

Между внутренней касательной силой t и относительным сдвигом существует зависимость, аналогичная закону Гука, выражающаяся уравнением

$$t = G \cdot \operatorname{tg} \varphi \dots \dots \dots (1)$$

или

$$t = G \cdot \varphi \dots \dots \dots (2)$$

где G — есть некоторый коэффициент пропорциональности, называемый *коэффициентом упругости при сдвиге* или *коэффициентом поперечной упругости*. Согласно теоретическим и опытным исследованиям найдено: $G = \frac{E}{2(1+\varepsilon)} = 0,385 E$, где ε

коэффициент Пуассона.

E — модуль упругости при растяжении.

Значение $G = 0,385 E$ указано в справочнике „Hütte“; в других руководствах и справочниках G указывается в пределах $\left(\frac{2}{5} - \frac{3}{8}\right) E$.

Величины E и G выражаются в $\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$.

Если в формуле (1) положить $\varphi = 45^\circ$, то $t = G$; следовательно, модуль упругости при сдвиге равен тому значению касательной силы, при котором угол сдвига $= 45^\circ$.

Величина, обратная коэффициенту упругости при сдвиге, т.-е. $\frac{1}{G}$ называется *коэффициентом сдвига*. Из форм. (2) ясно, что коэффициент сдвига численно равен относительному сдвигу при $t = 1$.

Явления, происходящие при сдвиге.

§ 20. Явления, происходящие при сдвиге, имеют полную аналогию с явлениями, происходящими при растяжении и сжатии.

Так, пропорциональность между внутренней касательной силой t и относительным сдвигом φ выраженная уравнением (2), имеет место только до некоторого предельного значения t , называемого *пределом пропорциональности при сдвиге*.

Далее: пока внешние силы, вызывающие сдвиг, не достигают некоторой значительной величины, деформации получаются упругие, т.-е. исчезающие с прекращением действия сил. Эта предельная нагрузка, отнесенная к единице площади сечения, при которой деформация получается еще упругой (или исчезающей) называется *пределом упругости при сдвиге*.

За пределом упругости при сдвиге появляются (сначала очень незначительные) остающиеся деформации, причем, до достижения

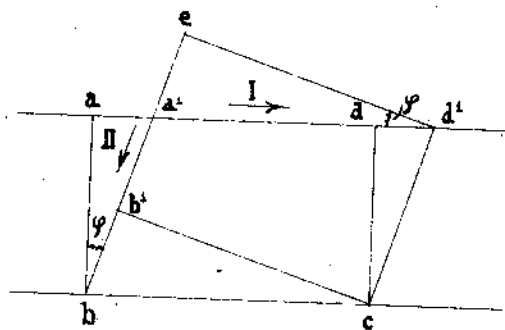
предела пропорциональности при сдвиге эти остающиеся деформации почти не изменяют пропорциональности между касательной силой t и относительным сдвигом.

За пределом пропорциональности с дальнейшим возрастанием сил, относительный сдвиг начинает возрастать очень быстро, и влечет за собой разрушение бруска, который как бы перерезывается по сечению, испытывающему сдвиг.

Деформация при сдвиге так же, как и при растяжении и сжатии, состоит из части, возникающей немедленно, и из части, возникающей спустя некоторое время по приложении нагрузки.

Если в теле существует сдвиг в каком-нибудь направлении, то можно утверждать, что непременно существует сдвиг в направлении, перпендикулярном к первому сдвигу, при чем мера обоих сдвигов одна и та же.

Действительно, пусть точки a и d одной площадки переместились относительно (расположенных с ними на одних вер-

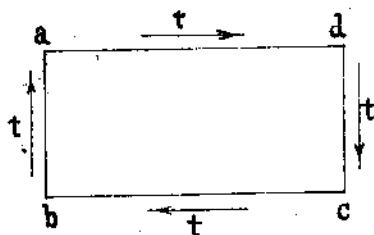


Черт. 21.

малях) точек b и c другой площадки в положении a^1, d^1 (черт. 21); при этом в направлении стрелки I произошел сдвиг, мера коего φ

При сдвиге прямоугольник $abcd$ обратился в параллелограмм $a^1b^1c^1d^1$; если из c и d^1 опустим перпендикуляры на ba^1 , то параллелограмм $a^1b^1c^1d^1$ можно рассматривать, как образовавшийся из прямоугольника $b^1c^1d^1e$ после

скольжения (сдвига) точек a и b^1 в направлении стрелки II, причем мера этого скольжения равна тому же φ ($\angle aba^1 = \angle a^1 d^1 e$, как углы с взаимно перпендикулярными сторонами).



Черт. 22.

касательная сила t , появившаяся при сдвиге, то и на остальных гранях будут возникать *такие же* силы t , направленные как указано на черт. 22 (ибо $\angle$ сдвига по всем направлениям один и тот же, а сила t пропорциональна φ).

Следовательно, если мысленно выделим в теле параллелепипед $abcd$ (черт. 22, — один из размеров параллелепипеда перпендикулярен к плоскости чертежа), то согласно сказанному, можно утверждать, что, если по грани параллелепипеда ad возникла

Расчет на сдвиг.

§ 21. Расчет на сдвиг ведется по формуле: $P \leq K_s \cdot F \dots$ (IV)

где P — величина внешней силы, производящей сдвиг, в килограммах;

K_s — допускаемое в данном материале напряжение при сдвиге в $\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$;

F — площадь сечения, подвергающаяся сдвигу, в mm^2 .

Для тел изотропных, т. е. однородных по всем направлениям, K_s равно $\frac{1}{2} K_z$.

Заметим, что в примере, изображенном на черт. (19), F нужно считать равным сумме двух поперечных сечений ab и cd , перерезываемого болта.

Ниже мы приводим таблицу допускаемых напряжений при разных деформациях, пределов пропорциональности и разрушающих грузов для наиболее употребительных в строительной практике материалов.

Название материал.	Времен. сопротивл. в $\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$		Предел пропорц. в $\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$		Допускаемые напряжения в $\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$														
	раст. K_z	сж. K	раст. P_0	сж. P_0'	Растяж. K_z			Сж. K		Сдвиг K_s			Круч. K_d			Изгиб K_b			
					a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	c	a	b	c	
Сварочное железо	от 33 до 40	*)	13	—	9	6	3	9	6	7,2	4,8	2,4	3,6	2,4	1,2	9	6	3	
Литое железо.	от 34 до 50	—	18	—	от 9 до 12	6 8	3 4	9 12	6 8	7,2 9,6	4,8 6,4	2,4 3,2	6 8,4	4 5,6	2 2,8	9 12	6 8	3 4	
	от 50 до 200	—	от 25 до 60	—	от 12 до 15	8 10	4 5	12 15	8 10	9,6 12	6,4 8	3,2 4	9 12	6 8	3 4	12 15	8 10	4 5	
Сталь отливки.	от 35 до 70	—	20	—	от 6 до 9	4 6	2 3	9 12	6 9	4,8 8,4	3,2 5,6	1,6 2,8	4,8 8,4	3,2 5,6	1,6 2,8	7,5 10,5	5 7	2,5 3,5	
Рессорная сталь:																			
некаленная.	100и	>	50и	>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
каленная.	170и	>	75и	>	—	—	—	—	—	—	—	—	60	40	—	75	50	—	
Специальн. сталь.	См. „Hütte“. Изд. 1916 г. часть I, стр. 539—542.																		
Чугун.	от 12 до 24	70 85	нет	—	3	2	1	9	6	3	2	1	Kz для круг. сечен. 1,5Kz для некр. сечен.			2Kz для круг. сечен. 1,5Kz для некруг. сеч.			
Красная медь	от 20 до 28	—	от 0 до 6	—	6	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
Желт. медь литая.	15	—	6,5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
Бронза фосфорис.	40	—	9	—	7,5	5	2,5	—	—	4	—	—	3	2	1	7,5	5	2,5	
» пушечная.	30	—	3	—	3	2	1	—	—	—	—	—	—	—	—	3	2	1	
» Алюмин. (10% Al)	от 51 до 62	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
Дельта-металл.	58,8	—	22	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
Алюминий литой	от 9,3 до 10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
	от 14 до 15	—	от 4,4 до 4,8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
прокованный.																			
Цинк.	23,5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
Олово.	3,5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
Свинец мягкий.	1,25	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
» твердый.	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
Стекло.	2,5	—	—	—	—	—	—	0,25	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
Бумага в прокле- енных слоях.	от 0,4 до 0,8	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
Дерево:																			
ель.	7,9	2,8	—	1,55	0,6	—	—	0,5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
сосна.	7,5	2,45	—	1,5	1—1,2	—	—	0,6—0,8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
дуб.	9,65	3,45	4,75	1,5	1—1,2	—	—	0,8—1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
бук.	13,4	3,2	5,8	—	2	—	—	1,6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	

*) вдоль волокон, а $\perp$ к вол. $K_z=28-35$.

Название материал.	Времен. сопротивл. в $\frac{kg}{mm^2}$		Предел пропорц. в $\frac{kg}{mm^2}$		Допускаемые напряжения в $\frac{kg}{mm^2}$														
	раст. Kz	сж. K	раст. P ₀	сж. P ₀ '	Растяж. K _z			Сж. K		Сдвиг K _s			Круч. K _d			Изгиб K _b			
					a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	c	a	b	c	
Гранит.	—	от 4,5	—	—	—	—	—	от 0,25											
Мрамор.	—	до 20	—	—	—	—	—	до 0,6											
	—	от 5	—	—	—	—	—	от 0,12											
Песчаник.	—	до 18	—	—	—	—	—	до 0,8											
	—	от 2	—	—	—	—	—	от 0,15											
Искусств. песчан Бетон.	—	до 20	—	—	—	—	—	до 0,3											
	—	4,5	—	—	—	—	—												
Блажка фундам. из насыпного бетона	—	до 3,5	—	—	—	—	—	0,06-0,08											
	—		—	—	—	—	—	0,1-0,15											
трамбов. бетона.	—		—	—	—	—	—												
Кирпич. кладка на известков. растворе	—	1,4	—	—	—	—	—	0,07											
изв.-цем. раств.	—		—	—	—	—	—	0,12-0,15											
Бутовая кладка на изв. раст.	—		—	—	—	—	—	до 0,05											
Хороший строит. грунт.	—		—	—	—	—	—	0,03-0,04											
Свая	—		—	—	—	—	—	0,2											
Гибкие тела:																			
жел. пров. белая.	до 70	—	42																
» » олож.	40	—	20																
оцинк. ст. пров.																			
(тел.).	135	—																	
ст. пров. для кан.	253	—																	
провол. кр. меди.	40	—	12																
кожан. ремни. .	от 2,5	—	1,6																
	до 4,5	—																	
пеньковый канат нов.	12-13,5	—																	
пеньковый канат стар.	5	—																	

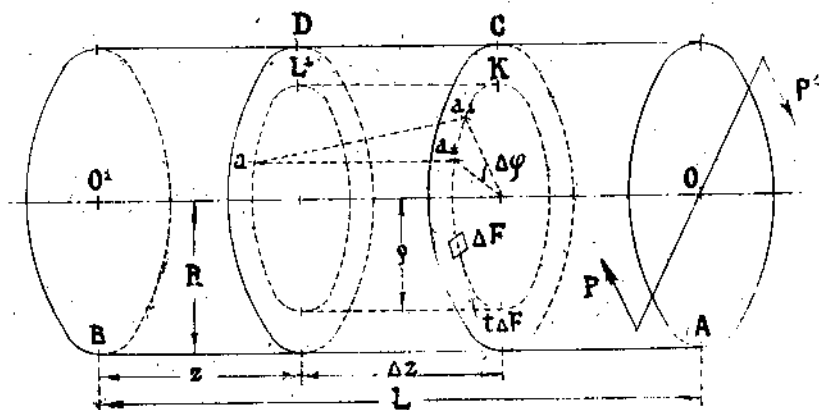
Под литерой „а“ — обозначены допуск. напряжения при спокойной, постоянной нагрузке.

Под литерой „б“ — допуск. напряжения при переменной нагрузке, изменяющейся в пределах от нуля до некоторого наибольшего положительного значения и обратно до нуля.

Наконец, под литерой „с“ — обозначены допуск. напряжения при переменной нагрузке, изменяющейся от 0 до некоторого наибольшего по численной величине отрицательного значения, после чего опять до 0 и наибольшего положительного значения и т. д.

IV. Кручение.

§ 22. Если к брусу АВ (черт. 23) круглого сечения с приближенным концом В приложим пару сил (P, P') , то последняя будет стремиться повернуть (скрутить) брусок вокруг оси OO' . Все сечения, перпендикулярные к оси бруса, напр. С и D, сдвинутся при этом одно относительно другого на некоторый угол, так что точка a' сечения С переместится в a_2 , и прямая aa' обратится в винтовую линию aa_2 .



Черт. 23.

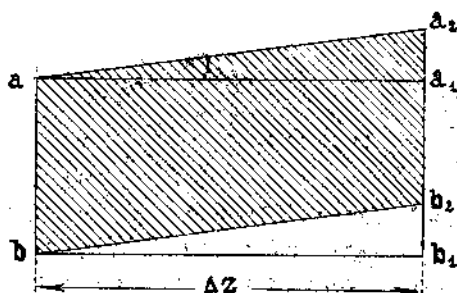
Таким образом сечение С окажется повернутым относительно сечения D на некоторый угол $\Delta\varphi$, при чем все точки этого сечения останутся в его плоскости.

Обозначая расстояние между сечениями через Δz , рассмотрим перемещение сечения С относительно сечения В. Пусть радиус цилиндра R , а ρ радиус цилиндрической

поверхности KL^1 . Если поверхность KL^1 развернуть на плоскость, то увидим, что точки a, a^1 и b, b^1 после кручения

переместятся так, что прямоугольник aa^1bb^1 обратится в параллелограмм aa_1b_1b (черт. 24). Это показывает, что при кручении происходит явление сдвига или скольжения.

Мерой скольжения является отношение:



Черт. 24.

$$\tau = \frac{aa_1}{aa^1}$$

или так как $aa_1 = \rho \Delta\varphi$, $aa^1 = \Delta Z$

то
$$\tau = \frac{\rho \Delta\varphi}{\Delta Z} \dots \dots \dots (8)$$

$\frac{\Delta\varphi}{\Delta Z}$ — назыв. *средним относительным углом кручения*.

Вообразим теперь, что оба сечения C и D неограниченно приближаются друг к другу, так что ΔZ стремится к 0. При этом угол $\Delta\varphi$, называемый *углом кручения*, будет также стремиться к 0, так как он увеличивается лишь с удалением одного сечения от другого. Количество τ при этом будет стремиться к пределу:

$$\tau = \lim \left(\frac{\rho \Delta\varphi}{\Delta Z} \right)_{\Delta Z \rightarrow 0} = \rho \frac{d\varphi}{dz} \dots \dots (9)$$

$\frac{d\varphi}{dz}$ — наз. *относительным углом кручения*.

Чтобы получить величину касательной силы t (черт. 23), действующей в плоскости сечения C , (t касательна к пунктирной окружности радиуса ρ), надо относительное скольжение τ умножить на модуль упругости при скольжении; следовательно:

$$t = G \cdot \tau \quad \text{или} \quad t = G \cdot \rho \cdot \frac{d\varphi}{dz} \dots \dots (10)$$

Как видно, внутренние касательные силы при кручении увеличиваются прямо пропорционально расстоянию точки до оси скручиваемого цилиндра.

Определение угла кручения.

§ 23. Обозначим момент скручивающей цилиндр пары (P, P') через M .

Сечение B предположим неподвижным, а сеч. C и D вообразим совпавшими при неограниченном их сближении. Если возьмем в плоскости сечения C бесконечно малую площадку ΔF , то увидим, что после кручения в ней возникает некоторая касательная сила, величина коей на 1 единицу площади t .

Расстояние этой площадки от оси цилиндра ρ . Отбрасывая часть цилиндра расположенную левее сечения C , для сохранения равновесия правой части придется по сечению C приложить касательные силы, определяемые из условий равновесия

$$M - \sum (t \cdot \Delta F) \cdot \rho = 0$$

Суммирование должно быть распространено на всю площадь сечения C .

Подставляя в это равенство вместо t полученное ранее значение, находим

$$\sum t \Delta F \rho = \sum G \rho \frac{d\varphi}{dz} \Delta F \rho$$

Количества G и $\frac{d\varphi}{dz}$ для данного сечения const., а потому, вынося их за знак суммы, получим:

$$\sum t \Delta F \rho = G \frac{d\varphi}{dz} \sum \rho^2 \Delta F.$$

Последняя сумма представляет полярный момент инерции сечения, обозначаемый обычно через J_0 ; в виду этого наше равенство принимает вид:

$$M - G J_0 \frac{d\varphi}{dz} = 0$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M}{GJ_0}$$

Чтобы получить величину угла кручения для сечения C , определяем из последнего равенства $d\varphi$ и интегрируем:

$$d\varphi = \frac{M}{GJ_0} \cdot dz$$

$$\varphi = \int \frac{M}{GJ_0} dz + C = \frac{M}{GJ_0} \int dz + C = \frac{Mz}{GJ_0} + C$$

Произвольную постоянную C находим из условия, что для сечения B (неподв.) при $z=0$, $\varphi=0$

$$0 = \frac{M}{GJ_0} \cdot 0 + C$$

или $0 = 0 + C$; $C = 0$. Следовательно:

$$\varphi = \frac{Mz}{GJ_0} \quad (6)$$

Так выражается угол кручения.

Из этого равенства видно, что φ достигает наибольшего значения при $z=L$, т. е. в том сечении, где приложена пара,

$$\varphi = \frac{ML}{GJ_0} \quad (7)$$

Определение наиб. касат. силы.

§ 24. Определив угол кручения, можем найти и величину внутренней касательной силы t , т. е. величину напряжения материала при кручении в точках удаленных от оси цилиндра

на расстояние ρ . Мы имеем; $t = G\rho \frac{d\varphi}{dz}$ — по относительный

угол кручения,

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M}{GJ_0}$$

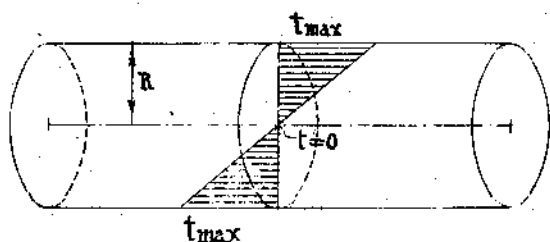
Следовательно,

$$t = G\rho \frac{M}{GJ_0} = \frac{M\rho}{J_0}$$

Наибольшая касательная сила получается на поверхности

$$t_{\max} = \frac{MR_0}{J_0} \quad (8)$$

На оси бруса напряжение материала равно 0.



Черт. 25.

Диаграмма напряжений при кручении обращается в прямую линию, проходящую через центр сечения.

Расчет на кручение.

§ 25. Для расчета на кручение пользуются формулой (8), при чем ставится требование, чтобы получающееся наибольшее напряжение материала $t_{\max}$ не превосходило допускаемого K_d

$$t_{\max} = \frac{MR}{J_0} \leq K_d$$

Отношение $\frac{J_0}{R}$ обыкновенно обозначают через W_0 и называют „полярным моментом сопротивления“ сечения.

Расчетной формуле обыкновенно придают такой вид

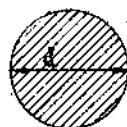
$$M \leq K_d \cdot W_0 \quad (V)$$

Напомним, что здесь

M — так называемый „крутящий момент“, т. е. алгебраическая сумма моментов всех сил, расположенных по одну сторону сечения (мы всегда будем брать силы справа от сечения) относительно оси скручиваемого цилиндра в kgm ;

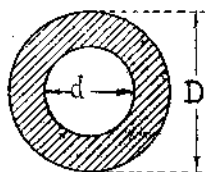
K_d — допускаемое напряжение материала на кручение в $\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$;

W_0 — полярный момент сопротивления сечения в mm^3 . Он равен для сечения, представляющего круг,



$$W_0 = \frac{J_0}{\frac{d}{2}} = \frac{\frac{\pi}{32} d^4}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi}{16} d^3 \approx 0,2 d^3$$

Для сечения, имеющего вид кольца (если цилиндр полый внутри),



$$W_0 = \frac{J_0}{\frac{D}{2}} = \frac{\frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D} \approx 0,2 \frac{D^4 - d^4}{D}$$

§ 26. Расчет можно вести и по другой формуле, поставив условие, чтобы угол кручения, приходящийся на единицу длины скручиваемого цилиндра, не превосходил известного предела; напр., для железных валов при расчете ставят требование, чтобы угол кручения был не более $\frac{1}{4}$ градуса на каждый метр или $\frac{1}{4000}$ градуса на каждый миллиметр длины вала, а, следовательно, в дуговой мере не более.

$$\frac{1}{4000} \cdot \frac{\pi}{180} = 0,0000044.$$

Из формулы (7) § 23 имеем:

$$\frac{\varphi}{L} = \frac{M}{GJ_0}.$$

Поэтому формула для расчета железных валов получается такая:

$$\frac{M}{GJ_0} \leq 0,0000044 \dots \dots \dots (VI)$$

Здесь

M — крутящий момент в $\text{kg} \cdot \text{mm}$;

G — коэффициент упругости при сдвиге материала цилиндра в $\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$;

J_0 — полярный момент инерции сечения в mm^4 , равный

$$\text{для круга } J_0 = \frac{\pi}{32} d^4 = 0,1 d^4$$

$$\text{для кольца } J_0 = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) \approx 0,1 (D^4 - d^4)$$

Примечание 1-е. Нетрудно понять, что, если бы было поставлено условие, что угол, приходящийся на 1 мм длины скручиваемого цилиндра должен быть равен n° (а не $\frac{1}{4000}$ градуса, как мы предполагаем), то формула для расчета получила бы вид

$$\frac{M}{GJ} \leq \frac{\pi n}{180} \quad (VI)$$

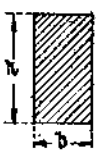
Примечание 2-е. Если указано число лошадиных сил N , которые должен передавать скручиваемый вал, и n — число оборотов вала в минуту, то, как известно из курса „Деталей машин“, крутящий момент равен

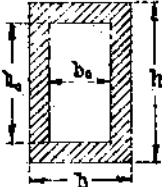
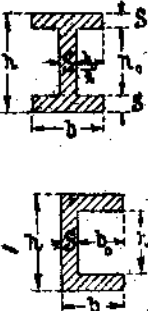
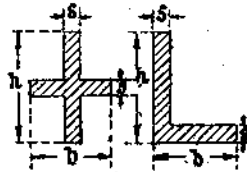
$$M = 716200 \frac{N}{n} \text{ кг.м} \quad (9).$$

Таким образом, зная N и n легко вычислить M , а по нему и диаметр вала.

Кручение не круглых тел.

§ 27. Мы рассмотрели кручение круглого цилиндра. При расчете некруглых тел можно пользоваться той же формулой (V), но только для W_0 надо брать другие значения, указанные для разных поперечных сечений в прилагаемой таблице.

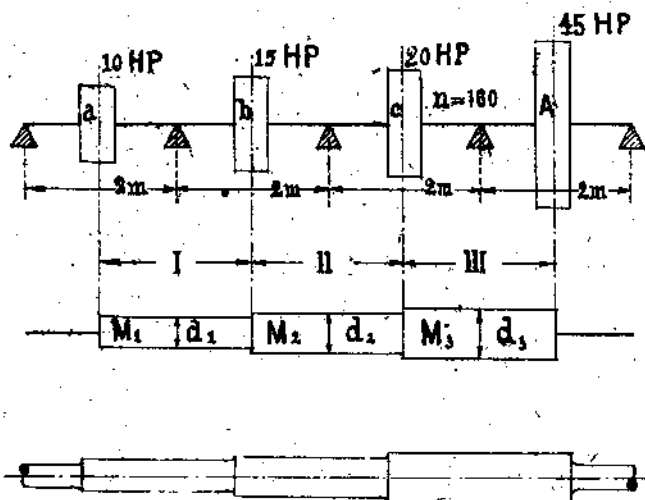
ФОРМА СЕЧЕНИЯ	W_0	где $t_{\max}$
	$\frac{\pi}{16} b^2 h \quad (h > b)$	на концах малой оси
	$\frac{\pi}{16} \frac{b^2 h - b_1^2 h_1}{b}$ $(h_1 = h - b_1, \quad h > b)$	на концах малой оси
	$\frac{2}{9} b^2 h \quad (h > b)$	на средних сторонах

Форма сечения	W_o	где t_{max}
	$\frac{2}{9} \frac{b^3 h - b_o^3 h_o}{b}$ $(h_o : h = b_o : b)$	на средних сторонах
	$\frac{2}{9} a^3$	
	$\frac{b^3}{20}$	
	$\frac{b^3}{1,09}$	
	$\frac{2}{9} S^2 (h + 2b)$	
	$\frac{2}{9} S^2 (h + b - s)$	

Затруднения, встречаемые иногда при решении задач на кручение.

§ 28. Расчет на кручение по форм. (V) и (VI) не представляет никаких затруднений, если крутящий момент M сохраняет свою величину для всех сечений цилиндра, что обычно и бывает. Но встречаются случаи, когда M изменяется как-бы ступенями. Тогда расчет несколько усложняется. Поясним это на примере.

Положим, требуется рассчитать трансмиссионный вал, на котором насажены шкивы a, b, c, A . Шкив A получает от двигателя 45 лошадиных сил, которые и передает шкивам a — 10 л. с., b — 15 л. с., c — 20 л. с., с которых в свою очередь работа передается на станки мастерской. Число оборотов вала в минуту — 160.



Нетрудно сообразить, что материал вала на участке I испытывает напряжения, отвечающие передаваемой шкивом a работе в 10 HP, участок II — передаваемой шкивами a и b работе в $10 + 15 = 25$ HP, участок III — передаваемой a, b, c работе в $10 + 15 + 20 = 45$ HP.

По формуле (9) находим отвечающие этой работе крутящие моменты.

$$M_1 = 716200 \cdot \frac{10}{160} \approx 44800 \text{ kg.mm.}$$

$$M_2 = 716200 \cdot \frac{25}{160} \approx 112000 \text{ " "}$$

$$M_3 = 716200 \cdot \frac{45}{160} \approx 201600 \text{ " "}$$

Из формулы (V) имеем

$$M = k_d \cdot W_0 = k_d \cdot 0,2 d^3.$$

Т. е. вращение трансмиссионного вала совершается всегда в одну сторону, и нагрузка вала может изменяться от 0 до maximum'a и обратно до 0, то для k_d выбираем значения, указанные в таблице (в конце § 21) в графе под литерой „b“.

$$k_d = (4 - 5,6) \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$$

или в среднем

$$k_d = 5 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$$

Итак,

$$M = 5 \cdot 0,2 \cdot d^3 = d^3$$

$$d = \sqrt[3]{M}$$

Подставляя теперь вместо M значения M_1, M_2, M_3 найдем диаметры вала на участках I, II, III.

$$d_1 = \sqrt[3]{M_1} = \sqrt[3]{44800} = 35,5 \text{ mm.}$$

$$d_2 = \sqrt[3]{M_2} = \sqrt[3]{112000} = 48,2 \text{ "}$$

$$d_3 = \sqrt[3]{M_3} = \sqrt[3]{201600} = 58,6 \text{ "}$$

Принимая во внимание, что мы не учли изгибающего действия собственного веса шкивов и натяжения ремней, полученные результаты полезно несколько округлить в большую сторону. Примем

$$d_1 = 40 \text{ mm.}$$

$$d_2 = 50 \text{ "}$$

$$d_3 = 60 \text{ "}$$

Теоретическая форма вала указана на фиг. 2, а практическая на фиг. 3.

Посмотрим теперь, при принятых размерах, какой угол кручения будет на 1 метр длины вала.

Для этого заметим следующее. Участок I скручивается моментом M_1 ; вследствие этого сечение b окажется повернутым относительно сечения a на угол φ_1 отвечающий моменту M_1 . Участок II скручивается моментом M_2 , поэтому сечение c окажется повернутым относительно сечения b на угол φ_2 отвечающий моменту M_2 . Точно также сечение A окажется повернутым относительно сечения c на угол φ_3 отвечающий моменту M_3 .

Если сечение c повернуто относительно b на угол φ_2 , то относительно a оно будет повернуто на угол $\varphi_1 + \varphi_2$. Следовательно, если сечение A повернуто относительно c на угол φ_3 , то относительно сечения a оно повернется на угол $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$. Расстояние между сечениями a и A — 6 метров. Значит, на 1 погонный метр длины вала приходится угол кручения, равный

$$\frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3}{6}$$

Остается только вычислить $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Эти углы, выраженные в дугевой мере, находим по форм. (7) § 23.

$$\varphi_1 = \frac{M_1 \cdot 2000}{G J_0'}$$

$$\varphi_2 = \frac{M_2 \cdot 2000}{G J_0''}$$

$$\varphi_3 = \frac{M_3 \cdot 2000}{G J_0'''}$$

Чтобы выразить $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ в градусах, надо умножить эти значения их на $\frac{180}{\pi}$.

Здесь G коэффициент упругости при сдвиге. Как мы знаем, он равен.

$$G = 0,385 \cdot E.$$

$$\text{Для литого железа } E = 21500 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$$

(см. табл. в конце § 2). Поэтому

$$G = 0,385 \cdot 21500 \approx 8300 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$$

J_0', J_0'', J_0''' , -- полярные моменты инерции сечений вала на участках I, II, III.

$$J_0' = 0,1 d_1^4 = 0,1 \cdot 40^4 = 256.000 \text{ mm}^4.$$

$$J_0'' = 0,1 \cdot d_2^4 = 0,1 \cdot 56^4 = 625.000 \text{ „}$$

$$J_0''' = 0,1 \cdot d_3^4 = 0,1 \cdot 60^4 = 1.296.000 \text{ „}$$

В виду этого •

$$\varphi_1 = \frac{44800 \cdot 2000}{8300 \cdot 256000} \cdot \frac{180}{\pi} = 2,4^\circ$$

$$\varphi_2 = \frac{112000 \cdot 2000}{8300 \cdot 625000} \cdot \frac{180}{\pi} = 2,5^\circ$$

$$\varphi_3 = \frac{201600 \cdot 2000}{8300 \cdot 1296000} \cdot \frac{180}{\pi} = 2,1^\circ$$

Следовательно, угол кручения, приходящийся на 1 метр длины вала равен

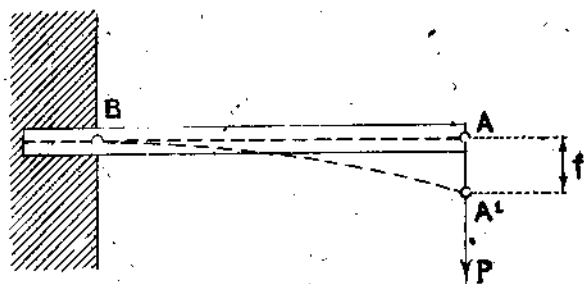
$$\frac{2,4 + 2,5 + 2,1}{3} \approx 2,3^\circ.$$

Как видим, угол получился довольно большой, значительно больше того, который предусмотрен при выводе формулы (VI) — $\frac{1^\circ}{4}$. В виду этого принятые размеры вала могут быть сохранены только при условии, что материал вала будет особо доброкачественный.

Заметим, что вообще расчет по формуле (VI) приводит всегда к несколько преувеличенным размерам по сравнению с расчетом по формуле (V).

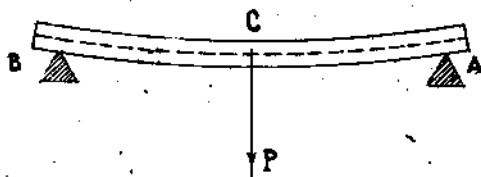
У. Изгиб.

§ 29. Если балка одним концом заделана в стену, а на другой конец ее действует сила P , как указано на чертеже, то балка изгибается, при чем ось балки AB искривляется и принимает вид $A'B$. Длину $AA' = f$ будем называть стрелой прогиба балки.



Черт. 26.

Аналогичное явление произойдет, если балка свободно лежит на 2 опорах, а по середине несет нагрузку P .



Черт. 27.

Явлением изгиба интересовался еще Галилей (в начале XVII-го столетия), а затем целый ряд ученых занимался опыт-

вым исследованием этого явления, при чем все опыты сводились обыкновенно к выяснению зависимости между силой P и вызываемой ею стрелой прогиба f .

В настоящее время явление изгиба может считаться хорошо изученным. Результатом изучения его являются следующие соображения и положения.

Изгибом называется такое явление, при котором поперечные сечения балки, бывшие до начала деформации параллельными, после изгиба оказываются наклоненными друг к другу.

При изгибах значительных поперечные сечения теряют первоначальную плоскую форму, искривляются, но при небольших изгибах, а таковые мы и будем рассматривать, искривление поперечных сечений весьма незначительно, и потому при дальнейших выводах мы будем принимать, что сечения балки и после изгиба остаются плоскими.

Геометрическое место центров тяжести поперечных сечений балки мы будем называть „осью балки“. После изгиба ось балки из прямой делается криволинейной.

Плоскость кривизмы изогнутой оси балки называется „плоскостью изгиба“.

Условимся называть „волокну“ балки призматическое тело, которое ограничено линиями, параллельными оси балки, проходящими через контур элементарной площадки, взятой в каком либо сечении балки. Отдельные волокна балки, параллельные ее оси, при изгибе или удлиняются или укорачиваются: волокна, расположенные на выпуклой части балки, оказываются удлиненными (растянутыми); волокна же, находящиеся на вогнутой части балки, — укороченными (сжатыми). Итак, волокна, говоря вообще, меняют свою длину; но существует целый ряд волокон, которые при изгибе не меняют своей длины. Этот ряд волокон называется „нейтральным слоем“.

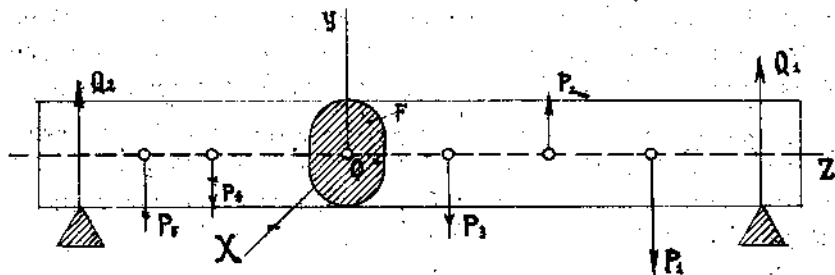
В теории изгиба играет большую роль так называемый „изгибающий момент“; для каждого сечения балки он имеет вполне определенную величину и от него зависит напряжение материала в разных точках сечения.

Поэтому прежде чем излагать теорию изгиба рассмотрим, что такое изгибающий момент, и как его определять. При этом

нам придется коснуться еще одного очень важного подсобного понятия о „сумме сил“,

Об изгибающем моменте.

§ 80. Положим к балке приложены силы $P_1, P_2, \dots, Q_1, Q_2$, где Q_1, Q_2 — реакции опор. Возьмем произвольное сечение балки F и через центр тяжести его O проведем координатные оси, как указано на чертеже (ось OZ совпадает с осью балки, OY перпендикулярна к плоскости чертежа).



Черт. 28.

„Изгибающим моментом“ в сечении F или короче — в точке O — называется алгебраическая сумма моментов относительно оси OY или, что то же, относительно точки O всех сил, расположенных по одну сторону сечения F , напр. правее его (что мы будем обычно предполагать).

