

621.83

Г 74

Депозитарий

ОБЩІЙ ПРАКТИЧЕСКІЙ СПОСОБЪ

ПРОФИЛИРОВАНІЯ ЗУБЬЕВЪ

ВЪ НЕКРУГЛЫХЪ И КРУГЛЫХЪ КОЛЕСАХЪ.

Х. І. Гохмана.

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА

ОДЕССА.

Тип. А. Шульце, Ланжороповская улица, домъ Карузо, № 36.

1890.

71398321

Изъ «Записокъ» Одесскаго Отдѣленія Императорскаго Русскаго Техническаго
Общества за Мартъ—Апрѣль 1890 г.

Общій практическій способъ профилированія зубьевъ въ некруглыхъ и круглыхъ колесахъ.

Х. I. Гошмана.

Докладъ, читанный въ общемъ собраніи Одесскаго Отдѣленія Императорскаго Русскаго Техническаго Общества 12-го Апрѣля 1890 г. членомъ Отдѣленія, докторомъ прикладной математики Х. I. Гошманомъ, приватъ-доцентомъ Императорскаго Новороссійскаго Университета.

1. Профилированіе некруглыхъ колесъ есть одна изъ труднѣйшихъ задачъ прикладной математики. Уже круглыя колеса представляютъ большую трудность, такъ какъ одновременно нужно изслѣдовать форму и движеніе. Но послѣднія представляютъ ту хорошую сторону, что относительное движеніе профилируемыхъ колесъ постоянно, вслѣдствіе чего все зубья могутъ быть конгруэнтны. Это упрощеніе въ соединеніи съ практической важностью, можно сказать даже необходимостью, круглыхъ колесъ имѣло слѣдствіемъ, что ихъ теорія вполне разработана, особенно въ послѣднее десятилѣтіе, чего нельзя сказать о теоріи некруглыхъ колесъ. Правда, еще со времени Савари была сдѣлана нѣкоторая попытка къ опредѣленію истинной формы зубьевъ въ некруглыхъ колесахъ; но это были только попытки, не приведшія къ какимъ либо положительнымъ практическимъ результатамъ вслѣдствіе чрезвычайной сложности потребныхъ по методу Савари геометрическихъ построеній. Въ *Civilingenieur* Bd. XXI Kirsch даетъ способъ профилированія эллиптическихъ колесъ въ статьѣ «Evolventenverzahnung für elliptische Räder». Но, по первымъ, и его способъ еще очень сложенъ, во вторыхъ,

опъ годится именно только для эллиптических колесъ. Въ своей «Кинематикѣ Машинъ, томъ I» *) стр. 198 и 202, я далъ аналитическую формулу общаго способа профилированія какихъ угодно колесъ и весьма простое геометрическое построеніе. Но какъ эта формула, такъ и построеніе даны въ неразвитой формѣ, безъ детальной обработки, такъ какъ по самому плану сочиненія дальнѣйшая разработка основныхъ формулъ относится къ послѣдующимъ томамъ.

Въ виду практической важности предмета, я считаю полезнымъ ознакомить съ нѣмъ практиковъ, не дожидаясь выпуска въ свѣтъ всего сочиненія; кромѣ того не всякому сподручно ради частнаго интересующаго его вопроса протрудиваться, по крайней мѣрѣ, два тома сочиненія, въ которомъ вопросъ о зубчатыхъ колесахъ находится въ органической связи съ другими вопросами машинной кинематики. Въ виду этого я постараюсь въ сжатой статьѣ изложить окончательные результаты (безъ доказательствъ), къ которымъ я пришелъ въ упомянутомъ сочиненіи, и притомъ въ формѣ, наиболѣе пригодной для практическаго примѣненія.

2. Изъ форопоміи извѣстно, что всякое плоское движеніе (движеніе одной плоскости въ другой) неизмѣняемой системы въ каждый моментъ сводится къ безконечно малому вращенію около нѣкоторой точки, получающей названіе мгновеннаго центра. Эта точка мѣняется, какъ въ движущейся плоскости, такъ въ неподвижной, образуя двѣ кривыя, получающія названіе *центроидовъ*. Всякое *относительное* движеніе двухъ плоскостей (P) и (P') сводится къ катанію центроида (C), связаннаго съ (P), по центроиду (C'), связанному съ (P'), при чемъ мгновеннымъ центромъ относительнаго движенія служить точка соприкосновенія центроидовъ. Мы здѣсь ограничимся случаемъ вращенія двухъ

*) Въ Запискахъ Императорскаго Новороссійскаго университета т. LI, также отдѣльное изданіе. Одесса, 1890. Всѣхъ томовъ предполагается четыре.

твердыхъ тѣлъ (M) и (M') около параллельныхъ осей, неподвижныхъ какъ въ пространствѣ, такъ и въ движущихся тѣлахъ, и поставимъ себѣ задачей опредѣлить, каковы должны быть поверхности этихъ тѣлъ для того, чтобы одно изъ нихъ, вращаясь около своей оси, заставляло другое тѣло тоже вращаться около своей оси *по данному напередъ закону* относительнаго движенія. Эти тѣла называются зубчатыми колесами, а ограничивающія ихъ поверхности*)—поверхностями зубьевъ, при чемъ нашему изслѣдованію подлежатъ только та часть поверхности зуба, которая приходитъ въ соприкосновеніе съ поверхностью сопряженнаго зуба. Во всемъ послѣдующемъ мы будемъ принимать, что зубецъ ограниченъ цилиндрической поверхностью съ производящими параллельными осями вращеній. Въ такомъ случаѣ поверхности вполне опредѣляются ихъ нормальными сѣченіями (D) и (D'), носящими названіе *профилей* зубьевъ и лежащими въ плоскостяхъ (P) и (P'), перпендикулярныхъ къ осямъ вращеній и связанныхъ соответственно съ (M) и (M'). Въ парѣ сопряженныхъ профилей каждый изъ нихъ есть огнивающая кривая по отношенію къ другому, и по свойству огнивающихъ ихъ общая нормаль (N) въ точкѣ касанія проходитъ черезъ мгновенный центръ относительнаго движенія т. е. черезъ точку касанія центровъ. Поставивъ себѣ цѣлью *графическое* рѣшеніе задачи, мы вправе предполагать, что центры даны графически и при томъ настолько подробно, что можно графически привести къ нимъ касательныя въ каждой точкѣ. Этихъ данныхъ вполне достаточно для нашей цѣли.

Въ самомъ дѣлѣ, намъ нѣтъ надобности умѣть вычертить всю кривую, ибо въ практикѣ пользуются весьма незначительной ея частью, которую безъ погрѣшности, допускаемой практикой, можно разсматривать какъ состоящую изъ одной или двухъ

*) Эти поверхности называются также вообще сопряженными поверхностями конформатической пары.

дугъ соприкасающихся круговъ, соответствующихъ одной или двумъ точкамъ касанія дѣйствительныхъ профилей (D) и (D'). Такимъ образомъ вопросъ объ отысканіи профилей сводится къ вопросу объ отысканіи ихъ центровъ кривизны, соответствующихъ точкамъ касанія зубьевъ. Изъ приведеннаго свойства общей нормали (N) слѣдуетъ, что центръ кривизны C находится на прямой (общей нормали), проходящей черезъ точку касанія профилей и черезъ соответствующую этому моменту точку касанія O центроидовъ, при чемъ эта точка O всегда находится на прямой, соединяющей центры вращеній, т. е. на линіи центровъ. Стало быть, искомый центръ C вполне опредѣляется его разстояніемъ ρ отъ точки касанія O центроидовъ и стороной, въ которую оно откладывается. Положеніе нормали (N) зависитъ отъ вида профилей, а потому выбравъ произвольно положеніе общей нормали, мы тѣмъ самымъ выбираемъ видъ профилей.

3. Означимъ (черт. 1):

черезъ A центръ вращенія въ (M) *) и полюсъ въ системѣ полярныхъ координатъ.

- (T) общую касательную къ центроидамъ въ O .
- R радіусъ-векторъ AO по направленію AO .
- ψ уголъ наклоненія касательной (T) къ прямой AO .
- λ уголъ наклоненія общей нормали (N) къ прямой AO .

Углы ψ и λ могутъ быть также больше $\frac{\pi}{2}$.

- D разстояніе между центрами вращенія, т. е. кратчайшее разстояніе между осями вращенія.

Упомянутая выше формула (стр. 198 и 202 моей Кинематики Машинъ) даетъ разстояніе ρ въ функціи отъ данныхъ

*) Для колеса (M) приняты тѣ же обозначенія въ сопровожденіи со вычисления (U).

величинъ R и ϕ и произвольнаго угла λ [ρ и φ относятся къ (M) , ρ' и φ' — къ (M')]:

$$(1) \dots \rho = \frac{R \sin(\lambda - \phi)}{\sin \phi \left(1 - \frac{d\lambda}{d\varphi}\right)}, \rho' = \frac{R' \sin(\lambda - \phi)}{\sin \phi \left(1 - \frac{d\lambda}{d\varphi'}\right)},$$

гдѣ ϕ есть уголъ поворота колеса (M) , $d\varphi$ элементарная скорость вращенія этого колеса.

Величины ϕ и ϕ' , R и R' связаны между собою слѣдующими зависимостями:

$$(2) \dots R d\varphi = R' d\varphi', \quad R' - R = D.$$

Въ силу этихъ зависимостей и тождества:

$$\frac{d\lambda}{d\varphi'} = \frac{d\lambda}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\varphi'} = \frac{d\lambda}{d\varphi} \frac{R'}{R}$$

можно формулы (1) написать такъ (умноживъ ихъ соотвѣтственно на R' и R):

$$(3) \dots \rho = \frac{R R' \sin(\lambda - \phi)}{\sin \phi (R' - Q)}, \quad \rho' = \frac{R R' \sin(\lambda - \phi)}{\sin \phi (R - Q)},$$

гдѣ $Q = R' \frac{d\lambda}{d\varphi} = R \frac{d\lambda}{d\varphi'}$ есть произвольная величина, ибо λ есть произвольная функція отъ угла вращенія ϕ (и ϕ').

Полагая $Q=0$, и обозначая черезъ r и r' значенія ρ и ρ' для этого частнаго случая, мы изъ (3) получаемъ:

$$(4) \dots r = \frac{R \sin(\lambda - \phi)}{\sin \phi}, \quad r' = \frac{R' \sin(\lambda - \phi)}{\sin \phi},$$

и затѣмъ общую формулу:

$$(5) \dots \rho = r \cdot \frac{R'}{R' - Q}, \quad \rho' = r' \cdot \frac{R}{R - Q}.$$

По исключеніи произвольной величины Q между выраже-
ніями для ρ и ρ' по (3) мы получаемъ *одну* зави-
симость между ρ и ρ' :

$$(6) \dots\dots\dots \begin{cases} \rho' R R' \sin(\lambda - \phi) + \rho \rho' R \sin \phi = \\ \rho R' R \sin(\lambda - \phi) + \rho' \rho R' \sin \phi, \end{cases}$$

изъ которой можно опредѣлить одну изъ величинъ ρ и ρ' по
произвольно выбранной другой величинѣ. Зависимость (6) можно
написать еще такъ:

$$(7) \dots\dots\dots \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'} \right) \sin(\lambda - \phi) = \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right) \sin \phi.$$

Положивъ

$$(8) \dots\dots\dots \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{R} - \frac{1}{R'} = \frac{1}{b},$$

мы изъ (7) получаемъ:

$$(9) \dots\dots\dots b : x = \sin \phi : \sin(\lambda - \phi),$$

затѣмъ изъ (8)

$$(10) \dots\dots\dots b = \frac{R R'}{D}, \quad \rho' = \frac{x \rho}{x - \rho},$$

наконецъ изъ (9), (10) и (4)

$$(11) \dots\dots\dots x = r \cdot \frac{R'}{D}, \quad \rho' = \frac{x \rho}{x - \rho}$$

Эта формула даетъ ρ' въ функціи отъ произвольной вели-
чины ρ . Если желательно выбрать произвольно ρ' и по ней
опредѣлить ρ , то нужно написать (7) въ такомъ видѣ:

$$(7') \dots\dots\dots \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} \right) \sin(\lambda - \phi) = \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} \right) \sin \phi$$

затѣмъ положить

$$(8') \dots\dots\dots \frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} = \frac{1}{x'}, \quad \frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{1}{b'}$$

Изъ (7') слѣдуетъ

$$(9') \dots\dots\dots b' : x' = \sin \phi : \sin(\lambda - \phi),$$

затѣмъ изъ (8')

$$(10') \dots\dots\dots b' = -\frac{RR'}{D}, \quad \rho = \frac{x'\rho'}{x' - \rho'},$$

ибо при принятомъ обозначеніи $R' - R = D$ имѣемъ $R - R' = -D$,
и наконецъ изъ (9'), (10') и (4)

$$(11') \dots\dots\dots x' = -\rho' \frac{R}{D}, \quad \rho = \frac{x'\rho'}{x' - \rho'}.$$

Изъ сравненія (11) съ (11') слѣдуетъ, что

$$(12) \dots\dots\dots x' = -x$$

При этомъ считаемъ необходимымъ замѣтить, что все длины имѣютъ также знаки. Именно: разстояніе D , принятое за положительное, считается отъ точки A' къ точкѣ A ; радиусы-векторы R и R' въ каждомъ колесѣ въ отдѣльности считаются отъ центра вращенія, принятаго за полюсъ въ полярной системѣ координатъ, къ периферіи центронда; длины ρ и ρ' , опредѣляющія положенія центровъ C и C' , считаются отъ точки касанія O центрондовъ по тому направленію общей нормали (N), которое образуетъ съ радиусами-векторами уголъ λ , считаемый по направленію полярныхъ угловъ. Поэтому: 1) R' всегда положительна, а R положительна во внутреннемъ заѣвленіи ($R' - R = D$ есть абсолютная разность и $R' > R$), но отрицательна во внешнемъ заѣвленіи ($R' - R = D$ есть относительная

разность, но абсолютная сумма). 2) Во внутреннем зацеплении углы λ , ψ и $\lambda - \psi$ равны как по величине, так и по направлению въ обоихъ колесахъ; во внешнемъ зацеплении эти углы въ (M) имѣютъ противоположные знаки съ тѣми-же углами въ (M') , причемъ въ последнемъ они считаются положительными, а въ первомъ — отрицательными. 3) Если ρ (или ρ') оказывается по формулѣ положительной, то она откладывается по положительному направлению общей нормали; если-же ρ (или ρ') оказывается отрицательной, то она откладывается въ противоположную сторону. Величину ρ (или ρ') въ последней формулѣ [формулѣ (11 или 11')] можно всегда считать положительной, выбирая направление общей нормали по направлению этой произвольной величины ρ (или ρ').

4. Построеніе формулъ.

I. *Построеніе формулы (4), [черт. (1,а) при $\lambda > \psi$ и (1,б) при $\lambda < \psi$].*

Описываютъ радиусомъ $OA = R$ дугу около мгновеннаго центра O , которая встрѣчаетъ нормаль (N) въ точкѣ a ; черезъ a проводятъ прямую параллельно касательной (T) до встрѣчи ея съ OA въ точкѣ B ; наконецъ радиусомъ OB описываютъ около O дугу до встрѣчи ея съ (N) въ точкѣ C , которая и есть искомый центръ кривизны для точки касанія профилей. Положеніе точки C на нормали по ту или другую сторону отъ O опредѣляется знакомъ формулы, при чемъ положительнымъ направлениемъ нормали въ каждомъ колесѣ считается то, которое образуетъ уголъ λ съ продолженіемъ радиуса-вектора AO (или $A'O'$) разсматриваемаго колеса; направление касательной (T) (и слѣдов. уголъ ψ) къ центрону есть то, по которому перемѣщается мгновенный центръ.

Доказательство построенія. Изъ треугольника OaB , въ которомъ $Oa = R$, $\angle OaB = \lambda - \psi$ (или $\psi - \lambda$), $\angle OBa = \psi$ (или $\pi - \psi$),

$$\text{слѣдуетъ} \quad OC = OB = \frac{R \sin(\lambda - \psi)}{\sin \psi} = r.$$

Построенія въ обоихъ колесахъ дѣлаются независимо другъ отъ друга — пужно только осторожно опредѣлять знакъ величинъ r и направленіе нормали (N) по даннымъ выше правиламъ.

Это построеніе есть самое простое; оно соответствуетъ простѣйшему виду функціи λ ($\lambda = \text{const.}$).