Заметим, что при вычислении изгибающего момента совершенно безразлично, брать ли силы, лежащие правее сечения и левее его, лишь бы только они были расположены по одну сторону его. Разница получится только в знаке момента, но не в численной величине его. На самом деле, беря силы, лежащие правее сечения, мы найдем

$$M = m_0 Q_1 + m_0 P_1 + m_0 P_2 + m_0 P_3.$$

Если же возьмем силы левее сечения, то получим

$$M' = m_0 Q_2 + m_0 P_4 + m_0 P_5.$$

Но силы $P_1, P_2, \dots, P_5, Q_1, Q_2$ находятся в равновесии. Одно из условий равновесия заключается в том, что сумма мо-

ментов всех сил, относительно любой точки, взятой в их плоскости, должна равняться 0. Поэтому, взяв сумму моментов всех сил относительно точки 0, получим:

$$m_0 Q_1 + m_0 P_1 + m_0 P_2 + m_0 P_3 + m_0 P_4 + m_0 P_5 + m_0 Q_2 = 0$$

или

$$M - M^1 = 0,$$

отсюда следует, что

$$M = -M^1$$

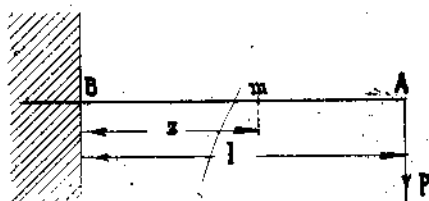
Итак, оба момента численно равны, отличаются только знаком.

Сечения, в которых изгибающий момент достигает максимума или минимума или проще говоря, в которых он имеет наибольшую числовую величину, называются *опасными*, (так как излом балки при изгибе может произойти только в опасном сечении).

При исследовании обстоятельств изгиба балок очень важно не только найти величину изгибающего момента для любого сечения балки, но и, отметив положение опасного сечения, определить числовой максимум изгибающего момента.

Покажем на примерах, как это делается.

Пример 1. Балка, заделанная одним концом в стену, изгибается силой P , приложенной к другому концу. Найти наибольший изгибающий момент и определить положение опасного сечения.



Черт. 29.

Для произвольного сечения m , взятого на расстоянии z от стены, изгибающий момент равен

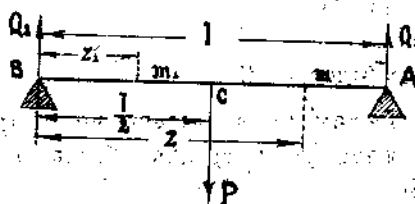
$$M = P(l - z)$$

Это выражение будет максимум при $z=0$. Поэтому

$$M_{\max} = Pl$$

Опасное сечение будет в В.

Пример 2. Балка лежит свободно на 2 опорах и по середине нагружена силой P . Найти наибольшую числовую величину изгибающего момента и положение опасного сечения.



Черт. 30.

В опорах появятся реакции Q_1, Q_2 , которые в виду симметричного расположения опор относительно силы P будут равны

$$Q_1 = Q_2 = \frac{P}{2}.$$

Для произвольного сечения m , взятого правее точки C на расстоянии Z от левой опоры, изгибающий момент равен

$$M = -Q_1 (l - z) = -\frac{P}{2} (l - z)$$

Наибольшей числовой величины M (т. е. своего minimum'a, т. е. M число отрицательное) достигает при совпадении

$$m \text{ с } C, \text{ т. е. при } Z = \frac{l}{2}$$

$$M_{\min} = -\frac{P}{2} \left(l - \frac{l}{2} \right) = -\frac{Pl}{4}$$

Если бы мы взяли какое нибудь сечение m , левее точки C в расстоянии Z_1 от левой опоры, то нашли бы

$$\begin{aligned} M_1 &= -Q_1 (l - z_1) - P \left(\frac{l}{2} - z_1 \right) = \\ &= -\frac{P}{2} (l - z_1) - P \left(\frac{l}{2} - z_1 \right) = \\ &= -\frac{Pz_1}{2} \end{aligned}$$

Это выражение достигает числового maximum'a (следовательно, своего minimum'a) при $Z_1 = \frac{l}{2}$ Поэтому

$$M, \min = -\frac{Pl}{4}$$

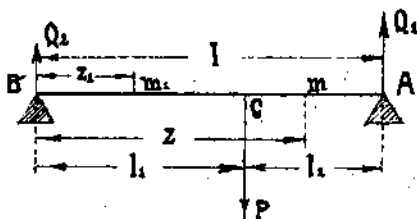
Результат, как видим, получился тот же.

Итак, обозначая абсолютную величину количества M символом (M) можем написать

$$(M) \max, = \frac{Pl}{4} *)$$

Опасное сечение будет в C .

Пример 3. Решим ту же задачу, но в предположении, что сила P приложена не в середине балки, а на расстоянии l от левой опоры.



Черт. 31.

Прежде чем определитьгибающий момент, найдем неизвестные реакции опор. Для этого напишем условия равновесия сил P, Q_1, Q_2 . Т. к. силы параллельны и лежат в одной плоскости, то условий равновесия будет два: 1) алгебраическая сумма сил должна равняться 0 и 2) сумма моментов их относительно любой точки, взятой в их плоскости, напр. относительно точки B , должна равняться 0.

$$P - Q_1 - Q_2 = 0)$$

$$- Q_1 l + Pl = 0)$$

Из 2-го ур-ня имеем

$$Q_1 = \frac{Pl}{l}$$

*) Эту формулу полезно запомнить.

Из 1-го ур-ня

$$\begin{aligned} Q_2 &= P - Q_1 = P - \frac{Pl_1}{l} = P \left(1 - \frac{l_1}{l}\right) = \\ &= P \frac{l - l_1}{l} = \frac{Pl_2}{l} \end{aligned}$$

Найдя Q_1, Q_2 , составим выражения для изгибающего момента для сечений III и IIII

$$\begin{aligned} M &= -Q_1 (l - z) = -\frac{Pl_1}{l} (l - z) \\ M_I &= -Q_1 (l - z_I) + P (l_I - z_I) = \\ &= -\frac{Pl_1}{l} (l - z_I) + P (l_I - z_I) = \\ &= -Pl_I + \frac{Pl_1 z_I}{l} + Pl_I - Pz_I = \\ &= -Pz_I \left(1 - \frac{l_1}{l}\right) = -Pz_I \frac{l - l_1}{l} = \\ &= -\frac{Pl_2}{l} z_I \end{aligned}$$

Первый момент M будет иметь числовой максимум при $z = l_I$, второй M_I — при $z_I = l_I$

Итак

$$\begin{aligned} (M) \max &= \frac{Pl_1}{l} (l - l_I) = P \frac{l_I l_2}{l} \\ (M_I) \max &= P \frac{l_I l_2}{l} \end{aligned}$$

Как видим, в обоих случаях получилось одно и то же: изгибающий момент имеет наибольшее числовое значение

$$(M) \max = P \frac{l_I l_2}{l} (*)$$

в точке C , где будет и опасное сечение.

Примечание. Полагая в последней формуле $l_I = l_2 = \frac{l}{2}$,

получим

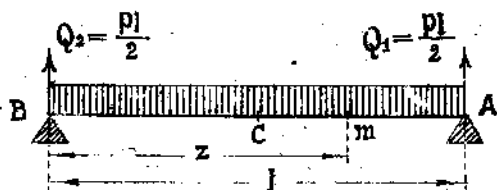
$$(M) \max = \frac{Pl}{4},$$

— результат, найденный нами в предыдущем примере.

*) Эту формулу полезно запомнить.

Пример 4. Балка свободно лежит на 2 опорах и находится под действием равномерно распределенной непрерывной нагрузки, величина которой на каждую единицу длины балки равна p . Определить наибольшую числовую величину изгибающего момента и положение опасного сечения.

Равномерно распределенную нагрузку принято условно изображать, как указано на чертеже.



Черт. 32.

Т. е. вся нагрузка равна pl , то реакции опор, очевидно равны

$$Q_1 = Q_2 = \frac{pl}{2}$$

Поэтому изгибающий момент в произвольно взятом сечении m будет равен

$$\begin{aligned} M &= -Q_1(1-z) + p(1-z) \cdot \frac{1-z}{2} = \\ &= -\frac{pl}{2}(1-z) + \frac{p(1-z)^2}{2} = \\ &= -\frac{p(1-z)}{2} \left[1 - (1-z) \right] = -\frac{p(1-z) \cdot z}{2} \\ (M) &= \frac{p(1-z)z}{2} \end{aligned}$$

Чтобы найти, при каком z количество (M) будет максимум составим производную (M) по z и приравняем ее 0. Получим

$$\frac{p}{2}(1-2z) = 0$$

Откуда

$$z = \frac{1}{2}$$

Итак, (M) оказывается максимум при $Z = \frac{1}{2}$, т. е. в точке С — середине балки, где и будет опасное сечение.

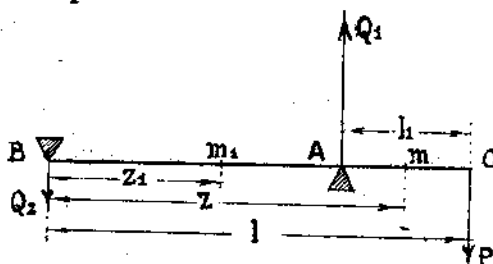
$$(M)_{\max} = \left[\frac{p(1-z)Z}{2} \right] = \frac{p l^2}{8} \quad z = \frac{1}{2}$$

Замечая, что $pl = P$, где P есть полная нагрузка, приходящаяся на балку, последнее равенство можно переписать так

$$(M)_{\max} = \frac{Pl}{8} (*)$$

Сличая этот результат с результатом, полученным во 2-м примере, что наибольший изгибающий момент от нагрузки равномерно распределенной по длине балки вдвое меньше наибольшего изгибающего момента, получающегося при нагрузке той же величины, но сосредоточенной в одной точке — в середине балки. По этому оказывается весьма выгодным сосредоточенную нагрузку заменять распределенной нагрузкой.

Пример 5. Найти $M_{\max}$ и опасное сечение балки, изображенной на чертеже.



Черт. 33.

Q_1, Q_2 определяем из условий равновесия

$$\begin{cases} P - Q_1 + Q_2 = 0 \\ Pl - Q_1(l - m) = 0 \end{cases}$$

откуда получим

$$\begin{cases} Q_1 = P \frac{l}{l - m} \\ Q_2 = P \frac{m}{l - m} \end{cases}$$

*) Эту формулу полезно запомнить.

Составим выражения для изгибающего момента для 2 произвольно взятых сечений m и ni

$$M = P(l - z)$$

$$M_i = P(l - z_i) - Q_1 \cdot (l - l_1 - z_i) =$$

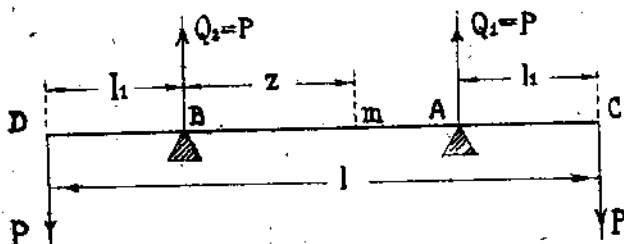
$$= P(l - z_i) - P \frac{1}{1 - l_1} (l - l_1 - z_i) = P \frac{l_1 m}{1 - l_1}$$

Оба момента делаются наибольшими в точке A при $z = z_1 = l - l_1$

$$M_{\max} = M_{i\max} = Pl_1.$$

В A будет опасное сечение.

Пример 6. Найти $M_{\max}$ и опасное сечение балки, изображенной на чертеже.



Черт. 34.

В виду равенства и симметрии расположения сил, реакции опор равны

$$Q_1 = Q_2 = P.$$

Изгибающий момент при переходе от C к A будет постепенно увеличиваться. В A он достигнет максимума

$$M_{\max} = Pl_1$$

При дальнейшем движении влево от A до B величина изгибающего момента остается неизменной равной $M_{\max}$. Убедиться в этом нетрудно, составив выражение для изгибающего момента для произвольного сечения m

$$M = P(l - l_1 - z) - Q_1(l - 2l_1 - z) =$$

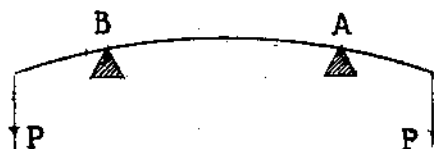
$$= P(l - l_1 - z) - P(l - 2l_1 - z) =$$

$$= Pl_1 = M_{\max}.$$

При переходе от В к D момент начинает убывать и в D обращается в 0.

Итак, на участке АВ момент сохраняет свою величину. Опасных сечений в данном случае будет бесчисленное множество: любое сечение между точками А и В может быть принято за опасное. Следовательно, при указанном способе нагрузки можно утверждать, что, если силы Р будут достаточно велики, то балка лопнет где-нибудь между точками А и В, но, где именно, определить нельзя. Фактически излом балки произойдет в том месте между А и В, где будет какой-нибудь местный недостаток материала.

Примечание. Балка, нагруженная указанным образом, проявляет еще одно очень интересное свойство: она изгибается между опорами по дуге окружности. АВ — будет



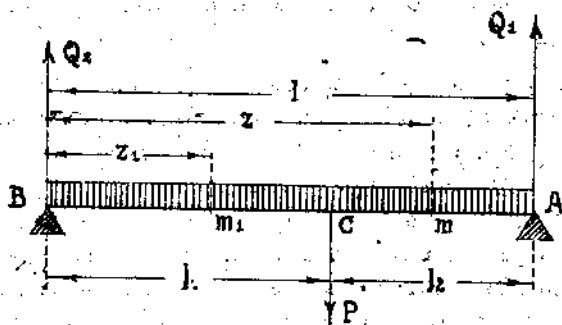
Черт. 35.

дугой окружности. Этим обстоятельством пользуются для вычерчивания дуг большого радиуса: взяв длинную тонкую линейку руками за концы, большими пальцами упираются в линейку (большие пальцы играют роль опор А и В). Тогда линейка располагается по дуге окружности. Регулируя нажатие рук (т.-е. величину сил Р) легко добиться того, чтобы АВ была желаемого радиуса.

Пример 7. Балка длиной l , весом G свободно лежит на 2 опорах и подвержена действию силы P , приложенной на расстоянии l , от левой опоры.

Составить выражения для изгибающего момента для 2 произвольных сечений, взятых по разные стороны от силы P .

Вес G представляет собой нагрузку, равномерно распределенную по всей длине балки. Величина ее на единицу длины балки равна $\frac{G}{l}$.



Черт. 36.

Определим сначала реакции опор Q_1, Q_2 . Для этого напишем 2 условия равновесия балки

$$\begin{aligned} P + G - Q_1 - Q_2 &= 0 \\ -Q_1 l_1 + P l_2 + G \cdot \frac{l}{2} &= 0 \end{aligned}$$

Отсюда найдем

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{P l_2}{l} + \frac{G}{2} \\ Q_2 &= \frac{P l_1}{l} + \frac{G}{2} \end{aligned}$$

Эти выражения для Q_1 и Q_2 можно было бы написать прямо, пользуясь выражениями для реакций в примерах 3 и 4 и применяя принцип независимости действия сил. Таким же образом можно написать и выражения для изгибающих моментов в сечениях m и m_1

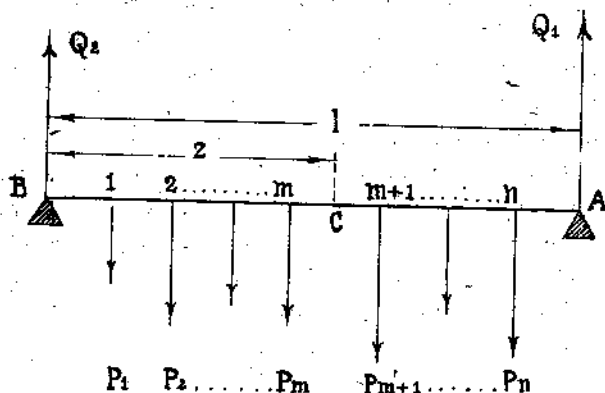
$$\begin{aligned} M &= -\frac{P l_1}{l} (l - z) - \frac{G (l - z) z}{2l} \\ M_1 &= -\frac{P l_2}{l} z_1 - \frac{G (l - z_1) z_1}{2l} \end{aligned}$$

Конечно, эти же выражения мы получили бы, вычисляя непосредственно M и M_1 .

Указать, где будет опасное сечение, а также определить наиб. числов. величину изгб. момента в данном случае нельзя, не зная взаимного соотношения P и G или l_1 и l .

Пример 8. Балка длиной l лежит свободно на 2 опорах. В точках $1, 2, \dots, m, m+1, \dots, n$, находящихся на расстояниях

$l_1, l_2, \dots, l_m, l_{m+1}, \dots, l_n$ от левой опоры приложены силы $P_1, P_2, \dots, P_m, P_{m+1}, \dots, P_n$. Вычислить изгибающий момент для сечения C , взятого между точками m и $m+1$. Пользуясь



Черт. 37.

принципом независимости действия сил и применяя выражения для реакций, выведенные в примере 3-м, находим сразу реакции опор

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{P_i l_i}{l} \quad (*) \\ Q_2 &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{P_i (l - l_i)}{l} \quad (**) \end{aligned} \right\}$$

Зная Q_1, Q_2 , вычислим изгнб. момент в точке C

$$M = -Q_1(l-z) + \sum_{i=m+1}^{i=n} P_i(l_i - z) = -(l-z) \sum_{i=1}^{i=n} \frac{P_i l_i}{l} + \sum_{i=m+1}^{i=n} P_i (l_i - z)$$

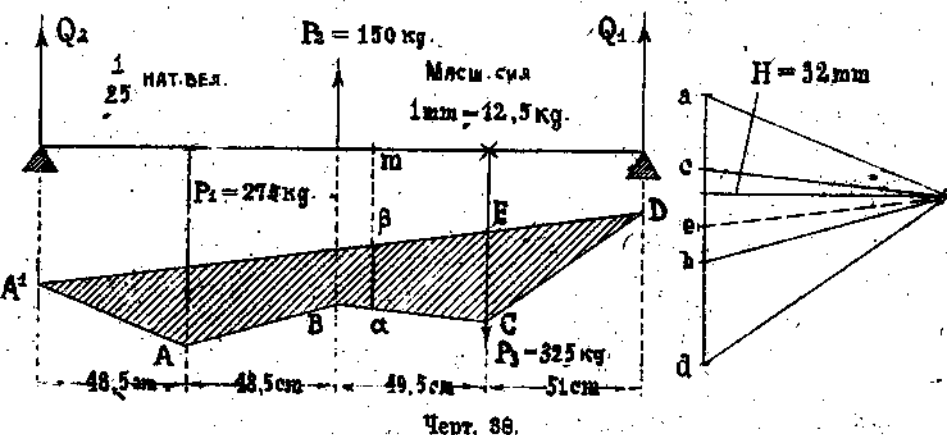
Разбивая первую сумму на две: от 1 до m и от $m+1$ до n , получим

$$\begin{aligned} M &= -(l-z) \left[\sum_{i=1}^{i=m} \frac{P_i l_i}{l} + \sum_{i=m+1}^{i=n} \frac{P_i l_i}{l} \right] (l-z) + \sum_{i=m+1}^{i=n} P_i (l_i - z) = \\ &= -(l-z) \sum_{i=1}^{i=m} \frac{P_i l_i}{l} - \sum_{i=m+1}^{i=n} \left[\frac{P_i l_i}{l} (l-z) - P_i (l_i - z) \right] - \frac{l-z}{l} \sum_{i=1}^{i=m} P_i l_i - \frac{z}{l} \sum_{i=m+1}^{i=n} P_i (l - l_i) \end{aligned}$$

*) Эти выражения мы могли бы получить, приравняв 0 суммы моментов всех сил относительно точек B и A .

Определение изгибающих моментов и опасных сечений графически.

§ 31. В рассмотренных примерах изгибающие моменты и положение опасных сечений определялись аналитически. Но в курсе „Статика“ *) был указан графический метод определения изгибающих моментов посредством построения „площади моментов“ каждая ордината которой выражает в известном масштабе изгибающий момент для сечения, через которое проходит направление ординаты. Эта площадь моментов дает наглядное представление об изменчивости изгибающего момента при переходе от одного сечения к другому, при чем на этой площади без затруднений отмечается положение опасного сечения. Напомним, как строится эта площадь моментов.



Положим, дана балка, лежащая на 2 опорах и нагруженная силами $P_1 = 275$ кг., $P_2 = 150$ кг., $P_3 = 325$ кг. Взаимные расстояния сил и опор указаны на чертеже.

Чертеж исполнен в $\frac{1}{25}$ натуральной величины, а силы нанесены в масштабе $1 \text{ мм} = 12,5$ кг.

Построим многоугольник сил, для этого откладываем последовательно отрезки $ab = P_1$, $bc = P_2$, $cd = P_3$. По этому многоугольнику сил построим отвечающий ему веревочный многоугольник, для чего предварительно берем произвольный полюс O и

*) См. мою „Статiku“ §§ 70—72.

соединяем его лучами Oa, Ob, Oc, Od с точками a, b, c, d . Теперь можем начать построение веревочного многоугольника. На направлении реакции левой опоры берем произвольную точку A^1 и ведем через нее A^1A параллельно первому лучу Oa до пересечения в точке A с направлением первой силы. Затем ведем $AB \parallel Ob, BC \parallel Oc, CD \parallel Od$. Отметив точку D , где пересекается CD с направлением реакции правой опоры, соединяем начальную и конечную точку веревочного многоугольника $A^1A B C D$ прямой A^1D , которая будет замыкающей веревочного многоугольника.

Через полюс O ведем $Oe \parallel A^1D$. Тогда отрезок ae представит реакцию левой опоры Q_2 , ed — реакцию правой опоры Q_1 . Измерив на чертеже длины ae и ed , найдем $ae \approx 17 \text{ mm}$, $ed = 19 \text{ mm}$. Следовательно,

$$Q_2 = 17.12,5, \approx 215 \text{ kg.}$$

$$Q_1 = 19.12,5, \approx 235 \text{ kg.}$$

(цифры округлены).

Затрихованная площадь есть „площадь моментов“. Чтобы получить величину изгибающего момента для какогонибудь сечения m , достаточно провести через m прямую, параллельную направлению сил, которая и даст ординату $\alpha\beta$. Эта ордината, будучи измерена в mm и затем умножена на (Hkq) , — где H — полюсное расстояние (т. е. перпендикуляр, опущенный из полюса O на прямую ad ; он равен в данном случае 32 mm), k — масштаб длины ($k = 25$), q — масштаб сил ($q = 12,5$), — определит величину изгибающего момента в точке m в $\text{kg} \cdot \text{mm}$. Как видно из чертежа, наибольший изгибающий момент равен ординате CE , умноженной на (Hkq) . Измерив CE по масштабу, найдем, что $CE \approx 12 \text{ mm}$. Поэтому

$$M_{\text{max}} \approx 12 \cdot (32 \cdot 25 \cdot 12,5) = 12 \cdot 10000 = 120\,000 \text{ kg} \cdot \text{mm}.$$

Заметим, что полюс O выгодно брать не произвольно, а на таком расстоянии H от прямой ad , чтобы произведение (Hkq) было числом, представляющим какуюнибудь степень 10, напр. $10000, 100000$ и т. д. При таких условиях вычисление изгибающих моментов при помощи площади моментов делается особенно простым: достаточно взять соответствующую ординату

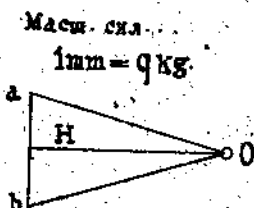
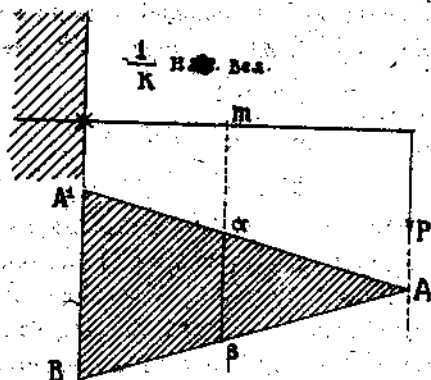
площади, измерить ее по масштабу $\frac{1}{K}$ или и приписать сумму соответствующее число нулей.

Опасное сечение, отвечающее (III) так отмечено на чертеже крестиком.

§ 32. В случае, если на балку действует нагрузка, не сосредоточенная, а равномерно распределенная, веревочный многоугольник превращается в параболу. Обычно эту параболу заменяют многоугольником в нее вписанным, для чего длину балки делят на какое нибудь число частей (напр., на 12, 16,...); вычисляют нагрузку, приходящуюся на каждую такую часть, и изображают ее в виде силы, приложенной в середине части. При таких условиях вместо балки с равномерно распределенной нагрузкой получается балка, находящаяся под действием некоторого числа (12, 16,...) равных сосредоточенных грузов, приложенных в средних частях. Дальше поступают, как было указано в предыдущем §. Само собой понятно, чем на большее число частей мы разделим длину балки, тем больше будет приближаться площадь полученного веревочного многоугольника к совпадению с площадью, ограниченной параболой. Ниже на одном из примеров будет показано такое приближенное построение.

§ 33. Приложим рассмотренный графический метод определения изгибающих моментов и опасных сечений к некоторым из примеров, помещенным в конце § 30.

Пример 1-ый § 30. Многоугольник сил ab . Веревочный многоугольник A^1AB . Площадь моментов заштрихована. Изгибающий момент в точке m равен $M = \alpha \beta \times (Hkq)$ кг. м.



Наибольший изгибающий момент

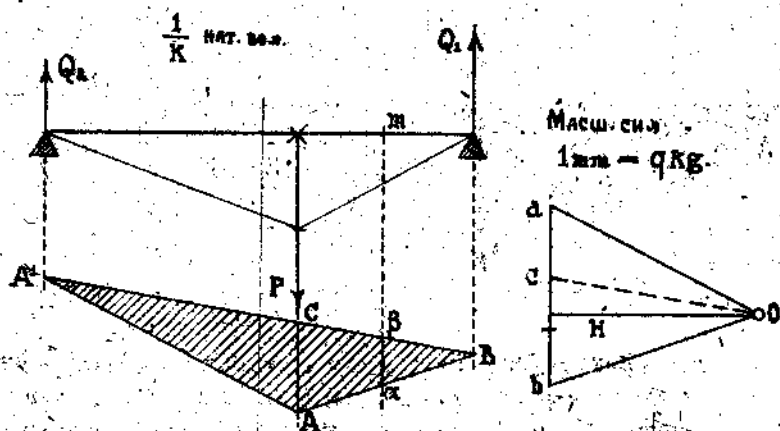
$$M_{\max} = A^1B \times (Hkq) \text{ kg.}$$

Опасное сечение отмечено крестиком.

Пример 3-й § 30. Многоугольные сил ab . Ос $\parallel A^1B$. Реакции опор

$$Q_2 = ac \cdot q \text{ kg}$$

$$Q_1 = cb \cdot q \text{ kg.}$$



Черт. 40.

Изгиб. момент для сечения m

$$M = \alpha \beta \times (Hkq) \text{ kg.m.}$$

Наибольший изгибающий момент

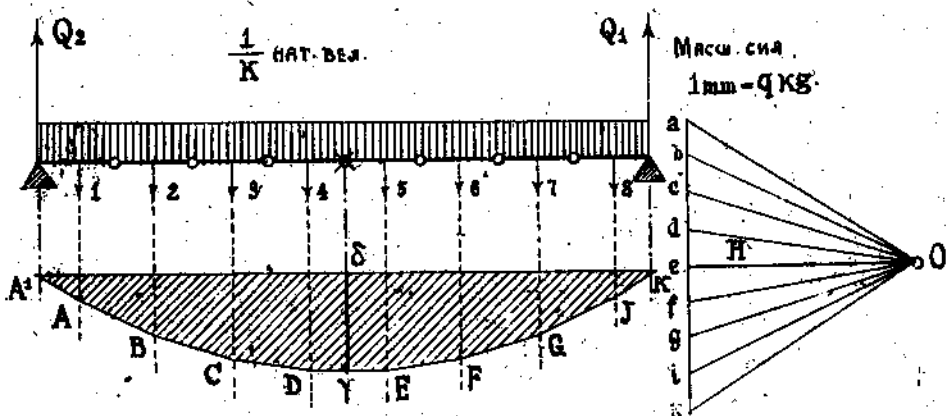
$$|M| = AC \times (Hkq) \text{ kg.m.}$$

Опасное сечение отмечено крестиком.

Пример 4-ый § 30. Согласно сказанному в § 32 длина балки разделена на 8 частей и в середине каждой части приложена сила, равная $\frac{pl}{8}$. По этим 8 силам построен многоугольник сил $abcd$ $efgik$ и соответствующий ему веревочный многоугольник $A^1AB CDEFGJK$. Т. к. полюс взят против средней прямой ak , то прямая Os , параллельная A^1K , совпала с H . Отрезки ae ,

ек, будучи умножены на q дадут Q_2 , Q_1 . Опасное сечение, в данном случае, как мы знаем, должно быть в середине балки. Наибольший изгибающий момент равен

$$M_{\max} = \gamma \delta \times (Hkq) \text{ кг.мм.}$$



Черт. 41.

Примечание. Из чертежа вытекает, что все ординаты заключенные между параллелями 4D, 5E, между собой равны. Следовательно, величина изгибающего момента между точками приложения сил 4 и 5 остается постоянной, а потому любое из сечений, взятых между этими точками, может быть рассматриваемо, как опасное. Фактически это не так: опасное сечение должно находиться в середине балки. Этого разногласия не получилось бы, если бы длину балки мы разделили на нечетное число частей: тогда наиб. ордината площади моментов проходила бы как раз через середину балки.

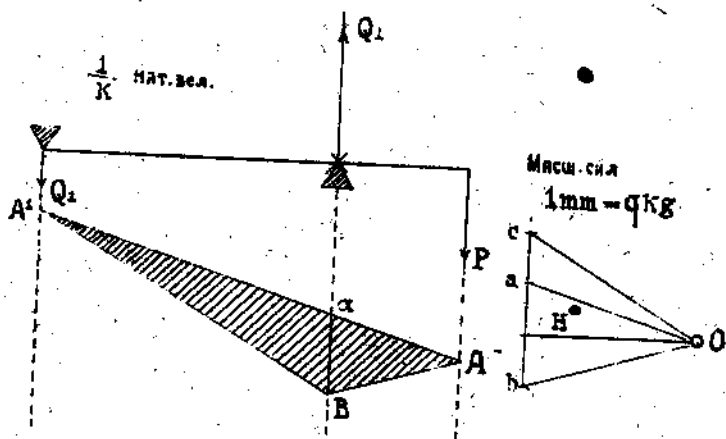
Пример 5-й § 30. Веревоочный многоугольник A^1AB . За-
мыкая его A^1B .

Реакции опор

$$Q_2 = ac \cdot q \text{ кг}$$

$$Q_1 = eb \cdot q \text{ кг}$$

$M_{\max} = \alpha B \times (Hkq) \text{ кг.мм.}$ Опасное сечение в правой опоре.



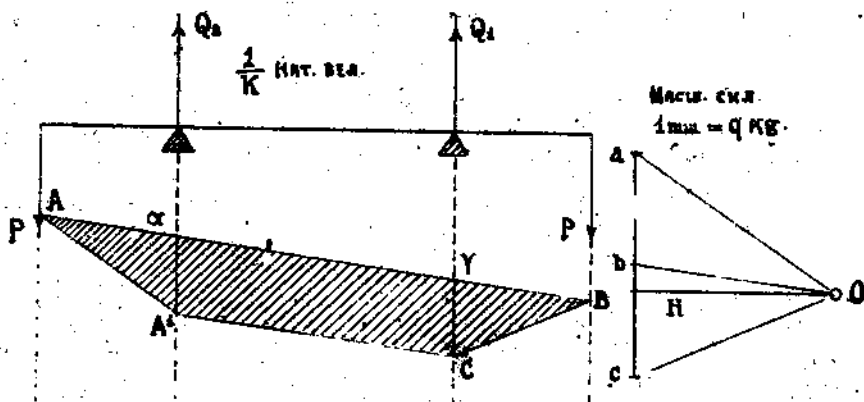
Черт. 42.

Пример 6-й § 30. Веревоочный многоугольник A^1ABC . За-
мыкающая его $A^1C \parallel AB \parallel Ob$. Реакция опор

$$Q_2 = ab \cdot q \text{ кг.}$$

$$Q_1 = bc \cdot q \text{ кг.}$$

Т. к. все ординаты заштрихованной площади, заключенные
между αA^1 , γC , равны, то изгибающий момент, достигнув



Черт. 43.

в опорах наибольшего значения, остается неизменным для всех
сечений между опорами. Поэтому любое сечение, взятое между
опорами, может быть рассматриваемая опасное. Итак,

$$M_{\max} = \gamma C \times (Hkq) = \alpha A^1 \times (Hkq) \text{ кг.мм.}$$

О линии суммы сил.

§ 34. Определить графически величину изгибающего момента и положение опасных сечений можно еще при помощи „линии суммы сил“.

„Суммой сил“ для какого-либо сечения балки называется алгебраическая сумма проекций на вертикальное направление всех сил, расположенных по одну сторону сечения (ось балки предполагается горизонтальной). При вычислении суммы сил совершенно безразлично, брать ли силы, лежащие справа от сечения, брать ли силы, лежащие слева от него. В обоих случаях результат получится один и тот же, разница будет только в знаке.

Действительно, пусть S будет суммой сил, взятых правее сечения, а S^1 суммой сил, взятых левее сечения. Одно из условий равновесия балки заключается в том, чтобы алгебраическая сумма проекций всех сил, приложенных к балке, на любое направление, напр. на вертикаль, должна равняться 0. Значит:

$$S + S^1 = 0$$

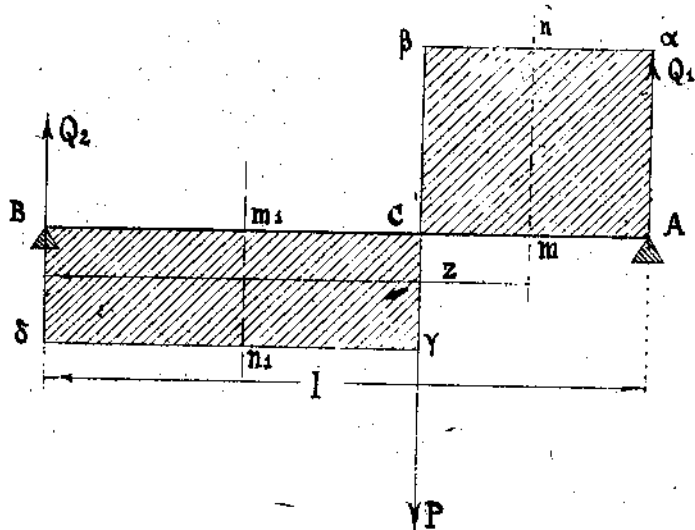
$$S = - S^1,$$

что и требовалось доказать.

Условимся при вычислении суммы сил брать всегда силы, расположенные справа от сечения.

Если мы будем на оси балки брать разные точки и для сечений, проходящих через эти точки, вычислим суммы сил, а затем найденные значения S отложим в некотором масштабе на перпендикулярах к оси балки, то геометрическое место концов этих перпендикуляров представит некоторую ломаную или кривую линию, называемую „линией суммы сил“.