Для сокращенія выраженія мы будемъ уголъ λ называть угломъ давленія. И такъ, простѣйшему виду угла давленія соответствуетъ простѣйшее построеніе профиля. Въ круглыхъ колесахъ (когда отношеніе угловыхъ скоростей постоянно) уголъ $\psi = 90^\circ$ и выраженіе для r принимаетъ самый простой видъ: $r = -R \cos \lambda$, т. е. разстояніе r есть ортогональная проекція радіуса колеса (радіуса первообразной окружности) на нормаль (черт. 2). Всѣ колеса съ одинаковымъ угломъ давленія λ образуетъ рядъ *).

II. Построеніе формулы (5) (черт. 1).

Отложимъ $Om = R' =$ радіусу-вектору сопряженнаго колеса и $On = R' - Q$, гдѣ Q есть произвольная положительная или отрицательная дѣяла (напомнимъ чертежъ Q отрицательна и $R' - Q > R'$) и проведемъ mC_1 параллельно mC ; точка C_1 есть искомый центръ, такъ какъ изъ подобія треугольниковъ слѣдуетъ

$$OC_1 = OC \cdot \frac{Om}{On} = r \frac{R'}{R' - Q} = \rho.$$

Если (при положительномъ Q) $R' - Q < 0$, то ρ и r имѣютъ противоположные знаки и должны быть отложены въ противоположные стороны. Величина Q совершенно произвольна, но должна быть одинаковой для обоихъ колесъ. Всѣ колеса съ одинаковыми углами λ и величиной Q образуютъ рядъ. Въ случаѣ

*) См. мою теорію вращеній § 17.

круглых колесъ положеніе $Q = \text{const.}$ приводитъ къ такъ называемымъ циклическимъ зацепленіямъ (эпп- и гипоциклоиды, цѣпочное и плоское зацепленія), спеціальныи видъ которыхъ зависить отъ частнаго значенія для Q *).

Этотъ пріемъ можетъ быть повторять два раза для одного и того же профиля, принимая для Q два значенія, $Q = Q_1$ и $Q = Q_2$ и при томъ такъ, чтобы было $R' - Q > 0$ и $R' - Q < 0$. Тогда профиль составляется изъ двухъ дугъ противоположныхъ кривизнъ въ видѣ буквы f (черт. 3), сходящихся въ какой нибудь точкѣ на центроидѣ, гдѣ онѣ имѣютъ общую нормаль (нормаль N). И это построеніе дѣлается отдѣльно для каждаго колеса.

III. Построеніе формулы (11) (черт. 4).

По этой формулѣ слѣдуетъ произвольно выбрать центръ кривизны въ (M) и зытѣмъ построить центръ кривизны въ (M') . Длины $x = OX$ получаютъ тѣмъ-же путемъ, какъ длину ρ въ формулѣ (5), съ тѣмъ лишь различіемъ, что вмѣсто величины $R' - Q$ здѣсь берутъ разстояніе D между центрами вращенія.

Построеніе длины ρ' состоитъ поэтому изъ слѣдующихъ трехъ частей: [черт. (4,а) для внутренняго и (4,б) для вѣншаго зацепленія]:

1) Изъ построенія величины $r = Ob$, при чемъ поступаютъ точно такъ, какъ при построеніи величины r формулы (1) для колеса (M) .

2) Изъ построенія величины $x = OX$

а) *Внутреннее зацепленіе* [черт. (4,а)].

Первыи пріемъ. Откладываемъ длину $OD = D = R' - R$ и проводимъ $A'X$ параллельно Ob . Дѣйствительно, изъ подобія треугольниковъ ObD и $OA'X$ имѣемъ

$$OX = \frac{Ob \cdot OA'}{OD} = \frac{r \cdot R'}{D} = x.$$

*) См. мою теорію зацепленій § 34.

Второй приёмъ. Проводимъ AF , равную и параллельную (геометрически равную) Ob , то продолженіе прямой $A'F$ встрѣчаетъ (N) въ искомой точкѣ X , пбо изъ подобія треугольниковъ $A'AF$ и $A'OX$ получаемъ

$$OX = \frac{AF \cdot OA'}{AA'} = \frac{r \cdot R'}{D} = x.$$

b) *Внѣшнее зацѣпленіе* (черт. 4, b).

Первый приёмъ. На сторонѣ центра вращенія A откладываемъ $OA_1' = OA' = R'$ и $OD = R' - R = D$, при чемъ вмѣсто разности беремъ абсолютную сумму радиусовъ R и R' , такъ какъ теперь R отрицателенъ; затѣмъ проводимъ $A_1'X$ параллельно Db . Доказательство то-же, что въ случаѣ (a).

Второй приёмъ. Проводимъ черезъ A отрѣзокъ AF геометрически равный отрѣзку $Ob = r$; то прямая $A'F$ встрѣчаетъ (N) въ той-же точкѣ X . Доказательство, какъ въ случаѣ (a).

Первые приемы разнятся нѣсколько въ обоихъ случаяхъ, именно по столько, по сколько алгебраическая разность $R' - R$ превращается въ сумму при внѣшнемъ зацѣпленіи. Вторые приемы тождественны въ обоихъ случаяхъ, такъ какъ одна и та-же прямая $A'F$, соединяющая центръ вращенія A' съ точкой F , встрѣчаетъ нормаль (N) въ искомой точкѣ X . Но второй приёмъ требуетъ проведенія лишней линіи AF . Выборъ приёма для пользованія зависить отъ удобствъ, представляющихся при выполнении дѣйствительнаго чертежа.

3) Изъ построенія длины $\rho' = \frac{x\rho}{x - \rho}$.

Откладываемъ на (N) по направленію XO длину $XM = \rho$ и по линіи центровъ такую-же длину $OP = \rho$ и проводимъ XS параллельно MP . Легко видѣть, что

$$OS = \frac{OX \cdot OP}{MO} = \frac{x \cdot \rho}{x - \rho} = \rho'.$$

На обоихъ чертежахъ приято $\rho < x$ и потому $\rho' > 0$. Если возьмемъ $\rho = \rho_1 > x$, то $\rho_1' < 0$. На чертежѣ (4, b) взято $\rho_1 = XM_1 > x$ и тогда параллель къ M_1P_1 встрѣчаетъ линію центровъ въ точкѣ S_1 , лежащей по другую сторону отъ O . На чертежѣ (4, a) прямая, проведенная черезъ X параллельно M_1P_1 , не встрѣчаетъ линіи центровъ въ предѣлахъ чертежа.

5. Сравненіе предыдущихъ способовъ.

Первый способъ проще всѣхъ, такъ какъ онъ требуетъ одну только построенію. За то онъ наименѣе вѣрный, такъ какъ профиль составляется изъ одной только дуги, которая совпадаетъ съ точнымъ профилемъ въ одной только точкѣ. Для пары колесъ требуется два построенія. Второй способъ состоитъ изъ двухъ построеній для каждаго колеса, слѣдовательно, изъ *четырехъ* для пары колесъ. Профиль можетъ быть составленъ изъ двухъ дугъ, совпадающихъ съ истиннымъ профилемъ въ двухъ точкахъ; стало быть, этотъ способъ вѣрнѣе перваго. Въ этомъ случаѣ для обоихъ колесъ потребно всего *шесть* построеній. Третій способъ не требуетъ никакого построенія для колеса (M), для колеса-же (M') потребно три построенія, если профиль составляется изъ одной дуги, и *четыре* построенія, если онъ составляется изъ двухъ дугъ. Слѣд. этотъ способъ, обладая такой-же степенью точности, какъ второй, сокращаетъ работу на два построенія. Но самый простой способъ, поступающій послѣднимъ двумъ въ точности, есть слѣдующій.

6. Если въ формулѣ (11) примемъ $\rho_1 = x$, то центръ кривизны въ (M) не будетъ уже произволенъ и для его опредѣленія потребуется два построенія, именно тѣ-же самыя построенія, которыя даютъ ρ по формулѣ (5) (черт. 1), если вмѣсто произвольной величинны $On = R' - Q$ возьмемъ $On = D$, т. е. $Q = Q_1 = R$. Въ такомъ случаѣ формула (11) доставитъ для ρ_1' величину $\rho_1' = \infty$; т. е. профиль сопряженного зубца составитъ изъ *прямой*

линій, для проведенія которой пять надобности въ построенія. Точно такимъ-же образомъ можно взять прямой профиль въ (M) и отыскать въ (M') соответствующій центръ кривизны. Но во (12) имѣемъ $\rho_1 = -\rho_2'$. Означ., если въ каждомъ колесѣ замѣнимъ одну дугу составнаго профиля прямолинейной частью, то соответствующіе сопряженные центры кривизны падаютъ отъ O въ равныхъ, но противоположныхъ разстояніяхъ. Число всѣхъ построеній для обоихъ колесъ сводится къ двумъ. Отсюда слѣдуетъ, что наилучшіе во всѣхъ отношеніяхъ профили суть, которые состоятъ изъ дуги и прямой линіи. При этомъ необходимо замѣтить, что по этому методу нельзя получить ряда колесъ, такъ какъ положенія $Q_1 = R$ и $Q_2 = R'$, при которыхъ получаются прямолинейные профили, имѣютъ мѣсто только для пары колесъ.

7. Профиль и его длина.

Опредѣливъ центръ кривизны, проводятъ дугу черезъ какую нибудь точку общей нормали, при чемъ радіусъ кривизны остается произвольнъ (свойство эвклидисты); черезъ ту-же точку нулемъ провести дугу сопряженного профиля. Длина профиля, т. е. величина потребной дуги, зависитъ отъ размѣра той дуги центроида, которая должна откатиться при помощи данного зуба. Пользуясь въ общемъ случаемъ тѣми-же терминами, которые употребляются въ теоріи зацепленій круглыхъ колесъ, мы скажемъ, что размѣръ профиля зависитъ отъ *дуги сцепленія*. Этотъ вопросъ весьма легко рѣшается на основаніи общаго свойства профилей зубцовъ, по которому нормаль къ профилю въ какой нибудь его точкѣ проходитъ черезъ соответствующій мгновенный центръ. Въ рассматриваемомъ случаѣ приближенного вычерчиванія нормаль къ профилю совпадаетъ (приблизительно) съ радіусомъ замѣняющей его дуги окружности. Поэтому крайнія точки профиля опредѣляются какъ точки пересѣченія его съ прямыми, соединяющими крайнія точки дуги сцепленія

отъ центромъ кривизны въ случаѣ простаго профиля (по формулѣ 4) или съ центрами кривизны въ случаѣ составнаго профиля (формулы 5 и послѣдующія). Въ случаѣ прямолинейнаго профиля крайняя точка его есть основаніе перпендикуляра, опущеннаго на него изъ крайней точки дуги съѣденія. (Этотъ перпендикуляръ параллеленъ нормали, служащей для построенія).

Для поясненія всего предыдущаго служатъ чертежи (5), (6), (7), (8) и (9). При этомъ считаемъ еще разъ остановиться на вопросѣ о знакахъ p и p' , такъ какъ положеніе центровъ кривизны зависитъ какъ отъ длинъ, такъ и отъ знаковъ этихъ величинъ. Для этого рассмотримъ этотъ вопросъ одновременно для обоихъ колесъ, хотя въ действительности нѣтъ надобности въ этомъ, какъ мы видѣли изъ самыхъ способовъ построенія.

1) Внутреннее заѣденіе.

а) Простой профиль (черт. 5).

Направленію линіи центровъ считается отъ A' къ A , для того чтобы $D=R'-R$ было больше нуля. Выборъ направленія касательной (T) къ центроидамъ (M) и (M') произволенъ и опредѣляетъ собою направленіе положительныхъ вращеній радіус-вектора. Именно, направленіе этой касательной опредѣляетъ направленіе движенія мгновеннаго центра, описывающаго оба центроида. При этомъ могутъ быть четыре случая.

1) По принятому на чертежѣ направленію, указываемому стрѣлкой на (T), мгновенный центръ движется на (M) по направленію Ob и на (M') по направленію Ob' ; радіусы-векторы въ обоихъ колесахъ вращаются около своихъ полюсовъ A и A' по направленію часовой стрѣлки. Стало бытъ, за положительное вращеніе принято здѣсь вращеніе часовой стрѣлки, ибо таковымъ движеніемъ обладаетъ радіусъ-векторъ колеса (M'), въ которомъ все движенія и направленія приняты за положительныя. Примемъ теперь за направленіе нормали (N) направленіе, указываемое

стрѣлкой на этой линіи. То $\phi = \angle GOT_1$, $\lambda - \phi = \angle T_1ON_1$; каждый изъ нихъ меньше π , ихъ синусы положительны и формула (4) дастъ для обѣихъ разстояній r и r' положительные величины: точки O и O' падаются на положительной сторонѣ общей нормали. Рассмотримъ остальные три возможныхъ случая.

2) Примемъ теперь противоположное направленію для общей касательной; тогда радіусы-векторы будутъ вращаться по направленію стрѣлки (2), противоположному движенію часовой стрѣлки. Угломъ ϕ будетъ служить уголъ GOT_2 , за уголъ λ надо будетъ считать уголъ GON_1 (тотъ изъ нихъ, который больше π) и тогда угломъ $\lambda - \phi$ будетъ уголъ T_2ON_1 . Такъ какъ и въ этомъ случаѣ оба угла, ϕ и $\lambda - \phi$, меньше π и положительны, то r и r' остаются положительными.

3) Измѣнимъ направленію общей нормали въ ON_2 и сохранимъ за (T) направленіе OT_1 . То, считая углы по направленію стрѣлки (1) мы видимъ, что $\lambda - \phi > \pi$, $\sin(\lambda - \phi) < 0$, вслѣдствіе чего r и r' оба отрицательны и должны быть отложены не по направленію ON_2 , а по направленію ON_1 , какъ прежде.

4) Измѣнимъ направленіе обѣихъ прямыхъ (T) и (N) , т. е. возьмемъ направленія OT_2 и ON_2 ; въ этомъ случаѣ вращенія считаются по стрѣлкѣ (2) и легко видѣть, то теперь $\lambda < \phi$, $\sin(\lambda - \phi) < 0$ и что, поэтому, r и r' оба отрицательны и должны быть отложены на сторонѣ отрицательныхъ нормалей.

Мы такимъ образомъ приходимъ къ слѣдующему заключенію: какъ-бы ни считать направленія прямыхъ (T) и (N) , пани формулы (4) даютъ одні и тѣ-же точки O и O' , дѣлая невозможнымъ всякую ошибку, если только умѣть недвусмысленно опредѣлять направленія положительныхъ вращеній для радіусовъ-векторовъ.

Крайнія точки профилей. Намедемъ центры кривизнъ, проводимъ дуги (D) и (D') черезъ точку O , описывая ихъ около O для (M) и около O' для (M') . Части этихъ дугъ,

лежація по обѣмъ сторонамъ точки O , принимаются за профили зубцовъ. Надо опредѣлить ихъ размѣры. Пусть требуется, чтобы разсматриваемая пара зубьевъ вола колеса на протяжении дуги сцепленія ab въ (M) и $a'b'$ въ (M') , при чемъ должно быть $Od=Od'$, $Ob=Ob'$.

Крайнія точки b_1 и a_1 профиля (D) суть точки пересѣченія его съ прямыми Cb и Ca ; крайнія точки профиля (D') суть b'_1 и a'_1 , въ которыхъ онъ встрѣчается съ прямыми $C'b'$ и $C'a'$.

Вещество въ (M) находится на вогнутой сторонѣ профиля (D) , вещество въ (M') —на выпуклой сторонѣ профиля (D') . Зацепленіе вогнуто (правильнѣе сказать: вогнуто-выпукло).

б) *Составной профиль* (черт. 6).

Оставимъ профиль каждаго зуба изъ прямолинейной части и дуги.

1) *Профиль зуба въ (M)* . Для опредѣленія центра кривизны C_1 его дуги, соответствующей прямолинейной части профиля (D') , нужно въ формулу (5) поставить R' вместо R ; тогда получимъ $\rho_1 = r \frac{R'}{R' - R} = r \frac{R'}{D}$, $\rho_1' = \infty$. Построеніе величины ρ_1 тождественно съ построеніемъ величины α для формулы (11).

Первый приемъ. Опредѣливъ точку C по формулѣ $OC = r = \frac{R \sin(\lambda - \phi)}{\sin \phi}$, откладываемъ $OD = D = R' - R$ и проводимъ черезъ A' параллель къ EC , которая встрѣтитъ нормаль въ искомомъ центрѣ C_1 .

Второй приемъ. Точка C_1 опредѣляется какъ точка пересѣченія нормали съ прямой $A'E$, проходящей черезъ A' и конецъ отрезка AE , геометрически равнаго отрезку $OC = r$. Величина ρ_1 совпадаетъ съ направленіемъ величины r , такъ какъ по формулѣ $\frac{R'}{D}$ есть положительная величина.

Профиль (D) составляется из дуги pO и прямой Om ; крайняя точка b_1 дуги получается въ пересѣченіи ея съ прямой C_1b ; крайняя точка d_1 прямой есть основанію перпендикуляра, опущеннаго на нее изъ точки d .

Профиль зубца (D') въ (M'). Для опредѣленія центра кривизны C_2' криволинейной части Om' этого профиля, соответствующей прямолинейной части Om профиля (D), нужно въ (5) взять $Q=R'$; тогда получимъ

$$\rho_2 = \infty, \quad \rho_2' = \frac{r' \cdot R}{R - R'} = -\frac{r' \cdot R}{D} = -\frac{RR' \sin(\lambda - \phi)}{D \sin \phi} = -\rho_1,$$

т. е. центры кривизны криволинейныхъ частей профилей расположены симметрично относительно точки O . Если для нахождения точки C_2' употребимъ первый указанный выше приемъ, то сначала найдемъ точку C_1 , проведя черезъ A параллель къ прямой OC , затѣмъ перенесемъ ее въ C_2' , описавъ полуокружность C_1p_2' около O . Этотъ приемъ подтверждаетъ нашу теорему о равенствѣ длинъ ρ_1 и ρ_2' . Второй приемъ даетъ непосредственно положеніе искомой точки C_2' , какъ видно изъ чертежа. Отсюда слѣдуетъ, что второй приемъ математичѣе перваго, ибо онъ подтвержденъ для обоихъ колесъ. Этотъ приемъ можно для обоихъ колесъ сформулировать такъ: центръ кривизны криволинейной части профиля есть точка пересѣченія нормали и прямой, соединяющей центръ вращенія другаго колеса съ концомъ отрезка, геометрически равнаго величинѣ формулы (4) и проходящаго черезъ центръ вращенія разсматриваемаго колеса.

Крайнія точки профиля опредѣляются какъ въ предыдущемъ случаѣ.

Внѣшнее зацепленіе.

а) *Простой профиль* (черт. 7).

Принимаемъ направленіе $A'A$ за положительное; точка C' опредѣляется какъ въ предыдущемъ случаѣ, такъ какъ знако-

положенія для колеса A' одинаковы въ обоихъ случаяхъ. Сохраняя для колеса (M) тѣ-же направленія ON_1 для нормали, OT_1 для касательной и $\alpha\beta\gamma$ для вращеній, и имѣя въ виду, что теперь

$$R \text{ отрицателенъ} = AO, \text{ мы видимъ, что выраженіе } r = \frac{R \sin(\lambda - \phi)}{\sin \phi}$$

отрицательно. Слѣд., центръ C лежитъ по ту сторону отъ O . Но при этомъ мы считали вращенія въ сторону противоположную вращенію колеса (M) , ибо разсматривая оба колеса вмѣстѣ, мы самой силой вещей вынуждены при отсчетѣ угловъ придти къ противорѣчію съ однимъ изъ колесъ. Посмотримъ, поэтому, измѣнится-ли положенію точки C , если будемъ считать вращенія по тому направленію, по которому вращается колесо (M) (по стрѣлкѣ f_1), сохраняя за R' и R ихъ прежнія направленія. Въ этомъ случаѣ уголъ ϕ какъ по величинѣ, такъ и по направленію измѣняется дугой $\alpha\gamma_1\beta, \gamma\beta$, уголъ λ — дугой $\alpha\gamma_1\beta_1\gamma$, изъ чего слѣдуетъ, что $\lambda - \phi < 0$. Такъ какъ теперь $\phi > \pi$, то въ формулѣ для r находится три отрицательныхъ величинъ: слѣд., r сохраняетъ свой знакъ. Но лучше всего разсматривать колесо (M) независимо отъ (M') , принимая въ немъ за ϕ и λ тѣ-же углы, что въ (M') . А потому, считая R положительнымъ по направленію AO (отъ полюса къ периферіи), откладываямъ $\alpha_1\beta_1 = \alpha\beta$, $\alpha_1\gamma_1 = \alpha\gamma$ и считаемъ вращеніе (M) по направленію стрѣлки f_2 , согласно направленію OT'_2 касательной, образуемому съ направленіемъ AO уголъ $\alpha_1\beta_1$. Тогда въ формулѣ $r = \frac{R \sin(\lambda - \phi)}{\sin \phi}$ всѣ величины положительны; но такъ какъ теперь нормаль считается по направленію ON_2 , то конецъ отрезка r опять совпадаетъ съ C нашего чертежа.

И такъ, вычерчивая каждое колесо въ отдѣльности, надо придерживаться слѣдующаго правила: считая направленію радіуса-вектора отъ полюса A (или A') къ периферіи центроида, считать за направленіе касательной къ центроиду то направленіе, которое образуетъ уголъ ϕ съ продолженіемъ радіуса-вектора и

за направленію нормали къ профилю то, которое образуетъ уголъ λ съ продолженіемъ радіуса-вектора, *принимая въ обоихъ колесахъ одно и то-же направленіе вращенія* (явлр. по часовой стрѣлкѣ). Выказанное въ этомъ видѣ правило тоже-дственно какъ во внутреннемъ, такъ и во внешнемъ зацепленіяхъ.

в) *Составной профиль* (черт. 8).

Составимъ профили въ обоихъ колесахъ изъ дугъ и прямой линіи.

Центръ кривизны C_1' въ (M') мы найдемъ по формулѣ (5), если возьмемъ

$$Q=R', \quad \rho_1=\infty, \quad \rho_1'=\frac{RR'\sin(\lambda-\psi)}{\sin\psi(R-R')}=-\frac{RR'\sin(\lambda-\psi)}{D\sin\psi}.$$

Такъ какъ въ этомъ случаѣ R отрицателенъ, то ρ_1' положительнъ: центръ C_1' находится на той-же сторонѣ отъ O , гдѣ C' . Для нахождения его можно пользоваться тѣми-же правилами, какъ въ предыдущемъ случаѣ.

Первый приемъ. Откладываемъ $OA_1=R$ и $OD'=-D$ и проводимъ A_1C_1' параллельно $D'C'$.

Второй приемъ. Проводимъ $A'F'$ геометрически равно OC' и соединяемъ точку F' съ центромъ вращенія A колеса (M) : эта прямая опредѣляетъ на (N) точку C'_1 .

Для нахождения центра кривизны C_2 въ (M) нужно въ (5) взять $Q=R$, и получимъ

$$\rho_2'=\infty, \quad \rho_2=\frac{RR'\sin(\lambda-\psi)}{(R'-R)\sin\psi}=\frac{RR'\sin(\lambda-\psi)}{\sin\psi \cdot D}=-\rho_1'.$$

Ольд., разстояніе центра C_2 отъ O равно разстоянію центра C_1' отъ O , но находится на противоположной сторонѣ. Если строить (M) независимо отъ (M') , то, принимая во вниманіе выше-сказанное о направленіяхъ касательной, нормали и вращеній

следует ρ_1' считать также положительной, откладываемой по направлению ON_2 .

Первый приемъ. Откладываемъ $OA_1' = R$ и $OD = D$ и проводимъ $A_1'C_2 \parallel DC$.

Второй приемъ. Прямая $A'F$ встрѣчаетъ (N) въ искомой точкѣ C_2 .

Выборъ приема зависитъ отъ удобствъ, представляемыхъ имъ въ действительномъ чертежѣ; вообще-же второй приемъ строже первого, ибо онъ во всѣхъ случаяхъ непосредственно даетъ искомую точку, избавляя насъ отъ необходимости считаться со знакомъ формулы.

Полезныя части профилей состоятъ изъ куска $b_1'd_1'$ для (M') и b_1d_1 для (M) .

П р и м ѣ р ы.

Эллиптическія колеса. Въ практикѣ употребляются округлыя зубчатые колеса, въ которыхъ центроидами служатъ два тождественныхъ эллипса, вращающихся около одного изъ фокусовъ, расположенныхъ такъ, что разстояніе между центрами вращеній равно большой оси каждаго эллипса. Мы на этомъ примѣрѣ увидимъ, какъ нани и безъ того чрезвычайно простыя построенія иногда упрощаются еще болѣе, благодаря особннымъ свойствамъ центроидовъ.

а) *Простой профиль съ примѣненіемъ способа эквидистантъ.* Нани формулы опредѣляютъ разстояніе ρ центра кривизны C отъ точки O центроида, черезъ которую проходитъ нормаль (N) , служащая для построенія. Эту величину ρ мы будемъ называть основнымъ радіусомъ кривизны. Пользуясь свойствомъ эквидистантъ, мы можемъ перенести точку касанія профилей въ какую нибудь точку общей нормали, сохранивъ тотъ-же центръ кривизны.

Тогда въ случаѣ вогнутого касанія профилей оба радіуса кривизны одновременно увеличиваются или уменьшаются на одинаковую величину, а въ случаѣ выпуклага касанія одинъ радіусъ увеличивается, а другой уменьшается на ту-же величину. На этомъ основаніи и благодаря особеннымъ свойствамъ эллипса можно весьма быстро построить разомъ оба профиля двоякодѣйствующаго зуба.

Пусть колесо вращается около фокуса F эллипса; назовемъ зубья по порядку черезъ (1), (2), (3)... начиная отъ вершины P , ближайшей къ центру вращенія F . Назначимъ черезъ 1, 2, 3, ... точки дѣленія центроида, расположенныя такъ, что каждая изъ нихъ находится въ серединѣ зуба; стало быть, разстояніе между двумя соседними точками равно *шагу*. Всѣхъ зубьевъ въ пилень примѣръ—40. Примемъ за уголъ $\angle(NT)$ между нормалью (N) къ профилю, соответствующей точкѣ дѣленія и касательной (T) къ эллипсу въ той-же точкѣ постоянный уголъ B инструментальнаго треугольника ABC (черт. 10) и покажемъ для примѣра, какъ строится зубецъ (6), одна сторона котораго ограничена дугой $\alpha_6 e_6$, а другая — дугой $\alpha_6 e_6$. Для этого опишемъ около точки 6 радіусомъ $\overline{6F} = R_6 =$ радіусу-вектору колеса окружность $N_6 F G_6 N_{VI}$, гдѣ G_6 есть точка пересѣченія этой окружности съ сопряженнымъ радіусомъ-векторомъ $\overline{6f}$ эллипса (f есть другой фокусъ). Такъ какъ прямая FG_6 образуетъ съ радіусами-векторами эллипса равные углы, то она параллельна касательной $T_6 T_{VI}$ къ эллипсу въ точкѣ 6. Поэтому прикладываемъ треугольникъ ABC къ прямой (воображаемой, но не проведенной) FG_6 такъ, чтобы его гипотенуза BC прошла черезъ точки F и G_6 , его большій катетъ AB былъ обращенъ въ сторону точки 6, а меньшій острый уголъ B былъ обращенъ разъ направо, а другой разъ нѣлѣво. Передвинувъ треугольникъ въ обоихъ его положеніяхъ (при помощи линейки) параллельно самому себѣ до тѣхъ поръ, пока его катетъ AB не пройдетъ черезъ точку 6, проводимъ по AB прямая (N_6) и (N_{VI}),

которыя, образуя съ касательной $T_0 T_{VI}$ углы $T_0 \delta N_0 = T_{VI} \delta N_{VI} = B$, служат нормальными для обѣихъ сторонъ зубца. Эти нормали встрѣчаютъ проведенную окружность въ точкахъ N_0 и N_{VI} , при чемъ дуга $\widehat{PN_0}$ равна дугѣ $\widehat{G_0 N_{VI}}$; слѣд., прямая $N_0 N_{VI}$ параллельна касательной $T_0 T_{VI}$ и отвѣкаетъ на радіусъ-векторъ $\widehat{P}$ отъѣзжъ $\widehat{A_0} = r_0 =$ основному радіусу кривизны. Отсюда заключаемъ, что окружность $C_0 A_0 B_0 C_{VI}$, описанная около δ радіусомъ $\widehat{A_0}$, даетъ на (N_0) и (N_{VI}) искомыя центры кривизны C_0 и C_{VI} ; изъ нихъ первый служитъ центромъ для дуги $\alpha_0 \epsilon_0$, проведенной черезъ точку m_0 эллипса, отстоящую отъ δ на разстояніи нѣсколько меньшемъ $1/4$ длины вѣтви, а второй служитъ центромъ для дуги, проведенной черезъ точку m_{VI} эллипса, отстоящую на столько-же вправо отъ точки δ . Упрощенію въ данномъ случаѣ заключаются 1) въ томъ, что та самая окружность $N_0 P G_0 N_{VI}$, которая вообще должна быть проведена для отложенія на нормали длины $R_0 = \widehat{P}$, служитъ также для проведенія нормали (N_0) и прямой $N_0 N_{VI}$ параллельно касательной и 2) что при помощи одного построенія получаемъ оба центра C_0 и C_{VI} .

Обѣ дуги, $\alpha_0 \epsilon_0$ и $\alpha_0 \epsilon_0$, ограничивающія зубецъ, пересекаются въ точкѣ d_0 . Прямая $d_0 C_0$ встрѣчаетъ эллипсесъ въ точкѣ δ_0 , которая по чертежу отстоитъ отъ m_0 приблизительно на шатъ. По мѣрѣ перехода точки касанія разсматриваемаго зубца съ его сопряженнымъ зубцомъ отъ точки m_0 къ точкѣ d_0 мгновенный центръ переходитъ отъ точки m_0 къ точкѣ δ_0 , которая, слѣд., служитъ крайней точкой, до которой разсматриваемое колесо можетъ вести сопряженное колесо или быть ведомымъ. Если не желательна, чтобы зубецъ оканчивался остриемъ, то скосивши его немного до точки b_0 , мы получимъ зубецъ, вся дуга сѣпленія котораго меньше двухъ шаговъ. Эта дуга тѣмъ меньше, чѣмъ больше уголъ B , т. е. уголъ между касательной къ центрону и нормалью къ профилю, такъ какъ съ увеличеніемъ этого угла уменьшается уголъ наклопенія профиля

(т. е. его касательной) къ центру (къ касательной центру), вследствие чего дуги ae и ae быстрее сходятся. На этомъ основанъ уголъ B не долженъ быть слишкомъ великъ. Но онъ не долженъ быть также слишкомъ малъ, ибо съ уменьшеніемъ его уменьшается основной радіусъ кривизны (по формулѣ $r = \frac{R \sin B}{\sin \varphi}$) и легко убѣдиться изъ чертежа, что и это имѣетъ слѣдствіемъ уменьшеніе дуги сѣвленія зуба. Не вдаваясь въ весьма сложные аналитическія изысканія этого вопроса, мы замѣтимъ только, что послѣ нѣсколькихъ попытокъ можно усмотрѣть, что уголъ B долженъ заключаться между 15° — 25° ; въ нашемъ примѣрѣ $B=22^\circ$. Замѣтимъ еще, что относительная величина дуги сѣвленія, т. е. отношеніе ея къ шагу, возрастаетъ съ уменьшеніемъ самого шага или, что все равно, съ увеличеніемъ числа зубьевъ при одномъ и томъ-же размѣрѣ колеса. Такъ какъ точность также возрастаетъ съ возрастаніемъ числа зубьевъ, то заключаемъ, что во всѣхъ отношеніяхъ большее колесо съ большимъ числомъ зубьевъ лучше дѣйствуетъ, чѣмъ малое колесо съ малымъ числомъ зубьевъ (при одной и той-же абсолютной величинѣ шага).

Какъ выступы такъ и впадины зубьевъ въ тѣхъ мѣстахъ, гдѣ они не приходятъ въ соприкосновеніе со своими сопряженными, можно ограничить прямыми линіями. Такъ, принимая b_6 и β_6 за крайнія точки профилей выступа (при чемъ $m_6 b_6 = m_{v1} \beta_6$) α_6 и α_6 за крайнія точки профилей впадины (при чемъ $m_6 \alpha_6 = m_{v1} \alpha_6$) и α_5 за крайнюю точку профиля предшествующаго зуба (5), ограничиваемъ вершину выступа зуба (6) прямой $b_6 \beta_6$, а основаніе впадины между зубцами (5) и (6) прямой $\alpha_5 \alpha_6$. Для безопаснаго прохода зуба сопряженнаго колеса необходимо сдѣлать дугу сѣвленія впадины больше дуги сѣвленія выступа (т. е. оставить нѣкоторый зазоръ).