Построим, напр., линию суммы сил для балки, свободной лежащей на 2 опорах и нагруженной одной сосредоточенной силой P . По общему правилу находим реакции опор Q_1 , Q_2 (для чего берем сумму проекций всех сил, действующих на балку, на вертикаль и сумму моментов всех сил относительно какойнибудь из опор и приравниваем обе суммы нулю. Из этих 2 равенств и определяем Q_1 и Q_2).



Черт. 44.

Для какого-либо сечения m_1 сумма сил, лежащих правее его, выразится реакцией Q_1 , при чем значение суммы сил будет оставаться неизменным до точки приложения силы P , а потому и линия суммы сил для участка AC выразится в виде прямой, параллельной оси балки, проведенной через конец реакции Q_1 , отложенной в определенном масштабе.

Для любого сечения m_1 на участке CB сумма сил, лежащих правее этого сечения, выразится ординатой C равной разности $P - Q_1 = Q_2$, отложенной вниз, т. к. $P > Q_1$ и направлена в противоположную сторону. Поэтому линия суммы сил изобразится прямой, параллельной оси балки, с ординатой, равной Q_2 .

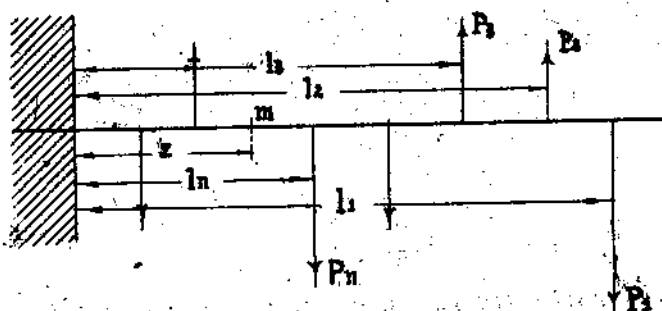
Связь между суммой сил и изгибающим моментом.

§ 35. Между суммой сил для какого нибудь сечения и изгибающим моментом для того же сечения существует очень простая зависимость.

$$S = - \frac{dM}{dz} \dots \dots \dots (10)$$

Докажем справедливость этого равенства сначала для нагрузки сосредоточенной, а затем для равномерно распределенной.

I. Положим, балка нагружена, как указано на чертеже, силами $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$, приложенными на расстояниях $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n, \dots$ от стены. Составим выражения для изгибающего момента и суммы сил для сечения m , взятого на расстоянии z от стены.



Черт. 46.

$$M = P_1 (l_1 - z) - P_2 (l_2 - z) - P_3 (l_3 - z) + \dots + P_n (l_n - z) =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} P_i (l_i - z)$$

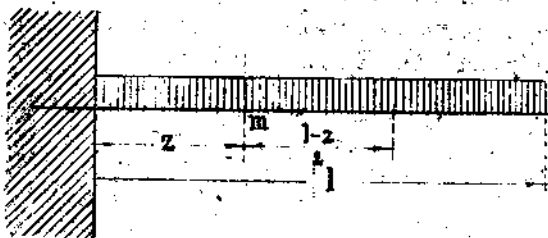
$$S = P_1 - P_2 - P_3 + \dots + P_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} P_i$$

Составив выражение для производной M по z и сравнив полученное выражение с выражением для S , убедимся в справедливости доказываемого соотношения.

II. Если нагрузка была равномерно распределена по длине балки (напр., если бы мы не считали учесть изгибающее действие собственного веса балки), то, обозначая нагрузку на единицу длины прямо через p , мы имели бы, что на часть балки, расположенную правее сечения m , действует нагрузка, равная

$$S = p (l - z).$$



Черт. 46.

Эта нагрузка дает для сечения m изгибающий момент

$$M = p(1-z) \cdot \frac{1-z}{2} = \frac{p(1-z)^2}{2}.$$

Взяв производную M по z и сложив ее с S , убедимся, что и в этом случае доказываемое соотношение справедливо.

Свойства линии суммы сил.

§ 36. Линия суммы сил обладает весьма интересными свойствами.

1. Площадь, ограниченная крайней правой ординатой самой линией суммы сил, ординатой, проведенной на расстоянии z от левой опоры и осью балки, — представляет величину изгибающего момента для сечения балки, взятого на расстоянии z от левой опоры. т. е. другими словами представляет алгебраическую сумму моментов относительно центра тяжести этого сечения всех сил, расположенных в пределах этой площади.

Возьмем сечение на расстоянии z от левой опоры (см. черт. 44). Если M есть изгибающий момент, а S — сумма сил для этого сечения, то согласно рав. (10) § 35

$$-\frac{dM}{dz} = S$$

Отсюда

$$dM = -Sdz \\ M = -\int_z Sdz + C$$

Указатель z у интеграла означает лишь, что он относится к сечению, взятому на расстоянии z от левой опоры.

Произвольную постоянную C определим из условия, что в правой опоре, т. е. на расстоянии l от левой опоры, изгибающий момент равен 0. Тогда получим

$$0 = - \int_1 S dz + C$$

$$C = \int_1 S dz$$

В виду этого

$$M = - \int_z^1 S dz + \int_1 S dz =$$

$$= \int_z^1 S dz = \text{плоч. mn} \propto A$$

что и требовалось доказать.

2. Вся площадь, ограниченная крайними ординатами, линией суммы сил и осью призмы, равна 0. Это ясно из следующего. Согласно условия равновесия

$$M + M^1 = 0,$$

где M — сумма моментов сил, лежащих правее сечения, взятого на расстоянии z от левой опоры, а M^1 — сумма моментов сил, лежащих левее того же сечения (см. тот же черт. 44).

Но в виду только-что доказанного 1-го свойства

$$M = \int_z^1 S dz$$

$$M^1 = \int_0^z S dz$$

Поэтому

$$M^1 + M = \int_0^z S dz + \int_z^1 S dz = \int_0^1 S dz = 0$$

Геометрическое же значение последнего интеграла и есть площадь

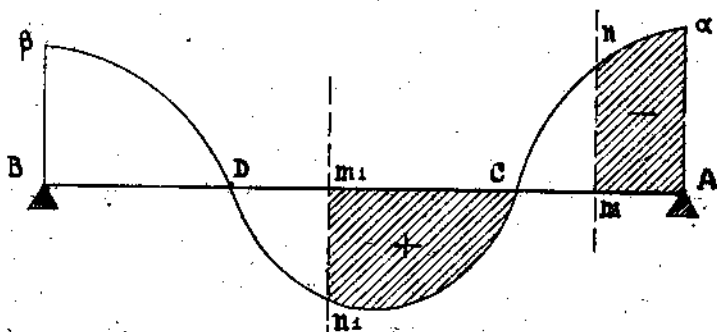
3. Точки пересечения линии суммы сил с осью балки будут точками, в которых изгибающий момент maximum или minimum; следовательно, эти точки определяют положение опасных сечений.

Предположим, что для балки, изображенной на чертеже, линия суммы сил есть $\propto \sin D\theta$.

Для какогонибудь сечения mn согласно первого свойства изгибающий момент выразится заштрихованной площадью $A \sin \theta$.

при чем он отрицательный (т. к. реакции правой опоры дает момент отрицательный).

Заметим, что вообще все площади, расположенные выше оси балки, следует считать отрицательными, а ниже оси — положительными. При перемещении сечения M влево изгибающий



Черт. 47.

момент, оставаясь отрицательным, по числовой величине будет возрастать и в точке C достигнет своего minimum'a (наибольшего отрицательного значения).

При дальнейшем переходе сечения влево от точки C , этот момент будет увеличиваться (не по численной величине), ибо к нему уже будет прибавляться некоторая положительная площадь, так что для сечения $M: N_1$ изгибающий момент будет равен всей отрицательной площади $A\alpha C$ сложенной с положительной площадью $Cn_1 m_1$. Этот момент будет возрастать по мере приближения сечения к точке D , в которой достигнет своего maximum'a.

Итак, точки C и D обладают тем свойством, что изгибающий момент в них maximum или minimum, что и треб. доказать.

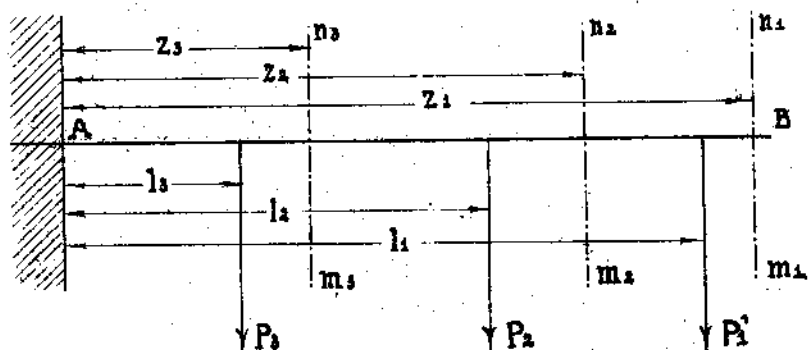
О точках раздела.

§ 37. Точками раздела называются точки приложения грузов, если эти грузы сосредоточенные и точки, где начинается и оканчивается нагрузка, если она распределена по некоторой длине.

Эти точки обладают тем свойством, что для них изгибающий момент, представляющий собой определенного вида непрерывную

функцию, претерпевает разрыв непрерывности, другими словами функция, представляющая изгибающий момент, при переходе через точку раздела меняет свой вид. Опасное сечение балки всегда совпадает с какой либо из точек раздела.

Поясним сказанное:



Черт. 48.

Составим выражения для изгибающего момента для равных сечений m_1 m_2 , m_3 m_2 , m_3 m_3 , части балки АВ, обрезанной в точке В.

Для сечения m_1 m_1 изгибающий момент будет иметь вид, вообще говоря

$$M_{z1} = Az_1 - B,$$

где А и В некоторые постоянные коэф-ты, ибо при сосредоточенных грузах изгибающий момент всегда есть линейная функция расстояния сечения от опор.

Для сечения m_2 m_2 — изгибающий момент будет выражаться так:

$$M_{z2} = P(l_1 - z_2) + Az_2 + B$$

Для сечения m_3 m_3 :

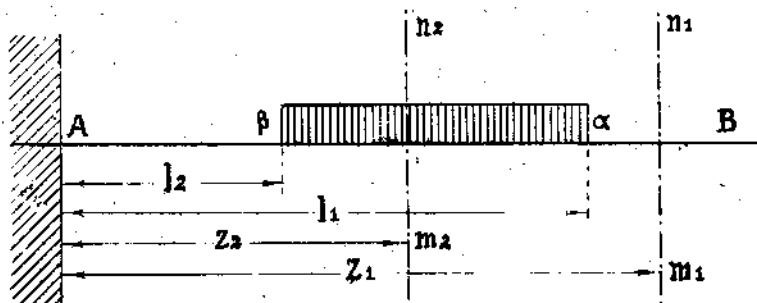
$$M_{z3} = P_1(l_2 - z_3) + P(l_1 - z_3) + Az_3 + B$$

Как видно, по мере перехода от одного сечения к другому по направлению к левой опоре при каждом переходе через точку раздела в выражении изгибающего момента будет прибавляться новый член, содержащий силу, приложенную в этой точке раз-

дела: следовательно, функция, представляющая изгибающий момент, при переходе через точку раздела меняет свой вид. Итак, функция, изображающая изгибающий момент, остается непрерывной только при значении z , заключенном в пределах 2-х соседних точек раздела.

Рассмотрим теперь случай непрерывно распределенной нагрузки (черт. 49). Пусть опять имеем часть балки, обрезанной в В, на длине коей $(l_1 - l_2)$ приложен непрерывно распределенный груз, величина которого на единицу длины балки есть p . Возьмем сечения $m_1 n_1$ и $m_2 n_2$, находящиеся в расстояниях Z_1 и Z_2 от левой опоры и составим для них выражения изгибающего момента.

Для сечения $m_1 n_1$, общий вид изгибающего момента будет $M_{z_1} = Az_1 + P$.



Черт. 49.

Для сечения $m_2 n_2$ этот момент равен

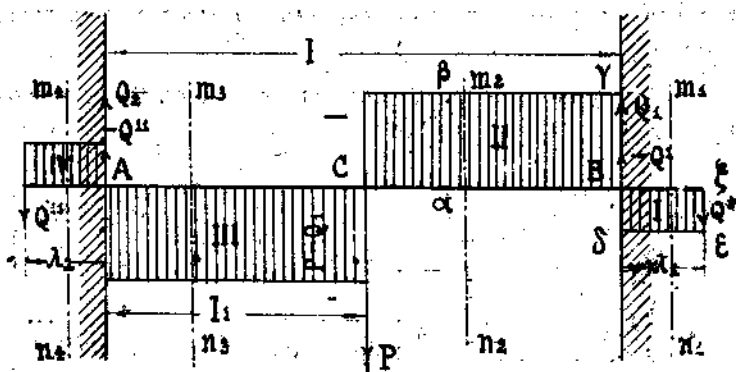
$$M_{z_2} = \frac{p(l_1 - z_2)}{2} + Az_2 + B$$

Как видим, выражения для изгибающего момента для сечений $m_1 n_1$ и $m_2 n_2$, отличаются между собой: для сечения $m_2 n_2$ в выражении изгибающего момента оказывается новый член.

Следовательно, точки α и β будут точками раздела, ибо в этих точках функция меняет свой вид, претерпевая разрыв непрерывности.

Примеры построения линии суммы сил.

§ 38. Балка заделана двумя концами в стену и подвержена действию сосредоточенного груза P (черт. 50). В точках опор появятся реакции Q_1 и Q_2 ; кроме того ввиду закрепления концов балки появятся пары закрепления с моментами μ_1 и μ_2 .



Черт. 50.

Пары закрепления представляются в виде сил — Q^1 и Q^1 с плечом λ_1 и — Q^{11} и Q^{11} с плечом λ_2 так что

$$\mu_1 = Q^1 \lambda_1 \quad \text{и} \quad \mu_2 = Q^{11} \lambda_2.$$

Для определения реакций опор надо написать условия равновесия сил, приложенных к балке. Условие проекций дает:

$$-Q_1 - Q_2 + P = 0$$

Из уравнения моментов относительно точки А получим

$$\mu_1 - \mu_2 - Q_2 l_2 + P l_1 = 0 \quad \dots \quad (a)$$

Из этих двух ур-ий должны быть найдены Q_1 , Q_2 и μ_1 и μ_2 . Как видим, условий недостаточно для определения неизвестных. Поэтому балка, концы которой заделаны в стене, наз. *статически неопределенной*, ибо условий, даваемых статикой

для определения реакций, недостаточно. Недостающие два уравнения могут быть получены, пользуясь свойствами упругой линии, о чем речь впереди.

Построим линию суммы сил. Для этого через конец Q^I проведем параллель оси балки. После перехода через В линия суммы сил пойдет уже выше оси балки до сечения С, при чем, очевидно, ордината ее будет равна силе Q_1 ($-Q^I$ и Q^I в сумме равны нулю). После перехода через С линия суммы сил изобразится прямой, параллельной оси, расположенной ниже ее, с ординатой равной $P - Q_1$. За точкой А линия суммы сил пойдет выше оси с ординатой равной $-Q^{II}$. Напишем подробные выражения для суммы сил для сечений $m_1 p_1$, $m_2 p_2$, $m_3 p_3$, $m_4 p_4$.

При этом силы, направленные по вертикали вниз, будем писать со знаком плюс, а направленные вверх — со знаком минус.

Для сечения $m_1 p_1$ $S = + Q^I$

„ „ $m_2 p_2$ $S = - Q_1$

„ „ $m_3 p_3$ $S = P - Q_1$

Для сечения $m_4 p_4$ $S = - Q_1 + P - Q_2 - Q^{II} =$

(т. е. $- Q_1 + P - Q_2 = 0$) $= - Q^{II}$

Точки А, С и В будут теми точками, в которых изгибающий момент будет достигать наибольшего численного значения. Самым опасным сечением будет то, в котором численная величина изгибающего момента будет самой наибольшей.

Величина изгибающего момента для какогонибудь сечения $m_2 p_2$ представится как разность площадей $\alpha\beta\gamma B$ и $B\delta\epsilon\zeta$ при чем первая будет отрицательной, вторая положительной. Сумма всех заштрихованных площадей должна равняться нулю.

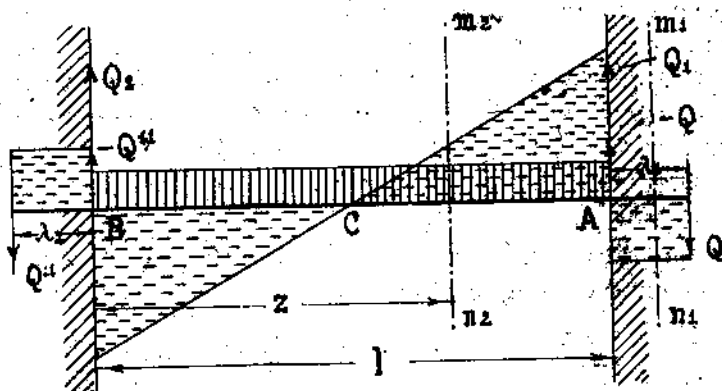
Действительно I + II + III - IV =

$$= \mu_1 + [-Q_1(1-l_1)] + [(P-Q_1)l_1] + \mu_2 = \mu_1 + \mu_2 - Q_1 l + Q_1 l + P l_1 - Q_1 l_1 = \mu_1 + \mu_2 - Q_1 l + P l_1 = 0$$

в виду равенства (а).

§ 39. Построим теперь линию суммы сил для балки, заделанной 2-мя концами в стены, и находящейся под действием распределенной равномерно по всей длине балки нагрузки в p кг на единицу длины (черт. 51).

Очевидно, нагрузка на всю балку будет pl . В опорных точках появятся реакции Q_1 и Q_2 и кроме того пары закреплений $(Q^I, -Q^I)$ и $(Q^{II}, -Q^{II})$, моменты которых $\mu_1 = Q^I \lambda_1$ и $\mu_2 = -Q^{II} \lambda_2$. Условия равновесия дают $-Q_1 - Q_2 + pl = 0$



Черт. 51.

и $\mu_1 + \mu_2 - Q_1 l + \frac{pl^2}{2} = 0$. Так как нагрузка равномерно распределенная, то $Q_1 = Q_2$ след., $-2Q_1 + pl = 0$ откуда $-Q_1 = \frac{pl}{2}$ на условия равновесия моментов имеем:

$$\mu_1 + \mu_2 - Q_1 l + \frac{pl^2}{2} = 0$$

подставляя сюда значение Q_1 , получим: $\mu_1 + \mu_2 = 0$, что показывает, что $\mu_1 + \mu_2$ численно между собой равны, но по знаку противоположны.

Построим линии суммы сил для сечений

$m_1 n_1$	$S = Q^I$
A	$S = Q_1$
$m_2 n_2$	$S = -Q_1 + p(l-z)$

Из последнего у-ния видим что линия суммы сил будет прямой. Ординаты кривой S ; абсциссы Z .

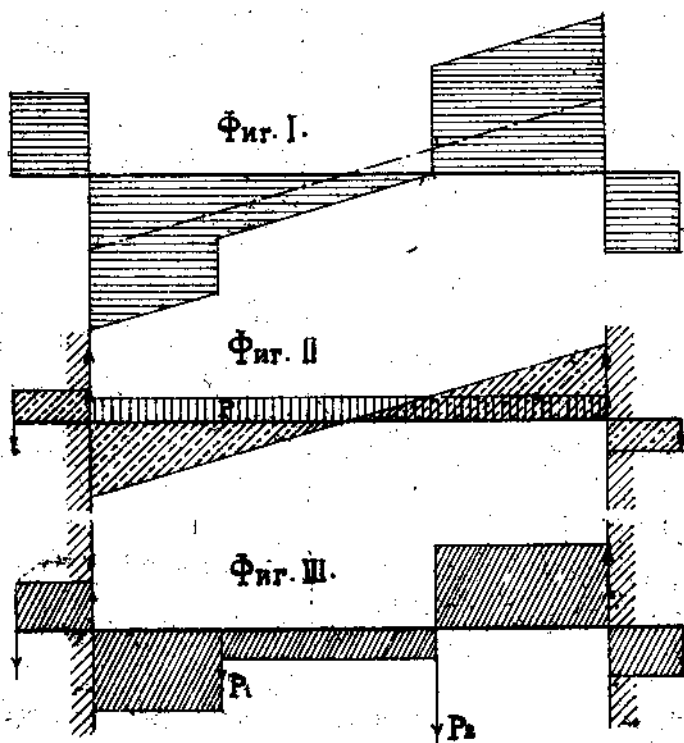
Найдем точку пересечения линии суммы сил с осью Z , для чего приравняем $S = 0$

$$-Q_1 + p(1-z) = 0$$

$$-\frac{pl}{2} + pl - pz = 0 \quad (\text{т. к. } Q_1 = \frac{pl}{2})$$

Откуда $Z = \frac{1}{2}$, т.-е. эта точка будет посредине балки, и линия суммы сил пойдет, как указано на черт. 51. Опасных сечений будет три А, С и В. Выяснив, в какой из этих 3 точек численная величина изгибающего момента будет численно наибольшая, по этому моменту, как будет показано ниже, и будем определять прочные размеры балки.

§ 40. Если бы кроме непрерывно распредел. груза были приложены еще сосредоточенные грузы, то, построив отдельно линии суммы сил для сосредоточенной и распределенной нагрузки и сложив их ординаты, получим действительную линию суммы сил. Построим, например, (черт. 52) линию суммы сил, когда балка,



заделанная 2 концами в стену, подвержена распределенной равномерно нагрузке и сосредоточенной в виде 2-х сил P_1 и P_2 .

Сначала сделаем построение для равномерно распределенной нагрузки (фиг. 11), определив предварительно реакции опор и пары закрепления, отвечающие этой нагрузке. Затем построим линию суммы сил от сосредоточенных грузов (фиг. 12); после чего строим комбинированную диаграмму (фиг. 1), ординаты коей равны сумме ординат, взятых по диаграммам (фиг. 12) и фиг. 13).

Теория изгиба.

§ 41. Вырежем из балки двумя сечениями mn и $m'n'$ (черт. 58 стр. 77) перпендикуляр. к ее оси и беск. близкими друг к другу, элемент бескон. малой длины ΔZ Фиг. 1 изображает призму до изгиба, фиг. 2 — после изгиба, а на фиг. 3 показан в увеличенном масштабе вид на сечение mn в направлении стрелок a , b (фиг. 2). Плоскость чертежа на фиг. 1 и 2 совпадает с плоскостью изгиба.

Ряд волокон $\alpha\beta$ (фиг. 1) длиной ΔZ отстоящих от оси балки на расстоянии η после изгиба изменит свою длину (фиг. 2), которая делается равной $\Delta Z'$.

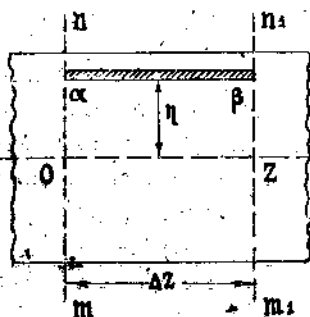
Обозначим угол, составляемый плоскостями сечений mn , $m'n'$ после изгиба (фиг. 2) через $\Delta\varphi$; радиус кривизны изогнутой оси балки через ρ . Пусть $\gamma\delta$ (фиг. 2) изображает нейтральный слой, т. е. ряд волокон, не изменивших после изгиба своей длины. Расстояние нейтрального слоя от оси балки обозначим через η_0 , при чем будем рассматривать η_0 как количество алгебраическое (при η_0 положительном нейтральный слой расположен выше оси балки, при η_0 отрицательном — ниже оси балки).

Найдем относительное удлинение волокон $\alpha\beta$. Из чертежа (фиг. 2) имеем

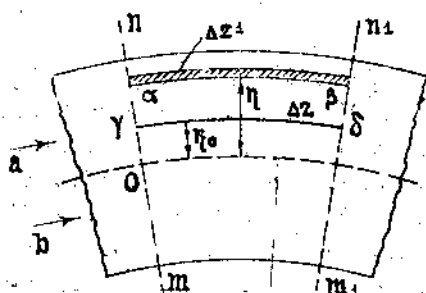
$$\alpha\beta = \Delta Z' = (\rho + \eta) \cdot \Delta\varphi$$

$$\gamma\delta = \Delta Z = (\rho + \eta_0) \cdot \Delta\varphi$$

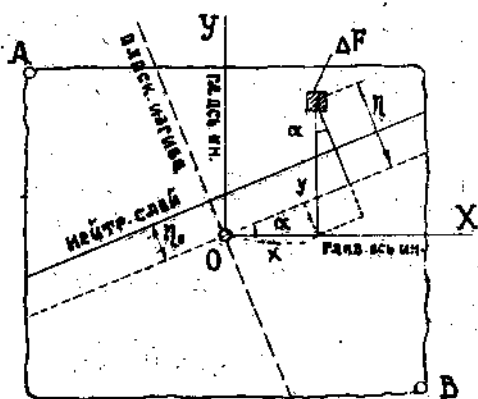
Прикидая во внимание, что первоначальная длина волокон $\alpha\beta$ (фиг. 1) была ΔZ , приходим к выводу, что относительное удлинение δ этих волокон равно



Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

$$\delta = \frac{\Delta Z' - \Delta Z}{\Delta Z} = \frac{(\rho + \eta)\Delta\varphi - (\rho + \eta_0)\Delta\varphi}{(\rho + \eta_0)\Delta\varphi} = \frac{\eta - \eta_0}{\rho + \eta_0}$$

Согласно закону Гука удлинению δ волокон $\alpha\beta$ должно соответствовать напряжение материала их

$$p = E\delta = E \frac{\eta - \eta_0}{\rho + \eta_0} \quad a$$

Обратимся теперь к фиг. 3. Пусть O есть центр тяжести сечения балки. Проведем координатные оси OX, OY так, чтобы они были направлены по главным осям инерции сечения. Угол, составляемый следом нейтрального слоя на плоскости сечения с осью OX , обозначим через α . Плоскость изгиба, как легко понять, должна быть перпендикулярна к нейтральному слою. Возьмем одно из волокон ряда $\alpha\beta$ отстоящих от оси балки на расстоянии η . Это волокно в пересечении с плоскостью MN даст элемент площади ΔF , координаты (коего обозначим через x, y). Из чертежа нетрудно вывести, что:

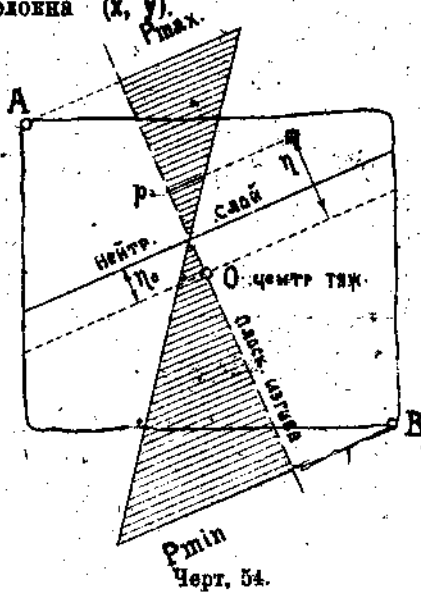
$$\eta = y \cos \alpha - x \sin \alpha$$

В виду этого выражение (а) может быть переписано так

$$p = E \frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha - \eta_0}{\rho + \eta_0} \quad b$$

Таково будет напряжение волокна (x, y) .

Замечание. Т. е. $\eta - \eta_0$ выражает расстояние волокна до нейтрального слоя (см. фиг. 2 и 3), то формула (а) показывает, что волокна, находящиеся в равных расстояниях от нейтрального слоя, одинаково напряжены; затем, что по мере удаления от нейтрального слоя напряжение волокон возрастает, достигая числового максимума в точках A и B . (см. фиг. 8), наиболее удаленных от нейтрального слоя, при чем если волокно A растгнуто, то

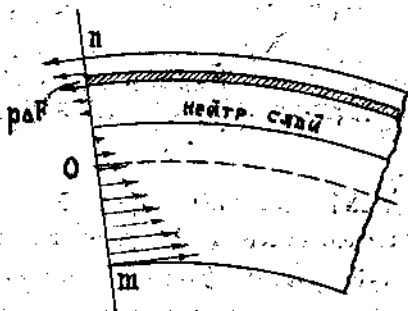


В, лежащее по другую сторону нейтрального слоя, будет сжато (т. е., расстояние его до нейтр. слоя надо в этом случае считать отрицательным). Вообще при переходе через нейтральный слой знак напряжения меняется. Напряжение волокон, принадлежащих самому нейтральному слою, т. е., когда $\eta = \eta_0$, равно 0. Из форм (а) усматриваем также, что ρ выражается линейным образом через расстояние волокна от нейтр. слоя. На прилаг. черт. (стр. 77) построена диаграмма напряжений, пользуясь которой легко найти напряжение любого волокна, зная его расстояние до нейтр. слоя. Диаграмма понятна без комментариев.

Определение внешних сил, вызвавших изгиб,

§ 42. Предположив, что балка изогнулась, мы выяснили, какое напряжение будут иметь разные волокна, и даже указали, какой вид должна иметь диаграмма напряжений. Попробуем теперь найти те внешние силы, которые способны были вызвать такую деформацию. Для этого поступим так.

Вообразим, что сечением mn (фиг. 1 и 2 черт. 53) балка разрезана на 2 части—левую и правую, и что левая часть отброшена. Тогда, чтобы оставшаяся правая часть была в равновесии под действием внешних приложенных к ней сил, нам пока неизвестных, мы должны ко всем элементам сечения mn приложить внутренние силы, равные $\rho \Delta F$, которые заменили бы действие отброшенной части балки на оставшуюся (черт. 55). Каждая из таких внутренних сил, напр. действующая на элемент ΔF , координаты коего x, y , (см. фиг. 3 черт. 53), направлена перпендикулярно к плоскости чертежа по направлению z читателю.



Черт. 55.

Обозначив алгебраические суммы проекций на координатные оси искоемых внешних сил, приложенных к оставшейся правой части балки через X, Y, Z , а алгебраические суммы моментов

их относительно тех же осей через M_x , M_y , M_z (направления координатных осей указаны на фиг. 1 и 3 черт. 53), напишем 6 условий равновесия этой части балки. Получим

$$\begin{aligned} X &= 0 & M_x - \sum p \Delta F \cdot y &= 0 \\ Y &= 0 & M_y + \sum p \Delta F \cdot x &= 0 \\ Z - \sum p \Delta F &= 0 & M_z &= 0 \end{aligned}$$

Эти равн.—я показывают, что искомые внешние силы приводятся к одной силе Z , касательной к изогнутой оси прямой, и к паре, проекция линейного момента которой на координатные оси равны M_x , M_y . Найдем Z , M_x , M_y в форме, более удобной для вычислений. Для этого в 3-е, 4-ое и 5-ое из полученных равенств подставим вместо p его выражение (b) предыдущего §. Будем иметь

$$\begin{aligned} (Z - \sum p \Delta F) &= \sum E \frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha - \eta_0}{\rho + \eta_0} \Delta F = \frac{E \cos \alpha}{\rho + \eta_0} \sum \Delta F y - \\ &- \frac{E \sin \alpha}{\rho + \eta_0} \sum \Delta F x - \frac{E \eta_0}{\rho + \eta_0} \sum \Delta F = -E \frac{\eta_0 F}{\rho + \eta_0} \dots (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (M_x - \sum p \Delta F \cdot y) &= \sum E \frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha - \eta_0}{\rho + \eta_0} \Delta F y = \frac{E \cos \alpha}{\rho + \eta_0} \sum \Delta F y^2 - \\ &- \frac{E \sin \alpha}{\rho + \eta_0} \sum \Delta F \cdot xy - \frac{E \eta_0}{\rho + \eta_0} \sum \Delta F \cdot y = E \frac{J_x \cdot \cos \alpha}{\rho + \eta_0} \dots (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (M_y + \sum p \Delta F \cdot x) &= -\sum E \frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha - \eta_0}{\rho + \eta_0} \Delta F x = - \\ &- \frac{E \cos \alpha}{\rho + \eta_0} \sum \Delta F \cdot xy + \frac{E \sin \alpha}{\rho + \eta_0} \sum \Delta F x^2 + \frac{E \eta_0}{\rho + \eta_0} \sum \Delta F x = E \frac{J_y \sin \alpha}{\rho + \eta_0} \dots (13) \end{aligned}$$

Здесь $\sum \Delta F$ заменена через F , так как сумма всех элементов площади сечения F равна самой площади; $\sum \Delta F \cdot x$,

$\sum \Delta F \cdot y$ равны 0 — как статические моменты площади относительно осей, проходящих через ее центр тяжести;

$\sum \Delta F \cdot xy = 0$ — как центробежный момент площади относительно главных осей инерции (см. фиг. 2 черт. 53); $\sum \Delta F \cdot x^2 = J_y$,

$\sum \Delta F \cdot y^2 = J_x$ — суть моменты инерции площади относительно осей OY , OX .

Выражение p через внешние силы

§ 43. Напишем равн-о (b) § 41 в таком виде

$$p = E \frac{c \alpha}{\rho + \eta_0} y - E \frac{s \alpha}{\rho + \eta_0} x - E \frac{\eta_0}{\rho + \eta_0}$$

Но из равн. (12), (13), (11) предыдущего § имеем

$$E \frac{c \alpha}{\rho + \eta_0} = \frac{M_x}{J_x}$$

$$E \frac{s \alpha}{\rho + \eta_0} = \frac{M_y}{J_y}$$

$$E \frac{\eta_0}{\rho + \eta_0} = - \frac{Z}{F}$$

Поэтому

$$p = \frac{M_x y}{J_x} - \frac{M_y x}{J_y} + \frac{Z}{F} \dots \dots \dots (14)$$

Чтобы лучше уяснить себе смысл этого выражения для p , равно значение выведенных в предыдущем § формул (11), (12), (13), мы рассмотрим теперь все возможные частные случаи изгиба балки и после их рассмотрения вернемся к исследованию всех этих формул в общем виде.

§ 44. 1-ый случай. *Плоскость изгиба совпадает с одной из главных осей инерции сечения, нейтральный слой проходит через центр тяжести сечения.* Если плоскость изгиба совпадает с одной из главных осей инерции, то, значит, нейтральный слой совпадает с другой осью инерции. Поэтому в данном случае (см. фиг. 8 черт. 53) надо положить

$$\alpha = 0, \quad \eta_0 = 0$$

В виду этого формулы (11), (12), (13) обращаются в такие

$$Z = 0$$

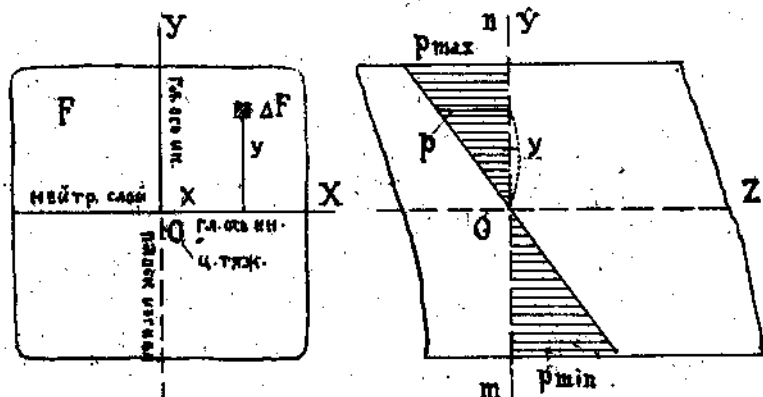
$$M_x = \frac{E J_x}{\rho}$$

$$M_y = 0$$

Последние равенства показывают, что внешние силы, вызывающие изгиб сводятся в данном случае к одной паре, момент которой M_x , лежащей в плоскости изгиба. Выражение для p (формула 14) принимает вид

$$p = \frac{M_x \cdot y}{J_x}$$

• Фиг. 3 черт. 53 и диаграмма напряжений в применении к данному случаю должны быть переделаны след. образом



Черт. 56.