Такимъ образомъ вычерчены первые 6 зубьевъ и зубецъ (15). Последний вычерченъ съ цѣлью показать вліяніе длины

радіуса кривизны зуба на его дугу эциклопид. Из формулы $r = \frac{R \sin B}{\sin \psi}$ слѣдуетъ, что при одинаковыхъ углахъ B и ψ *) r пропорціоналенъ R . Изъ чертежа видно, что въ зубцѣ (15) весь выступъ (отъ точки пересѣченія его съ эллипсомъ до точки d_{15}) можетъ вести колесо на пространствѣ $3/4$ шага, отъ m_{15} до δ_{15} ; стало быть, весь зубецъ могъ-бы вести колесо на 3 шага. Но такъ какъ сопряженный зубецъ, тождественный съ зубцомъ (6), можетъ вести свое колесо только на $1\frac{1}{2}$ шага, то необходимо укоротить значительно и зубецъ (15), ибо въ противномъ случаѣ выступъ его не помѣстился-бы во впадинѣ сопряженного колеса. Впрочемъ, такъ какъ всѣ впадины позволяютъ большіе разбѣры для профилей, то, сдѣлавъ профилей впадинъ въ первыхъ зубьяхъ значительно больше ихъ выступовъ, можно въ послѣднихъ зубьяхъ взять также большіе выступы. Въ такомъ случаѣ дуга эциклопид до перехода черезъ линію центровъ будетъ больше или меньше дуги эциклопид послѣ перехода, смотря по тому, будетъ-ли рассматриваемое колесо ведущимъ или ведомымъ.

Такъ какъ эллипсисъ есть симметрическая фигура относительно большой оси **), то для зуба, симметричные относительно этой оси, имѣютъ равные радіусы; такъ $\rho_1 = \rho_{40}$, $\rho_2 = \rho_{39}$... $\rho_{15} = \rho_{24}$ и т. д. Поэтому достаточно вычертить только одну половину, другую-же половину можно просто скопировать.

б) Составной профиль.

Покажемъ на зубцѣ (29), какъ составляется профиль изъ дуги и прямой. Для этого, какъ въ предыдущемъ случаѣ, нужно предварительно опредѣлить центры C_{29} и C_{xxx} , соотвѣт-

*) Уголъ ψ одинаковъ для обоихъ зубцовъ (6) и (15); что-же касается B , то онъ постояненъ во всехъ колесахъ.

**) Какъ зубчатое колесо эллипсисъ симметриченъ только относительно большой оси.

ствующие формулы $r_{29} = \left(\frac{R \sin B}{\sin \psi} \right)_{29}$, при помощи окружности

$N_{29}FG_{29}N_{XXIX}$, прямой $N_{29}N_{XXIX}$ и окружности $C_{29}A_{29}B_{29}C_{XXIX}$.

Для определения искомых центров C'_{29} и C'_{XXIX} по формуле

$\rho = \frac{r \cdot R'}{D}$ мы употребимъ второй приемъ, какъ болѣе удобный

въ данномъ случаѣ. Имено, опишемъ около F окружность

$L_{29}l_1l_2l_3$ *) радиусомъ $= \overline{FQ} = \overline{F29} + \overline{29f}$, гдѣ $\overline{FQ} = 2a = D$ есть

большая ось эллипса, т. е. расстояние между центрами вращеній.

Эта окружность представляетъ геометрическое мѣсто центра

вращенія сопряженнаго колеса въ его относительномъ движеніи

по отношенію къ рассматриваемому, принятому за неподвижной.

Точка L_{29} пересѣченія этой окружности съ продолженнымъ

радиусомъ-векторомъ $F29$ есть центръ вращенія сопряженнаго

колеса въ тотъ моментъ, когда общій нормаль къ парѣ зубцовъ

проходитъ черезъ точку 29 эллипса, т. е. въ тотъ моментъ,

когда эта точка служитъ мгновеннымъ центромъ относительнаго

движенія. По второму приему центръ C'_{29} есть точка пересѣ-

ченія нормали (N_{29}) съ прямой $L_{29}K_{29}$, соединяющей точку L_{29}

съ вершиной K_{29} параллелограмма $C_{29}29FK_{29}$, построеннаго на

радиус-векторѣ $F29$ и основномъ радиус-кривизны $29C_{29}$.

Центръ C'_{XXIX} есть точка пересѣченія нормали (N_{XXIX}) съ

прямой $L_{29}K_{XXIX}$, гдѣ K_{XXIX} есть вершина параллелограмма

$C_{XXIX}29FK_{XXIX}$. Изъ чертежа видно, что оба центра кривизны

лежатъ на одной окружности, описанной около 29, что при

равенствѣ угла B для обеихъ сторонъ зуба необходимо слѣ-

дуетъ изъ нашей формулы. Въ виду этого достаточно построить

одну только точку C'_{29} .

Центры C'_{29} и C'_{XXIX} можно построить еще слѣдующимъ

образомъ, при чемъ не будетъ надобности въ кругѣ $L_{29}l_1l_2l_3$. Формулу

*) По недостаточности размѣровъ эллипса иногда приходится брать только часть этой окружности.

$$\rho = \frac{RR' \sin(\lambda - \psi)}{D \sin \phi} \text{ можно написать так: } \rho = \frac{R' \sin(\lambda - \psi)}{\sin \phi} \cdot \frac{R}{D}.$$

Поэтому можно сначала определить величину $\frac{R' \sin(\lambda - \psi)}{\sin \phi}$, которая имѣла-бы мѣсто, если-бы рассматриваемый эллипсисъ вращался около своего другаго фокуса f , и затѣмъ при помощи построения, подобнаго предыдущему, умножить эту величину въ отношеніи $\frac{R}{D}$. Для этого описываемъ около 29 окружность

$N_{29}, fN_{\text{XXIX}}, L_{29}$, проходящую черезъ f ; при помощи прямой N_{29}, N_{XXIX} , определяемъ на $29f$ точку A_{29} , (или на $29F$ точку B_{29}), отстоящую отъ 29 на неизомомъ разстояніи, и помощьюъ окружности $C_{29}, B_{\text{XXIX}}, A_{29}, C_{\text{XXIX}}$, отсѣкаемъ на (N_{29}) и (N_{XXIX}) дуги $\overline{29C_{29}} = \overline{29C_{\text{XXIX}}} = \frac{R' \sin(\lambda - \psi)}{\sin \phi}$. Наконецъ, построивъ

параллелограммъ $L_{29} 29 C_{29} M_{29}$ на дугахъ $\overline{29C_{29}}$ и $\overline{29L_{29}} = \overline{29f} = \overline{29f}$, проводимъ прямую $M_{29} F$, которая встрѣчаетъ (N_{29}) въ той-же точкѣ C'_{29} . Дѣйствительно, изъ подобныхъ треугольниковъ $L_{29} M_{29} F$ и $29 C'_{29} F$ слѣдуетъ $\overline{29C'_{29}} = \frac{L_{29} M_{29} \cdot \overline{29F}}{L_{29} F} = \frac{\overline{29C_{29}} \cdot R}{D}$.

При этомъ приемѣ одна окружность (именно $N_{29} f N_{\text{XXIX}}$) рѣшаетъ всю задачу.

Первый приемъ примѣнимъ во всѣхъ случаяхъ, такъ какъ окружность $L_{29} l_1 l_2 l_3$ описывается вообще радіусомъ, равнымъ разстоянію между центрами вращеній. Второй приемъ годится только въ эллиптическихъ колесахъ, у которыхъ $R 29 + 29 f = D$.

Профиль зуба составляется изъ дуги $n_{29} q_{29}$, описанной около центра C'_{29} черезъ точку q_{29} эллипса, отстоящую отъ 29 нѣсколько менѣе чѣмъ изъ $\frac{1}{4}$ шага, и прямой $q_{29} s_{29}$, перпендикулярной къ радіусу $C'_{29} q_{29}$. Крайняя точка p_{29} выступа находится, какъ въ случаѣ простаго профиля, при помощи прямой, проходящей черезъ центръ C'_{29} и крайнюю точку дуги эллипса.

Крайняя точка τ_{20} упадетъ въ основаніе перпендикуляра, опущеннаго на $q_{20}e_{20}$ изъ другой крайней точки дуги сдвѣженія.

Хотя профилированіе каждаго отдѣльнаго зубца съ составными профилемъ требуетъ больше работы, чѣмъ въ случаѣ простаго профиля, тѣмъ не менѣе въ общей сложности построеніе колеса съ составными профилями (составленными изъ дуги и прямой) не труднѣе построенія простыхъ профилей. Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли, что при простыхъ профиляхъ колесо симметрично только относительно большой оси эллипса; не трудно убѣдиться, что въ случаѣ составныхъ профилей оно симметрично также относительно малой оси, такъ что достаточно построить только $\frac{1}{4}$ колеса, а остальное скопировать.

Дѣйствительно, выраженіе $\rho = \frac{RR' \sin B}{D \sin \phi}$ при постоянствѣ величинъ B и D является только въ зависимости отъ выраженія $\frac{RR'}{\sin \phi}$, которое одинаково для всѣхъ четырехъ симметричныхъ точекъ эллипса.

Приближенные радіусы кривизны. Если не требуется особенная точность, то можно всѣ радіусы кривизны найти при помощи наибольшаго радіуса $\rho_{max.}$ и наименьшаго $\rho_{min.}$ по формулѣ

$$(13) \dots \dots \rho_i = \rho_{min.} + i \frac{\rho_{max.} - \rho_{min.}}{2k}$$

гдѣ k есть число зубьевъ въ четверти колеса, i число полупаговъ отъ вершины большой оси до точки, черезъ которую проводить нормаль, служащую для построенія, и ρ_i соотвѣтствующій этой нормали радіусъ кривизны. Дѣйствительно, такъ какъ радіусы векторы R и R' по абсолютной величинѣ связаны между собою зависимою

$$R + R' = D = 2a$$

(гдѣ a есть большая полуось эллипса), въ то время какъ $\sin\psi$ постоянно убываетъ отъ наибольшаго значенія $\sin\psi=1$ въ вершинѣ большой оси до наименьшаго значенія $\sin\psi=\frac{b}{a}$ въ вершинѣ малой оси (при чемъ b есть малая полуось), то легко видѣть, что ρ постоянно возрастаетъ отъ

$$(14) \dots\dots\dots \rho_{min.} = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{\sin B}{2}$$

въ вершинѣ большой оси до

$$(15) \dots\dots\dots \rho_{max.} = \frac{a^2}{b} \cdot \frac{\sin B}{2}$$

въ вершинѣ малой оси*). А потому безъ большой погрѣшности можно принять, въ особенности при маломъ эксцентриситетѣ, что радіусы кривизны ρ возрастаютъ *равномерно*, пропорціонально разстоянію зубца отъ вершины большой оси, считая это разстояніе по периферіи эллипса. Кроме того, такъ какъ для употребленія берется весьма незначительная часть всей окружности, то въ этой части приближенный профиль на столько близко подходитъ къ истинному, что глазъ не въ состояніи различить ихъ. Въ этомъ можно убѣдиться на опытѣ, если, напр., описать двѣ внутреннимъ образомъ касающіяся окружности двумя различными радіусами, пѣз которыхъ одинъ больше другого на $\frac{1}{10}$ своей длины. Если къ этому прибавить, что при отливкѣ колеса повозможно соблюдать математическую точность

*) Въ самомъ дѣлѣ, обозначая черезъ $e = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - b^2}$ эксцентриситетъ имѣемъ: 1) въ вершинѣ большой оси $R=a(1-e)$, $R'=a(1+e)$, $\sin\psi=1$, $\rho_{min.} = \frac{RR'\sin B}{2a\sin\psi} = \frac{a(1-e^2)\sin B}{2} = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{\sin B}{2}$; 2) въ вершинѣ малой оси $R=R'=a$, $\sin\psi=\frac{b}{a}$, то $\rho_{max.} = \frac{a^2}{b} \cdot \frac{\sin B}{2}$.

очертаніи, то становится очевиднымъ, что небольшая теоретическая погрѣшность не имѣетъ никакого практическаго значенія. Это замѣчаніе намъ пригодится еще разъ впоследствии.

Построеніе формулы (13). Пусть E будетъ вершина малой оси. Проводимъ въ фокусѣ f перпендикуляръ fH къ прямой fE , изъ центра O эллипса опускаемъ перпендикуляръ OX на ту-же прямую fE и откладываемъ на EO длину $EY = EX$. Проведши прямую EU подъ угломъ B къ EO , опускаемъ на нее изъ точекъ Y и H перпендикуляры YV и HU , гдѣ H есть точка пересѣченія прямой EO съ прямой fH . Соединимъ зѣтѣмъ точку E съ серединой U_1 отрезка HU прямой EU_1 , которая встрѣтитъ YV въ серединѣ V_1 отрезка YV . Наконецъ, построивъ на сторонахъ UU_1 и U_1V_1 параллелограммъ UU_1V_1I дѣлимъ длину VI на k равныхъ частей $\overline{V1} = \overline{12} = \overline{23} = \dots = \overline{(k-1)I}$ и беремъ для ρ_i длину $i\overline{V1}$.

Доказательство. Въ прямоугольномъ треугольникѣ HfE , въ которомъ fO перпендикулярна къ гипотенузѣ EH , имѣемъ

$$\overline{fE}^2 = \overline{EO} \cdot \overline{EH}, \text{ т. е. } a^2 = b \cdot EH, \text{ откуда}$$

$$(A) \dots \dots \dots EH = \frac{a^2}{b}$$

Изъ прямоугольнаго треугольника EOf , въ которомъ OX перпендикулярна къ гипотенузѣ fE , получаемъ

$$(B) \dots \dots \dots EX = EY = \frac{\overline{EO}^2}{Ef} = \frac{b^2}{a}$$

Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ EUH и EVY , въ которыхъ общій уголъ $UEH = B$ слѣдуетъ

$$\overline{HU} = \overline{HE} \sin B, \quad \overline{YV} = \overline{YE} \sin B, \text{ т. е. по (A) и (B)}$$

$$(C) \dots \dots \dots \overline{HU} = \frac{a^2}{b} \sin B, \quad \overline{YV} = \frac{b^2}{a} \sin B.$$

Прямая EU_1 дѣлитъ пополамъ оба отръзка HU и YV , слѣд.

$$(D) \dots UU_1 = \frac{a^2}{b} \frac{\sin B}{2} = \rho_{max}, \quad VV_1 = \frac{b^2}{a} \frac{\sin B}{2} = \rho_{min}.$$

Наконецъ по равенству сторонъ UU_1 и IV_1 параллелограмма UU_1V_1I имѣемъ

$$VI = V_1I \text{ — } VI = \rho_{max} \text{ — } \rho_{min}.$$

Что и требовалось доказать.

Въ нашемъ примѣрѣ четверть эллипса носитъ 10 зубцовъ, при чемъ ихъ середины отстоятъ отъ вершины P эллипса на нечетныя числа полушаговъ. Обозначая порядокъ зуба черезъ j имѣемъ здѣсь $i = 2j - 1$ и по формулѣ (13)

$$\rho_j = \rho_{min} + \frac{\rho_{max} - \rho_{min}}{20} (2j - 1), \text{ а по чертежу}$$

$$(16) \dots \dots \dots \rho_j = \overline{(2j-1)} \overline{V_1},$$

при чемъ длина VI раздѣлена на 20 равныхъ частей.

Зубецъ (29), для котораго мы нашли точно ρ_{29} , тождествененъ съ зубцомъ (9); по формулѣ (16) имѣемъ

$$\rho_{29} = \rho_9 = 17 \overline{V_1}.$$

Эта длина, отобранныя циркулемъ по чертежу, отличается отъ истинной длины $\rho_{29} = 29 \overline{C'}_{29}$ меньше чѣмъ на полмиллиметръ при всей длине ρ_{29} въ 2,9 сантиметра. Эта разность не имѣетъ абсолютно никакого практическаго значенія.

П р и м ѣ ч а н і я.

1. Изъ кинематики известно, что за профиль зубцовъ можно также принять самые центронды. Практически могутъ они не годиться для этой цѣли; по теоретически они во все

время относительнаго движенія касаются другъ друга. Поэтому наши формулы и построенія для радіусовъ кривизнъ ρ и ρ' профилей зубцовъ могутъ быть примѣнены также для опредѣленія радіусовъ кривизнъ центроидовъ; эти радіусы кривизнъ мы обозначимъ черезъ C и C' въ отличіе отъ радіусовъ кривизнъ зубцовъ вообще. Принимая-же самые центроиды за профили зубцовъ, мы должны во всѣхъ формулахъ положить $\lambda - \phi = \frac{\pi}{2}$, такъ какъ въ этомъ частномъ случаѣ нормаль къ профилю зуба совпадаетъ съ нормалью къ центроиду. Такимъ образомъ мы изъ зависимости (7) получаемъ зависимость

$$(17) \dots\dots\dots \frac{1}{C} - \frac{1}{C'} = \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right) \sin \phi,$$

дающую радіусы кривизнъ центроидовъ въ функціи отъ ихъ радіусовъ векторовъ и угла касательной. Изъ сравненія-же послѣдней зависимости съ зависимостью (7) получаемъ известную теорему Савари, по которой

$$(18) \dots\dots\dots \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'} \right) \sin(\lambda - \phi) = \frac{1}{C} - \frac{1}{C'};$$

слѣд. теорема Савари есть только частный случай нашей общей теоремы (7)*).

На основаніи формулы (1) можно получить известное выраженіе для радіуса кривизны всякой кривой. Именно, принимая самый центроидъ за профиль зуба и обозначая черезъ θ полярный уголъ въ уравненіи кривой, отнесенномъ къ полярнымъ координатамъ, имѣемъ по формулѣ (1)

*) Присутствіе величины ρ (равстояція точки касанія произвольн. отъ мгновеннаго центра) въ формулѣ Савари не есть обобщеніе, такъ какъ свойство эквидистантъ дѣлаетъ излишнимъ введеніе этой величины.

$$(A) \dots\dots\dots C = \frac{R}{\sin \phi \left(1 + \frac{d\lambda}{d\theta} \right)}^*$$

$$\text{Но } \sin \phi = \frac{R d\theta}{(R^2 d\theta^2 + dR^2)^{1/2}} \text{ и } \lambda = \frac{\pi}{2} + \phi;$$

$$\text{то } \frac{d\lambda}{d\theta} = \frac{d\phi}{d\theta} = \frac{\left(\frac{dR}{d\theta} \right)^2 - R \frac{d^2 R}{d\theta^2}}{R^2 + \left(\frac{dR}{d\theta} \right)^2} \text{ и слѣд.}$$

$$(B) \dots\dots\dots C = \frac{\left[R^2 + \left(\frac{dR}{d\theta} \right)^2 \right]^{1/2}}{R^2 + 2 \left(\frac{dR}{d\theta} \right)^2 - R \frac{d^2 R}{d\theta^2}}.$$

При помощи данной нами зависимости (17) можно иногда получить весьма легкое построение для опредѣленія радиуса кривизны данной кривой (M). Для этого надо попытаться, пользуясь, найти такую кривую (M'), которая могла-бы образовывать съ (M) *пару* центроидныхъ колесъ и при томъ такую, чтобы можно было вывести *новое простое* соотношеніе между радиусами кривизнъ C и C' . Ибо, если такое соотношеніе намъ будетъ извѣстно, то оно вмѣстѣ съ (17) доставитъ *два* уравненія для опредѣленія двухъ неизвѣстныхъ C и C' . Въ случаѣ эллипса это соотношеніе весьма просто: въ точкѣ касанія оба эллипса имѣютъ равныя, но противоположныя по направленію радиусы кривизнъ. Поэтому, положивъ въ (17) $C = -C'$, получаемъ

$$(19) \dots\dots\dots \frac{C}{2} = \frac{RR'}{D \sin \phi}.$$

*) Въ ноей кинематикѣ машинъ стр. 197 доказывается, что $\phi = -\theta$.

Центръ кривизны эллипса, примѣрно для точки 29, находится слѣдующимъ образомъ (черт. 9). Пусть a будетъ точка пересѣченія радіуса-вектора $29F$ и окружности $L_{29}faN_{29}$, описанной около точки 29; то нормаль къ эллипсу есть перпендикуляръ $29G$ къ прямой fa . Намедемъ точку b пересѣченія нормали $29G$ съ перпендикуляромъ fb къ сопряженному радіусу-вектору $f29$, строимъ параллелограммъ $L_{29}29bc$ и проводимъ прямую cR , которая встрѣчаетъ $29G$ въ точкѣ G_1 . Удвоивъ длину $29G_1$, мы получаемъ въ точкѣ G искомый центръ кривизны.

Доказательство. Изъ прямоугольнаго треугольника $29fb$, въ которомъ уголъ $f29b = 90^\circ - \phi$, слѣдуетъ: $\overline{29b} = \frac{\overline{29f}}{\cos f29b} = \frac{R'}{\sin \phi}$, затѣмъ изъ подобныхъ треугольниковъ $29G_1F$ и $L_{29}cF$ слѣдуетъ: $\overline{29G_1} = \frac{\overline{cL_{29}} \cdot \overline{29F}}{\overline{FL_{29}}} = \frac{R'R}{D \sin \phi} = \frac{C}{2}$, ибо, по построенію, $\overline{cL_{29}} = \overline{29b}$.

Это построеніе отличается отъ общаго построенія для составнаго профиля зуба тѣмъ, что вмѣсто произвольнаго значенія для угла B между касательной къ эллипсу и нормалью къ профилю беремъ $B = \frac{\pi}{2}$. Поэтому между ρ и C существуетъ зависимость

$$(20) \dots\dots\dots C = \frac{2\rho}{\sin B}, \quad \rho = \frac{C}{2} \sin B$$

которая, впрочемъ, вытекаетъ также изъ общей зависимости (18), если взять $\rho' = \infty$. Эта зависимость выражаетъ, что геометрическое мѣсто центровъ кривизны профилей (соотвѣствующихъ разнымъ профилямъ) при различныхъ углахъ B есть окружность, описанная на полурадіусѣ $\frac{C}{2}$ какъ на діаметрѣ. Отсюда слѣдуетъ, что перпендикуляры, проведенные черезъ точки

C'_{20} и C'_{xxix} соответственно къ прямымъ (N_{20}) и (N_{xxix}) должны проходить чрезъ ту-же точку $\mathbb{C}_1$, что и оправдывается на чертѣжѣ.

2. Интересно знать, насколько близко къ истинѣ сдѣланное выше допущенію, что

$$(A) \dots \dots \dots \rho = \frac{RR' \sin B}{D \sin \phi}$$

возрастаетъ пропорціоально дугѣ эллипса. Означимъ черезъ

$$(B) \dots E = \frac{1}{2} \pi a \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \frac{e^2}{1} - \left(\frac{1.3}{2.4} \right)^2 \frac{e^4}{3} - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6} \right)^2 \frac{e^6}{5} \dots \right\}$$

длину четверти эллипса и чрезъ s длину дуги эллипса, считая отъ вершины большой оси до разсматриваемой точки, черезъ которую проходятъ нормаль (N), служащая для построения зубца. То принятый выше приближенный радіусъ кривизны ρ_1 выражается слѣдующимъ образомъ въ функціи отъ s (только для первой четверти эллипса):

$$\rho_1 = \left[\frac{b^2}{a} + \left(\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a} \right) \frac{s}{E} \right] \frac{\sin B}{2}$$

или при „

$$(C) \dots \dots \dots \frac{1}{E} \left(\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a} \right) = m,$$

$$(D) \dots \dots \dots \rho_1 = \left(\frac{b^2}{a} + ms \right) \frac{\sin B}{2}.$$

Означивъ чрезъ $\Delta = \rho - \rho_1$ положительную или отрицательную ошибку, найдемъ ея наибольшее значеніе, которое мы и примемъ за мѣру точности приближенія. Изъ уравненія эллипса

$r = -R = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$, гдѣ $p = a(1 - e^2)$, а θ означать полярный уголъ, имѣемъ :

$$R' = 2a - r = a \frac{1 + 2e \cos \theta + e^2}{1 + e \cos \theta} = \frac{a\Phi^2}{1 + e \cos \theta}, \text{ при}$$

$$\Phi^2 = 1 + 2e \cos \theta + e^2; \text{ затѣмъ } \sin \psi = r \frac{d\theta}{ds}$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{(1 + e \cos \theta)^2}{p\Phi}. \text{ Значитъ}$$

$$(E) \dots r = \frac{p}{2} \left(\frac{\Phi}{1 + e \cos \theta} \right)^2 \sin B; \frac{dr}{ds} = \frac{dp}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} = \frac{3e^2 \sin \theta (e + \cos \theta) \sin B}{2(1 + e \cos \theta)^2}$$

Привравнивая нулю производную $\frac{d\Delta}{ds} = \frac{dr}{ds} - \frac{dr_1}{ds}$, мы получаемъ уравненіе

$$(F) \dots 3e^2 \sin \theta (e + \cos \theta) - m(1 + e \cos \theta)^2 = 0$$

для угла θ , при которомъ наша ошибка имѣетъ наибольшее значеніе (положительное для $\Delta_{\max}$ и отрицательное для $\Delta_{\min}$).

При обозначеніи

$$tg^{1/2} \theta = x \text{ по силу тождествъ}$$

$$(G_1) \dots \sin \theta = \frac{2x}{1+x^2}, \cos \theta = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

уравненіе (F) принимаетъ слѣдующій видъ :

$$(G) \dots m(1-e)^2 x^4 + 6e^2(1-e)x^3 + 2m(1-e^2)x^2 - 6e^2(1+e)x + m(1+e)^2 = 0.$$

Это уравненіе, по самому смыслу вопроса, должно имѣть по крайней мѣрѣ одинъ действительный корень, а такъ какъ оно четной степени, то оно имѣетъ по крайней мѣрѣ два та-

еихъ корня. Такъ какъ функція Δ обращается въ нуль два раза, при $z=0$ и при $z=E$, то, если оба корня уравненія (G) соответствуютъ точкамъ эллипса, лежащимъ въ первой четверти, функція Δ имѣетъ одну *maximam* (положительный) и одну *minimam* (отрицательный), въ промежуткахъ между которыми она также обращается въ нуль. Въ такомъ случаѣ кромѣ вершинъ будетъ еще одна точка, гдѣ приближенный радіусъ кривизны совпадаетъ съ дѣйствительнымъ, причѣмъ отъ вершины до этой точки приближенный радіусъ больше дѣйствительнаго, а отъ этой точки до слѣдующей вершины онъ меньше дѣйствительнаго. Мы не станемъ рѣшать уравненія (G) въ общемъ видѣ, а положимъ его на частномъ примѣрѣ.

Пусть $e=\frac{4}{5}$, $b=\frac{3}{5}a$. Ограничиваясь первыми 4-мя членами ряда для E имѣемъ

$$E=\frac{\pi a}{2}\left[1-0,16(1+0,12+0,00128)\right]=0,82\cdot\frac{\pi a}{2}=1,288a,$$

$$\frac{a^2}{b}-\frac{b^2}{a}=\frac{98}{75}a; \text{ слѣдовательно } m=1,014..$$

Такъ какъ для нашей цѣли не требуется особенная точность, то можно взять $m=1$. По освобожденію отъ знаменателя уравненіе (G) принимаетъ видъ:

$$(H) \dots x^4 + 19,2x^3 + 18x^2 - 172,8x + 81 = 0.$$

Это уравненіе имѣетъ два дѣйствительныхъ положительныхъ корня

$$x_1=0,511... \text{ и } x_2=2,13...$$

вмѣсто которыхъ мы возьмемъ

$$(K) \dots x_1=0,5 \text{ и } x_2=2,1$$

При $x_1=0,5$ приближенный радиусъ больше дѣйствительнаго, т. е. $\Delta < 0$: ошибка есть наибольшая отрицательная; при $x_2=2,1$ приближенный радиусъ меньше дѣйствительнаго и ошибка есть наибольшая положительная.

Въ самомъ дѣлѣ, не считая положительныхъ множителей, мы имѣемъ для второй производной выраженіе:

$$\frac{d^2 \Delta}{ds^2} = (e + \cos \theta)^2 - (1 - e^2) \sin^2 \theta,$$

которое выражается черезъ x такъ:

$$(L) \dots \dots \dots \frac{d^2 \Delta}{ds^2} = (9 - x^2)' - (6x)^2.$$

Оно положительно при $x=0,5$ и отрицательно при $x=2,1$, откуда слѣдуетъ, что при x_1 имѣемъ мѣсто $\Delta_{\max}$, а при x_2 — $\Delta_{\min}$. На основаніи вышесказаннаго заключаемъ, что въ первомъ случаѣ Δ должна быть отрицательна. Отсюда также заключаемъ, что между этими точками должна быть точка, въ которой ошибка опять обращается въ нуль. Это видно также изъ общаго выраженія для первой производной

$$\frac{d \Delta}{ds} = \left[\frac{3e^2 \sin \theta (e + \cos \theta)}{(1 + e \cos \theta)^2} - m \right] \frac{\sin B}{2}$$

Она отрицательна какъ въ вершинѣ большой оси, гдѣ $\sin \theta = 0$, такъ и въ вершинѣ малой оси, гдѣ $e + \cos \theta = 0$. Отсюда видимъ, что въ первой точкѣ разность Δ убываетъ, начиная отъ нуля; вслѣдствіе этого она въ некоторое время остается отрицательной, пока не перейдетъ черезъ *minimum*. Во второй точкѣ эта-же разность доходить до нуля убывая; стало быть до этого момента она была положительна. Но такъ какъ она прежде была отрицательна, то она въ промежуткѣ

перенарпудя черезъ нуль, едѣлалась положительной и достигнувъ *максимума* опять обратилась въ нуль.

И такъ доказано, что въ пѣкоторой средней точкѣ наша ошибка совершенно' исчезаетъ, что уже даетъ намъ право пропобрегать ею въ окрестностяхъ этой точки. Для рѣшенія-же вопроса о томъ, имѣемъ-ли мы право пренебрегать ею также въ тѣхъ точкахъ, гдѣ она достигаетъ наибольшихъ значений, мы обратимся къ чертежу (черт. 11).

Построивъ уголъ $n_1 Rm$ по тапгансу $= 0,5$ при помощи прямоугольнаго треугольника RFS , въ которомъ $\frac{SR}{RF} = 0,5$,

удвѣяиваемъ его въ уголъ mFn_2 ; въ точкѣ X_1 пересѣченія прямой Rn_2 съ эллипсомъ функція $\Delta = \Delta_1$ наибольше отклоняется отъ нуля въ отрицательную сторону. Четверть эллипса раздѣлена у насъ на 16 равныхъ частей и ближайшей точкой дѣленія къ точкѣ X_1 оказывается точка 3. Точно такимъ-же образомъ находимъ, что въ точкѣ X_2 прямой Rp , образующей съ RP уголъ $PRp = 2 \arctg 2,1$, $\Delta = \Delta_2$ имѣетъ наибольшее отклоненіе въ положительную сторону, при чемъ ближайшой къ этой точкѣ X_2 есть точка 11. Въ точкѣ 7, занимающей среднее положеніе, разность Δ должна обратиться въ нуль (приблизительно, такъ какъ адѣсь нѣтъ полной пропорціональности для Δ). Посмотримъ: 1) оправдывается-ли это чертежемъ и 2) можно-ли пренебречь ошибками дажо въ точкахъ 3 и 11. Выше мы видѣли, что радіусъ ρ пропорціоналенъ синусу угла B ; а потому принявъ за B уголъ въ 90° , мы увеличиваемъ размыры ошибки въ отпощеніи $1 : \sin B$, при чемъ ρ строится такъ, какъ если-бы мы хотѣли найти радіусъ кривизны эллипса. Означая черезъ i вообще какую нибудь точку дѣленія, мы находимъ ρ слѣдующимъ образомъ. Описавъ около i полуокружность радіусомъ if , гдѣ f есть фокусъ, около котораго не пропеходитъ вращеніе, опредѣляемъ точки пересѣченія ея α , и δ , съ прямой Ri и проводимъ $i\gamma$, перпендикулярно къ прямой δ, f : прямая $i\gamma$ есть пор-

малъ къ эллипсу въ точкѣ i . Затѣмъ для опредѣленія центра кривизны C_i зуба проводимъ $f\gamma_i$ перпендикулярно къ ij и соединяемъ вершину β_i параллелограмма $\gamma_i\alpha\beta_i$ съ фокусомъ F : центръ кривизны C_i есть точка пересѣченія прямой β_iF съ нормалю $i\gamma_i$. Такимъ образомъ были найдены центры C_3, C_6, C_7 и C_{11} для точекъ 3, 6, 7 и 11.

Для опредѣленія приближенныхъ радіусовъ кривизны по формулѣ,

$$\rho_1 = \rho_{min.} + \left(\rho_{max.} - \rho_{min.} \right) \frac{s}{E}$$

находимъ точку пересѣченія A продолженія малой оси QQ' съ перпендикуляромъ AF къ прямой FQ и точку пересѣченія B прямой FQ съ перпендикуляромъ OB , опущеннымъ на нее изъ центра O эллипса, т. е. строимъ $C_{max.}$ и $C_{min.}$ эллипса. Отложивъ на QQ' длину $QB_1 = QB$ дѣлимъ пополамъ какъ длину QB_1 такъ и длину QA . Пусть D будетъ середина первой и E середина второй; тогда, раздѣливъ DE на 16 равныхъ частей и обозначивъ черезъ i вообще какую нибудь точку дѣленія, беремъ для приближенного радіуса величину

$$(\rho_1)_i = Qi = i \frac{C_{max.} - C_{min.}}{2} + \frac{C_{min.}}{2}.$$

При этомъ замѣтимъ, что по найденному выше значенію для $m(m=1,014)$ два дѣленія на прямой DE должны равняться одному дѣленію на эллипсѣ (съ ошибкой въ 0,014, которая незамѣтна для глаза).