Наибольшей численной величины p достигает на поверхности балки, там где численно y — максимум (на верхней или нижней грани безразлично). Поэтому численно

$$p_{\max} = \frac{M_x \cdot y_{\max}}{J_x}$$

Отношение

$$\frac{J_x}{y_{\max}}$$

т. е. отношение момента инерции сечения относительно оси OX , перпендикулярной к плоскости изгиба, к расстоянию от оси OX , волокна, наиболее удаленного от нейтрального слоя, обозначают через W_x и называют „моментом сопротивления“ сечения относительно оси OX .

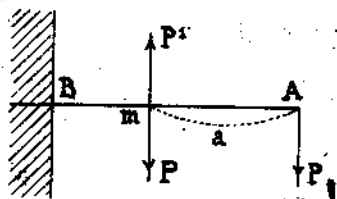
$$\frac{J_x}{y_{\max}} = W_x$$

При таком обозначении

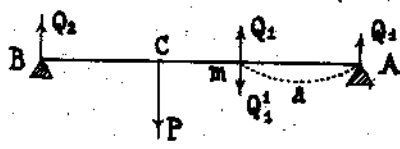
$$p_{\max} = \frac{Mx}{Wx} \dots \dots \dots (15)$$

Т. е. Mx представляет алг. сумму моментов всех сил, приложенных к балке правее рассматриваемого сечения mp , т. е. по одну его сторону, то Mx есть не что иное, как *изгибающий момент* для этого сечения.

Заметим, что силы, приложенные к оставшейся правой части балки, как мы выяснили, составляют в данном случае пару сил. Такие случаи довольно редки. Обыкновенно кроме пары действует еще некоторая сила, расположенная в самом сечении, производящая явление сдвига или среза. Напр., если мы имеем балку, заделанную одним концом в стену (фиг. 1) и нагруженную на другом конце силой P , то для всякого сечения m мы можем выполнить следующее построение: приложить в m две равные и противоположные силы P и P^1 , как указано на



Фиг. 1.



Фиг. 2.

чертеже. Тогда получим пару (P, P^1) момент которой

$$Mx = Pa$$

и силу P , приложенную в самом сечении m и производящую явление сдвига.

Точно также в случае, изображенном на фиг. 2, прикладывая в m две равные и противоположные силы Q_1 и Q_1^1 , мы получим пару (Q_1, Q_1^1) с плечом a и силу Q_1 , приложенную в m .

Действием срезающей силы, если только расстояние между опорами (на фиг. 2) не очень мало, обыкновенно пренебрегают и тогда получают рассматриваемый случай изгиба.

Этот случай в чистом виде мы имели в примере 6-ом (в конце § 80): для всех сечений между опорами изгиб. момент равен моменту пары (P, Q_1) с плечом l .

Ур—не следа нейтрального слоя на плоскости сечения (не-
вая фигура черт. 56) мы получим, подставив в формулу (а) $y=0$.
Тогда найдем

$$y = 0.$$

след., нейтральный слой совпадает с осью ОХ, что и было
предположено.

Для расчета на изгиб в этом случае пользуются формулой
(15), применяя ее к опасному сечению и ставя условно, чтобы
 $R_{\max}$ в этом сечении было меньше или равно K_b , где K_b —
допускаемое напряжение материала на изгиб в $\frac{kg}{mm^2}$

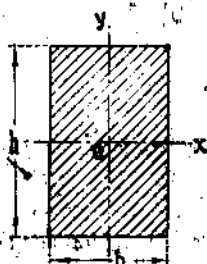
$$R_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \leq K_b$$

$$M_x < K_b W_x \quad (VII)$$

M_x в $kg \cdot cm$, W_x в mm^3 .

Приводим значения W_x для наиболее простых сечений.

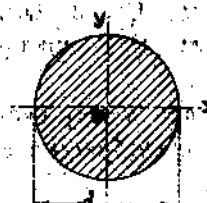
1. Для прямоугольника.



$$W_x = \frac{bh^3}{6}$$

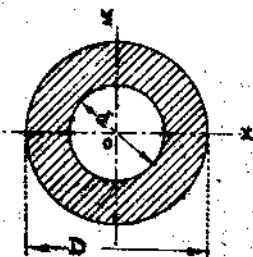
$$W_y = \frac{hb^3}{6}$$

2. Для круга.



$$W_x = W_y = \frac{\pi}{32} d^4 \approx 0,1d^4$$

3. Для кольца.



$$W_x = W_y = \frac{\pi}{32} \frac{D^4 - d^4}{D} \approx 0,1 \frac{D^4 - d^4}{D}$$

§ 45. 2-ой случай. Плоскость изгиба совпадает с одной из главных осей инерции сечения, нейтральный слой не проходит через центр тяжести сечения. В этом случае (см. фиг. 3 черт. 53) $x = 0$. Поэтому формулы (11), (12), (13), (14) принимают вид

$$Z = -E \frac{\eta_0 F}{\rho + \eta_0} \quad (a)$$

$$M_x = \frac{E J_x}{\rho + \eta_0} \quad (b)$$

$$M_y = 0$$

$$\rho = \frac{M_x \cdot y}{J_x} + \frac{Z}{F} \quad (c)$$

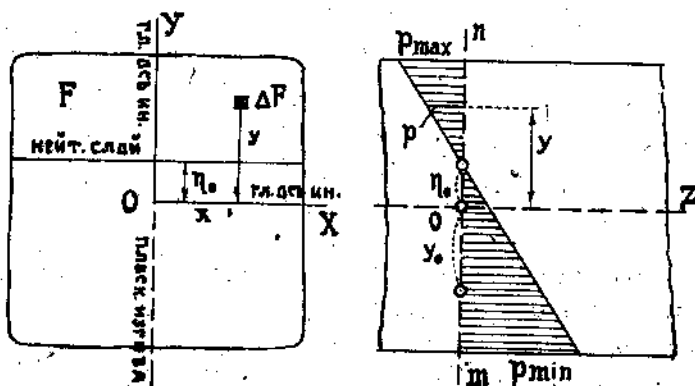
Внешние силы, действующие на часть балки правее рассматриваемого сечения, как видно, приводятся к одной паре M_x , лежащей в плоскости изгиба и одной силе Z , направленной по оси балки в растягивающей ее при $\eta_0 < 0$ (тогда, как показывает формула а, $Z > 0$) и сжимающей балку при $\eta_0 > 0$ (ибо тогда $Z < 0$).

Расположение слоя нейтрального слоя на сечении и диаграмма напряжений указаны на чертеже 57 стр. 86.

Положив в формуле (с) $\rho = 0$, получим уравнение слоя нейтрального слоя

$$\frac{M_x y}{J_x} + \frac{Z}{F} = 0$$

$$y = \text{const.}$$



Черт. 57.

Значит, нейтр. слой параллелен оси Ox , что мы и предполагали.

Наиболее напряженные волокна находятся на поверхности балки. Для расчета служит формула

$$p_{\max} = \frac{Mx}{Jx} y_{\max} + \frac{Z}{F} \leq K_b$$

или

$$\frac{Mx}{Wx} + \frac{Z}{F} \leq K_b \dots \dots \dots (VII^1)$$

Здесь Mx —изгибающий момент в опасном сечении в $kg \cdot mm$; Wx —момент сопротивления сечения в mm^3 ; Z —осевая сила в kg , растягивающая балку, если $Z > 0$ и сжимающая ее, если $Z < 0$; F —площадь сечения в mm^2 ; K_b —допускаемое напряжение материала на изгиб в $\frac{kg}{mm^2}$.

Интересно было бы найти равнодействующую внутренних нормальных к сечению сил, приложенных ко всем элементам площади сечения. Эта равнодействующая $\sum p dF$ как видно из 8-го условия равновесия (§ 42) равна Z . Расстояние точки приложения ее до оси балки y_0 легко определить, взяв сумму моментов всех сил, приложенных к отрезанной правой части балки, относительно оси Ox . Получим (см. 4-ое ур-е равновесия § 42)

$$Mx - Z \cdot y_0 = 0$$

Внося сюда вместо M_x и Z их выражения (b) и (a), будем иметь

$$\frac{E J_x}{\rho + \eta_0} + \frac{E \eta_0 F}{\rho + \eta_0} \cdot y_0 = 0$$

$$J_x + F \cdot \eta_0 \cdot y_0 = 0$$

$$\eta_0 \cdot y_0 = - \frac{J_x}{F}$$

Т. е. J_x и F количества существенно положительные, то η_0 и y_0 оказываются всегда противоположными по знаку, как говорят, „сопряженные.“ если η_0 лежит выше оси балки, то y_0 — ниже и наоборот (см. правую фиг. черт. 57).

Найдем еще выражение для радиуса кривизмы ρ изогнутой оси балки (см. фиг. 2 черт. 58). Для этого исключим из рав- (a) и (b) η_0 . (напр., определим из одного и другого рав-а η_0 и найденные значения сравним; из получившегося равенства определим ρ). Будем иметь

$$\rho = \frac{E J_x}{M_x} \left(1 + \frac{Z}{E F} \right) \dots \dots \dots (16)$$

В частном случае, когда $Z = 0$ (предыдущий 1-й случай изгиба),

$$\rho_0 = \frac{E J_x}{M_x} \dots \dots \dots (16')$$

Сравнивая формулы (16') и (16), приходим к выводу, что, если Z не равно 0, то при $Z > 0$ (если осевая сила — растягивает балку) $\rho > \rho_0$; если же $Z < 0$ (т. е. осевая сила сжимает балку) $\rho < \rho_0$. Следовательно, растягивающая осевая сила — уменьшает изгиб балки, сжимающая — увеличивает его, что легко себе представить и без каких либо выводов.

§ 46. 3-й случай. Плоскость изгиба не проходит ни через одну из главных осей инерции сечения, нейтральный слой проходит через центр тяжести сечения. В этом случае $\eta_0 = 0$ в виду чего рав-а (11), (12), (13), (14) обращаются в такие

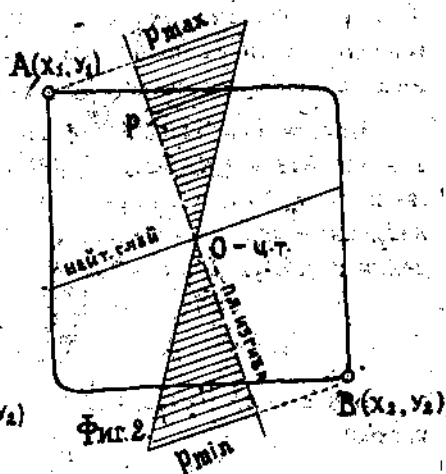
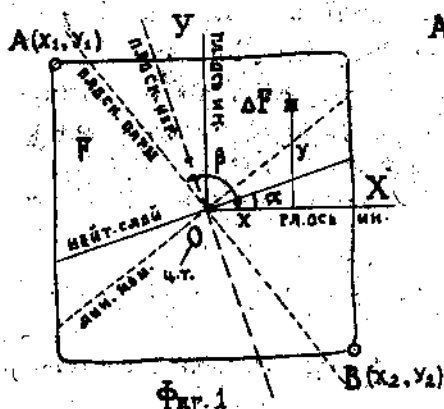
$$Z = 0$$

$$M_x = \frac{E J_x}{\rho} \cos \alpha \quad (a)$$

$$M_y = \frac{E J_y}{\rho} \sin \alpha \quad (b)$$

$$\rho = \frac{M_x \cdot y}{J_x} - \frac{M_y \cdot x}{J_y} \quad (17)$$

Внешние силы, действующие на отрезанную правую часть балки, приводятся к одной паре, проекция линейного момента которой M_x, M_y . Обозначим угол, который составляет след



плоскости пары с осью OX через β . Тогда линейный момент пары L (см. фиг. 1) будет составлять с осью OX угол $\beta \pm 90^\circ$. Следовательно,

$$M_x = L \cos(\beta \pm 90^\circ) = \mp L \sin \beta$$

$$M_y = L \sin(\beta \pm 90^\circ) = \pm L \cos \beta$$

при этом знаки надо брать либо оба верхние, либо оба нижние.

Подставляя сюда значения M_x, M_y из рав. (a), (b) и деля одно рав-о на другое, получим

$$\frac{J_x \cos \alpha}{J_y \sin \alpha} = - \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = - \frac{J_x}{J_y} \quad (18)$$

Угол β надо считать известным (ибо внешние силы при расчете балки должны быть заданы); J_x, J_y , если размеры поперечного сечения выяснены (или если ими предположительно задаются), могут быть легко вычислены. Значит, из рав-а (18) сможем найти угол α определяющий положение нейтрального слоя.

Рав-о (18) показывает, что *слои нейтрального слоя и плоскости пары, производящей изгиб, располагаются по сопряженным диаметрам центрального эллипса инерции сечения.*

Таким образом, как только плоскость изгиба отклоняется от совпадения с какой нибудь из главных осей инерции сечения, то сейчас же плоскость внешней пары отклоняется и от совпадения с той же осью инерции и с плоскостью изгиба.

Диаграмма напряжений в рассматриваемом случае имеет вид, указанный на фиг. 2 (черт. 58). Наибольшее напряжение получается в точках А и В, наиболее удаленных от нейтрального слоя. Если из этих 2 точек дальше от нейтр. слоя отстоит точка А, координаты которой обозначим через X_1, Y_1 , то

$$p_{\max} = \frac{M_x \cdot Y_1}{J_x} - \frac{M_y \cdot X_1}{J_y}$$

Этой формулой и пользуются для расчета, беря значения M_x и M_y для опасного сечения и ставя требование, чтобы $p_{\max}$ было меньше или равно K_b .

$$\frac{M_x \cdot Y_1}{J_x} - \frac{M_y \cdot X_1}{J_y} \leq K_b \quad (VII^{11})$$

Заметим, что M_x и M_y можно получить так: каждую из приложенных к балке сил разложить на 2 слагающие — одну в плоскости YOZ (обычно эта плоскость вертикальная), другую в плоскости XOZ (это плоскость горизонтальная). Затем решить 2 отдельные задачи: найти для опасного сечения изгибающий момент M_x от слагающих сил в плоскости YOZ и изгибающий момент M_y от слагающих сил в плоскости XOZ . Полученные значения M_x и M_y и подставить затем в формулу (VII¹¹).

Если в формуле (17) положить $p=0$, то получится ур-не следа нейтрального слоя на плоскости сечения

$$\frac{M_x \cdot y}{J_x} - \frac{M_y \cdot x}{J_y} = 0$$

Это уравнение показывает, что след нейтрального слоя есть прямая, проходящая через начало координат, т.е., через центр тяжести сечения, что и было предположено.

§ 47. 4-й случай. Плоскость изгиба не проходит ни через одну из главных осей инерции сечения, нейтральный слой не проходит через центр тяжести сечения. Формулы (11), (12), (13), (14) остаются без всяких изменений. Положение нейтрального слоя указано на фиг. 3 (черт. 53). Диаграмма напряжений изображена на черт. 54.

Пологая в формуле (14) $p=0$, получим уравнение следа нейтрального слоя

$$\frac{M_x \cdot y}{J_x} - \frac{M_y \cdot x}{J_y} + \frac{Z}{F} = 0$$

Это уравнение показывает, что след нейтрального слоя есть прямая, не проходящая через начало координат, т.е. через центр тяжести сечения, что сходится с сделанным предположением.

Рассматриваемый случай отличается от предыдущего только тем, что кроме пары, изгибающей балку, на балку действует еще особая сила Z , ее растягивающая или сжимающая.

Наиболее напряженными являются волокна A и B — в наибольшем удалении от нейтрального слоя. (Черт. 54). Если координаты того из этих 2 волокон, которое отстоит от нейтрального слоя дальше, обозначить через x_1 , y_1 , то наибольшее напряжение материала определится из формулы

$$p_{\max} = \frac{M_x \cdot y_1}{J_x} - \frac{M_y \cdot x_1}{J_y} + \frac{Z}{F}$$

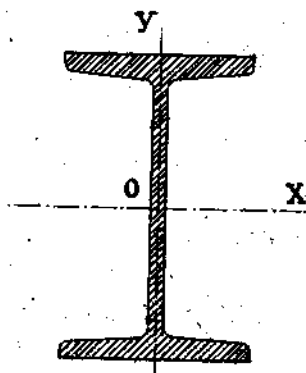
Для расчета служит формула

$$\frac{M_x \cdot y_1}{J_x} - \frac{M_y \cdot x_1}{J_y} + \frac{Z}{F} \leq K_b \dots \dots (VII^{44})$$

Также, как и в предыдущем случае, здесь M_x — изгибающий момент в опасном сечении от вертикальных слагающих сил, M_y — изгибающий момент в том же сечении от горизонтальных слагающих сил.

Общая идея расчета на изгиб.

§ 48. Предположим, что надо рассчитать двутавровую балку (черт. 59). Проведем две оси симметрии: OX и OY ; ось Z на-



Черт. 59.

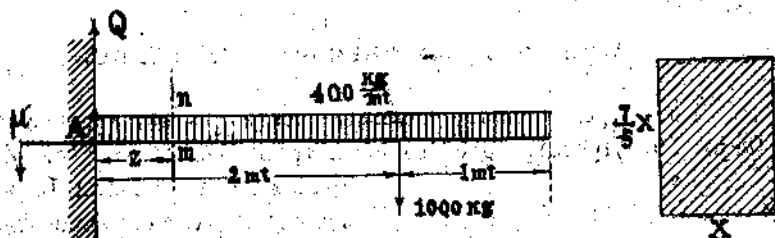
правим по длине балки. Взяв произвольное сечение, проектируем все внешние силы, расположенные по одну сторону сечения включая и реакцию опоры, на ось. Если эти силы дают проекции на ось Z (ось балки), то, следовательно, имеем силу растягивающую (при положительном ее значении) или сжимающую балку (при отрицательном значении). Если же внешние силы проекций на ось Z не дают, то имеется чистый изгиб.

Вычисляем затем моменты сил относительно осей. Если получим только M_x и силу Z , то применяем для расчета формулу (VII') при наличии же только M_x и M_y применяется формула (VII''); по формуле (VII'') ведем расчет, если кроме M_x и M_y получим еще и Z .

Если же кроме Z получится еще какая либо сила X или Y то тогда, кроме изгиба и растяжения, имеется еще сдвиг или срез; обыкновенно последними силами пренебрегают, ибо напряжения ими вызываемые, не велики в сравнении с изгибом.

Если же получим M_z , то его необходимо учесть, так как он вызывает кручение балки (об этом подробнее будет сказано ниже).

Задача. На балку длиной 3 м, заделанную в стену, действует сила в 1000 кг, приложенная в расстоянии 2 м от опоры и равномерно распределенная нагрузка, величина которой на каждый метр длины балки = 400 кг. Найти прочные размеры балки. Допускаемое напряжение $K_b = 6 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}$ а отношение сторон прямоугольного сечения балки = 5 : 7.



Черт. 60.

Реакция опоры

$$Q = 1000 + 1200 = 2200 \text{ kg.}$$

В стене возникает пара закрепления, момент ее будет
 $M = -(1000 \cdot 2 + 1200 \cdot 1,5) = -3800 \text{ kg. m.} = -3800.000 \text{ kg. mm.}$

Найдем опасное сечение балки, где M приобретает наибольшее значение.

Для сечения mm , взятого на расстоянии Z от опоры

$$M = 1000(2000 - Z) + \frac{400}{1000}(3000 - Z)\left(\frac{3000 - Z}{2}\right) \text{ kg. mm.}$$

Из выраж. для M видим, что M наиб. получается при $Z = 0$, где M численно равно M , т. е. $M = 3800.000 \text{ kg. mm.}$

Прочные размеры опасного сечения балки определяются из условия

$$M = W_x \cdot K_b$$

$$3.800.000 = W_x \cdot 6$$

$$W_x = \frac{3.800.000}{6} \text{ mm}^3$$

Но для прямоугольного сечения

$$W_x = \frac{x \left(\frac{7}{3}x\right)^2}{6} = \frac{49}{150} x^3 \approx \frac{x^3}{3}$$

Следовательно

$$x = \sqrt[3]{3 \frac{3.800.000}{6}} = \sqrt[3]{1.900.000} \approx 124 \text{ mm.}$$

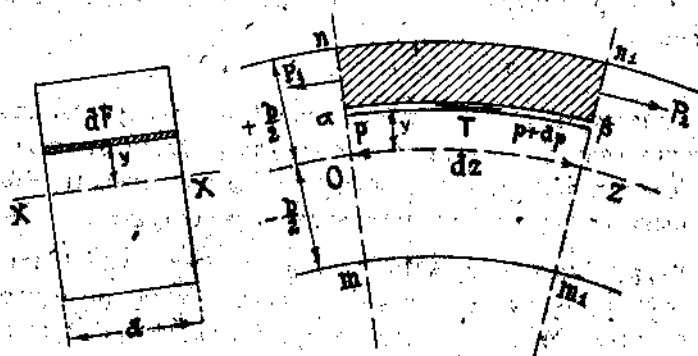
Другой размер балки равен

$$\frac{7}{3} x \approx 174 \text{ mm.}$$

О касательных силах при изгибе.

§ 49. Ограничимся рассмотрением простейшего случая, когда плоскость изгиба совпадает с одною из главных осей инерции и нейтральный слой проходит через центр тяжести (черт. 61).

Для такого случая мы нашли: $p = \frac{M_x y}{J_x}$



Черт. 61.

В виду определенности, о каком моменте сил и моменте инерции идет речь, предыдущее выражение можно написать, откинув указатели у M и J , $p = \frac{M y}{J}$

Для разных сечений прямой изгибающий момент имеет различные величины. Если взять два сечения mn и m_1n_1 , бесконечно близкие друг к другу и обозначить напряжения волокон, подобных $\alpha\beta$, взятых на расстоянии y от оси балки, в конце α через p , то напряжение тех же волокон в конце β ввиду неизменности момента, будет:

$$p + dp$$

Еслиб мы суммировали напряжения всех волокон для заштрихованной части прямой, распределенных по плоскости $\alpha\alpha_1$ а также по плоскости $\beta\beta_1$ то нашли бы, что сумма первых дала бы некоторую силу P_1 , а сумма вторых — некоторую силу P_2 ; причем

$$P_1 = \int_{-y}^{+y} p dF; \quad P_2 = \int_{-y}^{+y} (p + dp) dF$$

где dF — есть элемент площади сечения (бесконечно узкая полоска).

Так как P_1 и P_2 различны между собою, то для того, чтобы выделенная часть призмы (заштрихованная на чертеже) могла оставаться в равновесии, необходимо по грани этой части $\alpha\beta$ приложить некоторую силу T .

На самом деле грань $\alpha\beta$ не плоская, а криволинейная поверхность, но мы, предполагая изгиб малым, будем считать ее плоской).

Сила T определяется из условия равновесия выделенной части призмы:

$$-P_1 + P_2 + T = 0$$

Мы предполагаем силу T направленной в сторону положительного конца оси Z ^{2a} если же в результате, после вычисления, сила T окажется отрицательной, то это будет значить, что T должна быть направлена в противоположную сторону.

Если ширина призмы есть a , то площадь грани $\alpha\beta$ будет: adz . Так как площадь этой грани бесконечно мала, то можно считать, что сила T равномерно распределена по этой грани. Если силу, приходящуюся на единицу площади грани, назовем через t , то тогда будем иметь:

$$T = t \cdot adz.$$

Подставляя в условие равновесия вместо T , P_1 и P_2 их значения, найдем:

$$tadz = - \int_y^{+\frac{1}{2}} dp dF$$

Но из выражения для p имеем

$$dp = \frac{y}{J} dM$$

следовательно,

$$tadz = - \frac{dM}{J} \int_y^{+\frac{1}{2}} y dF; \quad t = \frac{dM}{dz} \int_y^{+\frac{1}{2}} y dF$$

количество dM можно быть взято за знак интеграла, потому что для данн. сеч., при суммировании по площади сеч., M сохраняет постоян-

ное значение. Согласно формуле (10) § 85 $\frac{dM}{dz} = S$, где S — сумма сил для рассматриваемого сечения. Поэтому

$$t = \frac{S}{aJ} \int_y^{+\frac{1}{2}} y dF \dots \dots \dots (19)$$

или полагая ради краткости ω

$$\int_y^{+\frac{1}{2}} y dF = \omega$$

получим

$$t = \frac{S\omega}{aJ} \dots \dots \dots (19^1).$$

Заметим, что ω выражающее интеграл, входящий в формулу, представляет собою статический момент грани $\alpha\beta$ (смотри чертеж) заштрихованной части призмы относительно оси xx , проходящей через центр тяжести сечения; поэтому ω всегда может быть без затруднения вычислено для любого значения y . Из формулы видно:

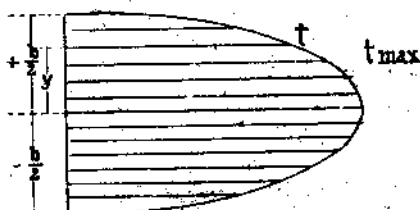
1) касательная сила t , приходящаяся на единицу площади грани $\alpha\beta$ выделенной части призмы, при переходе от нижней грани призмы до верхней сохраняет одно и то же направление, при чем направлена в ту сторону, куда M убывает. Итак t всегда будет направлено в сторону положительного конца оси Z если M в этом направлении убывает.

2) Сила $t = 0$ для сечений, в которых M достигает maximum'a или minimum'a (если M есть max. или min., то $dM = 0$ и $S = 0$), а также для сечений, где $M = 0$, например над опорами, если балка свободно лежит на двух опорах.

При переходе от одной точки сечения mn к другой, т.е. при изменении y от 0 до $+\frac{b}{2}$ и от 0 до $-\frac{b}{2}$, t изменяет свою величину, причем на поверхности призмы, при $y = +\frac{b}{2}$ и $y = -\frac{b}{2}$, t обращается в нуль, а у оси призмы, т.е. у нейтрального слоя, t достигает наибольшей величины.

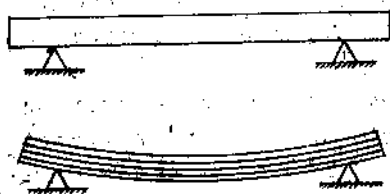
Диаграмма касательных сил для разных точек сечения будет такова как изображено на чертеже 62.

Если бы мы распилили балку по длине на доски, так что



Черт. 62.

вместо целой балки имели бы ряд досок, лежащих на опорах (черт. 63), то прогиб балки при этом значительно увеличился бы, вследствие присутствия касательных сил t , расположенных по плоскости прикосновения досок, ничем не увязанных.



Черт. 63.

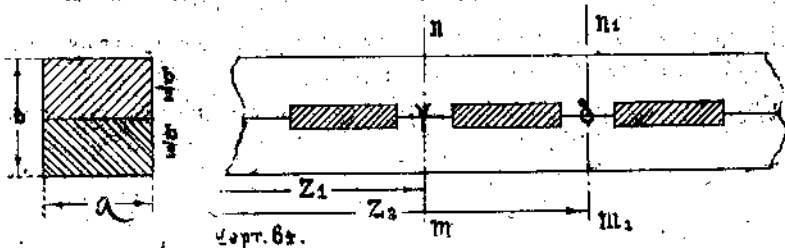
Для увеличения сопротивления изгибу балок, составленных по длине, например, из 2-х частей, между отдельными частями вставляют так называемые „шпонки“, назначение которых противодействовать силам, достигающим, как мы видели, наибольшего значения

у оси призмы. Это наибольшее значение получим из формулы (19) полагая в ней $y = 0$.

Пример расчета шпонки.

§ 50. Вычислим прочные размеры шпонки, которая должна выдержать сумму касательных сил, собранных по длине призмы в плоскости раздела балки, между сечениями m и m_1 , проведенными через середины расстояний между шпонками, в расстояниях Z_1 и Z_2 от левой опоры.

Подсчитаем эти силы, рассеянные по площади $\gamma \delta$



Черт. 64.

Возьмем бесконечно узкую полоску adz сила, на нее действующая, будет: $tadz$

Поэтому искомая сумма касательных сил равна:

$$\int_{z_1}^{z_2} tadz = \int_{z_1}^{z_2} \frac{S\omega}{aJ} adz = \frac{\omega}{J} \int_{z_1}^{z_2} Sdz$$

при интегрировании в пределах Z_1 и Z_2 количество ω представляющее статический момент площади, сохраняет свою величину и потому могло быть вынесено на под знака интеграла; также можно было вынести и J . Но

$$\omega = \int_0^{+\frac{h}{2}} y dF = \left(a \cdot \frac{b}{2}\right) \frac{h}{2} = \frac{ab^2}{8}$$

$$\int_{z_1}^{z_2} Sdz = - \int_{z_1}^{z_2} \frac{dM}{dz} dz = + \int_{z_2}^{z_1} dM = M_{z_1} - M_{z_2} \quad (*)$$

Следовательно, равнодействующая всех касательных сил, которую должна выдерживать шпонка, будет $T = \frac{ab^3}{8} \cdot \frac{1}{J} (M_{z_1} - M_{z_2})$

но $J = \frac{ab^3}{12}$ (для прямоугольника с основанием a и высотой b) ввиду чего

$$T = \frac{3}{2} (M_{z_1} - M_{z_2})$$

Шпонку рассчитываем на срез. Если длина шпонки l , то площадь среза al ; $T = k_s al$, где k_s допускаемое напряжение материала шпонки на срез; из этого равенства найдем:

$$l = \frac{T}{ak_s}$$

Таким образом находятся прочные размеры шпонок, соединяющих два бруса, составляющие балку.

§ 51. Мы обнаружили, что в плоскости $\alpha\beta$ возникают внутренние касательные силы, величина которых на единицу площади

$$t = \frac{S\omega}{aJ}$$

*) При переставлении пределов меняется знак интеграла.

В главе о скольжении было выяснено, что если в теле существует скольжение каких либо площадей, то всегда существует и скольжение площадок, к ним перпендикулярных, при чем мера того и другого скольжения одна и та же.

Значит, если в грани $\alpha\beta$ существуют касательные силы t , которые будут производить скольжение, то неминуемо в грани $\alpha\pi$ (черт. 61) будут существовать касательные силы, которые вызовут такое же скольжение в грани $\alpha\pi$. Величина касательной силы в точке α , лежащей в плоскости $\pi\mu$, будет поэтому равна величине касательной силы t , соответствующей точке α , лежащей в грани $\alpha\beta$.

Если существует скольжение по граням $\alpha\pi$, $\alpha\beta$, то это показывает, что прямой угол $\pi\alpha\beta$ должен обратиться в острый или тупой, в зависимости от направления сил t . Значит, основное предположение, делаемое при изгибе, что плоскости сечений перпендикулярны к оси и ко всем волокнам, параллельным оси, — оказывается не оправдавшимся. Но, если условиться рассматривать изгибы очень малые, то тогда искривлением поперечных сечений призмы после изгиба можно пренебречь, что мы и делаем.

Итак, мы приходим к заключению, что в плоскости сечения $\pi\mu$ имеются касательные силы постоянного направления (о направлении сил t , сказано выше, — см. например диаграмму сил t на черт. 62), величины конх для точек, отстоящих на расстоянии u от оси призмы, определяется написанной выше формулой (19').

Равнодействующая всех этих внутренних сил, лежащих в плоскости сечения $\pi\mu$, равная их арифметической сумме, будет равна S , т.-е. алгебраической сумме внешних сил, расположенных по одну сторону сечения, так как внутренние силы, являющиеся результатом действия внешних сил, должны быть равны этим последним; разница между ними только в направлении.

Об упругой линии.

§ 52. Кривая, по которой изгибается ось призмы, наз. *упругой линией*. Если внешние силы расположены в одной плоскости, проходящей через одну из главных осей инерции сечения, то упругая линия будет плоская кривая, расположенная в плоскости

изгиба, совпадающей в этом случае с плоскостью внешних сил. Если же внешние силы не лежат в одной плоскости, проходящей через одну из главных осей инерции сечения, то упругой линией будет кривая двойной кривизны. Мы будем рассматривать лишь плоские упругие линии.

Радиус кривизны упругой линии (см. форм. 16 § 45) выражается так:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E J_x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{Z^2}{E F}}$$

В частном случае, когда осевая сила (растягивающая или сжимающая балку) $Z = 0$, а также случаи мы и будем только рассматривать при исследовании упругой линии, мы будем иметь:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E J_x}$$

Из этого выражения следует, что радиус кривизны, а значит и форма упругой линии изменяется вместе с изменением изгибающего момента M_x . Но мы видели, что при переходе через точки раздела (т.е. точки приложения сил) функция, выражающая M_x , претерпевает разрыв непрерывности (скачок) и меняет свой вид. Следовательно, упругая линия представляет не одну какую либо кривую, выраженную известным уравнением, а совокупность нескольких кривых, плавно между собой соединяющихся в точках раздела. Очевидно, число отдельных ветвей упругой линии будет равно числу промежутков между точками раздела, при чем в точках раздела должны быть присоединены и точки опор.

Сколько получится ветвей упругой линии, столько будет и уравнений упругой линии.

Как известно из приложения дифференциального исчисления к геометрии

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (a)$$

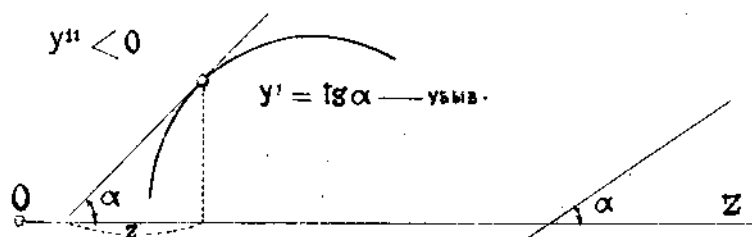
где y' и y'' первая и вторая производные кривой, $y = f(x)$ взятые по x . Условимся всегда положительный конец оси Y -ов откладывать вниз по вертикали, тогда y будет представлять величину прогиба балки в расстоянии x от левой опоры.

Так как мы будем рассматривать прогибы очень малые, получающиеся при упругой, т.-е. исчезающей деформации, то y^1 , равный тангенсу угла касательной к упругой линии с осью Z-ов, будет количеством очень малым, а потому квадратом этого количества можно пренебрегать и для $\frac{1}{\rho}$ принять упрощенное выражение

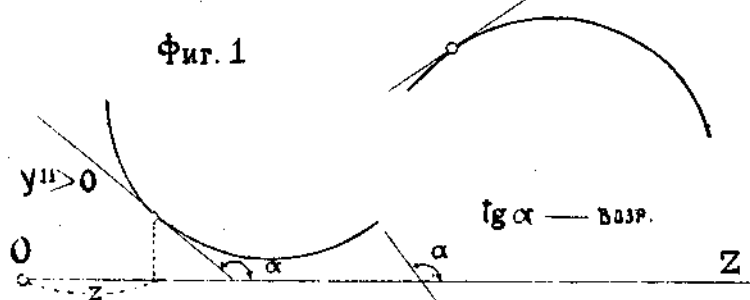
$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{d^2 y}{dz^2} \quad (b)$$

Двойной знак получается в виду того, что выражение для $\frac{1}{\rho}$ (формула а) содержит квадратный корень. Т. к. ρ количество существенно положительное, то при y^{11} положительном надо брать перед корнем плюс, при y^{11} отрицательном — минус. y^{11} будет положительным, когда y^1 — возрастающая функция; и отрицательным, если y^1 — убывающая функция.