Сравнивая длины ρ_i и $(\rho_1)_i$ мы видимъ, что въ точкѣ 3 эллипса $(\rho_1)_3$ больше ρ_3 на величину $C_3C'_3$, въ точкѣ 6. она также больше, при чемъ разность въ послѣдней точкѣ очень мала; въ точкахъ-же 7 и 11 приближенные радіусы меньше дѣйствительныхъ, причемъ Δ_7 также очень мала. Такъ какъ Δ мѣняетъ свой знакъ при переходѣ отъ точки 6 къ точкѣ 7,

то въ некоторой средней точкѣ она должна совершенно касаться, чѣмъ оправдывается наше утвержденіе о томъ, что почти на серединѣ между точками 3 и 11 приближенный радіусъ совпадаетъ съ дѣйствительнымъ. Посмотримъ теперь насколько приближенный профиль отстунаетъ отъ дѣйствительнаго. Описавъ черезъ точки 3, 6 и 11 профили (d_i) и (d'_i) радіусами ρ_i и (ρ'_i) ; около точекъ O_i и O'_i соответственно, мы видимъ, что на протяженіи болѣе чѣмъ на два шага каждое два профиля такъ сливаются вмѣстѣ, что глазъ не можетъ различить ихъ. Отсюда заключаемъ, что для *практическихъ* цѣлей мы можемъ во всѣхъ случаяхъ замѣнить дѣйствительные радіусы ихъ приближенными значеніями, чѣмъ въ высшей степени облегчается работа.

Въ дѣйствительности размѣры колеса бывають иногда гораздо больше размѣровъ нашего чертежа. Такъ, у насъ $\alpha = 0,073^m$, между тѣмъ какъ въ практикѣ встрѣчаются колеса въ 5 разъ большихъ размѣровъ. Но легко видѣть, что даже въ этомъ случаѣ при томъ-же числѣ зубьевъ (64) смѣло можно пренебречь ошибкой Δ . Въ самомъ дѣлѣ, по замѣченному выше надо для дѣйствительныхъ колесъ взять за уголъ B уголъ около 20° , синусъ котораго есть 0,342. Поэтому въ колесѣ съ большой полуосью въ $0,365^m$ какъ радіусы такъ и ошибки увеличатся противъ нашего чертежа только въ 1,71 раза. На чертежѣ (12) представлена увеличенная въ 5 разъ часть эллипса, лежащая вблизи точки 3. Для полученія этой части мы взяли дугу окружности, описанной радіусомъ въ 5 разъ большимъ радіуса кривизны эллипса въ точкѣ 3 на черт. (11). Этотъ радіусъ въ 10 разъ больше радіуса кривизны $3C_3$ профиля зуба; влѣдствіе этого и шагъ $= AM$ въ 5 разъ больше шага на чертежѣ (11). Затѣмъ проведена прямая AB подъ угломъ около 20° къ касательной въ точкѣ A ; отложени $AO = 5\rho_3 = 5(\overline{3C_3})$ и $AO' = 5(\rho'_1)_3 = 5(\overline{3C'_3})$ и изъ точекъ O и O' опущены перпендикуляры на OC_3 и $O'C'_3$ на AB . Наконецъ около C_3 и C'_3

описаны дуги AD и AD' и проведена прямая $O'M$, которая дает на дугах (D) и (D') крайнія точки касанія p и p'). Мы на чертежѣ видимъ, что хотя несовершенство точекъ p и p' замѣтно, но отступленіе такъ незначительно, что имъ можно пренебречь. Но если уменьшить шагъ на $1/5$ часть (т. е. если одѣлать въ колесѣ 80 зубьевъ), то профили совпадутъ на всемъ протяженіи.

Разсмотрѣнный нами примѣръ съ эксцентриситетомъ въ $2/6$ едва-ли когда побудитъ встрѣтится въ практикѣ, вслѣдствіе громадной разницы въ скоростяхъ вращеній въ моменты, когда черезъ линію центровъ проходятъ вершины большой оси. Въ самомъ дѣлѣ, принимая, что сопряженное колесо вращается равномерно, мы имѣемъ для скорости разсматриваемаго колеса въ моментъ прохожденія вершины, ближайшей къ центру вращенія, $w_{max} = \frac{1+e}{1-e} = 9$; въ моментъ прохожденія вершины

удаленнѣйшей отъ центра вращенія $w_{min} = \frac{1-e}{1+e} = \frac{1}{9}$; отноше-

ніе этихъ скоростей равно 81. Но мы парочно взяли этотъ примѣръ, чтобы показать, что даже при такомъ громадномъ эксцентриситетѣ можно довольствоваться приближеннымъ рѣшеніемъ.

3. Въ разсмотрѣнномъ примѣрѣ мы увеличили всѣ основныя радіусы кривизны на постоянную величину, равную приближительно $1/4$ шага. На основаніи вышесказаннаго о свойствѣ эквидистантъ олдвало-бы уменьшить на такую-же величину основныя радіусы кривизны зубьевъ сопряженнаго колеса (для того чтобы не пзмѣнилось положеніе центра кривизны). Но имѣя въ виду, что небольшое пзмѣненіе радіуса очень мало

*) Предполагается, что прориски ведутъ колесо на цѣлый шагъ.

влієть на очертапію зубца, какъ было показано на примѣрахъ, можно и въ сопряженномъ колесѣ считать радіусы увеличенными на $\frac{1}{4}$ шага; въ такомъ случаѣ сопряженное колесо сдѣлается тождественнымъ съ разсмотрѣннымъ. Слѣд., два эллиптическихъ колеса, построенныхъ по одному шаблону могутъ составить пару зубчатыхъ колесъ. Если-же желательно имѣть болѣе точное построение, то слѣдуетъ совершать его для каждой стороны зубца, какъ показало на зубцѣ (37) (черт. 9). Въ такомъ случаѣ нормали проводятся черезъ точки встрѣчи обѣихъ сторонъ зубца съ эллипсомъ (точка m_{37} для лѣвой стороны и m_{xxxvii} для правой), т. е. черезъ точки эллипса, отстоящія отъ середины зубца почти на $\frac{1}{4}$ шага влево и вправо.

Круглыя колеса.

Построеніе круглыхъ колесъ, представляющихъ частный случай пекруглыхъ, значительно упрощается вслѣдствіе двухъ причинъ: 1) въ нихъ центръ вращенія всегда совпадаетъ съ центромъ кривизны центровдовъ ($R=C$); 2) все зубья могутъ быть конгруэнтны.

1) Простой профиль (черт. 13).

Для болѣе ясности мы взяли колеса большихъ размѣровъ, такъ что центры ихъ не помѣщаются на чертежѣ; но намъ нѣтъ надобности имѣть ихъ на чертежѣ въ самомъ дѣлѣ, а достаточно представить себѣ центръ вращенія A въ точкѣ пересѣченія прямыхъ Oa и Ea_1 , а центръ вращенія A' въ точкѣ пересѣченія прямыхъ Oa' и $E'd'_1$; стало быть, aa' есть линія центровъ. Въ колесѣ (M) 48 зубьевъ, обозначенныхъ числами (1), (2)... (47), (48); въ колесѣ (M') 54 зубца, обозначенныхъ черезъ (1'), (2')... (54'). По найденному выше центрѣ кривизны C_{48} профиль $a_{48}d_{48}$, проходящаго черезъ точку O касанія центровдовъ DD_1 и $D'D_1'$ (первообразныхъ круговъ) есть точка E , въ которой общая нормаль BO перо-

связь перпендикуляромъ AE опущеннымъ на нее изъ центра A колеса. По свойству хорды окружности, E есть середина хорды BO , т. е. середина отрезка общей нормали, заключенного между точкой O и первообразной окружностью. Стало быть, радиусъ кривизны профиля есть длина EO . Сохраняя эту длину постоянной для всехъ зубьевъ мы тѣмъ самымъ сохраняемъ постоянное разстояніе точекъ C_i ($i=1, 2, 3...$) отъ центра A . Слѣд. геометрическое мѣсто центровъ кривизны профилей есть окружность $FELF_1$, описанная около A радиусомъ AE . При помощи этой окружности весьма легко вычертить все профили. Для этого, раскрывъ циркуль на длину OE , ставить описывающую ножку его въ точку дѣленія первообразной окружности, а другую ножку ставить на окружность FF' и поворачивать его около второй ножки. Такъ поступаютъ со всеми зубьями. Такъ для зуба (47), правая сторона которого проходитъ черезъ точку дѣленія m_{47} первообразной окружности, центромъ служить точка C_{47} окружности FF_1 , такъ какъ эта точка находится на разстояніи $=EO$ отъ точки m_{47} . Прямая Ba_{48} , соединяющая центръ кривизны E (тоже, что C_{48}) съ лѣвой точкой a_{48} пересѣченія обоихъ профилей зуба (48), встрѣчаетъ центрѣ DD_1 въ точкѣ n на разстояніи болѣе одного шага (около $1\frac{1}{4}$) отъ точки O . Такъ какъ достаточно имѣть дугу сдвигенія въ одинъ шагъ для выступа, то является возможнымъ нѣсколько уменьшить его. Для полученія крайней точки b_i профиля проведемъ прямая $C_{47}m_{48}b_{47}$ черезъ точку m_{48} , отстоящую отъ m_{47} на одинъ шагъ (стало быть, дуга $m_{47}b_{47}$ ведетъ колесо на цѣлый шагъ) и окружность $Kb_{47}K_1$ около A . Эта окружность есть геометрическое мѣсто крайнихъ точекъ b_i выступивъ въ колесѣ (M). Эта же окружность служитъ для опредѣленія крайнихъ точекъ впадины въ колесѣ (M'). Именно, пусть окружность KK_1 встрѣчаетъ линію центровъ въ точкѣ M ; то окружность $G'G_1'$, представляющая геометрическое мѣсто крайнихъ точекъ f_i' впадинъ въ колесѣ (M') (основанія зубьевъ

въ (M') должна встрѣтить линію центровъ въ точкѣ P , лежащей между M и A' , при чемъ для безопаснаго свободнаго прохода зубьевъ колеса (M) долженъ быть оставленъ нѣкоторый зазоръ MP . Точно также геометрическое мѣсто GG_1 оснований зубьевъ въ (M) должно быть описано около A радіусомъ AN , конецъ котораго N находится между точкой L (пересѣченія линіи центровъ съ окружностью $K'K_1'$) и центромъ A . Окружность $K'K_1'$ имѣетъ для (M') такое-же значеніе, какъ окружность KK_1 для (M). Крайняя точка (*вершина*) b_1' выступа $d_1'a_1'$ зубца (1') есть пересѣченіе профиля $d_1'a_1'$ съ прямой $E'm_2$ (то-же что $G_2'm_2'$), соединяющей центръ кривизны G_2' съ точкой m_2' , отстоящей отъ $O(=m_1')$ на одинъ шагъ по окружности $D'D_1'$. Изъ чертежа видно, что профиль впадины могъ бы вести колесо болѣе чѣмъ на 2 шага (ибо прямая $G_{17}f_{17}$ встрѣчаетъ первообразную окружность DD' за точку m_{17}) если-бы это позволялось размѣрами выступа зубьевъ колеса (M'). Излишняя длина профиля впадины есть слѣдствіе оставленнаго зазора HL . При представленномъ на чертежѣ относительномъ расположеніи колесъ, предполагая, что (M) вращается по направленію часовой стрѣлки, сцѣпленіе зубьевъ начинается въ точкѣ Q_1 между зубьями (47) и (54'); оно находится въ среднемъ фазисѣ въ точкѣ O [между зубьями (48) и (1')] и оканчивается въ парѣ [(1), (2')] въ точкѣ Q_1 .

Minimum числа зубьевъ.

Выше было замѣчено, что въ двоякодѣйствующемъ колесѣ (вообще) дуга сцѣпленія для выступа зависитъ отъ размѣра дуги профиля, заключенной между центромъ и точкой пересѣченія профилей, ограничивающихъ зубецъ съ обѣихъ сторонъ. Найдемъ, поэтому, при какомъ *наименьшемъ* числѣ зубьевъ выступъ въ состояніи вести колесо на цѣлый шагъ (для того чтобы всегда было въ сцѣпленіи по меньшей мѣрѣ двѣ пары

зубьевъ). Этотъ вопросъ мы рѣшимъ въ общемъ видѣ для круглыхъ колесъ, а потомъ покажемъ, какъ онъ рѣшается для некруглыхъ колесъ.

(Черт. 14). Означимъ: черезъ O центръ колеса и черезъ A точку пересѣченія обонхъ профилей DA и EA , симметричныхъ относительно прямой OA и описанныхъ радіусомъ $=\rho$ около точекъ C и C_1 черезъ точки D и E соответственно. Означимъ черезъ B уголъ нормали CD съ касательной TD къ окружности, черезъ x уголъ DCA , черезъ s длину дуги DE (которая немногимъ менѣ половины шага) черезъ x дугу DF , т. е. дугу сдѣвленія для выступа (такъ какъ точка пересѣченія F прямой CA съ окружности колеса есть крайняя точка дуги сдѣвленія), черезъ a половину хорды ED и черезъ K середину этой хорды.

Изъ чертежа видно, что уголъ

$$\angle KDA = TDt + KDT - ADt = 90^\circ - B + \frac{\cup s}{2} - \frac{\cup x}{2}$$

$$\text{Слѣд. } AD = \frac{a}{\sin\left(B - \frac{s}{2} + \frac{x}{2}\right)} \quad (\text{изъ } \triangle AKD).$$

Но изъ треугольника ACD имѣемъ $AD = 2\rho \sin \frac{x}{2}$. Изъ сравненія обонхъ выраженій для AD получаемъ

$$2\rho \sin \frac{x}{2} = \frac{a}{\sin\left(B - \frac{s}{2} + \frac{x}{2}\right)}$$

или, такъ какъ $a = 2R \sin \frac{s}{2}$,

$$1) \dots \dots \dots 2\rho \sin \frac{x}{2} \sin\left(B + \frac{x-s}{2}\right) = 2R \sin \frac{s}{2}.$$

Разсмотримъ теперь треугольникъ GDF . Въ немъ $FD = 2R \sin \frac{z}{2}$; уголъ FDC , измѣряющійся половиной дуги GE , равенъ $\frac{\cup GD - \cup FD}{2} = B - \frac{z}{2}$ (ибо уголъ B измѣряется половиной дуги GD); уголъ $DFC = 180^\circ - \left(x + B - \frac{z}{2}\right)$. А потому получаемъ еще зависимость:

$$2R \sin \frac{z}{2} : \rho = \sin x : \sin \left(B + x - \frac{z}{2}\right), \text{ т. е.}$$

$$\text{II)} \dots \dots \dots 2R \sin \frac{z}{2} \sin \left(B + x - \frac{z}{2}\right) = \rho \sin x.$$

Изъ (II) получаемъ:

$$\text{III)} \dots \dots \dots \operatorname{tg} x = \frac{2R \sin \frac{z}{2} \sin \frac{2B - z}{2}}{\rho - 2R \sin \frac{z}{2} \cos \frac{2B - z}{2}}$$

Пренебрегая въ точномъ выраженіи для $\sin x$:

$$\text{(A)} \dots \dots \dots \sin x = \frac{2R \sin \frac{z}{2} \sin \frac{2B - z}{2}}{\sqrt{\rho^2 - 4\rho R \sin \frac{z}{2} \cos \frac{2B - z}{2} + 4R^2 \sin^2 \frac{z}{2}}}$$

множителемъ $\cos \frac{2B - z}{2}$, который при $B < 15^\circ$ очень близокъ къ единицѣ, мы можемъ взять:

$$(B) \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \sin x = \frac{2R \sin \frac{z}{2} \sin \frac{2B-z}{2}}{\rho - 2R \sin \frac{z}{2}} \\ \cos x = \frac{\rho - 2R \sin \frac{z}{2} \cos \frac{2B-z}{2}}{\rho - 2R \sin \frac{z}{2}} \end{array} \right.$$

Зависимость (I), по разложениі $\sin\left(B + \frac{x-s}{2}\right)$ на синусъ двухъ угловъ: $\frac{x}{2}$ и $\frac{2B-s}{2}$, можетъ быть написана такъ:

$$(C) \dots 2R \sin \frac{s}{2} = \rho \left(\sin \frac{2B-s}{2} \sin x + \cos \frac{2B-s}{2} - \cos \frac{2B-s}{2} \cos x \right).$$

По внесениі въ нее вмѣсто $\sin x$ и $\cos x$ ихъ выраженій по (B) мы получаемъ:

$$\begin{aligned} IV) \dots \left(\rho - 2R \sin \frac{z}{2} \right) \left(2R \sin \frac{s}{2} - \rho \cos \frac{2B-s}{2} \right) = \\ = \rho \left[2R \sin \frac{z}{2} \cos \frac{z-s}{2} - \rho \cos \frac{2B-s}{2} \right]. \end{aligned}$$

Если желательно, чтобы выступъ вѣлъ колесо на цѣлый шагъ, то нужно положить:

$$\frac{z}{2} = s$$

Тогда (IV) по сокращеніи на $2R\sin\frac{s}{2}$ напишется такъ:

$$(IV), \dots \rho - 2R\sin s + 2\rho\cos\frac{s}{2}\cos\frac{2B-s}{2} - 2\rho\cos^2\frac{s}{2} = 0$$

или такъ:

$$\rho\left(\sin^2\frac{s}{2} - \cos^2\frac{s}{2}\right) - 2\sin\frac{s}{2}\cos\frac{s}{2}(2R - \rho\sin B) + 2\rho\cos B\cos\frac{s}{2} = 0.$$

или наконецъ такъ:

$$21) \quad \rho\operatorname{tg}^2\frac{s}{2} - 2\operatorname{tg}\frac{s}{2}(2R - \rho\sin B) + \rho(2\cos B - 1) = 0,$$

откуда

$$V), \dots \operatorname{tg}\frac{s}{2} = \frac{2R - \rho\sin B - \sqrt{(2R - \rho\sin B)^2 - \rho^2(2\cos B - 1)}}{\rho}.$$

при чемъ отброшено второе рѣшеніе (со знакомъ + предъ радикаломъ) какъ несоотвѣтствующее вопросу.