Но $y^1 = \operatorname{tg} \alpha$ где α — угол, составляемый касательной к упругой линии с осью абсцисс. Значит, когда α при увеличении Z возрастает, y^{11} будет положит.; если же α — убыв., y^{11} будет отриц.



Фиг. 1



Фиг. 2.

Т. е. углом касательной к оси абсцисс называется угол, составляемый положительным направлением оси абсцисс с направлением касательной выше этой оси, (см. Жозеф Вертран „Диф. Ист.“ Перевод Пирожкова 1911 г., стр. 87, 3-ья и 2-ая строка снизу), то, как видно на чертеже, α будет возрастать (фиг. 2) если кривая обращена выпуклостью вниз, в противном случае (фиг. 1) α будет убывать. Отсюда получаем такое простое правило знаков:

если упругая линия обращена выпуклостью вверх, то из 2 знаков в ур-ии (в) надо брать минус, если же упругая линия обращена выпуклостью вниз, надо брать — плюс *).

Итак, уравнение упругой линии получает такой вид

$$\pm EJ \frac{d^2 y}{dz^2} = M$$

причем у M и J опущен ради краткости крестик унизательный. Таких уравнений будет столько, сколько промежутков между точками раздела. Уравнения эти дифференциальные, 2-го порядка и чтобы получить уравнения ветвей упругой линии в обычной форме, необходимо эти дифференциальные уравнения 2 раза проинтегрировать. При каждом интегрировании войдет произвольная постоянная интегрирования. Если точек раздела m , считая в том числе и опорные точки, то промежутков между ними будет $m - 1$. Следовательно при интегрировании получим $2(m - 1)$ произвольных постоянных, которые являются количествами неизвестными, подлежащими определению. Кроме того, если число опор n , то в опорах появятся реакции, число которых будет n ; эти реакции тоже неизвестны. Если в числе опор будут также числом k , в которых балка закреплена, то в этих опорах появятся еще k пар закреплений, моменты которых тоже подлежат определению. Следовательно, полное число неизвестных при решении задачи об упругой линии будет:

$$2(m - 1) + n + k$$

Но задача тем не менее оказывается вполне определенной ввиду того, что для нахождения этих неизвестных можно составить такое же число уравнений или условий.

*) Это правило действительно верное. Б. сожалению, в большинстве курсов сопр. мат. вместо этого правила даются явно ошибочные указания.

Действительно, в каждой из точек раздела, кроме крайних опорных, ординаты двух соседних ветвей упругой линии и тангенсы угла наклона касательной к оси бруска должны быть равны. Следовательно все точки раздела, кроме крайних двух, дадут $2(m-2)$ уравнений. Затем n точек опоры — дадут n уравнений, выражающих, что ордината y в точке опоры должна равняться 0 (если все опоры расположены на одном уровне). Для K опор, в которых балка закреплена, можно написать K дополнительных условий выражающих, что тангенсы углов, образуемых касательной к упругой линии в этих точках равны нулю. Кроме того мы имеем еще два условия равновесия внешних сил, присоединяя которые, получим всего уравнений:

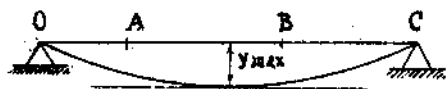
$$2(m-2) + n + k + 2 = 2(m-1) + n + k$$

Итак, видим, что число уравнений равно числу неизвестных, а потому задача о нахождении y -ий упругой линии является вполне определенной.

§ 53. Часто бывает необходимо определить ту точку упругой линии где ордината ее y — максимум, иначе говоря, определить наибольшую стрелу прогиба балки. Чтобы найти сечение, для которого стрела прогиба является наибольшей, надо определить сначала ту ветвь упругой линии, в пределах коей она находится. Чтобы это сделать, заметим, что в точке, где находится наибольшая стрела прогиба, касательная к изогнутой оси призмы (т.е. к упруг. линии) оказывается параллельной первоначальной оси призмы, т.е. оси абсцисс, поэтому для этой точки $y' = 0$. Функция же y' может обратиться в нуль, только перейдя из положительного значения в отрицательное.

Отсюда правило: чтобы узнать в пределах какой ветви находится наибольшая стрела прогиба, — надо определить знак производной y' для пограничных точек каждой ветви (на черт 46 для точек O, A, B и C) и та ветвь, у коей y' — в крайних ее точках окажется с разными знаками, и будет заключать наибольшую стрелу прогиба.

Положение искомого точки находится по общим правилам дифференциального исчисления, приравняв y' нулю и находя



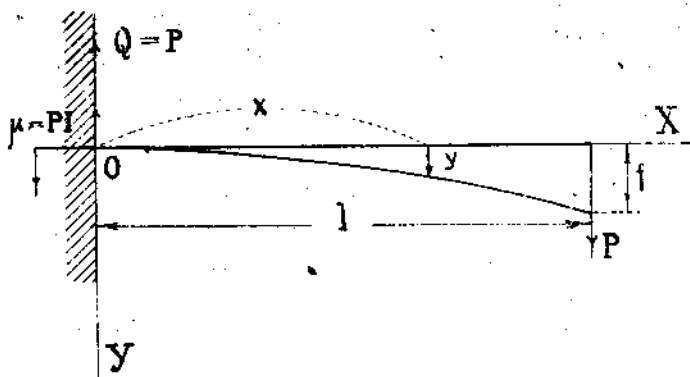
Черт. 46.

отсюда значение абсциссы x , соответствующее наибольшей стреле прогиба.

В случае, если балка заделана в опоры, y^1 в точках опоры равно нулю (касательная в этих точках горизонтальна); поэтому, применяя сюда вышеприведенное правило надо определять знак y и y^1 не для точек опоры (где $y^1 = 0$), а для точек бесконечно к ним близких.

Заметим, что упругая линия не может быть выражена аналитически одним уравнением, если она состоит из ряда кривых (ветвей), выражаемых рядом ур-ний. Рассмотрим ряд примеров. При этом, так как мы будем рассматривать только случаи плоского изгиба, для чего нам нужны будут только 2 координатные оси, в дальнейшем до конца главы об упругой линии ось OZ мы заменим осью OX .

§ 54. Пример I. Балка одним концом заделана в стену, а в другом нагружена. Найти вид кривой и наиб. стрелу прогиба (черт. 66).



Черт. 66.

Для какого-нибудь сечения, взятого на расстоянии x от опоры будем иметь равенство

$$M = P(l - x)$$

поэтому ур-ние упругой линии будет

$$EIy'' = P(l - x)$$

интегрируя

это ур-ние 2 раза получим:

$$\left. \begin{aligned} EJy'' &= P\left(1x - \frac{x^2}{2}\right) + C_1 \\ EJy' &= P\left(\frac{1x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + C_1x + C_2 \end{aligned} \right\} \dots (a)$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 воспользуемся тем, что в точке O — x, y и y' равны нулю.

Подставляя в рав-а (a) вместо x, y и y' нуль, получим, что $C_1 = 0; C_2 = 0$.

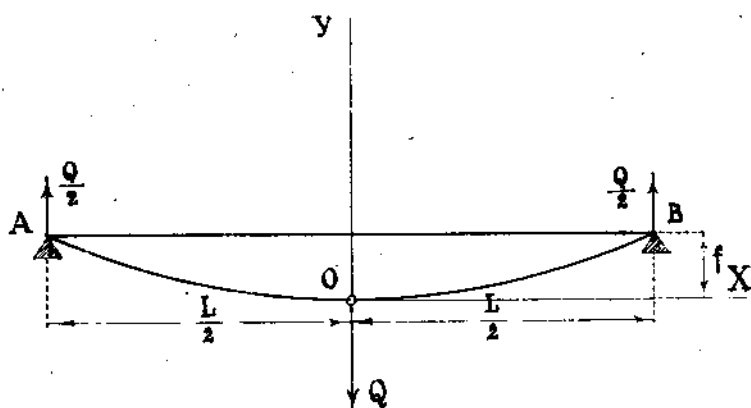
В виду этого уравнение упругой линии принимает вид:

$$EJy = \frac{P(3!x^2 - x^3)}{6}$$

Чтоб найти наиб. стрелу прогиба f , полагаем в последнем рав-е $x=l$, а $y=f$; получим

$$f = \frac{Pl^3}{3EJ}$$

§ 55. Пример 2. Балка, свободно лежащая на 2-х опорах нагружена по середине силой Q : определить ур-ние упругой линии и наиб. стрелу прогиба (чер. 67).

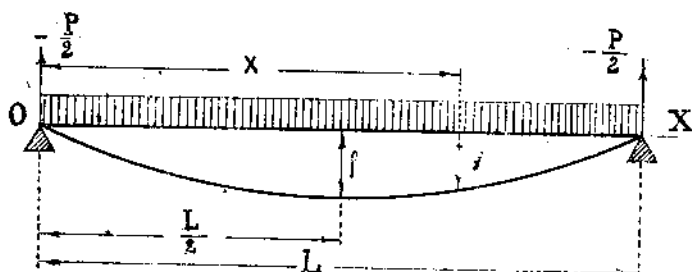


Черт. 67.

Если будем рассматривать половину балки и расположим координатные оси так, как показано на черт. (67), то этот слу-

чай легко сводится к предыдущему. Действительно можно считать, что в точке O балка закреплена, а в A на нее действует сила реакции $\frac{Q}{2}$. Поэтому можем воспользоваться предыдущими формулами, подставляя в них вместо P — $\frac{Q}{2}$ и вместо l — $\frac{L}{2}$.

§ 56. Пример 3. Балка свободно лежит на 2-х опорах; на нее действует равномерно распределенная нагрузка P так, что на единицу длины действует постоянная сила $\frac{P}{L}$ (чер. 68),



Черт. 68.

Заметив, что на балку действуют в концевых точках реакции $\frac{P}{2}$, и взяв начало координат в точке O , напишем ур-ние моментов для любого сечения:

$$\begin{aligned} M &= -\frac{P}{2}(L-x) + \frac{P}{L}(L-x)\frac{L-x}{2} = \\ &= -\frac{P}{2}(L-x) + \frac{P}{2L}(L-x)^2 \end{aligned}$$

Ур-ние упругой линии будет

$$EJ_{y^2} = -\frac{P}{2}(L-x) + \frac{P}{2L}(L-x)^2$$

После первого интегрирования получим:

$$EJ_{y^1} = -\frac{P}{2}(Lx - \frac{x^2}{2}) + \frac{P}{2L}(\frac{L^2x}{3} - \frac{Lx^2}{2} + \frac{x^3}{3}) + C_1 \dots \dots (a)$$

после второго интегрирования:

$$EJy = -\frac{P}{2} \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + \frac{P}{2L} \frac{(L-x)^4}{12} + C_1x + C_2 \quad (b)$$

C_1 и C_2 определяются из того условия, что при $x=0$ и при $x=L$ $y=0$.

Полагая в ур-нии (b) $x=0$; $y=0$ получим:

$$0 = +\frac{PL^4}{24L} + 0 + C_2 \quad \text{т.е.} \quad C_2 = -\frac{PL^3}{24}$$

Полагая в нем же $x=L$ и $y=0$, получим:

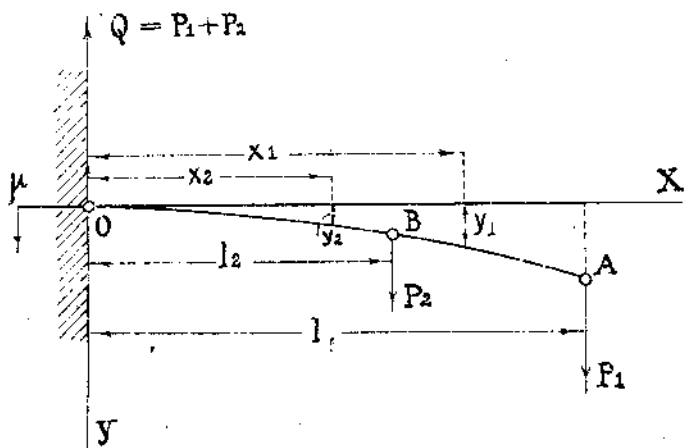
$$0 = -\frac{PL^3}{6} + C_1L - \frac{PL^3}{24} \quad \text{откуда} \quad C_1 = \frac{5PL^2}{24}$$

Подставим значения C_1 и C_2 в ур-ние изогнутой линии:

$$EJy = -\frac{P}{2} \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + \frac{P}{2L} \frac{(L-x)^4}{12} + \frac{5PL^2}{24}x - \frac{PL^3}{24}$$

Наиб. стрелу прогиба получим, если положим в последнем равенстве $x = \frac{L}{2}$, $y = f = \frac{5L^3}{384} \frac{P}{EJ}$.

§ 57. Пример 4. На балку, заделанную одним концом в стену, действуют 2 сосредоточенных груза: P_1 в точке А и P_2 в точке В (чер. 69). В данном случае изогнутая линия состоит из двух частей: из ветви АВ и ветви ВС.



Черт. 69.

Для нахождения уравнения ветви АВ, рассмотрим какое-нибудь сечение на расстоянии x_1 :

$$EJ_{y_1''} = P_1 (l_1 - x_1)$$

$$EJ_{y_1'} = P_1 (l_1 x_1 + \frac{x_1^2}{2}) + C_1 \dots \dots \dots (a)$$

$$EJ_{y_1} = P_1 (\frac{l_1 x_1}{2} - \frac{x_1^3}{6}) + C_1 x_1 + C_2 \dots \dots \dots (b)$$

Для ветви ВО возьмем сечение на расстоянии x_2

$$EJ_{y_2''} = P_1 (l_1 - x_2) + P_2 (l_2 - x_2)$$

$$EJ_{y_2'} = P_1 (l_1 x_2 - \frac{x_2^2}{2}) + P_2 (l_2 x_2 - \frac{x_2^2}{2}) + C_3 \dots \dots \dots (c)$$

$$EJ_{y_2} = P_1 (\frac{l_1 x_2^2}{2} - \frac{x_2^3}{6}) + P_2 (\frac{l_2 x_2^2}{2} - \frac{x_2^3}{6}) + C_3 x_2 + C_4 \dots \dots \dots (d)$$

Постоянные C_1 , C_2 , C_3 и C_4 можно определить двумя способами:

1) Способ Навье основан на том соображении, что при

$x_2 = 0$; $y_2 = 0$; $y_2' = 0$; а при $x_1 = x_2 = l_2$; $y_1 = y_2$ и $y_1' = y_2'$.

если примем в ур-нии (a) $x_2 = 0$, $y_2 = 0$, то получим

$$C_4 = 0.$$

подставляя в ур-ние (c) $x_2 = 0$, $y_2' = 0$, найдем

$$C_3 = 0$$

Сравнивая ур-ния (a) и (c): полагая в них $x_1 = x_2 = l_2$

и $y_1' = y_2'$ получим: $C_1 = \frac{P_2 l_2^2}{2}$

Наконец, сравнивая ур-ния (b) и (d) и полагая $x_1 = x_2 = l_2$

и $y_1 = y_2$ получим: $C_1 l_2 + C_2 = \frac{P_2 l_2^3}{3}$

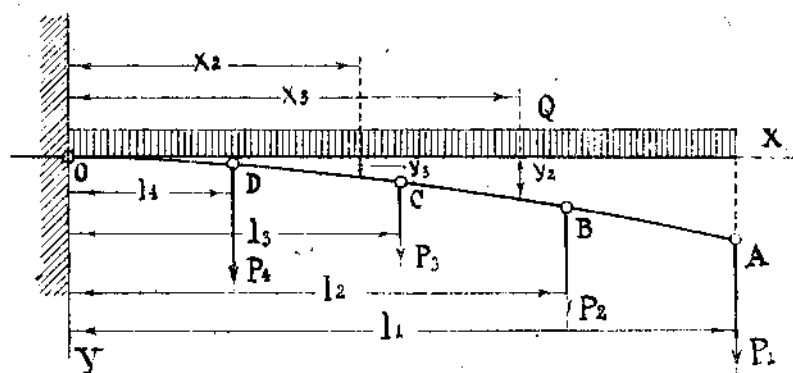
$$\text{, откуда } C_2 = - \frac{P_2 l_2^3}{6}$$

2) Клебш в своей теории упругости показал, что вопрос об определении произвольных постоянных можно упростить в том смысле, что они для всех ветвей могут быть одинаковы, поэтому достаточно определять только две постоянные. Этот метод при-

храним только для того случая, когда изгибающий момент может быть выражен в форме: $A(1-x)^n$

$$\int A(1-x)^n dx = -\frac{A(1-x)^{n+1}}{n+1} + C \dots (39)$$

Для доказательства сказанного рассмотрим самый общий случай действия на балку нескольких сил P_1, P_2 и равномерной нагрузки Q (черт. 70).



Черт. 70.

Докажем, что у любых ветвей, хотя бы у DC и CB, произвольные постоянные равны между собой. Для этого, взяв два сечения на расстояниях x_2 и x_3 от опоры, напомним ур-ния этих ветвей.

Для ветви CB имеем: $EJ y_2'' = P_1(l_1 - x_2) + P_2(l_2 - x_2) + \frac{Q}{2l_1}(l_1 - x_2)^2$

$$EJ y_2' = -P_1 \frac{(l_1 - x_2)^2}{2} - P_2 \frac{(l_2 - x_2)^2}{2} - \frac{Q(l_1 - x_2)^3}{6l_1} + C_1 \dots (a)$$

$$EJ y_2 = P_1 \frac{(l_1 - x_2)^3}{6} + P_2 \frac{(l_2 - x_2)^3}{6} + \frac{Q(l_1 - x_2)^4}{24l_1} + C_1 x_2 + C_2 \dots (b)$$

Для ветви CD имеем:

$$EJ y_3'' = P_1(l_1 - x_3) + P_2(l_2 - x_3) + P_3(l_3 - x_3) + \frac{Q}{2l_1}(l_1 - x_3)^2$$

$$EJ y_3' = -P_1 \frac{(l_1 - x_3)^2}{2} - P_2 \frac{(l_2 - x_3)^2}{2} - P_3 \frac{(l_3 - x_3)^2}{2} - \frac{Q(l_1 - x_3)^3}{6l_1} + C_3 \dots (c)$$

$$EJ y_3 = P_1 \frac{(l_1 - x_3)^3}{6} + P_2 \frac{(l_2 - x_3)^3}{6} + P_3 \frac{(l_3 - x_3)^3}{6} + \frac{Q(l_1 - x_3)^4}{24l_1} + C_3 x_3 + C_4 \dots (d)$$

Напишем условие, что в пограничной для обеих ветвей точке „С“ обе ветви имеют общую ординату и общую касательную, т. е. что при $x_2 = x_3 = l_3$ ————— $y_2 = y_3$; $y_2' = y_3'$

Полагая в ур-ях (а) и (б) $x_2 = x_3 = l_3$ и $y_2' = y_3'$ и, сравнивая правые части этих уравнений, найдем, что $C_1 = C_3$

Сравнивая так же ур-ния (b) и (d) при $x_2 = x_3 = l_3$ и $y_1 = y_2$, найдем что $C_2 = C_4$.

Итак для двух произвольно взятых ветвей произвольные постоянные оказались равными; поэтому достаточно в ур-нии ветви ОВ подставить $x=0$; $y=0$ и $x=0$; $y'=0$, откуда и определяются произв. постоянные C_1 и C_2 , которые автоматически перейдут в остальные ур-ния.

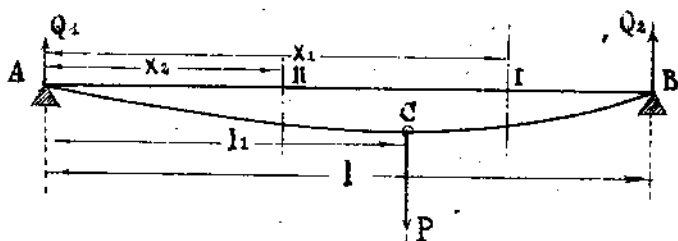
Рассмотрим ряд примеров.

§ 58. Пример 1. На балку, лежащую на 2-х опорах действует сосредоточенная сила Р. Найти ур-ние упр. линии и наибольшую стрелу прогиба (чер. 71). Условия равновесия сил, действующих на балку:

$$P - Q_1 - Q_2 = 0 \dots \dots (a)$$

$$-Q_2 l + Pl_1 = 0 \dots \dots (b) \text{ где } Q_1 \text{ и } Q_2 \text{ — опорные}$$

реакции. Упругая линия состоит из 2-х ветвей.



Черт. 71.

Взяв в каждой ветви по сечению, найдем для 1-ой ветви:

$$EJ y_1'' = -Q_2 (l - x_1) \quad ; \text{ здесь в левой части взят знак}$$

минус, ибо правая меньше нуля

$$EJ_{y_1''} = -Q_2 (1-x_1)$$

$$EJ_{y_1'} = Q_2 \frac{(1-x_1)^2}{2} + C_1 \quad (c)$$

$$EJ_{y_1} = -Q_2 \frac{(1-x_1)^3}{6} + C_1 x_1 + C_2 \quad (d)$$

Для II-й ветви имеем:

$$EJ_{y_2''} = -Q_2 (1-x_2) + P(1-x_2)$$

$$EJ_{y_2'} = Q_2 \frac{(1-x_2)^2}{2} - P \frac{(1-x_2)^2}{2} + C_1 \quad (e)$$

$$EJ_{y_2} = -Q_2 \frac{(1-x_2)^3}{6} + P \frac{(1-x_2)^3}{6} + C_1 x_2 + C_2 \quad (f)$$

Из ур-ния (b) найдем Q_2 . из ур-ния (a) — Q_1 : подставляя в (f) — $x_2=0$, $y_2=0$ найдем C_2 , наконец, подставляя в (d) $x_1=1$ и $y_1=0$ найдем C_1 . Таким образом все неизв. найдены.

Остается определить в какой ветви будет наиб. стрела прогиба. Для этого полагаем в (f) $x_2=0$ и смотрим, какой знак будет иметь y_2' ; положим, что знак будет +; затем в том же ур-нии (f) полагаем $x_2=1$, и определяем какой знак у y_2' : если этот знак — минус, то значит наиб. стрела прогиба получается для ветви **АС**.

Если же этот знак будет плюс, то наиб. стрела прогиба находится в ветви **СВ**.

Положим, что наиб. стрела прогиба оказалась у ветви **АС**; тогда, приравняв правую часть ур-ния (f) нулю, найдем x_2 , отвечающее наиб.-ей стреле прогиба; Это значение x_2 подставим в (f) и найдем из него $y_2=f$ — наибольшую стрелу прогиба.

§ 59. Пример II, Балка одним концом заделана в стену, другой находится на опоре; на нее действует сосредоточ. сила P . (чер. 72).

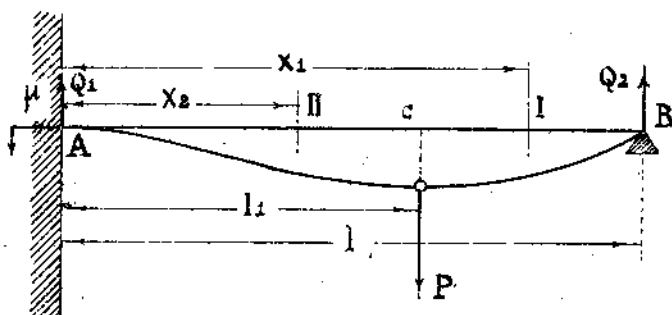
Условия равновесия сил, действующих на балку будут таковы:

$$P - Q_1 - Q_2 = 0 \quad (a)$$

$$-Q_2 l + P l_1 + \mu = 0 \quad (b)$$

где Q_1 и Q_2 опорные реакции, а μ представляет собой момент „пары закрепления“, возникающей в левой опоре.

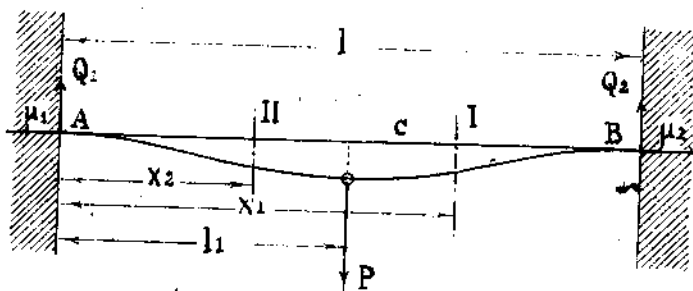
Остальные уравнения (см. предыдущий пример) (c), (d), (l) и (f) остаются для данного примера такими же. Разница между обоими случаями заключается только в том, что тут появляется новое неопределенное. Для его определения составим добавочное уравнение, которое вместо с (a) и (b) даст возможность найти Q_1 , Q_2 и μ .



Черт. 72.

Для нахождения C_1 и C_2 положим в уравнении (l) $x_2 = 0$, $y_2 = 0$ и в уравнении (d) — $x_1 = l$, $y_1 = 0$. Положение наибольшей стр. прогиба балки находится подобно тому, как и в предыдущем примере испытанием знака y_1' при $x_1 = l_1$ и $x_1 = l$.

§ 60. Пример 3. Балка обоими концами заделана в стены; на нее действует сосредоточен. груз P.



Черт. 74.

Условия равновесия:

$$-Q_1 + P - Q_2 = 0 \dots\dots\dots (a)$$

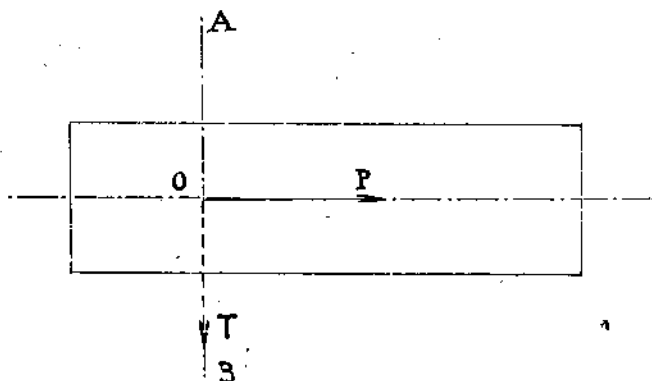
$$-Q_2 l + P l + \mu_1 + \mu_2 = 0 \dots\dots\dots (b)$$

Ур-ния (с), (d), (ф) и (п) получают в правой части равенств новый член, содержащий μ_2 , в остальном остаются теми же. Для нахождения $Q_1, Q_2, \mu_1, \mu_2, C_1, C_2$ — 6-ти неизвестных послушат 6 ур-ний: (a); (b); (с) — если в него подставить $x_1 = l, y_1^1 = 0$; (d) — по подстановке в него $x_1 = l, y_1 = 0$; (l) — по подстановке в него $x_2 = 0, y_2^1 = 0$ и наконец ур-ние (п), если положить в нем $x_2 = 0, y_2 = 0$

Для нахождения наибольшей стрелы прогиба, поступаем, как в 1-ом из рассмотренных 3-х примеров.

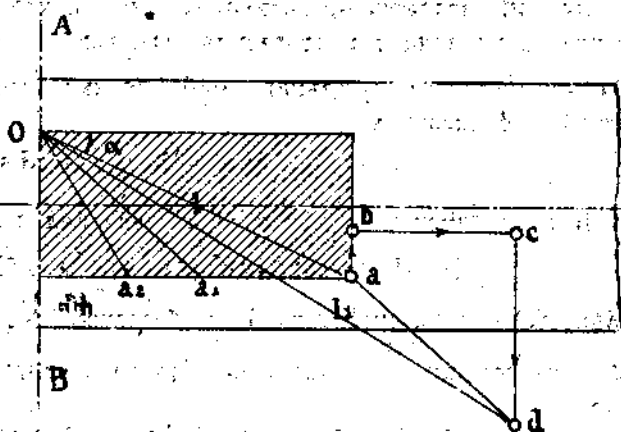
Сложное сопротивление растяжению и сдвигу. Формула Сен-Венана.

§ 61. Пусть силы, действующие на брусок, для какого-нибудь сечения АВ, сводятся к одной осевой растягивающей силе Р и одной поперечной силе Т. Сила Р вызовет в бруске относительное удлинение δ и относительное поперечное сжатие $\epsilon \delta$, где ϵ — так называемый „коэффициент Пуассона“. Сила Т производит сдвиг, мера коего (чер. 75).



В результате в брусе получится растяжение по разным направлениям — по Oa , по Oa_1 , по $Oa_2 \dots$ (чарт. 76)

Найдем относительное удлинение, которое появится в брусе в каком-нибудь направлении Oa , составляющем угол α с осью бруса, для чего из бруса выделим элементарный параллелепипед (затрихованный на чертеже); у которого Oa было бы



Чарт. 76

диагональю боковой грани, а основание которого — совпадает бы с сечением AB . Это основание будем считать неподвижным. Длину диагонали обозначим через l . По приложении сил P и T при деформации параллелепипеда точка a получит следующие перемещения.

От растягивающей силы P — поперечное перемещение ab , пропорциональное длине $l \sin \alpha$ — равно $\delta l \sin \alpha$ затем продольное перемещение bc , пропорциональное длине $l \cos \alpha$ и равно $\delta l \cos \alpha$

От сдвигающей силы T точки a получат поперечное перемещение ad , пропорциональное длине $l \cos \alpha$ и равно $\tau l \cos \alpha$.

Все эти три перемещения ab , b и cd , складываясь геометрически, дадут некоторое перемещение ad , равное

$$(ad) = (ab) + (b) + (cd)$$

В результате деформации параллелепипеда точка a окажется переместившейся в d и длина $Oa = l$ обратится в длину $Od = l_1$

Рассматривая лишь упругие деформации, т. е. исчезающие с течением времени, а следовательно незначительные по своей величине, можем считать с некоторой, небольшой погрешностью, что ad составляет с осью бруска также угол α ; другими словами, что ad является продолжением Oa ; и что абсолютное удлинение, полученное в направлении Oa , равно: $ad = l_1 - l$.

Спроектировав многоугольник $abcd$ на направление его замыкающей ad получим:

$$l_1 - l = -ab \sin \alpha + bc \cos \alpha + cd \sin \alpha$$

Подставляя вместо ab , bc и cd их значения получим

$$l_1 - l = -\epsilon \delta l \sin^2 \alpha + \delta l \cos^2 \alpha + \tau l \sin \alpha \cos \alpha$$

Разделив обе части равенства на l и обозначив $\frac{l_1 - l}{l}$ через Δ , где Δ есть относительное удлинение бруска в направлении Oa , получим:

$$\Delta = \delta \cos^2 \alpha - \epsilon \delta \sin^2 \alpha + \tau \sin \alpha \cos \alpha \quad (A)$$

Найдем теперь направление, в котором получается наибольшее относительное удлинение под действием сил P и T . Для этого из уравнения $\frac{d\Delta}{d\alpha}$ найдем угол α . Составив эту производную и решив полученное уравнение, будем иметь:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\tau}{\delta(1 + \epsilon)}$$

Подставив это значение угла в выражение для Δ , определим направление, в котором произойдет наибольшее растяжение в бруске и получим $\Delta_{\max}$. Для того, чтобы выполнить это необходимо воспользоваться известными из тригонометрии формулами:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} \right\}$$

$$\operatorname{Sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\alpha = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{2\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}}$$

$$\operatorname{Sh}^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{ch} 2\alpha) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}} \right\}$$

По подстановке этих значений в формулу (а) найдем:

$$\Delta_{\max} = \frac{1}{2} \delta (1 - \xi) + \frac{1}{2} \sqrt{\delta^2 (1 + \xi)^2 + \tau^2} \quad (21)$$

Это и есть формула Сен-Венана. Она определяет величину наибольшего относительного удлинения, появляющегося в бруске под действием сил Р и Т. При выводе этой формулы предполагалось, что материал бруска изотропный, т. е. однородный по всем направлениям, но в практике этого обычно не бывает: материал бруска в продольном и поперечном направлениях почти всегда неоднороден, например прокатанное железо и сталь обладают большим сопротивлением в продольном направлении, чем в поперечном. Ввиду этого Бах вводит в последнюю формулу коэффициент α_0 с целью учесть неоднородность материала по разным направлениям.

С этим коэффициентом формула приобретает вид:

$$\Delta_{\max} = \frac{\delta}{2} (1 - \xi) + \frac{1}{2} \sqrt{\delta^2 (1 + \xi)^2 + (\alpha_0 \tau)^2} \quad (21')$$

по Баху $\alpha_0 = 0,77 \frac{K_2}{K_1} \approx 0,8 \frac{K_2}{K_1}$

где K_2 — допускаемое напряжение на растяжение и K_1 — на сдвиг.

Вводя в формулу Сен-Венана вместо δ и τ и $\Delta_{\max}$ соответствующие им напряжения, найдем наибольшее напряжение

материала $p_{\max}$. Мы имеем $\delta = \frac{p}{E}$; $\tau = \frac{t}{\theta} = \frac{t}{\frac{2}{5}E} = \frac{5t}{2E}$ кро-

ме того $\Delta_{\max} = \frac{p_{\max}}{E}$.

Положив $\xi = \frac{1}{4}$, получим окончательно

$$p_{\max} = \frac{3}{8} p + \frac{5}{8} \sqrt{p^2 + 4(\alpha_0 t)^2} \quad (22) \leq$$

Эта формула особенно удобна для приложения в практике:

по ней мы всегда можем определить наибольшее напряжение, возникающее в бруске под действием растягивающей нагрузки, вызывающей нормальное напряжение p и срезающей, вызывающей касательное напряжение t . Пользуясь ею, можно вывести удобные формулы для расчетов в случае совместного действия различных видов нагрузки. Сила P , которую мы считали растягивающей, могла бы быть и сжимающей. Формула Сэн-Венана и для этого случая оказывается пригодной. В этом последнем случае надо положить $\alpha_0 \approx 0,8 \frac{k}{k_s}$, где k — допускаемое напряжение материала бруска на сжатие.

Расчет на совместное действие растяжения (сжатия) и сдвига.

§ 62. Пусть для какого-нибудь сечения бруска внешние силы приводятся к одной растягивающей (сжимающей) силе P и срезающей силе T . Если площадь бруска обозначим через F , а фиктивную растягивающую (сжимающую) силу, отвечающую напряжению $P_{\max}$ — обозначим через Q , то

$$p = \frac{P}{F}, \quad t = \frac{T}{F} \quad \text{и} \quad P_{\max} = \frac{Q}{F}$$

Подставляя эти значения p , t и $P_{\max}$ в формулу (22), по сокращении на F , получим:

$$Q = \frac{3}{8}P + \frac{5}{8}\sqrt{P^2 + 4(\alpha_0 t)^2} \dots \dots \dots (23)$$

Здесь $\alpha_0 \approx 0,8 \frac{kz}{k_s}$ в случае, если P — растягивающая сила,

и $\alpha_0 \approx 0,8 \frac{k}{k_s}$ если P — сжимающая сила. Таким образом

видим что совместное действие растягивающей (сжимающей) силы P и сдвигающей силы T может быть заменено действием одной фиктивной растягивающей (сжимающей) силы Q определяемой по формуле (23).

Поэтому для того, чтобы рассчитать брусок на совместное действие растяжения (сжатия) и сдвига, надо вычислить Q и затем по этой силе рассчитать брусок на простое растяжение (сжатие) этой — силой.

Расчет на совместное действие растяжения (сжатия) и кручения круглого цилиндрического тела.

§ 63. Пусть тело имеет цилиндрическую форму радиуса R и подвержено действию растягивающей (сжимающей) силы P и некоторого скручивающего момента M .

В этом случае $p = \frac{P}{\pi R^2}$; $t = \frac{MR}{J_0}$, где J_0 — полярный момент инерции сечения. Итак,

$$t = \frac{MR}{\frac{\pi R^4}{2}} = \frac{2M}{\pi R^3} \quad p_{\max} = \frac{Q}{\pi R^2}$$

если, как и в предыдущем случае, через Q обозначить фиктивную растягивающую (сжимающую) силу, заменяющую совместное действие растягивающей (сжимающей) силы P и крутящего момента M . Внося эти значения p , t и $p_{\max}$ в форм. (22), получим:

$$\frac{Q}{\pi R^2} = \frac{3}{8} \frac{P}{\pi R^2} + \frac{5}{8} \sqrt{\frac{P^2}{(\pi R^2)^2} + 4 \left[\alpha_0 \frac{2M}{\pi R^3} \right]^2}$$

Сокращая на πR^2 получим.

$$Q = \frac{3}{8} P + \frac{5}{8} \sqrt{P^2 + \left(\frac{4\alpha_0 M}{R} \right)^2} \quad (24)$$

Как видим, для расчета круглого цилиндрического тела на совместное действие растяжения (сжатия) и кручения надо по формуле (24) вычислить фиктивную растягивающую (сжимающую) силу Q и по этой силе рассчитать брусек на простое растяжение (сжатие).

В этой формуле α_0 надо считать $\alpha_0 = 0,8 \frac{k_2}{k_d}$, где k_2 — доп. напряжение на растяжение, k_d — доп. напр. на кручение.

В случае сжатия $\alpha_0 = 0,8 \frac{k}{k_d}$, где k — допускаемое напряжение на сжатие.

*) Этот момент M — моменту внешних сил, расположенных по одну сторону сечения, относительно оси бруска.

Расчет круглого цилиндрического тела на совместное действие изгиба и кручения.

§ 64. Пусть внешние силы, приложенные к круглому цилиндрическому бруску, для какого либо сечения дают моменты M_x , M_y и M_z (ось Z -ов предполагается направленной по оси бруска), тогда моменты M_x и M_y будут брусок изгибать в 2-х плоскостях (так что изгиб будет не плоский), а момент M_z будет брусок скручивать.

В случае круглого бруска совместное действие 2-х изгибающих моментов M_x и M_y , может быть заменено действием одного фиктивного изгибающего момента M_b .

$$M_b = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \quad (25)$$

Момент скручивающий брусок обозначим через M_d

$$M_d = M_z$$

Таким образом, брусок оказывается под действием 2-х моментов: M_b — изгибающего и M_d — скручивающего. Благодаря действию момента M_b — в точке сечения бруска, наиболее удаленной от нейтрального слоя, т. е. у его поверхности, возникает внутренняя сила:

$$p = \frac{M_b R}{J_x} = \frac{M_b R}{\frac{\pi R^4}{4}} = \frac{4 M_b}{\pi R^3}$$

Под действием крутящего момента M_d в точках сечения у поверхности бруска возникают касательные силы

$$t = \frac{M_d R}{J_\phi} = \frac{2 M_d}{\pi R^3}$$

Но если в сечении бруска возникнут и нормальные p и касательные t напряжения, то по формуле (12) мы можем всегда определить наибольшее напряжение материала R_{max} , происходящее от одного изгиба некоторым фиктивным изгибающим моментом M следовательно,

$$R_{max} = \frac{4 M_b}{\pi R^3}$$

Внося эти значения p , t и R_{max} в формулу (22), получим после сокращения

$$M = \frac{5}{8} Mb + \frac{5}{8} \sqrt{M^2 b + (\alpha_0 M d)^2} \quad (26)$$

Здесь α_0 — нужно считать равным $\alpha_0 \approx 0,8 \frac{K_b}{K_d}$, где K_b допускаемое напряжение материала на изгиб.
 K_d — на скручивание.

Таким образом для расчета круглого цилиндрического бруска на совместное действие изгиба и кручения по формуле (26) вычисляем фиктивный изгибающий момент и затем ведем расчет на простой изгиб от этого момента.

Расчет на совместное действие изгиба и сдвига.

§ 65. 1) Если брусок круглый цилиндрический, а расстояние между осями превышает $\frac{d}{4}$; где d diam. бруска — расчет ведется на один изгиб. При меньшем расстоянии между осями на один сдвиг.

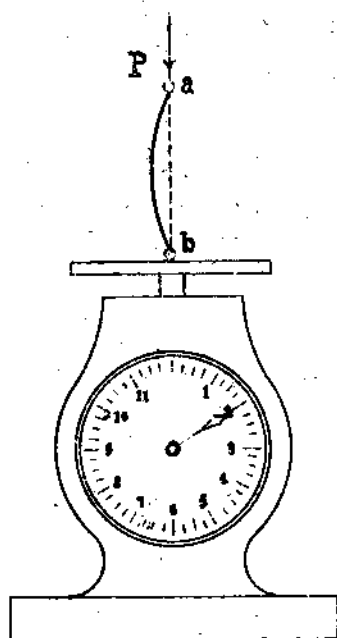
2) Если брусок прямоугольного сечения (большой размер в плоскости сил) а длина бруска больше $\frac{1}{3}$ большого размера сечения, брусок рассчитывается на один изгиб; в противном случае на один сдвиг.

Продольный изгиб или раздавливание

§ 66. Продольному изгибу или раздавливанию подвержены тонкие стержни значительной длины, находящиеся под действием осевой силы. Предположим, имеем брусок, одним концом заделанный в пол, а на другой конец действует сила P .

Опыт показывает, что пока значение P не достигнет известного опасного предела стержень сохраняет прямолинейную форму, но как только значение раздавливающей силы P достигнет известного критического значения, то при малейшем увеличении P брусок сразу получает очень большой изгиб при

чем стрела прогиба f почти не зависит от значения P . Можно сделать очень простой опыт, чтобы убедиться в этом: (чер.



Черт. 77.

77). Если на чашку весов поставим стержень ab и подвергнем давлению осевой силы P , отсчитываемой по циферблату весов, при которой стержень начнет изгибаться, то, почти не меняя величины силы, можно весьма значительно увеличить стрелу прогиба. Следовательно, в случае, если имеем такой набор длинный стержень, подверженный центральной сжимающей силе, нужно всегда следить, чтобы эта сила не достигла критического предела, при котором брусок начинает изгибаться. Поэтому длинные бруски кроме сжатия надо проверять еще на продольный изгиб.

Впервые для такого расчета дал формулу Эйлер. Он вывел ее таким образом.

Предположим, имеем брусок с свободными (шарнирными) концами, который уже согнулся.

Найдем ординату прогиба, полученного бруском, на расстоянии x от начала координат. Пусть эта ордината есть y (чер. 78). Отбросим часть бруска AO . Оставшаяся часть BO под действием внутренних сил, расположенных в сечении C и внешней силы P , приложенной в B , будет в равновесии.

Дифференциальное уравнение упругой линии будет

$$EJy'' = Mc = -Py$$

или

$$y'' + \frac{P}{EJ} y = 0$$

Полагая

$$\frac{P}{RJ} = a^2$$

найдем

$$y'' + a^2 y = 0$$

Как видим, уравнение упругой линии есть дифференциальное уравнение второго порядка. Чтобы найти общий интеграл, — необходимо проинтегрировать его 2 раза.

По двукратном интегрировании получим в результате:

$$y = C_1 \sin ax + C_2 \sin ax \dots (a)$$

где C_1 и C_2 произвольные постоянные интегрирования. Эти произвольные постоянные определим из 2-х условий, имеющих место для точки D — вершины стержня.

При $x = 0$ ————— $y' = 0$.

„ $x = 0$ ————— $y = f$.

Продифференцировав уравнение (a), найдем

$$y' = -C_1 a \sin ax + C_2 a \sin ax$$

Полагая в этом уравнении

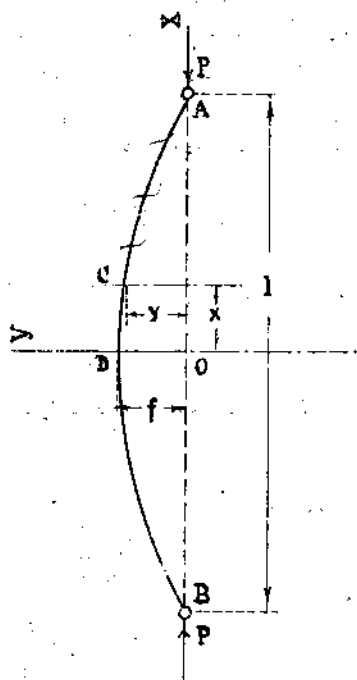
$$x = 0; \quad y' = 0.$$

получим:

$$0 = C_2 a$$

или

$$C_2 = 0.$$



Черт. 78.

Для определения C_1 , полагаем в уравнении (а) $x=0$; $y=f$.
Тогда $f=C_1 \cdot 1$ т. е. $C_1=f$

Поэтому общий интеграл оказывается таков

$$y = f \sin ax$$

Для точки А при $x = \frac{l}{2}$ — $y=0$, т. е.

$$0 = f \sin \left(a \cdot \frac{l}{2} \right)$$

а это имеет место, если $\frac{al}{2} = \frac{\pi}{2}$ или $al = \pi$

Вместо a подставим его выражение $a = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$;

будем иметь

$$l \sqrt{\frac{P}{EJ}} = \pi$$

откуда

$$P = \pi^2 \frac{EJ}{l^2} \dots \dots \dots (27)$$

Это и есть формула Эйлера, выражающая предельное значение P , при котором деформация сразу делается очень значительной. Обыкновенно формулу пишут в таком виде:

$$nP = \pi^2 \frac{EJ}{l^2} \dots \dots \dots (27)$$

где n — коэффициент безопасности, который принимается для стали $n=5$, для дерева $n=10$. *уменьше 8*

J — в этой формуле *наименьший* экваториальный момент инерции сечения. Эта формула применяется, когда оба конца стержня могут свободно поворачиваться около точек A и B .

Если один конец бруска неподвижно заделан в пол, а другой свободен, то для этого случая, если повторим вывод, убедимся в справедливости формулы:

$$nP = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{EJ}{l^2} \dots \dots \dots (28)$$

Если бы был такой случай, что нижний конец укреплен неподвижно, а верхний лишь мог бы поворачиваться около верхней точки, не сходя с оси АВ, то тогда формула приобрела бы такой вид:

$$nP = 2\pi^2 \frac{EJ}{l^2} \dots (29).$$

Наконец, если оба конца были заделаны, то тогда формула имела бы вид

$$nP = 4\pi^2 \frac{EJ}{l^2} \dots (30).$$

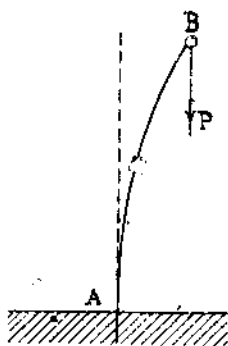
Этим исчерпываются все возможные случаи расчета на продольный изгиб.

Формула Ренкина и Шварца.

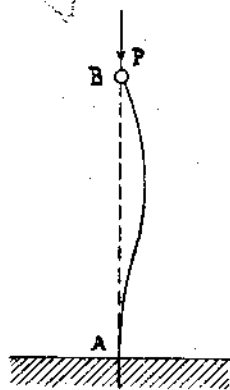
§ 87. В недавнее сравнительно время для проверки прочности длинных стержней на продольный изгиб пользовались след. формулой Ренкина и Шварца

$$P = \frac{FK}{1 + \mu l^2 \frac{F}{J}} \dots (31)$$

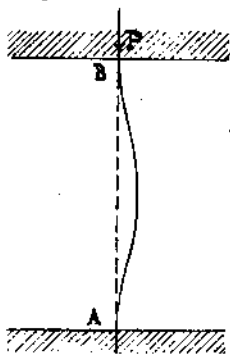
где P — нагрузка в кгш. сжимающая стержень; K — допуск. напряжение материала стержня на сжатие в кгш./мм²; F — площ. попер. сечения стержня в мм²; l — длина его в мм; J —



Черт. 79.



Черт. 80.



Черт. 81.

наименьший мом. инерции сечения в mm^4 ; μ — некоторый практический коэффициент, равный:

$$\begin{aligned}\mu &= 0.00016 & \text{— для чугуна, колонн. и стоек,} \\ \mu &= 0.00016 & \text{— для деревянных брусьев,} \\ \mu &= 0.00008 & \text{— для железных стержней,} \\ \mu &= 0.00004 + 0.00006 & \text{— для стальных стержней.}\end{aligned}$$

Иногда в формулу вводят наименьший радиус инерции сечения

$$r = \sqrt{\frac{J}{F}}$$

тогда формула получает вид;

$$P = \frac{Fk}{1 + \mu \left(\frac{l}{r}\right)^2} \quad (31')$$

На основании опытов Баушингера и исследования Циммермана, формула Ренкина и Шварца не оправдывается научно, и потому лучше пользоваться форм. Эйлера.

Многие ученые были противниками формулы Эйлера (например Клебш), они говорили, что эта формула приводит к абсурдному заключению, а именно, что одной и той же силе может соответствовать много физических состояний одного и того же бруска. Когда сила достигает известного предела, то может получаться различное значение стрелы прогиба f для одной и той же силы P . Формула не дает зависимости между деформациями и силой.

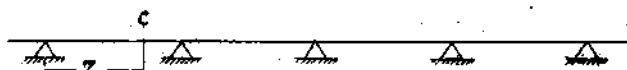
Позднейшие опыты Баушингера показали, что расчет по формуле Эйлера наиболее верен, и ее следует предпочитать перед другими.

Еще ставили в упрек формуле Эйлера, что в нее не входит допускаемое напряжение. Но это учитывает коэффициент n , — указывающий запас прочности, принимаемый при расчете.

VI. Многоопорные балки.

§ 68. Если балка свободно лежит на нескольких опорах, то в точках опоры появляются нагибающие моменты, называемые надпорными моментами, исключая лишь крайних опор, где эти моменты равны нулю.

В опорах возникают реакции, кои по своей величине отличны от реакций, возникающих у балки, лежащей на 2-х опорах.



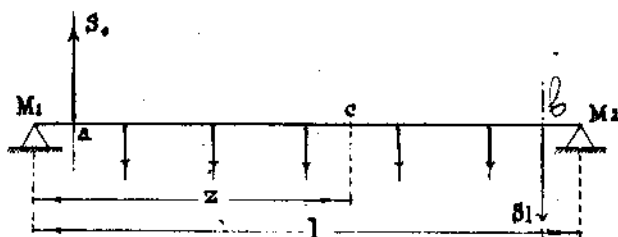
Черт. 82.

Вопрос о расчете многоопорной балки будет решен, когда сумеем найти для всех опор надпорные моменты и реакции, и кроме того если сможем вычислить изг. момент M и S — сумму сил для любого сечения балки C , взятого на расстоянии Z от крайней опоры (причем условимся при вычислении M и S брать силы, расположенные левее сечения *).

Выделим какой-нибудь пролет балки; затем 2-мя сечениями a и b , расположенными близк. близко к опорам так, что „ a “ находится несколько правее левой опоры, а „ b “ несколько левее правой, выразим часть балки ab . (черт. 83).

Если величина надпорного момента в левой опоре будет M_1 , — в правой M_2 , а сумма сил в левой опоре будет S_0 , а в правой S_1 то действие левой отрезанной части на оставшуюся ab выразится моментом M_1 и силой S_0 ; действие же правой отрез-

*) При чем положит. будем считать силы, направл. вверх, отриц. — вниз.



Черт. 83.

данной части на ab выразится моментом ($-M_2$) и силой ($-S_1$), которые взяты со знаком минус, вследствие того, что они относятся к силам, расположенным правее сечения b .

Зная величины M_1 и M_2 опорных моментов, можно для любого сечения балки C выразить через них изгиб. мом. M и сумму сил S , а равно определять реакции опорных точек K доказательству этого положения мы сейчас и перейдем.

Пусть на вырезанную часть балки действуют некоторые внешние силы; тогда изгибающий момент M в любой точке C этой части балки будет равен:

$$M = M_1 + S_0 z - m z \quad (32)$$

где mz — есть сумма моментов относительно точки C всех внешних заданных сил, расположенных по длине aC .

Сумма сил для этого сечения:

$$S = S_0 - p z \quad (33)$$

где pz есть величина нагрузки балки на длине aC (иначе говоря алгебраическая сумма внешних заданных сил, приложенных на участке aC).

Пользуясь выражением (32) для M , можем применить его к сечению b и написать:

$$M_2 = M_1 + S_0 l - m l \quad (34)$$

где $l = ab$, (ввиду бесконечной близости точек a и b к опорам). Из равенства (34) имеем:

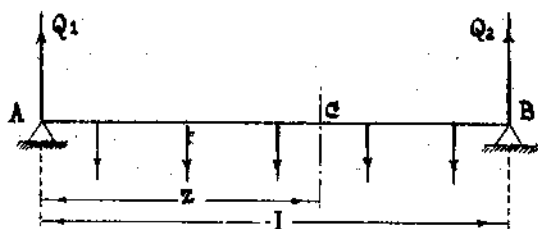
$$S_0 = \frac{M_2 - M_1 + m l}{l}$$

Внесем это значение S_0 в выражения (32) и (33):

$$M = M_1 + \frac{M_2 - M_1}{l} Z + \frac{m_1}{l} Z - m_z \dots \dots (35)$$

$$S = \frac{M_2 - M_1}{l} + \frac{m_1}{l} - P_z \dots \dots (36)$$

Предположим, что вырезанная часть балки лежит свободно на двух опорах и находится под действием тех же внешних сил, как расположены в пролете ab . Черт. 84.



Черт. 84.

В этом случае в опорах появятся реакции Q_1 и Q_2 , которые найдем, взяв сумму моментов всех сил относительно точек опоры. Найдем реакцию Q_1 ; для этого напишем:

$$Q_1 l - m l = 0$$

откуда

$$Q_1 = \frac{m l}{l}$$

Составим выражение изгибающего момента для любого сечения „C“ в предположении, что часть балки AB свободно лежит на 2-х опорах и не связана с другими частями балки; мы найдем:

$$M_z = Q_1 z - m z = \frac{m l}{l} Z - m z$$

Подставляя в равенства (35) и (36) вместо $\frac{m l}{l} Z + m z$ — M_z и

вместо $-\frac{m_1}{l} \dots Q_1$, получим окончательно

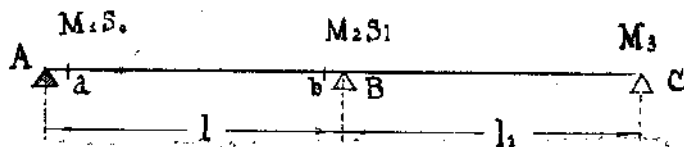
$$M = M_1 + \frac{M_2 - M_1}{l} Z + M_2 \dots \dots \dots (37)$$

где S_z — сумма сил для случая, как пролет вырезан и свободен на 2 опорах.

$$S = \frac{M_2 - M_1}{l} + Q_1 - P_z = \frac{M_2 - M_1}{l} + S_z \dots \dots \dots (38)$$

По этим формулам можно вычислить M и S для любого сечения, зная надпорные моменты и изгибающий момент M_z , вычисленный в предположении, что пролет вырезан из балки, свободной лежать на 2-х опорах и находится под действием, сил фактически приложенных в этом пролете, а также зная Q_1 и P_z , вычисленные в том же предположении.

Пользуясь выражением суммы сил для произвольного сечения, найдем выражения для суммы сил — для сечения „а“, взят-



Черт. 85.

того бесконечно близко, но несколько правее левой опоры рассматриваемого пролета и для сечения „b“, взятого бесконечно близко, но несколько левее правой опоры; обозначим их через S_0 и S_1 . (Черт. 85).

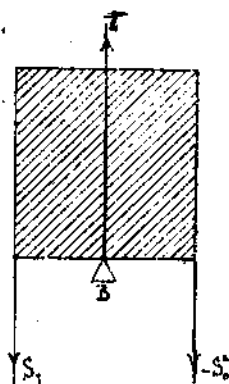
$$S_0 = \frac{M_2 - M_1}{l} + Q_1 \dots \dots \dots (39)$$

$$S_1 = \frac{M_2 - M_1}{l} + Q_1 - P_z \dots \dots \dots (40)$$

Найдем реакции какойнибудь опоры B; для этого 2-мя сечениями бесконечно близкими к опоре, из коих одно левее, другое правее опоры, вырежем бесконечно малый элемент балки. Действие левой отрезанной части на оставшуюся выразится силой S_1 .

Действие правой части на оставшуюся выразится силой $(-S_0)$; тогда реакция T выразится (см. черт. 86) так

$$T = -[S_1 + (-S_0^1)] = -S_1 + S_0^1 \quad (41)$$



Черт. 86.

Здесь S_1 определяется по формуле (40), а для S_0^1 надо воспользоваться формулой (39), перенеся ее так

$$S_0^1 = \frac{M_3 - M_2}{l_1} + Q_1^1 \quad (42)$$

где Q_1^1 — величина реакции опоры B , получающейся под действием сил, расположенных в пролете BC , — (черт. 85) — в предположении, что этот пролет вырезан и свободно лежит на опорах B и C . Подставив вместо S_1 и S_0^1 их значения, получим

$$T = -\frac{M_3 - M_1}{l} - Q_1 + P_1 + \frac{M_3 - M_2}{l_1} + Q_1^1$$

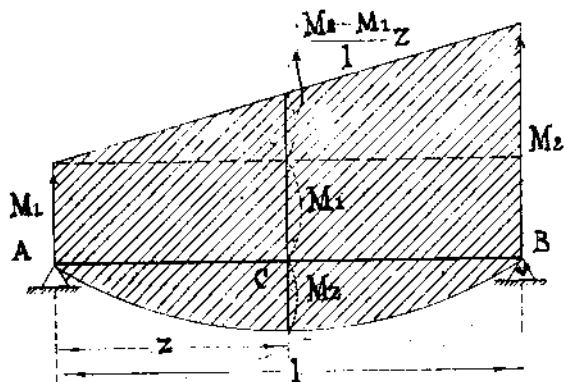
но $P_1 - Q_1 = Q_2$ — реакции опоры B от нагрузки левого пролета. Поэтому

$$T = \left(\frac{M_1 - M_2}{l} + Q_2 \right) + \left(\frac{M_3 - M_2}{l_1} + Q_1^1 \right)$$

Для крайних опор многопролетной балки, для левой опоры в выражении T преспадет первый член, а для крайней правой

опоры пропадает второй член. Выр-е для изгиб. момента K для любого сечения может быть построено графически, если определены надпорные моменты.

Рассмотрим пролет AB (черт. 87); в точке A отложим надпорный момент M_1 в некотором масштабе; то же и в точ-



Черт. 87.

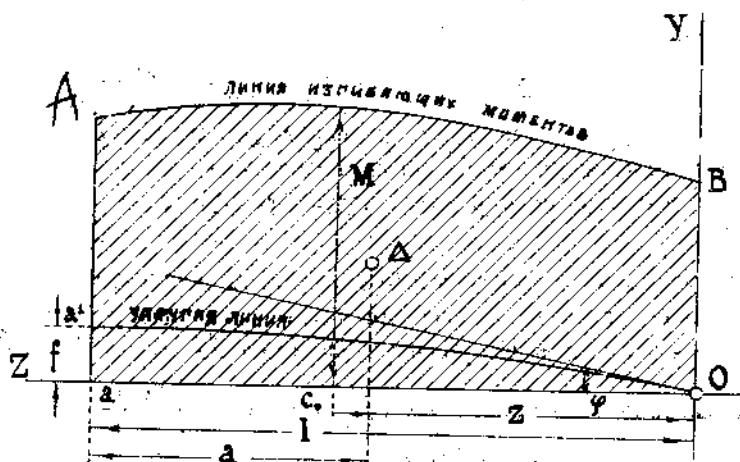
ке B . Концы отрезков M_1 и M_2 соединим; затем построим по правилам статики площадь изгибающих моментов от внешних заданных сил в предположении, что часть балки AB вырезана и свободно лежит на 2-х опорах. Эта площадь будет ограничена некоторой кривой, ординаты коей и укажут M_z для любого сечения. Тогда отмеченная на черт. 87 ордината всей заштрихованной площади и представит собой M для любого сечения C , согласно формулы (37).

§ 69. Лемма. Докажем сейчас одно рав-о, которое назовем леммой, так как оно для дальнейшего развития теории многопролетных балок не понадобится, а нужно только для доказательства одной теоремы.

Примем точку O - центр тяжести одного из сечений балки, за начало координат, ось OZ направим параллельно первоначальной оси балки (до изгиба), OY — как указано на черт. 88.

Пусть AB кривая изгибающих моментов на протяжении

AB. Ox^1 — изогнутая ось балки (упругая линия). Тогда ордината M кривой AB представит изгибающий момент для сечения C_0 на расстоянии Z от начала O .



Черт. 88.

Дифференциальное уравнение упругой линии дает

$$EJy'' = M \quad \text{или} \quad EJ \frac{d(y')}{dz} = M$$

откуда

$$EJd(y') = Mdz$$

Принтегрировав последнее уравнение один раз, получим:

$$EJy' + C_1 = \left[\int Mdz \right]_z \quad (43)$$

Для определения C_1 заметим, что в начале координат при $z=0$, $y' = \operatorname{tg} \varphi$. Следовательно,

$$EJ \operatorname{tg} \varphi + C_1 = \left[\int Mdz \right]_0 \quad (44)$$

Вычитая из (43) — (44), находим:

$$EJ(y' - \operatorname{tg} \varphi) = \int_0^z Mdz$$

или

$$EJ\left(\frac{dy}{dz} - \operatorname{tg} \varphi\right) = \int_0^z M dz$$

или

$$EJ dy = EJ \operatorname{tg} \varphi dz + dz \int_0^z M dz$$

Проянтегрировав это уравнение, будем иметь

$$EJy + C_2 = EJz \operatorname{tg} \varphi + \left[\int dz \int_0^z M dz \right]_z \quad (45)$$

Замечая, что при $z = 0$ — $y = 0$, найдем:

$$0 + C_2 = 0 + \left[\int dz \int_0^z M dz \right]_0 \quad (46)$$

Вычитая из (45) — (46), получим

$$EJ(y - z \operatorname{tg} \varphi) = \int_0^z dz \int_0^z M dz \quad (47)$$

Для нахождения последнего интеграла обозначим $\int_0^z M dz = U$

Тогда

$$dU = M dz$$

Интегрируя по частям, получим

$$\int_0^z dz U = [Uz]_0^z - \int_0^z z M dz = \\ \left[z \int_0^z M dz \right]_0^z - \int_0^z z M dz$$

Отсюда, замечая, что при $z = l$, $y = f$, и подставляя эти значения z и y в равенство (47), придадим ему вид

$$EJ(f - l \operatorname{tg} \varphi) = \int_0^l l M dz - \int_0^l z M dz$$

Соединяя два последних интеграла в один, имеем:

$$EJ(f - l \operatorname{tg} \varphi) = \int_0^l (l - z) M dz \quad (48)$$

Геометрически интеграл, написанный в правой части рав-а, выражает статический момент площади Δ_{aAB} относительно точки a .

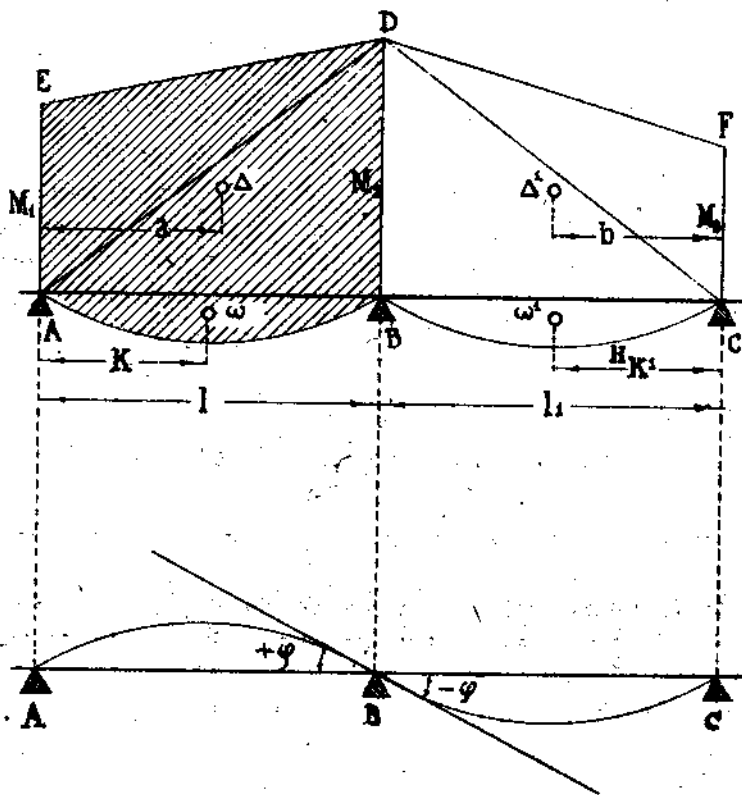
Если Δ — площадь диаграммы моментов, a — расстояние (по оси z) ее центра тяжести до точки a , то $\int_0^l (l - z) M dz = a \Delta$ и из равенства (48)

$$f = l \operatorname{tg} \varphi + \frac{a \Delta}{EJ} \quad (49)$$

Это равенство выражает сущность доказываемой леммы. Оно дает возможность вывести так называемую „теорему 3 моментов“ или уравнение Клапейрона.

Теорема 3-х моментов или уравнение Клапейрона.

§ 70. Возьмем два соседних пролета многоопорной балки, — пусть это будут AB и BC . Величины надопорных моментов пусть будут M_1 , M_2 и M_3 . $AEDFC$ — будет диаграммой надопорных моментов. (Черт. 89). Кривые моментов от внешних сил пусть будут AGB и BHC ; в предположении, что балка



в этих пролетах над опорами разрезана, и каждая часть ее лежит свободно на 2-х опорах.

Всю левую площадь моментов $AEDBGA$ обозначим через Δ , а правую $BDFCHB$ — через Δ^1 . Площадь Δ можем рассматривать, как состоящую из 3-х частей: AED , ADB и AGB . Аналогично и Δ^1 . Площади AGB и BHC ради краткости обозначим через ω и ω^1 . Проекцию на AB расстояния центра тяжести площади Δ до левой опоры обозначим через a , соответственно, проекцию расстояния центра тяжести площади Δ^1 до правой опоры через b ; соответственные проекции расстояния центров тяжести площадей ω и ω^1 до тех же опор обозначим через k и k^1 .

Для общности предположим, что опоры A , B и C лежат не на одной высоте, например A выше B на величину f_1 , C выше B на f_2 . Тогда, применяя только что доказанную лемму, сможем написать:

$$f_1 = l \operatorname{tg} \varphi + \frac{a \Delta}{EJ}$$

и

$$f_2 = -l^1 \operatorname{tg} \varphi + \frac{b \Delta^1}{EJ}$$

Во втором равенстве перед первым членом второй части минус потому, что упругая линия в точке B неизменно должна иметь точку перегиба между φ и $(-\varphi)$. Исключив $\operatorname{tg} \varphi$ (находя его из каждого уравнения и сравнивая найденные выражения), получим

$$\frac{f_1}{l} - \frac{a \Delta}{EJl} = -\frac{f_2}{l^1} + \frac{b \Delta^1}{EJl^1}$$

или

$$\left(\frac{f_1}{l} + \frac{f_2}{l^1} \right) EJ = \frac{a \Delta}{l} + \frac{b \Delta^1}{l^1} \quad (50)$$

Несмотря, чему равны выражения в правой части уравнения (50)

$a \Delta$ — статический момент площади Δ относительно опоры A ,
 $b \Delta^1$ — статический момент площади Δ^1 относительно опоры C .

Разбивая Δ и Δ^1 на вышеупомянутые 3 площади, можем написать:

$$\frac{a \Delta}{l} = \frac{1}{l} \left[\frac{M_{11}}{2} \cdot \frac{l}{3} + \frac{M_{21}}{2} \cdot \frac{2l}{3} + \omega k \right] - \frac{1}{6} [M_{11} + 2M_{21}] + \frac{\omega k}{l}$$

$$\frac{b\Delta^1}{l_1} = \frac{1}{l_1} \left[\frac{M_3 l_1}{2} \cdot \frac{l_1}{3} + \frac{M_2 l_1}{2} \cdot \frac{2l_1}{3} + \omega^1 K^1 \right] =$$

$$= \frac{1}{6} [M_3 l_1 + 2 M_2 l_1] + \frac{\omega^1 K^1}{l_1}$$

Подставляя найденные значения $\frac{a\Delta}{l}$ и $\frac{b\Delta^1}{l_1}$ в правую часть равенства (50) получим:

$$\frac{1}{6} [M_1 l + 2 M_2 (l + l_1) + M_3 l_1] + \frac{\omega K}{l} + \frac{\omega^1 K^1}{l_1} = EJ \left(\frac{f_1}{l} + \frac{f_2}{l_1} \right) \quad (51)$$

Это выражение и представляет собой в аналитической форме теорему о 3-х моментах или так наз. уравнение Клапейрона.

§ 71. В практике под уравнением Клапейрона подразумевают частный случай, когда все опоры расположены на одной горизонтали, т. е. когда $f_1 = f_2 = 0$. Тогда это уравнение принимает такой вид:

$$\frac{1}{6} [M_1 l + 2 M_2 (l + l_1) + M_3 l_1] + \frac{\omega K}{l} + \frac{\omega^1 K^1}{l_1} = 0 \quad (52)$$

Для запоминания этого уравн. может служить такое простое мнемоническое правило. Надо построить диаграмму моментов (черт. 89) и затем, предполагая, что отдельные площади, входящие в эту диаграмму, весомы (при чем вес пропорционален площадям) написать, что сумма давлений на среднюю опору от площадей расположенных, левее и правее средней опоры, равна нулю.

Для каждого 2-х смежных пролетов балки можно написать одно уравнение Клапейрона, которое связывает 3 надопорных момента. Если балка лежит на n опорах, то таких уравнений можно написать $n - 2$. Над каждой опорой имеется неизвестный надопорный момент. Число этих моментов $M_1 M_2 \dots M_n$ будет n ; но для крайних опор эти моменты равны нулю.

Следовательно M_1 и M_n равны нулю, поэтому неизвестных моментов будет только $n - 2$, а именно: $M_2, M_3 \dots M_{n-1}$. Таким образом они вполне определяются из $n - 2$ уравнений Клапейрона. А так как мы видели, что изгибающий момент для любого сечения любого пролета балки,

а равно и сумма сил для этого сечения выражаются в функции надпорных моментов, то значит оба эти количества M и S , от которых зависят прочные размеры сечения, будут нам известны после того, как будут вычислены надпорные моменты. Точно также будут известны и реакции опор, которые, как мы видели, выражаются через сумму сил, вычисленных для 2-х бесконечно близких к опоре сечений, из коих одно берется левее опоры, а другое правее опоры.

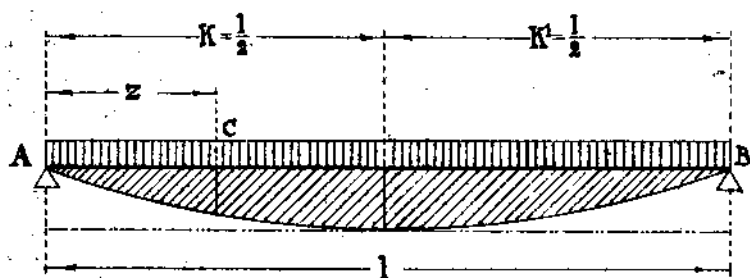
Таким образом расчет многоопорной балки сводится в конце концов к вычислению надпорных моментов, т. е. к решению одного или нескольких уравнений Клапейрона.