Формула (V) даетъ общее рѣшеніе для опредѣленія наибольшаго значенія четверти пути $\frac{s}{2}$ въ функціи отъ ρ и B . Прямымъ ее для рассмотреннаго нами случая, въ которомъ $\rho = R\sin B$, а профиль проходитъ черезъ ту-же точку, черезъ которую проведена нормаль подъ угломъ B къ касательной первообразной окружности. По (V) получаемъ

$$\operatorname{tg}\frac{s}{2} = \frac{1 + \cos^2 B - \sqrt{(1 + \cos^2 B)^2 - (2\cos B - 1)\sin^2 B}}{\sin B}$$

При $B=15^\circ$ имѣемъ (рѣшая при помощи логарифмовъ)

$$\lg \cos B = 9,9849438 \quad \cos B = 0,965926, \quad \cos^2 B = 0,933013$$

$$\lg \sin B = 9,4129962$$

$$1 + \cos^2 B = 1,933013, \quad (1 + \cos^2 B)^2 = 3,73654;$$

$$\sqrt{(1 + \cos^2 B)^2 - (2 \cos B - 1) \sin^2 B} = 1,9168,$$

$$\lg t y \cdot \frac{s}{2} = 8,7968672, \quad \frac{s}{2} = 3^\circ 35', \quad z = 2s = 14^\circ 20'.$$

Слѣд. наименьшее число зубцовъ есть

$$360^\circ : 14^\circ 20' = 25.$$

Если примемъ во вниманіе, что толщина зуба z немного менѣе половины шага, (на $\frac{1}{20}$), то надо будетъ увеличивать число зубцовъ на нѣсколько единицъ (прибавить 2,5), такъ что дѣйствительнымъ минимумомъ слѣдуетъ взять число 28 *).

Въ виду малости угловъ $\frac{s}{2}$ и $\frac{2B-s}{2}$ можно принять $\cos \frac{s}{2} = \cos^2 \frac{s}{2} = \cos \frac{2B-s}{2} = 1$, $\sin s = s$. Въ такомъ случаѣ изъ (IV), получается очень простое рѣшеніе

$$(VI) \dots\dots\dots 2s = \frac{\rho}{R}$$

При $\rho = R \sin 15^\circ$ имѣемъ $z = 2s = \sin 15^\circ$. Если вмѣсто $\sin B$ возьмемъ B , то получимъ $z = B = 15^\circ$, $360^\circ : 15^\circ = 24$. Если же не будемъ удовлетворяться такимъ грубымъ приближеніемъ, то найдемъ для минимумъ число зубцовъ $n_{\min.} = 2\pi : \sin 15^\circ = 24,27$,

*) Въ моей теоріи зацепленій стр. 206 найдено это самое число на основаніи совершенно другихъ соображеній.

т. е. 25. Мы такимъ образомъ видимъ, что имѣемъ полное основаніе руководствоваться чрезвычайно простой формулой (VI) вмѣсто точной формулы (V).

Некруглыя колеса.

Изъ чертежа видно, что построеніе, послужившее для вывода зависимостей между углами α , s и z , независитъ отъ положенія центра вращенія колеса. А потому все сказанное до сихъ поръ можетъ относиться также къ покруглымъ колесамъ, если подѣ O будемъ разумѣть центръ кривизны центроида, подѣ R его радіусъ кривизны O , а подѣ s и z *отношеніе* длины толщины зуба и дуги сцепленія (измѣряемая обѣ по периферіи центроида) къ радіусу кривизны O . Въ такомъ случаѣ, обозначая черезъ σ и ζ длины толщины зуба и дуги сцепленія имѣемъ по (VI)

$$z = \frac{\zeta}{O} = 2 \frac{\sigma}{O} = \frac{\rho}{O}, \text{ т. е. } \zeta = 2\sigma = \rho.$$

Но такъ какъ въ дѣйствительности шагъ $= 2,1\sigma$, то для *наибольшей* длины шага имѣемъ окончательно

$$\text{VII.} \dots\dots\dots S_{\max.} = 0,95\rho.$$

Отсюда видно, что при *малыхъ* *) углахъ B , непревышающихъ 15° , наибольшій шагъ пропорціоналенъ радіусу кривизны зуба, а такъ какъ послѣдній пропорціоналенъ $\sin B$, то заключаемъ, что число зубцовъ (минимальное) обратно-пропорціонально синусу угла наклоненія общей нормали къ касательной

*) Это условіе необходимо для того, чтобы возможно было допустить $\cos \frac{2B-1}{2} = 1.$

къ центриду. Такъ какъ шагъ постояненъ для всѣхъ зубьевъ *), а ρ мѣняется, то *наибольшій* разрывъ для шага определяется *наименьшимъ* радиусомъ кривизны зубца по формулѣ

$$\text{VIII} \dots\dots\dots S_{\max.} = 0,95\rho_{\min.}$$

Примѣръ. Въ эллиптическомъ колесѣ, зубья котораго вычерчены по формулѣ $r = \frac{R \sin B}{\sin \psi}$, а профиль проведенъ черезъ точку встрѣчи нормали построенія съ центридомъ,

$$\rho_{\min.} = a(1-e)\sin B$$

(въ вершинѣ большой оси, ближайшей къ центру вращенія).

При $e = \frac{4}{5}$ и $B = 15^\circ$

$$\rho_{\min.} = \frac{a\pi}{60}, \quad E = 0,41\pi a$$

гдѣ E означаетъ длину четверти эллипса. Остало быть наименьшее число зубцовъ во всемъ эллипсѣ

$$n_{\min.} = 4E : 0,95\rho_{\min.} = \frac{1,64 \times 60}{0,95} = 103,5$$

т. е. круглымъ числомъ 105 зубьевъ.

Примѣчаніе. Такъ какъ наше вычисленіе весьма неточно, ибо $\cos \frac{2B-s}{2}$ можно принять за единицу только при весьма малыхъ углахъ B и s , то найденные минимумы слѣдуетъ уве-

*) Впрочемъ не всегда. Если оба центрида суть равной периферіи, напр. въ эллиптическихъ колесахъ, то можно для равныхъ зубьевъ взять разлчные шаги.

личить на нѣсколько единицъ, по крайней мѣрѣ на 20%.
Такъ, для круглыхъ колесъ нужно взять

$$n_{min.} = 28 + \frac{28}{5} = 34$$

Составной профиль (внѣшнее заѣвленіе); построение центровъ кривизны.

Общій основной радіусъ кривизны дается формулой (5), которую мы напомнимъ такъ:

$$(22) \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{RR' \sin B}{R' + Q} = r' \cdot \frac{R'}{R' + Q} \\ \rho' = \frac{RR' \sin B}{R + Q} = r' \cdot \frac{R}{R + Q} \end{array} \right.$$

гдѣ B означаетъ уголъ между касательной къ первообразнымъ кругамъ и общей нормалю къ профилямъ, а Q есть совершенно произвольная величина. Знаки величинъ ρ и ρ' зависятъ отъ знаковъ у величинъ $R + Q$ и $R' + Q$. Означимъ черезъ C центръ кривизны, соответствующій радіусу кривизны r , а черезъ C' вообще центръ кривизны профиля, соответствующій радіусу кривизны ρ ; при какомъ-либо значеніи Q , величины Q . Относительное положеніе центровъ C и C' по отношенію къ точкѣ O (черт. 15) касанія центровъ зависитъ отъ знака отношенія

$$\frac{\rho_i}{r} = \frac{R'}{R' + Q_i};$$

относительное положеніе центровъ C' и C'_i зависитъ отъ знака отношенія

$$\frac{\rho'_i}{r'} = \frac{R}{R + Q_i}.$$

Принимая во вниманіе, мы можемъ дать болѣе простое построеніе центровъ O и O' . Именно, по формулѣ (22) они строятся такъ. Проведя черезъ центры C и C' прямыя CG и $C'G'$ параллельно линіи центровъ AA' , беремъ на AA' произвольную точку E_1 , черезъ которую проводимъ параллель $F_1F'_1$ къ общей нормали CC' . Точку F_1 пересѣченія этой параллели съ CG соединяемъ съ A' , а точку пересѣченія F'_1 той-же параллели съ $C'G'$ соединяемъ съ A . Тогда O_1 есть точка пересѣченія общей нормали съ F_1A' , а O'_1 есть точка пересѣченія общей нормали съ F'_1A . Дѣйствительно, называя OE_1 черезъ Q_1 , имѣемъ: $AE_1 = R + Q_1$ (ибо R есть отрицательная величина), $A'E_1 = R' + Q_1$, $OC = r = R \sin B$, $OC' = r' = R' \sin B$; затѣмъ изъ треугольниковъ: $A'E_1F_1$ подобнаго $\triangle A'OC_1$ и $\triangle AE_1F'_1$ подобнаго $\triangle AOC'_1$ получаемъ:

$$OC_1 = \frac{E_1F_1 \cdot A'O}{A'E_1} = r \cdot \frac{R'}{R' + Q_1} = \rho_1$$

$$OC'_1 = \frac{E_1F'_1 \cdot AO}{AE_1} = r' \cdot \frac{R}{R + Q_1} = \rho'_1.$$

Проведемъ теперь прямую OK перпендикулярно къ общей нормали CC' *) и найдемъ ея точки пересѣченія K_1 и K'_1 съ прямыми AC_1 и $A'C'_1$. Изъ подобныхъ треугольниковъ C_1OK_1 и C_1AC слѣдуетъ

$$(23) \dots OK_1 = \frac{OC_1 \cdot AC}{CC_1} = \frac{\rho_1 \cdot R \cos B}{r - \rho_1} = \frac{RR' \cos B}{Q_1}.$$

Принимая во вниманіе, что въ рассматриваемомъ случаѣ, когда $R + Q > 0$, а $R < 0$, ρ'_1 есть отрицательная величина по отно-

*) Эта прямая совпадаетъ съ касательной къ произвольн., если провести ея черезъ O , и параллельно ей, если прямая проходитъ черезъ другую точку общей нормали.

шенію къ r' , мы изъ подобныхъ треугольниковъ $C_1OK'_1$ и $C'_1A'C'$ получаемъ

$$OK'_1 = \frac{OC_1A'C'}{OC'_1} = \frac{\rho'_1 R' \cos B}{r' - \rho'_1} = \frac{RR' \cos B}{Q_1} = OK_1,$$

т. е. прямыя AC_1 и $A'C'_1$ встрѣчаютъ прямую OK въ одной и той-же точкѣ, при чемъ между длинами Q_1 и OK_1 , которыя мы вообще означимъ черезъ Q и k , существуетъ зависимость

$$(24) \dots \dots \dots kQ = RR' \cos B.$$

Такъ какъ равенство длинъ k и k' можетъ быть доказано для всѣхъ значеній величины Q (например для точекъ E_2 , гдѣ $R' + Q < 0$ и $R + Q < 0$ и E_3 , гдѣ $R' + Q > 0$, и $R + Q < 0$), то покомые центры C_i и C'_i могутъ быть найдены весьма легко какъ точки пересѣченія общей нормали съ прямыми, проходящими черезъ какую нибудь точку K перпендикулярна OK къ общей нормали и соотвѣтственные центры вращеній A и A' . Этотъ способъ принадлежитъ Савари; имъ воспользовался Willis для приближеннаго вычерчиванія зубьевъ въ круглыхъ колесахъ. Въ общемъ мы придерживаемся способа Willis'a, какъ онъ изложенъ въ его «Principles of mechanism».

Аналитическія выраженія для ρ и ρ' изъ функціи отъ k получаются черезъ исключеніе величины Q между формулами (24) и (22)*):

$$(25) \dots \dots \dots \rho = \frac{kR \sin B}{k + R \cos B}, \quad \rho' = \frac{kR' \sin B}{k + R' \cos B}.$$

Частные случаи. При $k = \infty$ (соотвѣтственно $Q = 0$) имѣемъ $\rho = R \sin B = r$; $\rho' = R' \sin B = r'$. При $k = -R \cos B$ (соотвѣт-

*) См. Willis, Principles of mechanism 1870 г. 132. Для полученія формулы Willis'a нужно вместо обозначеній: k , $(-R)$, R , B , ρ и ρ' взять: C , r , R , $(90^\circ - \theta)$, d и D .

ственно $Q = -R'$) имеем $\rho = \infty$, а при $k = -R' \cos B$ ($Q = -R$) $\rho' = \infty$. Это видно также из чертежа для точек C , C' и C_4 .

Построение профилей (черт. 16).

Пусть прямая OC_1 (черт. 16, а) образует угол B с касательной в O к центроидам; этот угол называется половиной дуги ON' , отскакиваемой прямой OC_1 на первообразной окружности, что около A' . Проведем в O перпендикуляр OK к общей нормали OC_1 , берем на нем произвольную точку K_1 и проводим прямые AK_1 и $A'K_1$. В пересечении первой прямой с общей нормалью получаем центр C_1 , который принимаем за центр кривизны профиля впадины колеса M , а в пересечении второй прямой с общей нормалью получаем точку O'_1 , которая должна служить центром профиля выступа колеса (M'), причем первая дуга m_1n_1 проводится через точку m_1 центроида (M), находящуюся по ту сторону от O на расстоянии половины шага, а вторая $m'_1n'_1$ — через точку m'_1 центроида (M'), находящуюся также на расстоянии $\frac{1}{2}$ шага по ту сторону от O . Эти дуги касаются друг друга в точке q общей нормали. Если колеса вращаются в сторону стрелки, то точное действие рассматриваемой пары зубцов имеем вместо за $\frac{1}{2}$ шага до перехода зуба через линию центров. Для получения профилей впадин колеса (M) и выступов колеса (M') берем на перпендикуляр OK вторую точку K_2 , симметричную с K_1 относительно точки O и, поступив как прежде, получаем центры: C_2 для выступов в (M) и C'_2 для впадин в (M') , причем дуги rs и $r's'$ проводятся через точки r и r' , отстоящие от O на $\frac{1}{2}$ шага. Значит, в обоих колесах основные радиусы увеличены на одну и ту же длину. Точное действие этих профилей имеем вместо в точке t общей нормали на $\frac{1}{2}$ шага после перехода зуба через линию цен-

тровъ. Только-что проведенныя двѣ пары профилей принадлежатъ различнымъ зубцамъ. Чтобы закончить профили разсмотрѣнныхъ зубцовъ, а также имѣть возможность вычертить по одному общему пиллону поѣ зубья обоихъ колесъ, проводимъ въ (M') окружность $L'C_1L'$, представляющую геометрическое мѣсто центровъ выступовъ, и окружность $P'C_2P'$, представляющую геометрическое мѣсто центровъ впадинъ въ томъ же колесѣ; подобнымъ-же образомъ проводимъ въ (M) окружность LC_2L и PC_1P . Радиусами выступовъ въ (M') служитъ длина $C_1m'_1$, радиусами для впадинъ — длина C_2r' ; въ (M) эти роли играютъ длины C_2r и C_1m_1 . Въ разсмотрѣнномъ примѣрѣ разстоянію k точки K_1 отъ O меньше обоихъ радиусовъ колесъ. Изъ чертежа видно, что въ этомъ случаѣ каждая пара сопряженныхъ центровъ (напр. C_1 и C'_1) находится на одной и той-же сторонѣ отъ O , оба-же центра одного и того-же профиля лежатъ по разнымъ сторонамъ отъ O . Вслѣдствіе этого каждый профиль мѣняетъ свою кривизну, переходя изъ выпуклаго выступа въ вогнутую впадину. Это слѣдуетъ изъ выраженій (25) для ρ , которыя при $k < R \cos B$ мѣняютъ свой знакъ съ измѣненіемъ знака величины k . Если-же взять k больше наибольшаго изъ выраженій $R \cos B$ и $R' \cos B$, то основныя радиусы ρ и ρ' не мѣняютъ своихъ знаковъ; зубецъ остается выпуклымъ на всемъ продолженіи, какъ представлено на чертежѣ (16, b). Остается доказать*), что обѣ составныя части профиля, напр. $m'_1n'_1$ и $m'_1r'_1$ зубца (1), имѣютъ общую нормаль въ точкѣ первообразной окружности, гдѣ онѣ сходятся. Означимъ черезъ B_1 уголъ между касательной къ центроиду и нормалью къ выступу въ точкѣ m'_1 (этотъ уголъ измѣняется половиной дуги $m'_1n'_1$, отсѣкаемой на центроидѣ нормалью $C'_1m'_1$ къ выступу $m'_1n'_1$) и черезъ B_2 уголъ между касательной къ центроиду и нормалью къ профилю впадины $m'_1r'_1$ въ той-же точкѣ m'_1 (этотъ уголъ

*) Этого доказательства нѣтъ у Willis'a.