Остается показать еще, как выражаются для равномерно распределенной и сосредоточенной нагрузок члены $\frac{\omega K}{l}$ и $\frac{\omega^1 K^1}{l_1}$.

Выражения $\frac{\omega K}{l}$ и $\frac{\omega^1 K^1}{l_1}$ для разных видов нагрузок.

1) Нагрузка равномерно распределенная.

§ 72. Пусть величина нагрузки на каждую единицу длины балки p . (Черт. 90).



Если возьмем сечение C на расстоянии Z от левой опоры, то, предполагая, что вырезанная часть балки свободно лежит на 2-х опорах и находится под действием только равномерно распределенной нагрузки p , — найдем

$$Mz = \frac{pl}{2} z - pz \frac{z}{2} = \frac{pz}{2} (l - z)$$

Наибольший момент будет в середине при $Z = \frac{l}{2}$

Наибольшая ордината кривой изгибающих моментов

$$M_{z \max} = \frac{pl^2}{8}$$

Рассматривая выражения M_z , видим, что кривая моментов будет параболой, наибольшая ордината которой $\frac{pl^2}{8}$. Как известно, площадь ограниченная параболой равна $2/3$ площади описанного около параболы прямоугольника.

Следовательно, площадь

$$\omega = \frac{2}{3} \cdot \frac{pl^2}{8} \cdot l = \frac{pl^3}{12}$$

Поэтому

$$\frac{\omega K}{l} = \frac{pl^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{pl^3}{24}$$

так как

$$K = \frac{l}{2}.$$

Так можно найти $\frac{\omega K}{l}$ в случае равномерной нагрузки.

Очевидно,
$$\frac{\omega^1 K^1}{l_1} = \frac{\omega K}{l} = \frac{pl^3}{24}$$

Составим теперь выражения для $\frac{\omega K}{l}$ и $\frac{\omega^1 K^1}{l_1}$ для случая сосредоточенной нагрузки.

2) Сосредоточенная нагрузка. (Черт. 91).

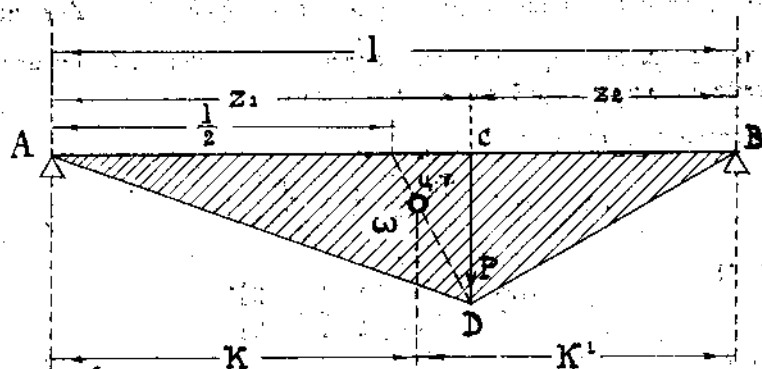
§ 73. Пусть в балке АВ в точке С приложена сила Р. Площадь моментов имеет вид АDB. Высота площади CD, представляющая собой наибольший изгибающий момент от силы Р, будет равна

$$CD = M_{\max} = \frac{Pz_1 z_2}{l}$$

Следовательно площадь треугольника АDB равна

$$\omega = \frac{l_{CD}}{2} = \frac{Pz_1 z_2}{2}$$

Найдем чему равняется K , т. е. проекция на ось Z расстояния центра тяжести от левой опоры.



Черт. 91.

$$K = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \left(z_1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3} (1 + z_2). \quad \text{Аналогично с этим}$$

$$K^1 = \frac{1}{3} (1 + z_1).$$

Следовательно: $\frac{\omega K}{1} = \frac{P}{2} z_1 z_2 \cdot \frac{1}{3} (1 + z_1) \frac{1}{1}$

Заменяя z_2 через $1 - z_1$ получим:

$$\text{Очевидно: } \frac{\omega^1 K^1}{1} = \frac{\omega K}{1} = \frac{P}{6l} z_1 (1^2 - z_1^2)$$

(ибо $z_1 - 1 = -z_2$).

VII. Шарнирные или сочлененные системы (фермы).

§ 74. В частях машин, работающих на изгиб, материал в значительной мере оказывается неиспользованным, так как напряжения, возникающие при изгибе в каком-либо сечении, распределяются таким образом, что в точках сечения близ нейтрального слоя материал совсем не работает (ибо напряжение в этих точках равно нулю), а максимум работы приходится на волокна, наиболее удаленные от нейтрального слоя, где напряжение материала максимальное.

Таким образом, благодаря неравенству в напряжении материала, части изгибаемого бруса, расположенные на периферии оказываются наиболее нагруженными, между тем, как части вблизи оси бруса совершенно не работают.

В виду этого следует по возможности избегать подвергать части машин и других инженерных сооружений изгибу, а необходимо стараться конструировать их таким образом, чтобы они работали исключительно на растяжение или сжатие.

Этого оказывается возможным достигнуть, если придавать изгибаемой части форму не сплошного тела, а имеющего решетчатое строение, составленного из отдельных треугольных элементов, связанных в вершинах шарнирами, примером чему могут служить фермы мостов, стропильные фермы, фермы крановых путей и т. п.

Такие сочлененные системы или *фермы*, составленные из треугольников с шарнирами в вершинах, обладают тем свойством, что в каждом элементе такого треугольника (т.-е. в каждой стороне) возникают напряжения или от растяжения или от сжатия, но ни в коем случае не от изгиба, если только внешние силы,

действующие на ферму, приложены в вершинах треугольников или как говорят, в *узлах*.

Это делается понятным, если вспомнить теорему статики, что тело, имеющее две точки, около которых оно может вращаться, может оставаться в равновесии под действием двух сил, приложенных в этих точках, только тогда, когда эти силы равны и прямо противоположны, т.-е. направлены по прямой, соединяющей эти две точки. Под действием же таких двух равных и прямо противоположных сил каждый из элементов (сторон) треугольников, составляющих ферму, может быть только или растянут или сжат.

При условиях, что все вершины (узлы) треугольников имеют шарниры, и внешние силы приложены только в узлах, вся шарнирная система (ферма) является статически определенной, т.-е. напряжения всех составляющих ее стержней могут быть определены, при помощи одних лишь условий равновесия статики. Докажем это.

Для этого заметим, что если взять первый треугольный элемент фермы, в котором три узла и три стержня, и к нему присоединить второй элемент, то при этом присоединении получится один новый узел и два новых стержня. Для присоединения последующего элемента потребуется образование еще одного нового узла и двух новых стержней. Вообще для присоединения какого угодно по порядку элемента к существующим необходимо образование одного узла, получающегося в пересечении двух новых стержней, что справедливо для всех элементов системы, кроме первого, где трем узлам соответствуют три стержня.

Поэтому, если число узлов будет n , а число стержней m , то у статически определенной фермы должна быть зависимость:

$$m = 2n - 3$$

ибо если число стержней таково, то выдвигая отдельные узлы и составляя для них условия равновесия, получим достаточное число уравнений, из которых напряжения стержней могут быть определены.

На самом деле, вырезая из фермы какой либо узел, обозначая неизвестные напряжения входящих в него стержней через $x, y, z, \dots$, а внешнюю силу, приложенную в узле, через

Р, и принимая во внимание, что эти силы будут сходящимися и, кроме того, лежащими в одной из плоскости, видим, что для выделенного узла можно написать два условия равновесия. Если же всего узлов в системе будет n , то, поступая указанным образом с каждым из них в отдельности, мы получим $2n$ условий равновесия, из которых необходимо должны быть исключены три уравнения, представляющие условия равновесия только одних внешних сил, приложенных к ферме (включая сюда и реакции опор). В результате у нас остаются $2n - 3$ условия, которые и послужат для определения неизвестных напряжений в стержнях.

§ 75. Фермы, в которых число стержней меньше чем $2n - 3$, называются *фермами с недостающими стержнями* (черт. 92). Такие фермы, если в узлах применены шарниры, не могут оставаться в положении устойчивого равновесия при всяком расположении внешних сил. Для придания таким фермам, как говорят, „жесткости“ (в целях сохранения их формы) в некоторых узлах (отмечены на черт. 92 заливной узлов) делают уже не шарнир-

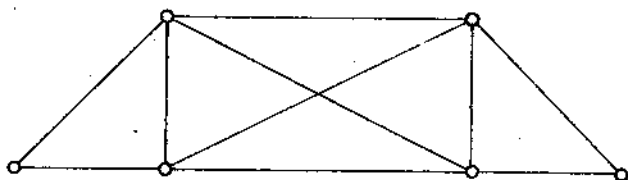


Черт. 92.

ные, а так называемые „жесткая“ соединения, применяя клежку при металлических и врубку при деревянных конструкциях.

Системы, где число стержней больше, чем $2n - 3$, называются „фермами с лишними стержнями“.

В изображенном на черт. „93“ примере лишней является одна из диагоналей среднего прямоугольника.



Черт. 93

В этом случае для определения напряжения стержней одних статических условий равновесия системы недостаточно.

Необходимо принять во внимание упругие свойства материала, т.-е. получающуюся деформацию.

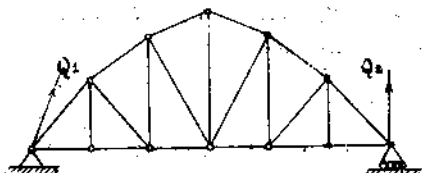
Заметим, что как ферму, изображенную на чертеже 92, так и ферму чертежа 93, можно сделать статически определенными, если у первой добавить одну из диагоналей среднего прямоугольника, и у второй сделать шарнир в пересечении этих диагоналей.

Мы ограничимся в дальнейшем рассмотрением только статически определенных систем.

Определение напряжений стержней статически определенных ферм.

§ 76. Для определения напряжений было предложено в разное время много различных способов. Мы рассмотрим здесь способы Кульмана, Риттера, способ последовательного вырезания узлов и определения напряжений посредством построения взаимных диаграмм Максвелла-Кремона.

Прежде чем указать эти способы заметим, что фермы располагаются на опорах одним из двух способов: 1) ферма своими крайними шарнирами присоединяется неподвижно к опоре. В этом случае реакции опорной точки Q , может иметь произвольное направление, определяемое из условия равновесия одних внешних сил; или 2) опора делается так, что конец фермы может скользить по бегункам. (Черт. 94).



Черт. 94.

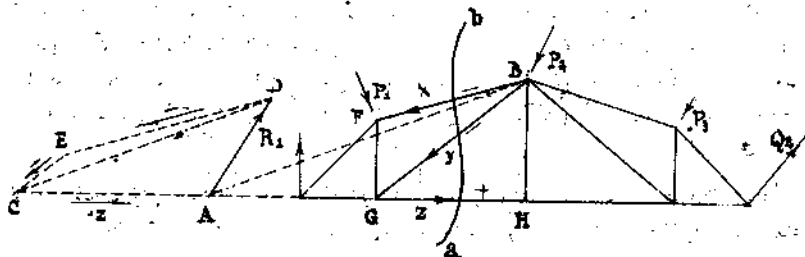
В этом случае реакция Q_2 должна быть направлена нормально к плоскости опоры или поверхности бегунка. Обыкновенно один конец фермы имеет опору на катках, другой конец неподвижную опору.

Способ Кульмана.

§ 77. Пусть имеем какую либо ферму (черт. 95). Проведем какую либо поверхность ab , которая перерезала бы ферму так, чтобы три ее стержня оказались разрезанными, и напишем условия равновесия левой, отрезанной части фермы, при тем неизвестных напряжениях перерезанных стержней обозначим x, y, z .

Для определения этих напряжений x, y, z Кульман поступает так: пусть равнодействующая внешних сил, приложенных к левой отрезанной части фермы (т.-е. сил P_1 и Q_1) будет R_1 .

Продолжим эту равнодействующую до пересечения с силой Z в точке A . Перенесем R_1 в эту точку и соединим точки A и B .



Черт. 95.

Сила R_1 уравнивается тремя силами x, y, z , но вместо двух сил x и y возьмем силу, направление которой совпадало бы с AB . Эта сила, а также сила z , определяются графически, если построить треугольник на силе R_1 , у которого две другие стороны были бы направлены параллельно z и AB .

Пусть это будет треугольник ABC .

Затем силу CD заменим двумя силами параллельными x и y , для чего через точки C и D ведем прямые параллельно этим силам.

Тогда DE, CE, CA представят искомые напряжения x, y и z , при чем так как эти напряжения уравниваются с R_1 , то направления их определяются из того условия, что в многоугольнике $ADEC$ все стороны должны иметь одно течение. Направление сил отметим и на ферме. Эти силы x, y и z представляют собой действия соответствующих стержней на узлы F .

и Q . Нетрудно сообразить, что, при указанном направлении сил, стержни FB и GB будут сжаты, а стержень GH растянут.

Сжатие стержня мы будем отмечать знаком минус, растяжение — знаком плюс.

Таким образом, можно всегда определять напряжения стержней, если только стержней с неизвестными напряжениями попадет в сечение не свыше трех. Но этого всегда можно добиться, проводя сечение в такой последовательности, чтобы узлы, в которых сходятся больше трех стержней, оказались перерезанными после того, как напряжения излишних сверх трех стержней уже определены.

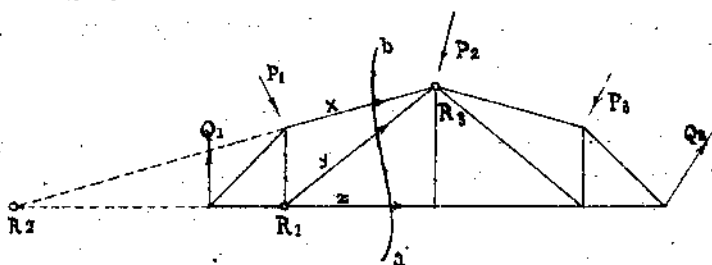
Заметим между прочим, что напряжение какого либо стержня (например x) определяемое из условия равновесия узла F будет численно равно, но по направлению прямо противоположно напряжению того же стержня, определяемому из условий равновесия узла B .

Но это и понятно, так как внутренние силы существуют всегда парно и всегда равны и прямо противоположны.

Способ Риттера.

§ 78. Способ Риттера отличается тем удобством, что дает возможность определять напряжение любого стержня, независимо от напряжений остальных стержней.

Возьмем ту же самую ферму, (черт. 96) и перережем ее на две части, как и раньше. Напряжения перерезанных стержней обозначим x, y, z .



Черт. 96.

Для определения x имеем условие равновесия сил, приложенных к левой отрезанной части фермы, заключающееся в том, чтобы сумма моментов всех сил (т. е. Q_1, P_1, x, y, z) относительно точки R_1 равнялась нулю. Нетрудно видеть, что силы y и z в уравнение не войдут, ибо они проходят через центр моментов R_1 .

Значит, в уравнение войдет только одно неизвестное x , которое мы легко и определим.

Для нахождения напряжения y напишем, что сумма моментов всех сил относительно точки R_2 равна нулю.

Для нахождения z напишем то же условие для моментов всех сил, относительно точки R_3 .

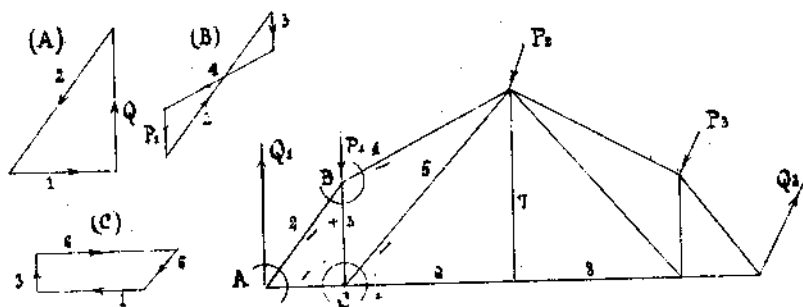
Точки R_1, R_2, R_3 — будем называть „точками Риттера“.

Напряжения x, y, z будем считать направленными, как указано на чертеже, но если по вычислении какая либо из этих сил выйдет отрицательной, то это будет служить указанием, что лиричное направление для этого напряжения должно быть умножено на прямо противоположное.

В рассмотренном примере мы получили бы x и y отрицательными, а потому направления этих напряжений, по вычислению их, должны быть изменены на прямо противоположные.

Способ последовательного вырезания узлов.

§ 79. Имеем ферму, представленную на черт. 97. Прямой сечением вырезаем мысленно первый узел (с известной ре-



Черт. 97.

акцией Q_1 и неизвестными напряжениями стержней 1 и 2) и замечаем, что силы эти находятся в равновесии, а потому, проводя через начало и конец отрезка, графически выражающего силу, Q_1 , линии параллельные AB и AC , получим самозамкнутый треугольник сил $Q_1, 1, 2$, откуда графически и определяются эти последние, неизвестные напряжения.

Теперь переходим к следующим узлам, таким образом, однако, чтобы неизвестных было в каждом случае не более двух.

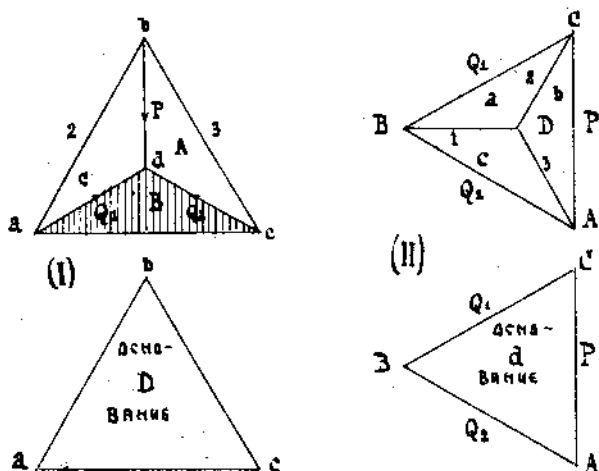
При переходе от узла к узлу, необходимо, очевидно, менять знаки напряжений, определенных ранее, ибо сжимающее, например, направление при узле A в стержне 2, оставаясь сжимающим и при узле B , очевидно изменится на прямо противоположное, что нетрудно усмотреть прямо из чертежа.

§ 80. На практике при определении напряжений по этому способу обычно строят, так называемые *взаимные диаграммы Максвелла-Кремона*.

Они основаны на теории взаимных фигур и представляют собой не что иное, как совокупность построенных только что силовых многоугольников, соединенных между собою равнозначущими сторонами.

Схема построения взаимных диаграмм разъясняется следующими примерами.

Пример I. Ферма abc состоит из трех брусьев (черт. 98).



Черт. 98.

Вся фигура $abcd$ (I) представляет проекцию многогранника (тетраэдра) с основанием D , вершиной d и гранями A, B, C .

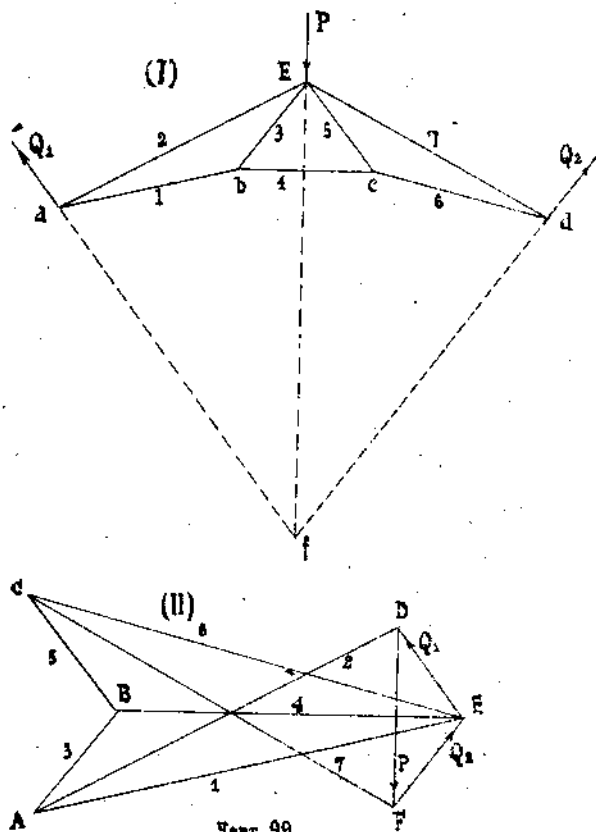
Диаграмма $ABCD$ (II) также представляет проекцию тетраэдра с основанием d , вершиной D и гранями A, B, C .

Фигуры I и II взаимны одна с другой, т. е., если в одной из них несколько линий склается в одной точке, то в другой линии, им соответствующие и параллельные, образуют замкнутый многоугольник. Граням I-ой фигуры соответствуют вершины II-ой и наоборот.

Пример 2. Построение на основании сказанного понятно из рассмотрения фиг. I и II чертежа 99.

Фигура I представляет проекцию пятиугольной пирамиды с основанием $abedf$ и вершиной E .

Диаграмма фигуры II должна быть взаимной с фиг. I-ой.



Черт. 99.

Приложение теории колебательных движений к механике упругого тела *).

Колебания при растяжении.

§ 81. Положим в стержне, растягиваемом грузом P , сообщаемом ему удлинение λ , возмозим колебания в направлении его оси. Эти колебания осуществим таким образом: некоторой вертикальной силой, приложенной к концу стержня, вытянем его еще на величину a , после чего силу устраним. Тогда груз P , находящийся на конце стержня, начнет колебаться относительно своего равновесного положения O вниз и вверх на длину $\pm a$.

Эти колебания, которые будут происходить при отсутствии внешней силы, их породившей, будут „свободными“ или „собственными“, колебаниями системы.

Найдем диф. ур-ние движения груза P . Для этого сообразим, какие силы действуют на него, и, применяя начало д'Аламбера, запишем условие его равновесия. Положим, груз находится на расстоянии x ниже своего среднего положения O . На груз действуют:

- 1) его собственный вес P ;
- 2) натяжение стержня, направленное снизу вверх, равное сумме растягивающих усилий: P и $\frac{xEF}{l}$ где последнее отвечает дополнительному удлинению стержня на величину x (F —площадь поперечного сечения стержня, l —его длина, E —модуль упругости материала);
- 3) сила инерции груза, равная $\frac{P}{g}x^{11}$.

*) Теория колебательных движений предполагается читателю известной. Ее можно найти в моей «Аналитической Механике» и в моей же брошюре «Теория колебат. движений». Изд. М.-ск. Межевого Института. 1922 г.

Согласно начала д' Аламбера

$$P - \left(P + \frac{x_{EF}}{l} \right) - \frac{P}{g} x^{11} = 0 \quad \dots \dots \dots (53)$$

$$x^{11} + \frac{g_{EF}}{Pl} x = 0$$

или, положив ради краткости письма

$$\frac{g_{EF}}{Pl} = k^2.$$

получим

$$x^{11} + k^2 x = 0$$

Последнее ур-ие, как известно из Механики, есть ур-ие гармонического Колебательного движения с периодом $\frac{2\pi}{K}$. Следов., движение груза P есть гармоническое колебательное, период которого равен $T = \frac{2\pi}{K}$

Заметим, что, т. е. удлинение, вызванное грузом P ,

$$\lambda = \frac{Pl}{EF},$$

то выражению для K можно придать такой вид

$$k^2 = \frac{g}{\lambda} \quad \dots \dots \dots (54)$$

в виду чего

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \quad \dots \dots \dots (55)$$

Полученный результат показывает, что период собственных колебаний груза, подвешенного на упругом стержне, равен периоду полного колебания математического маятника длиной равной удлинению, производимому грузом. Общий интеграл получившегося диф. ур-ия движения груза P , имеет вид

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt$$

Произвольные постоянные определяются начальными условиями движения, а именно

$$\begin{aligned} \text{при } t=0, \quad x &= a \\ t=0, \quad x^1 &= 0 \end{aligned}$$

Примечание. Мы не приняли во внимание действие собственного веса стержня в виду того, что вес этот обыкновенно ничтожен по сравнению с P . При желании учесть его необходимо к P добавлять $\frac{1}{3}$ собственного веса стержня.

§ 82. Собственные колебания груза P под влиянием сопротивления среды постепенно „затухают“. Обозначим сопротивление среды через

$$-2m\dot{x}^2,$$

где $m = \frac{P}{g}$ — масса груза, а n — некоторый коэффициент пропорциональности, характеризующий среду.

Допустим, кроме того, что к нижнему концу стержня приложена еще некоторая периодическая „возмущающая“ сила

$$Q = h \sin q t,$$

где h — коэф. пропорциональности, представляющий наибольшее значение этой силы при $m = 1$.

Период силы Q равен $\frac{2\pi}{q}$

Ур-ие равновесия груза P , написанное ниже (ур-ие 53)

$$-\frac{P}{g}x'' - \frac{EF}{l}x = 0$$

или

$$-m\ddot{x} - K^2mx = 0,$$

очевидно изменится от этих добавочных условий так

$$m\ddot{x} - K^2mx - 2m\dot{x}^2 + h \sin q t = 0$$

или после сокращения на m

$$x'' + 2n\dot{x}^2 + kx = h \sin q t.$$

Это ур-ие, как известно из механики, выражает движение, состоящее из 2 колебательных движений: „затухающего“ и „вынужденного“.

Общий интеграл последнего ур-ия сил выводится в механике, поэтому на нем мы останавливаться не будем.

Как известно, при малом сопротивлении среды при приближении k и q к совпадению или иначе при сближении периодов „собственных“ колебаний $\frac{2\pi}{k}$ и возмущающей силы $\frac{2\pi}{q}$ наступает явление „резонанса“ т. е. чрезвычайного увеличения амплитуды вынужденных колебаний, что показывает, что стержень при этих условиях получает неожиданно большое удлинение, быстро влекущее за собой его разрушение.

§ 83. Если движение происходит в воздухе, а не в более плотной среде, то сопротивлением среды можно пренебречь ввиду

его незначительности (положить $p=0$), и для амплитуды вынужденных колебаний получим простую формулу (см. мою „Теорию колеб. дв-ий“)

$$\gamma = \frac{h}{k^2 - q^2}$$

Соответствующее этой амплитуде напряжение материала стержня равно

$$\frac{\gamma E}{l} = \frac{Eh}{l(k^2 - q^2)}$$

Кроме того стержень испытывает напряжение от груза P равное

$$\frac{P}{F}$$

Таким образом, пренебрегая даже напряжением материала от собственных колебаний в виду того, что они, как бы ни было мало сопротивление среды с течением времени все-таки затухают приходим к выводу, что напряжение материала бруса при наличии возмущающей силы не менее, чем

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{Eh}{l(k^2 - q^2)} \dots \dots \dots (56)$$

В то время, как при чисто статической нагрузке это напряжение равнялось бы максимум

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{Eh}{F} = \frac{P}{F} + \frac{hP}{gF} = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{h}{g}\right) \dots \dots \dots (57)$$

(так как $Q_{\max} = hm$).

Таким образом, если даже нет оснований опасаться повышения резонанса, все таки полезно при наличии возмущающей силы вычислить напряжение материала и сравнить его с расчетным в предположении статической нагрузки.

Колебания при изгибе.

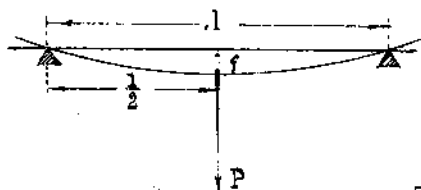
§ 84. Все, что было сказано о колебаниях груза P , подвешенного к концу стержня, целиком относится и к тому случаю, когда груз лежит по середине упругой балки, вызывая стрелу прогиба

$$f = \frac{Pl^3}{48EJ},$$

где J — момент инерции поперечного сечения балки относительно оси, проходящей через его центр тяжести и перпендику-

длитель к плоскости изгиба. В этом случае лишь в формулы (54) и (55) надо ввести вместо λ — f . Тогда они заменятся такими

$$k^2 = \frac{g}{f} \dots \dots \dots (58)$$

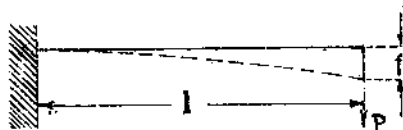


$$T = 2\pi \sqrt{\frac{f}{g}} \dots \dots \dots (59)$$

Примечание. Если желательно принять во внимание собственный вес балки, то это сделать легко, увеличив приложенную к ней силу P на 0,486 веса балки (т. е. почти на $1/2$ ее веса). Это отразится только на стреле прогиба f .

§ 85. В случае, если груз был приложен к балке, как указано на чертеже, выражение для стрелы прогиба было бы

$$f = \frac{Pl^3}{3EJ}$$



формулы (58), (59) сохраняют свое значение.

Примечание. При желании учесть влияние собственного веса балки надо силу P увеличить на 0,286 веса балки (т. е. почти на $1/4$ ее веса).

§ 86. Сказанное о колебаниях при растяжении при наличии возмущающей силы, приложенной в месте приложения груза P , целиком распространяется и на оба рассмотренные случая изгиба; поэтому над этим вопросом мы останавливаться не будем.

Укажем лишь, как в обоих случаях изгиба (черт. § 84 § 85) вычислить напряжение материала в опасном сечении, которое, очевидно в 1-м случае посредине балки, во 2-м — у левой опоры где балка закреплена.

а) 1-ый случай (черт. § 85)

Напряжение материала от изгиба силой P равно

$$\frac{Pl}{4} : W = \frac{Pl}{4W}$$

где W — момент сопротивления опасного сечения относительно оси, проходящей через его центр тяжести и перпендикулярной к плоскости изгиба. Чтобы найти напряжение, отвечающее стреле

прогиба, равной γ — амплитуде вынужденных колебаний, для которой мы примем упрощенное выражение:

$$\gamma = \frac{h}{K^2 - q^2}$$

предполагая, как и раньше, $p = 0$. Заметим, что изгибающий момент, отвечающий стреле прогиба γ равен

$$\frac{12 E J \gamma}{l^2}$$

Поэтому напряжение материала равно

$$\frac{12 E J \gamma}{l^2} : W = \frac{12 E J h}{l^2 (K^2 - q^2) W}$$

Следовательно, полное напряжение материала в случае появления возмущающей силы равно

$$\sigma = \frac{P l}{4 W} + \frac{12 E J h}{l^2 (K^2 - q^2) W} = \frac{1}{W} \left[\frac{P l}{4} + \frac{12 E J h}{l^2 (K^2 - q^2)} \right] \quad (60)$$

При этом мы пренебрегли напряжением материала от собственных колебаний, считая, что эти последние с течением времени затухают.

В случае статической нагрузки при $Q_{\max} = h m = \frac{P h}{g}$ напряжение материала равнялось бы

$$\sigma = \frac{P l}{4 W} + \frac{P h}{g} \frac{1}{4 W} = \frac{P l}{4 W} \left(1 + \frac{h}{g} \right) \quad (61)$$

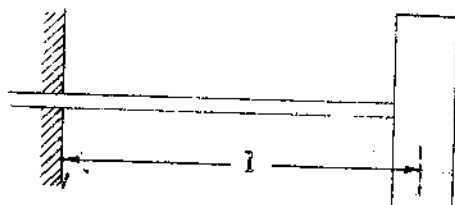
б) 2-ой случай: (Черт. § 85).

$$\sigma = \frac{P l}{W} + \frac{3 E J \gamma}{l^2 W} = \frac{1}{W} \left[P l + \frac{3 E J h}{l^2 (K^2 - q^2)} \right] \quad (62)$$

$$\sigma = \frac{P l}{W} + \frac{P h}{g} \frac{1}{W} = \frac{P l}{W} \left(1 + \frac{h}{g} \right) \quad (63)$$

Колебания при кручении.

§ 87. Положим, имеем круглый цилиндрический вал, один конец которого укреплен неподвижно, а на другом конце заклинен диск. Повернемте диск на некоторый угол α после чего предоставим его самому себе. Мы заметим тогда, что вал, будучи закручен на угол $+\alpha$, затем вернется к своему первоначальному состоянию, после чего перевернется в противоположную сторону



на угол $-\alpha$; затем опять вернется в первоначальное положение, после чего окажется скрученным на угол $+\alpha$ и т. д. Словом, вал вместе со шкивом будет колебаться, при чем, как увидим ниже, это ко-

лебательное движение будет выражаться в той же аналитической форме, что и гармоническое колебательное движение точки по прямой, и потому все заключение, выведенное нами для прямолинейного колебательного движения целиком будут применены и для рассмотренного движения.

Выведем ур-не движения шкива. Для этого рассмотрим положение шкива, когда он повернут относительно своего первоначального положения на некоторый угол φ (выраженный в дуговой мере) и выясним, какие силы действуют на шкив в этот момент, а затем, пользуясь началом д'Аламбера, напишем условие его равновесия.

Какие же силы действуют на шкив?

1) момент внутренних упругих сил вала, отвечающий углу кручения φ равный

$$-\frac{GJ_0}{l} \varphi$$

где G — модуль поперечной упругости материала вала, J_0 — полярный момент инерции поперечного сечения вала, l — длина вала.

2) момент силы инерции шкива вала, равный $-J_1 \varphi''$, где J_1 — момент инерции шкива относительно оси вала, φ'' — угловое ускорение при вращении шкива.

Условие равновесия шкива принимает такую форму

$$-\frac{GJ_0}{l} \varphi - J_1 \varphi'' = 0$$

или

$$\varphi'' + K^2 \varphi = 0$$

где ради краткости письма положено

$$K^2 = \frac{GJ_0}{lJ_1} \quad (64)$$

Как видим, получилось обычное диф. ур-ие гармонического колебательного движения с периодом

$$T = \frac{2\pi}{K} = 2\pi \sqrt{\frac{1J_1}{GJ_0}} \quad \dots \quad (65)$$

§ 88. Мы не приняли во внимание сопротивления среды, благодаря коему эти „свободные“ или „собственные“ колебания шкива с течением времени будут „затухать“. Внесем в ур-ие равновесия момент силы сопротивления среды, который обновляем через

$$-2nJ_1\varphi^1,$$

где $2n$ — коэффициент, характеризующий сопротивление среды. Кроме того предположим, что имеется еще внешний периодический „возмущающий“ момент, равный

$$hJ_1 \sin q t,$$

где h коэффициент пропорциональности, представляющий наибольшее значение этого момента, когда момент инерции шкива $J_1 = 1$.

Период возмущающего момента равен $\frac{2\pi}{q}$.

Дополнив новыми членами ур-ие равновесия, получим

$$-\frac{GJ_0}{1}\varphi - J_1\varphi^{11} - 2nJ_1\varphi^1 + hJ_1 \sin q t = 0$$

или

$$\varphi^{11} + 2n\varphi^1 + K^2\varphi = h \sin q t$$

Последнее ур-ие показывает, что движение шкива будет состоять из 2 колебаний: „затухающих“ и „вынужденных“, при чем период вынужденных колебаний равен периоду возмущающего момента.

При малом сопротивлении среды при приближении к равенству периодов собственных колебаний и вынужденных наступает резонанс, заключающийся в чрезвычайном увеличении угла кручения φ .

Примечание. При желании учесть влияние массы вала на период собственных колебаний шкива надо к моменту инерции шкива прибавить $\frac{1}{2}$ момента инерции вала.

§ 89. Заметим, что для появления резонанса достаточно даже того, чтобы период вынужденных колебаний был кратным периода

собственных колебаний, т. е. всякое периодическое движение с периодом $T = \frac{2\pi}{k}$ можно рассматривать как периодическое с периодом AT , где A — произвольное целое положительное число

Кроме того, т. е. q обыкновенно бывает равно (или кратно) ω угловой скорости вращения вала, приходим к выводу что для появления резонанса необходимо исполнения условия

$$A \cdot \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$k = A \cdot \omega$$

Если перейти от периода собственных колебаний к числу колебаний в минуту, которое, очевидно, равно

$$n^1 = \frac{60}{T} = \frac{60k}{2\pi} = \frac{30}{\pi} k = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{J_0 G}{1 J_1}} \quad (66)$$

откуда

$$k = \frac{\pi}{80} n^1$$

а от ω к числу оборотов вала в минуту

$$\omega = \frac{\pi}{80} n,$$

то условие

$$k = A \omega$$

заменится таким

$$\frac{\pi}{80} n^1 = A \frac{\pi}{80} n$$

$$n^1 = An,$$

т. е. для появления резонанса необходимо, чтобы число собственных колебаний шкива в минуту было кратно или равно числу оборотов вала в минуту.

Число собственных колебаний шкива в минуту определяется формулой (66).

§ 90. Во всяком случае при наличии возмущающего момента если даже нет резонанса, полезно вычислить напряжение материала, которое может оказаться значительно выше расчетного в предположении статической нагрузки. Сделать это легко след. образом. Положим, к шкиву приложен некоторый скручивающий

момент M . От этого момента напряжение материала вала равно

$$\frac{M}{J_0} \frac{d}{2}$$

если d — диаметр вала.

Благодаря возмущающему моменту, равному $hJ_1 \sin \theta$ (напомним, что J_1 — момент ин. шкива относительно оси вала), достигающему maximum'a hJ_1 , при статическом действии, возникает maximum'-ное напряжение

$$\frac{hJ_1}{J_0} \frac{d}{2}$$

Следовательно, расчетное напряжение материала равно

$$t = \frac{M}{J_0} \frac{d}{2} + \frac{hJ_1}{J_0} \frac{d}{2} = \frac{d}{2J_0} (M + hJ_1) \dots \dots \dots (67)$$

Благодаря возникновению колебаний, — при чем напряжением материала ст. собственных колебаний в виду их неминуемого затухания с течением времени мы пренебрежем, — возникает напряжение, отвечающее амплитуде вынужденных колебаний γ .

γ , как и раньше, для упрощения примем равным (полагая сопр. среды $n = 0$).

$$\gamma = \frac{h}{k^2 - q^2},$$

где k , определяется формулой (64).

Углу кручения φ соответствует крутящий момент $\frac{GJ_1 \gamma}{l}$, которому отвечает напряжение материала

$$\frac{GJ_1 \gamma \frac{d}{2}}{J_0} = \frac{Gd}{2l} \gamma = \frac{Gdh}{2l(k^2 - q^2)}$$

Присоединяя сюда напряжение от приложенного к шкиву момента M , находим общее напряжение материала

$$t^1 = \frac{M}{J_0} \frac{d}{2} + \frac{Gdh}{2l(k^2 - q^2)} = \frac{d}{2} \left[\frac{M}{J_0} + \frac{Gh}{l(k^2 - q^2)} \right] \dots \dots (68)$$

Необходимо всегда делать проверку, поскольку t^1 согласуется с t .

§ 91. Мы рассмотрели случай, когда один конец вала неподвижен, а на другой насажен шкив. От этого случая легко перейти к более сложному, когда на оба конца вала насажены шки-

вы, моменты инерции концов относительно оси вала пусть будут J_1, J_2 .

Чтобы вызвать колебательное движение в этой системе вообразим, что шкивы в некоторый момент времени скручиваются 2 разными и прямопротивоположными парами, после чего действие этих пар прекращается и система представляется самой себе. Очевидно, концы вала с надетыми на них шкивами будут колебаться в противоположных направлениях. Но, если концевые сечения вала в каждый момент времени вращаются в разные стороны, то, очевидно, существует такое сечение А, точки которого остаются во время колебаний концов вала неподвижными. Такое сечение называется „узловым“. Этим сечением вал делится на 2 части: правую, вращающуюся в данный момент времени в одну сторону, и левую, вращающуюся в противоположную сторону. Очевидно, каждую часть вала можно рассматривать, как самостоятельный укороченный лишь вал, один конец которого неподвижен, а на другом заклинен шкив. Таким образом задача об определении собственных колебаний системы с 2 шкивами сводится в конце концов к только что рассмотренному случаю колебания вала с 1 шкивом. Если длины частей вала, на которые разделяет его узловое сечение, — l_1 и l_2 , то по формуле (65) найдем выражение для периодов колебаний левой и правой части

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l_1 J_1}{G J_0}}$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l_2 J_2}{G J_0}}$$

Но т. е., само собою понятно, период колебаний как левой, так и правой части, один и тот же, то, сравнивая выражения для T_1 и T_2 , получим после возможных сокращений

$$l_1 J_1 = l_2 J_2$$

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{J_2}{J_1} \dots \dots \dots (69)$$

Полученный результат показывает, что *узловое сечение делит вал на 2 части обратно пропорционально моментом инерции заклиненных на их концах шкивов. Присоединяя к последнему рав-у очевидное рав-о*

$$l_1 + l_2 = l$$

и решая оба рав-я отпосит. l_1, l_2 , найдем

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= \frac{J_2 l}{J_1 + J_2} \\ l_2 &= \frac{J_1 l}{J_1 + J_2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (70)$$

В виду этого период колебаний обоих концов вала с надетыми на них шкивами

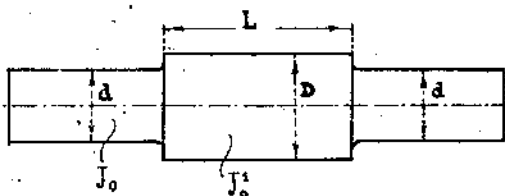
$$T_1 = T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_1 J_2 l}{G J_0 (J_1 + J_2)}} \dots (70)$$

а число свободных колебаний в минуту

$$n^1 - n^2 = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{G J_0 (J_1 + J_2)}{J_1 J_2 l}} \dots (72)$$

§ 92. Очень часто вал бывает переменного диаметра по своей длине. В таких случаях при вычислении колебаний вал заменяют другим воображаемым — постоянного диаметра, обладающим той же сопротивляемостью кручению. Допустим, что вал имеет на участке длиной L утолщение, так что диаметр его в этом месте равен D .

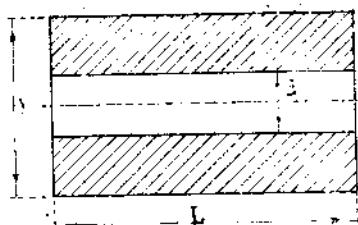
Т. е. углы кручения прямо пропорциональны длинам и обратно пропорциональны моментам инерции поперечных сечений валов, то не изменяя получающегося угла кручения, участок вала диаметра D , длиной L , с моментом инерции поперечного сечения J_0^2 можно заменить участком диаметра d , длиной l , с моментом инерции поперечного сечения J_0 при чем



$$l = L \frac{J_0}{J_0^2} = L \left(\frac{d}{D} \right)^4 \dots \dots \dots (73)$$

Применяя этот прием ко всем участкам вала, имеющим диаметр, отличный от d , как говорят, „приведем вал к постоянному диаметру d . Этот приведенный воображаемый вал будет обладать

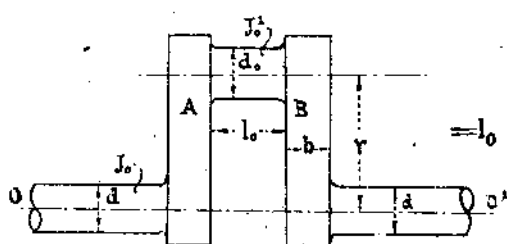
тою же сопротивляемостью кручению (в смысле получающегося угла кручения) что и данный вал.



В случае, если заменяемая часть вала имеет кольцевое сечение, как указано на чертеже, то длина участка воображаемого сплошного вала диаметра d равна

$$l = L \cdot \frac{d^4}{D^4 - d^4} \dots (74)$$

Если вал имеет колесо шириною b , то каждое такое колесо может быть заменено частью вала длиной $\frac{4}{3}b$ и даже до $\frac{7}{8}b$ (при коротких колесах). Что касается цапфы АВ, то ее можно заменить участком вала диаметра d и длиной l



$$\begin{aligned} l &= l_0 \cdot \frac{J_0}{J_0'} = \\ &= l_0 \cdot \frac{\frac{\pi d^4}{32}}{\frac{\pi d_0^4}{32} + \frac{\pi d_0^2}{4} r^2} = \\ &= l_0 \frac{d^4}{d_0^2 (d_0^2 + 8r^2)} \dots (75) \end{aligned}$$

ТАБЛИЦЫ

нормальных профилей железа по русскому метрическому сортаменту. (стр. 161—169)

- Табл. I. Равнобокое угловое железо.
" II. Неравнобокое угловое железо.
" III. Корытное железо.
" IV. Низкое тавровое железо.
" V. Высокое тавровое железо.
" VI. Двутавровое железо.
" VII. Зетовое железо.
-

РАВНОБОКОЕ УГЛОВОЕ ЖЕЛЕЗО

Нормальная длина = 4 до 8 м.

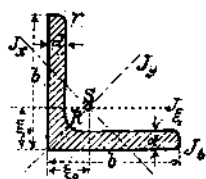
Наибольшая длина = 12 до 16 м.

Закругление внутри $R=0,5$ (min+max).

Закругление полок $r=0,5 R$.

Расстояние центра тяжести $\frac{b}{2} \pm 0,36 d$.

Имеются профили, у которых толщина полок на 1 мм больше притой же ширине полки



№ профиля	Ширина b, мм	Толщина d, мм	Ближайший перевод размеров в дюймы		Площадь профиля, F, см²	Вес, g, кг/м	Расстояние центра тяжести от края, см	Моменты инерции			
			b	d				J _b , см⁴	J _z , см⁴	J _y , см⁴	J _x , см⁴
1½	15	3	19/32	1/8	0,82	0,64	0,47	0,338	0,1528	0,2397	0,0659
		4		5/32	1,05	0,82	0,51	0,465	0,1897	0,2921	0,0873
2	20	3	25/32	1/8	1,12	0,68	0,60	0,793	0,392	0,6185	0,1651
		4		5/32	1,45	1,14	0,64	1,03	0,492	0,771	0,2124
2½	25	3	1	1/8	1,43	1,12	0,72	1,535	0,798	1,262	0,3333
		4		5/32	1,86	1,46	0,76	2,084	1,012	1,597	0,4273
		5		3/16	2,27	1,78	0,80	2,646	1,206	1,888	0,5241
3	30	3	1 3/16	1/8	1,73	1,36	0,84	2,654	1,424	2,26	0,590
		4		5/32	2,26	1,77	0,88	3,59	1,824	2,884	0,764
		5		3/16	2,77	2,17	0,92	4,54	2,183	3,44	0,925
3½	35	4	1 7/8	5/32	2,67	2,10	1,00	5,64	2,954	4,68	1,227
		5		3/16	3,28	2,57	1,04	7,13	3,564	5,64	1,493
		6		1/4	3,87	3,04	1,08	8,65	4,13	6,50	1,754
4	40	4	1 19/32	5/32	3,08	2,42	1,12	8,33	4,47	7,09	1,859
		5		3/16	3,79	2,97	1,16	10,54	5,43	8,59	2,263
		6		1/4	4,48	3,52	1,20	12,78	6,31	9,98	2,654
		7		9/32	5,15	4,04	1,24	15,06	7,14	11,24	3,040
		8		5/16	5,80	4,55	1,28	17,37	7,91	12,4	3,434
		5		3/16	4,30	3,37	1,28	14,95	7,87	12,48	3,27
4½	45	6	1 25/32	1/4	5,09	4,00	1,32	18,11	9,19	14,55	3,84
		7		9/32	5,86	4,60	1,36	21,31	10,43	16,47	4,39
		8		5/16	6,61	5,19	1,40	24,56	11,60	18,25	4,95
		5		3/16	4,80	3,77	1,40	20,43	10,96	17,38	4,55
5	50	6	2	1/4	5,69	4,47	1,44	24,74	12,85	20,34	5,35
		7		9/32	6,56	5,15	1,48	29,10	14,62	23,10	6,13
		8		5/16	7,41	5,82	1,52	33,50	16,28	25,70	6,87
		9		23/64	8,24	6,47	1,56	37,96	17,86	28,10	7,63
		6		1/4	6,31	4,95	1,56	32,7	17,3	27,4	7,19
5½	55	7	2 1/16	9/32	7,28	5,71	1,60	38,46	19,73	31,2	8,22
		8		5/16	8,23	6,46	1,64	44,5	22,04	34,8	9,24
		9		23/64	9,16	7,19	1,68	50,2	24,24	38,2	10,25
		10		25/64	10,07	7,90	1,72	56,1	26,3	41,4	11,26

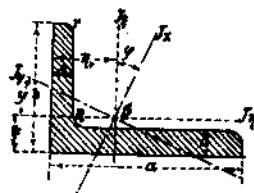
№ профили	Ширина <i>b</i> мм	Толщина <i>d</i> мм	Ближайший перевод размеров в дюймы		Площадь профиля <i>F</i> см ²	Вес <i>g</i> кг/м	Расстояние центра тяжести <i>z</i> см	Моменты инерции			
			<i>b</i>	<i>d</i>				<i>J_b</i> см ⁴	<i>J_z</i> см ⁴	<i>J_y</i> см ⁴	<i>J_x</i> см ⁴
6	60	6	2 3/8	1/8	6,91	5,42	1,69	42,5	22,84	33,15	9,53
		7		3/32	7,98	6,26	1,73	49,9	26,05	41,3	10,82
		8		1/4	9,03	7,09	1,77	57,4	29,18	46,15	12,16
		9		5/16	10,06	7,90	1,81	65,0	32,1	50,7	13,5
		10		3/8	11,07	8,63	1,85	72,6	34,9	55,1	14,8
6 1/2	65	6	2 1/2	1/8	7,51	5,89	1,81	54,0	29,36	46,6	12,14
		7		3/32	8,68	6,81	1,85	63,4	33,6	53,3	13,9
		8		1/4	9,83	7,72	1,89	72,9	37,66	59,7	15,63
		9		5/16	10,96	8,60	1,93	82,5	41,5	65,7	17,34
		10		3/8	12,07	9,47	1,97	92,1	45,2	71,5	19,03
7	70	7	2 3/4	1/8	9,39	7,37	1,97	79,0	42,4	67,3	17,53
		8		3/16	10,64	8,35	2,02	90,8	47,6	75,5	19,7
		9		1/4	11,87	9,32	2,06	102,7	52,6	83,3	21,9
		10		5/16	13,08	10,27	2,09	114,7	57,3	90,7	24,0
		11		3/8	14,27	11,20	2,13	126,9	61,9	97,3	26,4
7 1/2	75	8	2 7/8	1/8	12,80	10,06	2,17	125,9	65,1	103,9	27,1
		9		3/16	14,11	11,08	2,21	140,2	71,2	112,7	29,7
		10		1/4	15,40	12,09	2,25	155,0	77,0	121,7	32,3
		11		5/16	16,67	13,09	2,29	170,0	82,6	130,3	34,8
		12		3/8	17,92	14,03	2,33	184,6	88,1	138,8	37,4
8	80	8	3 1/8	1/8	13,70	10,75	2,30	152,2	79,8	126,9	32,65
		9		3/16	15,11	11,86	2,34	170,0	87,2	138,6	35,8
		10		1/4	16,50	12,95	2,37	187,8	95,1	149,9	40,3
		11		5/16	17,87	14,03	2,41	205,8	102,0	160,7	43,23
		12		3/8	19,22	15,18	2,45	223,9	108,9	171,5	46,7
9	90	9	3 1/2	1/8	17,13	13,45	2,53	241,0	127,0	201,3	52,5
		10		3/16	18,72	14,69	2,62	266,0	137,6	218,0	57,1
		11		1/4	20,29	15,93	2,66	291,6	148,0	234,4	61,4
		12		5/16	21,84	17,14	2,70	317,0	157,8	250,0	65,5
		13		3/8	23,37	18,33	2,73	342,5	166,3	265,5	69,7
10	100	9	3 3/4	1/8	19,17	15,05	2,82	322,7	176,3	280	72,7
		10		3/16	20,96	16,46	2,86	363,0	191,6	304	79,3
		11		1/4	22,73	17,84	2,90	387,6	204,4	327	85,7
		12		5/16	24,48	19,22	2,94	432	220,7	349,6	91,8
		13		3/8	26,21	20,57	2,98	467	234,5	371	97,6
12	120	14	4 1/8	1/8	27,92	21,92	3,02	502	247,7	392	103,1
		15		3/16	29,61	23,24	3,06	533	262	412,5	112
		16		1/4	31,28	24,50	3,10	567	276	432	120
		17		5/16	32,93	25,74	3,14	602	290	452	128
		18		3/8	34,56	26,97	3,18	637	304	472	136
14	140	12	5 1/8	1/8	36,02	28,28	3,22	672	318	492	144
		13		3/16	37,57	29,51	3,26	708	332	512	152
		14		1/4	39,10	30,72	3,30	744	346	532	160
		15		5/16	40,61	31,92	3,34	780	360	552	168
		16		3/8	42,10	33,12	3,38	816	374	572	176

НЕРАВНООБОЕ УГЛОВОЕ ЖЕЛЕЗО

Нормальная длина — 4 до 8 м.

$$R = 0,5(d_{\min} + d_{\max});$$

$$r = 0,5R.$$



Л. № ПРОФИЛЕЙ	РАЗМЕРЫ в мм			БЛИЖАЙШИЙ ПЕРЕВОД РАЗ- МЕРОВ в дюймы			Площадь профиля	ВЕС	РАССТОЯНИЕ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ		МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ			
	a	b	d	a"	b"	d"	F см²	q кг/м	ξ₀ см	η₀ см	J _b см⁴	J _a см⁴	J _ξ см⁴	J _η см⁴
3/2	30	20	3	1 1/16	1 1/16	1/8	1,42 1,25	1,11 1,45	0,30 0,54	0,99 1,03	2,66 3,58	0,802 1,101	1,267 1,597	0,447 0,561
4/2	40	20	4	1 1/8	1 1/8	5/32	2,26 2,72	1,17 2,17	0,48 0,52	1,46 1,50	3,41 10,57	1,112 1,452	3,586 4,34	0,593 0,708
4 1/2	45	30	4	1 3/8	1 3/8	3/16	3,37 4,72	2,25 3,27	0,24 0,81	1,47 1,55	11,96 12,16	3,624 5,59	5,74 8,08	2,03 2,83
5 1/2	50	25	5	2	1	3/16	3,54 4,80	3,72 3,77	0,40 0,57	1,82 1,91	20,48 28,95	2,606 4,27	3,74 11,52	1,336 1,89
6/3	60	30	6	2 1/8	1 3/8	1/4	5,09 6,81	4,00 5,19	0,72 0,90	2,15 2,27	42,5 57,14	5,52 7,95	12,13 22,97	2,986 3,76
6 1/4	57	40	6	2 1/8	1 3/8	1/4	5,69 7,41	4,47 5,82	1,01 1,08	1,99 2,07	42,6 57,3	12,84 17,63	20,05 25,5	7,07 8,91
7 1/2	75	50	6	2 7/8	2	1/4	7,21 9,43 11,57	5,66 7,40 9,08	1,20 1,28 1,34	2,43 2,51 2,59	84,6 111,4 140,2	24,75 33,77 43,2	42,2 51,9 62,5	14,33 18,27 21,84
8/4	80	40	6	3 1/8	1 3/8	1/4	6,91 9,03 11,07	5,48 7,09 8,69	2,88 3,96 1,04	2,84 2,93 3,01	100,6 135 163,7	12,88 17,89 23,3	44,8 57,6 69,1	7,52 9,55 11,38
9/6	90	50	8	3 7/8	2 1/8	5/16	7,45 14,09	8,39 11,06	1,48 1,56	2,95 3,04	192,0 241,4	57,6 73,4	92,1 111,4	32,65 39,3
10/8	100	50	8	3 7/8	2	5/16	11,45 14,09	8,39 11,06	1,10 1,20	3,59 3,67	263,3 330,6	34,0 43,84	116,0 140,6	19,53 23,42
10 1/2	100	65	8	3 7/8	2 1/4	5/16	12,58 15,59	3,93 12,84	1,56 1,64	3,28 3,37	263,5 331,0	78,2 93,0	127,1 154,3	42,6 51,2
12/8	120	80	12	4 3/4	4 1/8	3/4	19,13 24,69	15,02 17,81	1,95 2,03	3,92 4,00	570 683	170,7 207,5	275,6 323	32,2 114,3
13 1/8	130	85	12	5 1/8	3 1/4	3/4	20,55 24,91 28,29	16,21 19,24 22,31	2,02 2,10 2,18	4,24 4,32 4,41	723 871 1020	203,8 247,6 292,8	351 412 470	119,1 159 158
15 1/2	150	75	10	5 7/8	2 3/8	5/8	21,63 26,69	16,98 20,17	1,48 1,69	3,32 3,41	1113 1340	142 173,6	501 589	85,2 99,9
16/10	150	100	11	5 7/8	3 1/8	3/4	24,47 29,98 35,43	20,80 24,33 27,81	2,38 2,46 2,53	4,84 4,93 5,01	1222 1450 1878	366 435 507	501 627 789	215 242,3 280
16 1/8	160	80	12	6 1/8	3 1/8	3/4	27,54 31,82	21,62 24,98	1,77 1,85	5,72 5,80	1620 1896	202,5 247,6	719,0 823	122 138,6

КОРЫТНОЕ ЖЕЛЕЗО

$b = 0,25h + 25 \text{ mm}$; $d = 0,025h + 4 \text{ mm}$ при $h < 100 \text{ mm}$;
 $d = 0,025h + 3,5 \text{ mm}$ при $h > 100 \text{ mm}$; $t = 1,5d$.

Нормальная длина = 4 до 8 м. Наибольшая длина = 12 до 16 м.
 Уклон внутренних плоскостей полок 8% Радиус закругления $R = t$ $\gamma = 0,5$.
 Толщина полки измерена на расстоянии $\frac{1}{2}$ от края (в мм) расстояние в свету между двумя балками J при котором оба главных момента инерции между собой равны ($= 2J_x$).

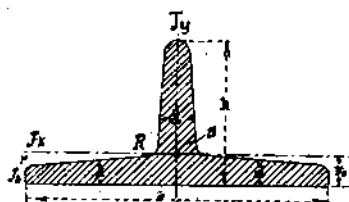


№ профили	Высота h mm	Ширина b mm	Толщина		Площадь профиля F qcm	Вес. g kg/m	Расстояние от края центра тяжести e cm	Моменты инерции			Момент сопротивления	
			Шенки d mm	Полки t mm				J_x cm ⁴	J_y cm ⁴	J_z cm ⁴	W_x cm ³	W_y cm ³
5	50	38	5	7,5	7,47	5,86	1,41	24,2	27,57	9,44	11,03	3,942
6	65	42	5,5	8	9,62	7,55	1,43	34,8	59,9	14,98	18,43	5,42
8	80	45	6	9	11,85	9,30	1,53	48,4	113,9	20,9	28,5	7,02
10	100	50	6	9	13,92	10,93	1,60	65,6	213,2	30,16	42,65	8,86
12	120	55	6,5	9,5	17,26	13,55	1,65	92,0	371,6	44,9	61,9	11,67
14	140	60	7	10,5	20,92	16,42	1,80	132,2	624	64,5	89,2	15,35
16	160	65	7,5	11	24,92	18,56	1,86	175,6	954	89,0	119,2	19,2
18	180	70	8	12	29,26	22,97	2,01	239,6	1433	121	159,2	24,26
20	200	75	8,5	12,5	33,93	26,64	2,08	306	2018	159,2	202	28,4
22	220	80	9	13,5	38,94	30,57	2,23	402	2831	207,8	257,3	36,0
24	240	85	9,5	14	44,28	34,76	2,30	499	3773	264	314,4	42,6
26	260	90	10	15	49,95	39,21	2,45	635	5045	334	388	51,0
28	280	95	10,5	15,5	55,96	43,93	2,53	771	6472	413	462	59,2
30	300	100	11	16,5	62,30	48,91	2,68	957	8361	510	557	69,7

НИЗКОЕ ТАВРОВОЕ ЖЕЛЕЗО

$$h = \frac{b}{2}; R = d; r = \frac{d}{2}; g = \frac{d}{4}$$

Уклон вертикальных ребер 2%
 " горизонтальных " 4%



№ п/п профилю	Размеры в мм			Ближайший перевод размеров в дюймы			Площадь профиля F см²	Вес g kg/m	Расстояние центров y₀ см	Моменты инерции		
	b	h	d	b	h	d				J _y см⁴	J _x см⁴	J _y см⁴
5/2,5	50	25	5	2	1	5/16	3,52	2,76	0,59	2,65 ⁸	1,407	4,82
6/3	60	30	6	2 3/8	1 1/4	3/8	5,06	3,97	0,71	5,41	2,92	9,99
7/3,5	70	35	6	2 3/4	1 3/8	3/8	5,95	4,67	0,79	8,48	4,76	15,77
8/4	80	40	7	3 1/8	1 1/2	7/32	7,92	6,22	0,91	14,82	8,26	27,5
9/4,5	90	45	8	3 5/8	1 13/16	1/2	10,18	7,99	1,03	24,2	13,4	44,8
10/5	100	50	9	4	2	1/2	12,72	9,99	1,15	37,4	20,64	69,1
12/6	120	60	10	4 3/4	2 1/4	3/4	17,09	13,36	1,34	70,9	40,1	132,2
13/6,5	130	65	10	5 1/8	2 5/8	3/4	18,50	14,92	1,42	89,0	51,6	167,5
14/7	140	70	12	5 1/2	2 3/4	1/2	23,80	18,68	1,58	135,7	76,1	252,3
16/8	160	80	13	6 3/8	3 1/8	1/2	29,53	23,18	1,78	217,5	124,1	407,0

ВЫСОКОЕ ТЯВРОВОЕ ЖЕЛЕЗО

$$h = b; R = d; r = \frac{d}{2}; \rho = \frac{d}{4}$$

УКЛОН ВЕРТИКАЛЬНЫХ И ВЕРХНИХ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ
РЕБЕР 2% ..

Размеры в мм	Размеры в мм			Ближайший перевод размеров в дюймы			Площадь профиля F см ²	Вес g кг/м	Расстояние центра тяжести Y ₀ см	Моменты инерции		
	b	h	d	b	h	d				J _y см ⁴	J _x см ⁴	J _y см ⁴
2,5/2,5	25	25	3,5	1	1	5/32	1,64	1,29	0,72	1,71	0,863	0,439
3,5/3,5	35	35	4,5	1 3/8	1 3/8	3/16	2,96	2,32	0,99	5,98	3,08	1,545
4,5/4,5	45	45	5,5	1 3/4	1 3/4	1/2	4,67	3,67	1,26	15,44	8,05	4,01
5/5	50	50	6	2	2	1/4	5,66	4,44	1,38	23,06	12,2	5,99
7/7	70	70	8	2 3/4	2 3/4	5/16	10,59	8,31	1,93	8,39	44,3	21,9
8/8	80	80	9	3 1/2	3 1/2	11/32	13,63	10,67	2,20	140,6	74,6	36,8
9/9	90	90	10	3 1/2	3 1/2	3/8	17,05	13,38	2,47	222	118	58,2

ДВУТАВРОВЕЕ ЖЕЛЕЗО

$$b = 0,32h + 25 \text{ мм}; d = 0,03h + 1,5 \text{ мм}; t = 1,4d;$$

НОРМАЛЬНАЯ ДЛИНА = 4 до 10 м. НАИБОЛЬШАЯ ДЛИНА = 14 до 18 м.

УКЛОН ВНУТРЕННИХ ПЛОСКОСТЕЙ ПОЛОК = 14°.

ЗАКРУГЛЕНИЕ МЕЖДУ СТЕНКОЙ И ПОЛКОЙ $R = d$.

ЗАКРУГЛЕНИЕ КРАЕВ ПОЛОК $r = 0,6d$.

ТОЛЩИНА ПОЛКИ t УКАЗАНА НА РИСУН. 1/4 b ОТ КРАЯ ОНА РАВНА ОКОЛО 1,5 d .



№ профили	Высота, h	Ширина, b	Толщина		Площадь профил. F qcm	ВЕС. кг/м	Моменты инерции.		Моменты сопротивлен		УДЕЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ.	
			Стенки	Полки, z			J _x cm ⁴	J _y cm ⁴	W _x cm ³	W _y cm ³	γ _x = $\frac{W_x}{W_{\Sigma}}$	γ _y = $\frac{W_y}{W_{\Sigma}}$
8	80	50,6	3,9	5,5	8,16	6,406	86,3	9,71	21,6	3,84	0,926	0,165
10	100	57,0	4,5	6,3	11,03	8,659	180,4	16,1	36,1	5,65	0,985	0,154
12	120	63,4	5,1	7,1	14,34	11,257	334,4	25,2	55,7	7,95	1,026	0,146
14	140	69,8	5,7	7,9	18,08	14,193	569	37,7	81,3	10,8	1,058	0,140
16	160	76,2	6,3	8,8	22,26	17,474	709	54,3	113,6	14,26	1,082	0,136
18	180	82,6	6,9	9,6	26,87	21,093	1381	75,9	153,4	18,4	1,101	0,132
20	200	89,0	7,5	10,4	31,91	25,049	2014	103,4	201,4	23,24	1,117	0,129
22	220	95,4	8,1	11,3	37,38	29,343	2843	137,5	258,5	28,83	1,131	0,126
24	240	101,8	8,7	12,1	43,29	33,983	3903	180	325	35,56	1,146	0,124
26	260	108,2	9,3	13	49,63	38,960	5234	231	403	42,75	1,151	0,122
28	280	114,6	9,9	13,9	56,40	44,274	6878	293	491	51,1	1,159	0,120
30	300	121,0	10,5	14,7	63,61	49,934	8881	366	592	60,5	1,167	0,119
32	320	127,4	11,1	15,5	71,25	55,931	11292	452	706	70,9	1,173	0,118
34	340	133,8	11,7	16,4	79,32	62,266	14161	562	833	82,5	1,179	0,117
36	360	140,2	12,3	17,2	87,82	68,939	17544	668	975	95,3	1,184	0,116
38	380	146,6	12,9	18	96,76	75,956	21499	801	1132	109,3	1,189	0,115
40	400	153,0	13,5	18,9	106,15	83,312	26087	954	1304	124,7	1,193	0,114

БЕТОННОЕ ЖЕЛЕЗО

Нормальная длина = 4 до 8 м.
 Наибольшая " = 12 " 16 м.
 Закрепления ушейки R=t.
 " у локот r=0,5t.



Норм. профилей	Размеры в миллиметрах						Вес г/м	Моменты инерции				Моменты сопротивления		Угол наклона к норм. проф. Ж	ψ	tcy
	h	b	d	t	R	r		J _x	J _y	J _x	J _y	W _x	W _y			
4	40	40	4,5	6,5	6,5	3,25	5,55	15,24	22,74	26,5	11,53	6,80	6,85	60°5		1,74
6	60	45	5	7,5	7,5	3,75	9,18	30,0	37,4	68,0	25,37	12,67	12,42	36°0		0,70
8	80	50	6	8,5	8,5	4,95	12,51	49,3	57,4	135,6	42,1	24,4	14,57	23°51		0,44
10	100	55	6,5	9,5	9,5	4,75	16,01	84,1	85,6	262,4	64,4	40,9	18,74	19°7		0,35
12	120	60	7	10,5	10,5	5,25	19,89	131,5	125,1	456,9	97,7	69,7	24,37	15°36		0,28
14	140	65	8	11,5	11,5	5,75	24,74	219	168,8	759	130,7	91,4	30,94	14°27		0,26
16	160	70	8,5	12,5	12,5	6,25	29,48	311,9	231	1172	174,6	126	37,83	13°17		0,24
18	180	75	9	13,5	13,5	6,75	34,61	462	307,5	1731	238,4	168	46,7	12°46		0,22
20	200	80	10	15	15	7,5	41,72	648	411,2	2535	324	224,5	58,6	11°28		0,20
25	250	90	12	18	18	9	59,02	1306	693	5441	558	392	87,5	6°34		0,17

ОГЛАВЛЕНИЕ.

	<i>Стр.</i>
Введение.	1
Растяжение.	
Определение.	3
Исследование явлений растяжения	10
Работа затрач. на деформ. при растяж.	12
Удлинение при резко прилож. нагрузке.	13
Изменен. структуры матер. при приближ. к критич. точке.	14
Усталость металлов.	15
Удлин. за пределом пропорцион. :	16
Явления, происход. в бруске при приближ. к моменту разрушения.	17
Изменение объема бруска при растяжении.	18
Расчет бруска на растяжение	19
Сжатие.	
Определение.	23
Расчет бруска на сжатие	24
Сдвиг.	
Определение.	26
Явления, происходящие при сдвиге	28
Расчет на сдвиг.	30
Таблицы допускаемого напряжения	31
Кручение.	
Определение.	33

Определение угла кручения	85
Определение наиболее касат. силы	86
Расчет на кручение.	37
Кручение не круглых тел.	39
Затруднения встречаемые при решении задач на кручение	41
Изгиб.	
Определение.	45
Об изгибающем моменте.	47
Определение изгиб. момента и опас. сечен. графич.	58
О линии суммы сил.	64
Связь между суммой сил и изгибающим моментом.	65
Свойства линии суммы сил.	67
О точках раздела.	69
Примеры построения линии суммы сил.	72
Теория изгиба	76
Определение внешних сил вызвавших изгиб.	79
Выражение „р“ через внешние силы	81
Общая идея расчета на изгиб	91
О касательных силах при изгибе.	93
Пример расчета шпона.	96
Об упругой линии.	98
Сложные сопротивления, форм. Сен-Венана	112
Расчет на совместн. действие растяжения (сжатия) и сдвига	116
Расчет круглого цилинд. тела на совместн. действ. изгиба и кручения.	118
Расчет на совместное действие изгиба и сдвига	119
Продольный изгиб или раздавливание.	119
Формула Ренкина и Шварца.	123
Многоспорные балки.	
Теорема 3-х моментов сил.	125
Ур-ние Клапейрона.	133
Выраж. $\frac{\omega k}{I}$ и $\frac{\omega k l}{II}$ для разных видов нагрузки	136
Шарнир или сочленен. системы (фермы).	139
Определ. напряж. стерж. статич. определ. ферм	142
Способ Кульмана.	143

Способ Риттера	144
Способ последов. вырез. углов	145

Прибавление 1.

Прилож. теории колебат. движ. к механике упругого тела	148
---	-----

Прибавление 2.

Таблицы нормальных профилей железа по русскому метрическому сортаменту.	161
--	-----

Замеченные опечатки;

На стр. 38. 5 стр. снизу следует читать $k' = \frac{1}{8} (1 - z_2)$.

3 стр. снизу после „через“... следует читать:

$$„1 - z_1, \text{ получим } \frac{\omega k}{1} = \frac{P}{6l} z_1 (1 - z_1) (1 - z_1) = \frac{P}{6l} z_1 (1^2 - z^2)“$$

Очевидно...“ и т. д.