измѣряется половиной дуги $r'F'_1$, отсѣкаемой на центроидѣ нормалью (C_2r' по впадинѣ $r's'$) и докажемъ, что $B_1=B_2$. Изъ

сдѣланнаго нами выше положенія $B=\lambda-\psi$ слѣдуетъ, $\frac{\partial B}{\partial \theta'} = \frac{\partial \lambda}{\partial \theta'}$,

откуда по (24) въ силу положенія $Q = \frac{R'd\lambda}{d\theta'} = \frac{Rd\lambda}{d\theta'}$ получаемъ:

$$\frac{\partial B}{\partial \theta'} = \frac{Q}{R} = \frac{R' \cos B}{k}, \quad \partial B = \frac{R' \cos B}{k} d\theta'.$$

По принятому направленію движенія имѣемъ: $B_1 = B + (\partial B)_1$, $B_2 = B - (\partial B)_2$ (приближенно) или

$$(26) \dots\dots\dots B_1 = B + \frac{R' \cos B}{k_1} d\theta', \quad B_2 = B - \frac{R' \cos B d\theta'}{k_2}.$$

Поэтому если возьмемъ $k_1 = -k_2$, то будутъ также $B_1 = B_2$. Вотъ почему необходимо взять точки K_1 и K_2 симметрично относительно O . Само собою разумѣется, что строгое равенство угловъ B_1 и B_2 имѣетъ мѣсто только при безконечно-маломъ измѣненіи угла B , т. е. при безконечно-большомъ числѣ зубьевъ; въ действительности-же B_1 и B_2 отличаются на пѣкоторую, хотя весьма незначительную величину. Это можно видѣть на чертежѣ, гдѣ дуги m'_1H и $r'_1F'_1$ не совсѣмъ равны между собой. Еще легче видно это на зубцѣ (3), у котораго прямая $\gamma'_1\gamma'_{11}$, соединяющая центры воступа и впадины, не проходитъ черезъ точку μ'_2 центроида, а образуетъ съ нормальми $\gamma'_1\mu'_2$ и $\gamma'_{11}\mu'_2$ чрезвычайно малыя, едва замѣтные углы.

Прямой профиль. Если въ чертежѣ (16, а) взять $k_0 = -R \cos B$ или въ черт. (16, б) $k'_0 = -R \cos B$, то въ колесѣ (М) впадины будутъ ограничены прямой линіей, такъ какъ прямая AK_0 (или AK'_0) будетъ параллельна общей нормали. Все остальное остается безъ измѣненія.

Minimum числа зубьевъ.

Въ разсматриваемомъ случаѣ наименьшее число зубьевъ, при которомъ выступъ ведетъ колесо на цѣлый шагъ, опредѣляется нѣсколько иначе, чѣмъ въ случаѣ простаго профиля, такъ-какъ здѣсь нужно подѣ ρ и B разумѣть другія величины чѣмъ тѣ, которыя входятъ въ уравненіе (21). Имѣнно, вмѣсто B нужно взять B_0 , который по (26) напишется такъ:

$$B_0 = B - \frac{R'd\theta' \cos B}{k} \quad \text{гдѣ } k > 0,$$

а вмѣсто ρ нужно взять длину $\rho_0 = C'm'$ (черт. 16, а), которую мы (приближенно) примемъ равной суммѣ $C'O + Om'$, или по (25)

$$\rho_0 = \frac{kR' \sin B}{k + R' \cos B} + 2R' \sin \frac{s}{2R'}.$$

Итакъ

$$(27) \dots\dots B_0 = B - \frac{s \cos B}{k}, \quad \rho_0 = \frac{kR' \sin B}{k + R' \cos B} + 2R' \sin \frac{s}{2R'}.$$

Означивъ черезъ α уголъ занимаемый тѣломъ зуба на окружности центроада (т. о. положивъ для сокращенія $\frac{s}{R'} = \alpha$), и имѣя въ виду, что въ уравненіи (21) подѣ s разумѣли уголъ α , мы по введеніи въ (21) ρ_0 и B_0 по формулѣ (27) вмѣсто ρ и B соответственно и замѣнивъ $\sin \frac{\alpha}{2}$ и $\tan \frac{\alpha}{2}$ черезъ $\frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2R'}$, а $\cos \frac{\alpha}{2}$ черезъ 1, также опуская множителъ $\cos B$ въ дробь

$\frac{s \cos B}{k}$, получаемъ уравненіе

$$\left(\frac{kR'\sin B}{k+R'\cos B}+s\right)\frac{s^2}{4R'^2}-\frac{s}{R'}\left[2R'-\frac{kR'\sin B\sin\left(B-\frac{s}{k}\right)}{k+R'\cos B}\right. \\ \left.-s\sin\left(B-\frac{s}{k}\right)\right]+\left(\frac{kR'\sin B}{k+R'\cos B}+s\right)\left[2\cos\left(B-\frac{s}{k}\right)-1\right]=0$$

или, полагая

$$(28) \dots\dots\dots \frac{k\sin B}{k+R'\cos B}=M, \quad \frac{R'}{k}=n, \quad \frac{s}{R'}=\alpha, \quad \text{уравнение}$$

$$(29) \left\{ \begin{aligned} &\alpha^3(1-4n\cos B)+\alpha^2[M(1-4n\cos B)+4\sin B(1+2n)] \\ &+4\alpha[M\sin B(1+2n)+2\cos B-3]+4M(2\cos B-1)=0. \end{aligned} \right.$$

Это уравнение можно принять точно въ общій видѣ. Но въ виду незначительности угла α и ненужности въ большой точности гораздо удобнѣе принять его по способу приближеннаго рѣшенія уравненій высшихъ степеней, принявъ за первое приближеніе менший изъ положительныхъ корней (если оба корня положительны) квадратнаго уравненія:

$$(30) \left\{ \begin{aligned} &\alpha^2[M(1-4n\cos B)+4\sin B(1+2n)]+4\alpha_1[M\sin B(1+2n) \\ &+2\cos B-3]+4M(2\cos B-1)=0. \end{aligned} \right.$$

Такъ, при

$$B=15^\circ \text{ и } n=2, \text{ имѣемъ } \cos B=0,966; \sin B=0,259$$

$$M=\frac{\sin B}{1+n\cos B}=0,0883, \text{ и уравненіе (29) есть:}$$

$$(31) \dots\dots\dots \alpha^3-0,682\alpha^2+0,570\alpha-0,049=0 \equiv y$$

Меньшій положительный корень уравненія

$$A) \dots\dots\dots 682\alpha_1^2-570\alpha_1+49=0$$

есть $\alpha_1 = 0,098$.

При этомъ значеніи для α первая часть уравненія (31) есть

$$y_1 = +0,00125.$$

Отрицательная поправка есть

$$\Delta_1 = -0,0046, \text{ такъ что}$$

$$\alpha_2 = 0,0934 \text{ и } y_2 = -0,000897.$$

Если возьмемъ

$$B) \dots \dots \dots \alpha = 0,095$$

то получимъ $y = -0,000133$. Такъ-какъ точный корень находится между 0,095 и 0,098, то принимая первое, мы улучшаемъ обстоятельства, а потому смѣло можно остановиться на значеніи (B); слѣд. теоретически

$$(32) \dots \dots \dots N'_{min} = \frac{\pi}{0,095} = 34^*).$$

По принятой выше поправкѣ надо найденное число умножить на 1,26, такъ что въ дѣйствительности

$$N_{min} = 43.$$

При $n > 1$ зубцы имѣютъ вогнутую впадину (черт. 16, а). Найдемъ N'_{min} при выпуклой впадинѣ, для которой $n < 1$ (черт. 16, б). Пусть при томъ-же углѣ $B = 15^\circ$ взято $n = \frac{1}{4 \cos B} = 0,258$. Тогда коэффициентъ у α^3 въ ур. (29) обращается въ нуль, и мы получаемъ уравненію

$$0,3932\alpha^2 - 0,9866\alpha + 0,1931 = 0, \text{ откуда}$$

*) При $\alpha = 0,098$ $N'_{min} = 33$.

$$\alpha = \frac{4933 - \sqrt{4933^2 - 3932 \cdot 1931}}{3932} = 0,29, \text{ взять } \alpha$$

$$N'_{\min} = \frac{\pi}{\alpha} = 11, N_{\min} = N'_{\min} \cdot 1,26 = 14.$$

Найденный нами для двойного профиля значенія $N_{\min}$ очень неточны, вследствие сделанных нами трех*) неверных допущений, которые особенно дают себя чувствовать при большом шагѣ. Тѣмъ не менѣе формулы песопѣнно говорятъ намъ, что колесо съ выпуклыми впадинами зубьевъ (у котораго $n < 1$) можетъ имѣть гораздо менѣе зубьевъ, чѣмъ колесо такихъ-же размѣровъ при вогнутыхъ впадинахъ (когда $n > 1$); въ этомъ и заключается преимущество выпуклыхъ впадинъ съ *кинематической* точки зрѣнія.

Болѣе точное рѣшеніе вопроса о *минимумѣ* числа зубцовъ можно получить графическимъ путемъ при помощи послѣдовательныхъ приближеній, принимая за первое приближеніе поправленный корень уравненія (29) или ближайшую къ нему меньшую дугу, которая легко получается графически. На чертѣжѣ (17) дано графическое рѣшеніе для разсмотрѣнныхъ нами двухъ примѣровъ. Для случая $n=2$, для котораго мы имали $N_{\min}=43$, взять шагъ $\beta\delta = \frac{1}{48}$ окружности (такъ-какъ такую дугу легко получить графически). Оказывается, что крайняя нормаль γ_{14} какъ разъ проходитъ черезъ конецъ δ шага, считаемого отъ точки β ; слѣд. для $n=2$ нужно взять $N_{\min}=48$. Для случая $n=0,258$, для котораго было найдено $N_{\min}=14$ взять шагъ $BE = \frac{1}{15}$ окружности. Крайняя нормаль C_1M встрѣчаетъ окружность въ точкѣ e , лежащей между B и E , пѣ

*) Именно, 1) что $\cos \frac{2B-\alpha}{2} = 1$, 2) что $\rho_0 = \rho + z$ и 3) самая грубая ошибка для большого шага, — что $\sin \alpha = \tan \alpha = \alpha$, $\cos \alpha = 1$. Но безъ этихъ допущеній почти невозможно было-бы рѣшить ур. (29).

чего заключаемъ, что взятый шагъ слишкомъ великъ. Примемъ теперь за второе приближенію дугу Be и построимъ зубецъ изъ профилей BM и am , гдѣ a есть середина дуги Be . Такъ-какъ крайняя нормаль $C'm$ этого зубца все еще встрѣчаетъ окружность въ точкѣ e' самого шага, то и этотъ шагъ, составляющій по измѣренію $\frac{1}{18}$ часть окружности, слишкомъ великъ. Но

такъ-какъ разность ee' гораздо меньше разности Be , то мы теперь находимся ближе къ истинѣ. За третье приближеніе мы примемъ дугу Be' и т. д. При этомъ все получаемыя приближенія больше истиннаго шага. Чтобы имѣть искомую величину заключенной внутри *двухъ* предѣловъ, мы для второго ряда приближеній возьмемъ шагъ въ $\frac{1}{24}$ (дуга F_1e''), который, какъ

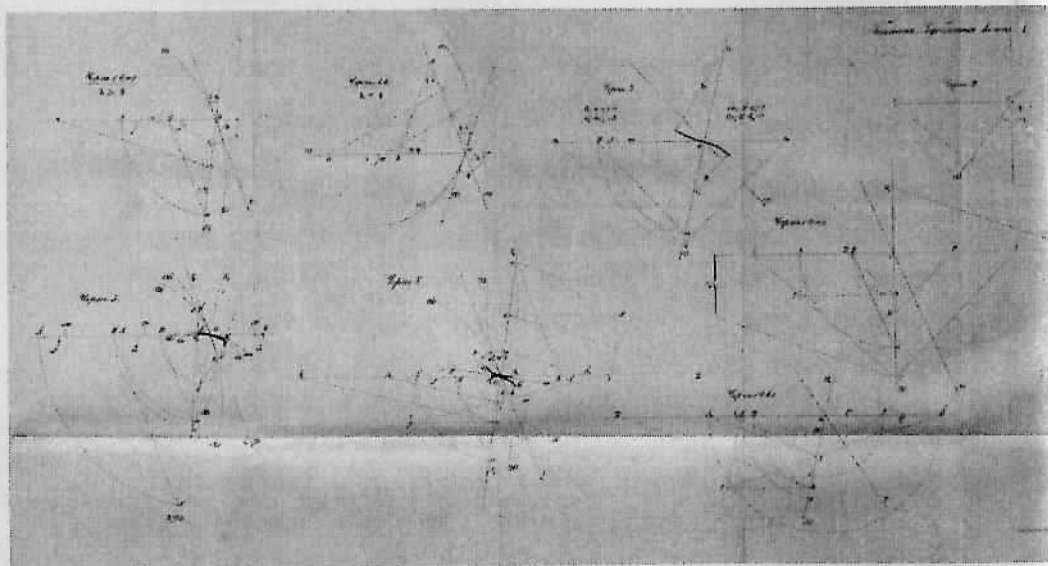
видно изъ чертежа, *меньше* истиннаго, такъ-какъ крайняя нормаль C_3m зубца T_1m, F_2 , построеннаго на этомъ шагѣ, встрѣчаетъ окружность за точку e'' , въ точкѣ e''' , впрочемъ весьма близкой къ e'' . Принявъ за второе приближенію дугу F_1e''' мы получимъ второе приближеніе и т. д. Такимъ образомъ истинный шагъ будетъ всегда заключаться между двумя предѣлами. Въ разсматриваемъ случаѣ можно принять $N_{min} = 24$, такъ-какъ разность $e''e'''$ едва замѣтна.

Рядовыя колеса. Для образованія ряда колесъ нужно сохранить для всего ряда тѣ-же значенія для B и k . Одно изъ колесъ ряда можетъ имѣть плоскія профили во впадинахъ; для этого, означая черезъ R_0 радіусъ этого колеса, нужно взять $k = -R_0 \cos B$. Это колесо должно быть наименьшимъ или наибольшимъ изъ всего ряда, при томъ оно будетъ наименьшимъ, если для ряда принято $n > 1$, т. е. вездѣ вогнуты впадины, и наибольшимъ, если $n < 1$. При приближенномъ способѣ вычерчиванія нельзя имѣть двухъ колесъ разныхъ размѣровъ съ плоскими впадинами.

ВАЖНѢЙШІЯ ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

Стран.	Строка.	Напечатано :	Должно быть :
16	7 сл.	BO	DO
20	3	R	R'
36	10	C ₂₀ , B _{xxix} , A ₂₀ , C _{xxix}	C ₂₀ , B ₂₀ , A ₂₀ , C _{xxix}
36	12 сл.	N ₂₀ / N _{xxix}	N ₂₀ , / N _{xxix}
43	3	L ₂₀ / α N ₂₀	L ₂₀ / α N ₂₀ ,
54	11	B'm ₂	B'm' ₂
66	8 сл.	(1)	(1')





Thomson's Synthesis Series 2

1/2 (200.92 K. comp 20.77 = 10)

